Resnick • Halliday • Krane

FÍSICA

Volumen 2

CECSA

VOLUMEN DOS

FÍSICA

Quinta edición en inglés
(Cuarta edición en español)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
BIBLIOTECA REGIONAL OBERA

Robert Resnick
Profesor de Física
Rensselaer Polytechnic Institute

David Halliday
Profesor de Física
University of Pittsburgh

Kenneth S. Krane
Profesor de Física
Oregon State University

Con la participación de
Paul Stanley
California Lutheran University

SEXTA REIMPRESIÓN
MÉXICO, 2007

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Título original de la obra:
Physics/Robert Resnick, David Halliday, Kenneth S. Krane, 5th edition
ISBN: 0-471-32057-9
Copyright © 1960, 1962, 1966, 1978, 1992, 2002, John Wiley & Son Inc.
All right reserved
Traducción autorizada de la edición en ingles publicada por John Wiley & Son, Inc.

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinadora editorial: Elisa Pecina Rosas
Diseño de interiores: Ricardo Pineda
Diseño de portada: Enrique Román Esnaurrízar

Traducción:
Efrén Alatorre Miguel
Lic. en Física, UNAM

Revisión técnica
Físico Antonio Gen Mora
Departamento de Ciencias-Coordinador de Física
Universidad Iberoamericana-Ciudad de México

Ph. D. Raúl Martínez Rosado
Director del Departamento de Ciencias Básicas
ITESM-Campus Estado de México

Físico Ricardo Páez Martínez
Coordinador Académico del Depto. de Física
Universidad Nacional de Colombia

Física, vol. 2
Derechos reservados respecto a la edición en español:
© 2002, GRUPO PATRIA CULTURAL, S. A. DE C.V.
© 2007, GRUPO EDITORIAL PATRIA S.A. DE C.V.
Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

ISBN 978-970-24-0326-5 (ISBN de 13 dígitos)
ISBN 970-24-0326-X (tercera edición)

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

UNAM
BIBLIOTECA
REGIONAL
OBERA
418884
S. T.

Impreso en México
Printed in México

Cuarta edición: 2002
Quinta reimpresión: 2006
Sexta reimpresión: 2007

ALGUNAS PROPIEDADES FÍSICAS

Aire (seco, a 20°C y a 1 atm)	
Densidad	1.21 kg/m^3
Capacidad de calor específico a temperatura constante	1,010 $J/kg \cdot K$
Razón de capacidades de calor específico	1.40
Velocidad del sonido	343 m/s
Fuerza de ruptura eléctrica	3×10^6 V/m
Masa molar efectiva	0.0289 kg/mol
Agua	
Densidad	1,000 kg/m^3
Velocidad del sonido	1,460 m/s
Capacidad de calor específico a presión constante	4,190 $J/kg \cdot K$
Calor de fusión (0°C)	333 kJ/kg
Calor de vaporización (100°C)	2,260 kJ/kg
Índice de refracción	1.33
Masa molar	0.0180 kg/mol
Tierra	
Masa	5.98×10^{24} kg
Radio medio	6.37×10^6 m
Aceleración en caída libre en la superficie terrestre	9.81 m/s^2
Atmósfera estándar	1.01×10^5 Pa
Periodo de satélite a 100 km de altitud	86.3 min
Radio de la órbita geosincrónica	42,200 km
Velocidad de escape	11.2 km/s
Momento de dipolo magnético	8.0×10^{22} $A \cdot m^2$
Campo eléctrico medio en la superficie	150 V/m, hacia abajo
Distancia con:	
Luna	3.82×10^8 m
Sol	1.50×10^{11} m
Estrella más cercana	4.04×10^{16} m
Centro galáctico	2.2×10^{20} m
Galaxia de Andrómeda	2.1×10^{22} m
Borde del universo observable	$\sim 10^{26}$ m

ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS*

Velocidad de la luz en el vacío	c	3.00×10^{8} m/s
Constante gravitacional Newtoniana	G	6.67×10^{11} N · m^2/kg^2
Constante de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}
Constante de gas molar	R	8.31 J/mol · K
Relación masa-energía	c^2	8.99×10^{16} J/kg
		931.5 MeV/u
Constante eléctrica (permitividad)	ϵ_0	8.85×10^{-12} F/m
Constante magnética (permeabilidad)	μ_0	1.26×10^{-6} H/m
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J · s
		4.14×10^{-15} eV · s
Constante de Boltzman	k	1.38×10^{-23} J/K
		8.62×10^{-5} eV/K
Carga elemental	e	1.60×10^{-9} C
Masa del electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	511.0 keV
Masa del protón	m_p	1.67×10^{-27} kg
Energía del protón en reposo	$m_p c^2$	938.3 MeV
Radio de Bohr	a_0	5.29×10^{-11} m
Magnetón de Bohr	μ_B	9.27×10^{-24} J/T
		5.79×10^{-5} eV/T

* En el apéndice B viene una lista más completa que muestra también los valores experimentales óptimos.

ALGUNOS FACTORES DE CONVERSIÓN*

Masa
1 kg = 1,000 g = 6.02×10^{26} u
1 u = 1.66×10^{-27} kg

Longitud
1 m = 100 cm = 39.4 in. = 3.28 ft
1 mi = 1.61 km = 5,280 ft
1 in. = 2.54 cm
1 año luz = 3.26 parsec = 9.46×10^{15} m
1 Å = 0.1 nm = 100 pm = 10^{-10} m

Tiempo
1 d = 86,400 s
1 y = $365\frac{1}{4}$ d = 3.16×10^{7} s

Volumen
1 L = 1,000 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 1.06 quart
1 gal (U.S.) = 231 in.^{3} = 3.79 L

Medida angular
1 rad = 57.3° = 0.159 rev
π rad = 180° = $\frac{1}{2}$ rev

Velocidad
1 m/s = 3.28 ft/s = 2.24 mi/h
1 kg/h = 0.621 mi/h

Fuerza y presión
1 N = 10^5 dina = 0.225 lb
1 Pa = 1 N/m^2 = 10 dina/cm^2 = 1.45×10^{-4} lb/in.^{2}
1 atm = 1.01×10^5 Pa = 14.7 lb/in.^{2} = 76 cm-Hg

Energía y potencia
1 J = 10^7 erg = 0.239 cal = 0.738 ft · lb
1 kW · h = 3.6×10^6 J
1 cal = 4.19 J
1 eV = 1.60×10^{-19} J
1 caballo de fuerza = 746 W = 550 ft · lb/s

Electricidad y magnetismo
1 T = 1 Wb/m^2 = 10^4 gauss

*Véase en el apéndice G una lista más completa.

PREFACIO DEL VOLUMEN 2

Ésta es la quinta edición del libro que en 1960 David Halliday y Robert Resnick publicaron por primera vez con el título de *Physics for Students of Science and Engineering*. Desde hace 40 años ha sido la obra clásica en el curso introductorio basado en el cálculo y ha gozado de gran prestigio por su exposición clara y exhaustiva. En esta edición hemos procurado mejorar la accesibilidad, sin sacrificar el nivel ni el rigor de su contenido. Reescribimos gran parte del libro para que el material fluya mejor y para facilitar la introducción a nuevos temas. Hemos tratado de ofrecer ejemplos más prácticos y de proceder de lo particular a lo general cuando se abordan temas nuevos.

En la presente edición se incluyen muchos cambios en la didáctica, lo mismo que en la orden de los capítulos. Quienes estén familiarizados con la cuarta edición encontrarán los mismos temas, aunque en un orden ligeramente revisado. Al realizar las revisiones recurrimos a usuarios de las ediciones anteriores y tuvimos en cuenta los resultados de la investigación dedicada a la enseñanza de la física. A continuación señalamos las innovaciones que ofrece esta edición.

1. Debido a la reordenación que condujo a eliminar dos capítulos del volumen 1, los del volumen 2 fueron numerados comenzando con el 25 (que corresponde al 27 de la cuarta edición).

2. A los alumnos les resulta difícil integrar las distribuciones de carga continua cuando calculan los campos eléctricos, procedimiento que es a la vez conceptualmente abstracto y nada fácil desde el punto de vista del cálculo. A fin de resolver antes los problemas conceptuales, explicamos el procedimiento al tratar de las *fuerzas* eléctricas y no de los *campos* eléctricos; por ejemplo, en el capítulo 25 se explica cómo calcular la fuerza ejercida por una línea de carga sobre una carga puntual. En general, los alumnos intuyen mejor las fuerzas que los campos, de modo que podemos exponer el procedimiento matemático en un contexto más físico. Más adelante repetiremos los cálculos de campos y de potenciales. Por motivos parecidos, abordamos los teoremas de cascarones en el capítulo 25 dentro del contexto de las fuerzas, lo cual corresponde a su introducción en el capítulo 14 del volumen 1 al tratar de la fuerza gravitacional.

3. En ediciones anteriores la dispersión de Rutherford se incluía en el capítulo dedicado a la ley de Gauss; ahora se incorpora en la explicación de los campos eléctricos en el capítulo 26.

4. En el capítulo 27 (Ley de Gauss), hemos ampliado la exposición sobre la relación entre el flujo eléctrico y las líneas de campo; ahora nos ocupamos de las aplicaciones ordinarias de la ley a las distribuciones de carga continua y luego de su aplicación a los conductores.

5. El capítulo 29 (Propiedades eléctricas de los materiales) fue reescrito e incorpora material acerca de los conductores y los dieléctricos que en ediciones anteriores aparecía en los dos capítulos de los capacitores y la corriente. Creemos que se trata de material independiente y que, al exponerlo de esta manera, es más fácil contrastar el comportamiento de los conductores y el de los aislantes en los campos eléctricos.

6. La investigación de la enseñanza de la física revela que los estudiantes tienen serios problemas para entender el comportamiento de los circuitos simples de corriente directa. Por ello hemos ampliado la exposición de este tema, al mismo tiempo que reducimos la de los circuitos multiespiras y la de los instrumentos de medición.

7. En esta edición comenzamos la introducción a las fuentes del campo magnético (Capítulo 33) explicando el campo debido a una sola carga en movimiento y pasando luego al campo debido a un elemento de corriente. Se logra así una mejor correspondencia con la forma en que se abordan los campos magnéticos en el capítulo anterior (se examina la fuerza en una sola carga en movimiento y luego en un elemento de corriente). Ahora se calcula directamente el campo axial de un solenoide usando la ley de Biot-Savart antes de repetir el cálculo mediante la de Ampère.

8. El momento dipolar magnético se pospone hasta el capítulo 35 (Propiedades magnéticas de los materiales). En parte lo hicimos para no sobrecargar a los estudiantes con material nuevo en el primer capítulo dedicado a los campos magnéticos y para ofrecerles una exposición más coherente al iniciar el tratamiento del dipolo magnético en un contexto donde se aplicará muy directamente. Hemos abreviado un poco la explicación del magnetismo atómico y nuclear en este capítulo, optando por posponer una explicación más a fondo en un capítulo posterior, una vez expuestos algunos de los rudimentos de la estructura atómica junto con el espín de los electrones.

9. Se integraron los capítulo 40, 41, 42 y 43 de la edición anterior a los capítulos 38 y 39 de la quinta edición. El capítulo 38 trata ahora de las ecuaciones de Maxwell y de sus aplicaciones a las ondas electromagnéticas, material que figuraba

en los capítulos 40 y 41 de la cuarta edición. En el capítulo 39 se estudian las propiedades de las ondas de luz, incluyéndose además la reflexión y la refracción; se incorpora así material que aparecía antes en los capítulos 41, 42 y 43. La formación de imágenes mediante espejos planos aparece en el siguiente capítulo (40), donde encaja más espontáneamente con la explicación de la formación de imágenes mediante espejos y lentes.

10. En la cuarta edición los temas de la física moderna estaban esparcidos a lo largo del libro, generalmente en secciones marcadas como "opcionales". En esta edición seguimos utilizando ejemplos tomados de ella donde conviene, pero las secciones especiales de la física moderna fueron integradas en los capítulos 45-52 donde se estudian temas de la física cuántica y sus aplicaciones a átomos, sólidos y núcleos. Estamos firmemente convencidos de que la relatividad y la física cuántica son partes esenciales de un curso introductorio de este nivel; pero la mejor forma de hacerles justicia a esos temas es una presentación coherente y unitaria, no una mera colección de exposiciones aisladas. Igual que en la cuarta edición, el capítulo dedicado a la relatividad especial se encuentra entre los capítulos de la mecánica clásica en el volumen 1, lo cual refleja nuestra idea de que la relatividad especial debe ubicarse entre los capítulos sobre la cinemática y la mecánica que tratan de la física clásica. Los capítulos 45-48, donde se estudian la física cuántica y sus aplicaciones al átomo, fueron reescritos en gran parte a partir de la cuarta edición. En el capítulo 45 se explican los primeros experimentos tradicionales que revelan las propiedades de la radiación electromagnética a nivel de partículas: la radiación térmica, el efecto fotoeléctrico y la difusión de Compton. Sin embargo, la evidencia inequívoca en favor de la dualidad partícula-onda de la luz proviene sólo de los experimentos de decisión retrasada, que ahora se incluyen en el capítulo 45. En esta edición los rudimentos de la teoría de Schrödinger se estudian ahora en el capítulo 46, con aplicaciones detalladas a los pozos de potencia y al átomo de hidrógeno en el capítulo 47. El capítulo 48, que versa sobre la estructura del átomo, se parece al 52 de la cuarta edición, sólo que se agregó material concerniente al magnetismo atómico.

En esta edición, el material de final de capítulo difiere notablemente del que se incluyó en la anterior. Los conjuntos de problemas (que remitían a las secciones de capítulo) fueron revisados con mucho esmero y repartidos en dos grupos: ejercicios y problemas. Los ejercicios, que remiten a las secciones del libro, suelen ser aplicaciones directas del material expuesto en la sección correspondiente. Su finalidad es ayudarle al alumno a familiarizarse con los conceptos, con fórmulas importantes, con unidades y dimensiones, etc. Los problemas, que no remiten a las secciones del libro, requieren a menudo emplear conceptos de varias secciones e inclusive de capítulos anteriores. En algunos se pide estimar o localizar por su cuenta los datos necesarios para resolverlos. Al corregir y agrupar los ejercicios y los problemas suprimimos algunos problemas de la edición anterior. Un suplemento de problemas contendrá la mayoría de ellos, lo mismo que una selección de ejercicios y problemas nuevos. Como en la cuarta edición, las respuestas a los ejercicios y problemas impares vienen en el libro y las de los pares vienen en el manual del profesor.

Al material de final de capítulo se agregaron preguntas de opción múltiple y problemas para resolver por computadora. Las preguntas por lo regular son conceptuales y a menudo exigen gran penetración del material. Las respuestas vienen en el manual del profesor. Los problemas pueden requerir estar familiarizados con las técnicas de hojas de cálculo o con las rutinas de manipulación simbólica como Maple o Mathematica.

El material de final de capítulo se preparó con la valiosa ayuda de Paul Stanley de la California Lutheran University. En este proyecto tuvimos la suerte de aprovechar sus excelentes ideas y creatividad.

Hemos procurado elaborar un libro que ofrezca un tratamiento de la física lo más completo y riguroso posible en este nivel. Con todo, conviene señalar lo siguiente: *pocos profesores o ninguno querrán seguir el libro de principio a fin*, sobre todo en un curso de un año. Ofrece muchas alternativas al respecto. El que desee estudiar con mayor profundidad menos temas (el conocido enfoque de "menos y mejor") podrá seleccionar varias de ellos. Algunas secciones o subsecciones están marcas como "opcionales", lo cual significa que pueden omitirse sin perder la continuidad. Según el programa del curso, lo mismo puede hacerse con otra secciones o incluso con capítulo enteros; también pueden estudiarse con menor profundidad. El manual del profesor, material complementario del texto, contiene sugerencias para abreviar el tratamiento. Con todo, se incluye una exposición completa de los temas, de modo que el estudiante interesado encontrará en el libro los temas omitidos y se hará una idea más amplia del tema. Confiamos que nuestro libro sea visto como una especie de "mapa" de la física: pueden tomarse carreteras panorámicas o directas, sin que se requiera utilizarlas todas en el primer viaje. Al viajero lleno de curiosidad se le estimulará para que regrese al mapa y explore regiones que no visitó en el primer recorrido.

El libro viene en dos volúmenes. En el volumen 1 se estudian la cinemática, la mecánica y la termodinámica; el volumen II incluye electromagnetismo, óptica, física cuántica y sus aplicaciones. Los suplementos disponibles en inglés son:

Instructor's Solutions Manual	Student Solution Manual
Instructor's Manual	Student Study Guide
Instructor's Resource CD	Physics Simulations
Test Bank	eGrade Homework Management System

Para mayor información sobre estos suplementos, favor de comunicarse con su representante de CECSA.

Al preparar esta edición hemos aprovechado las recomendaciones de un equipo muy profesional de revisores quienes,

en forma individual o colectiva, aportaron comentarios y críticas en casi todas las páginas de la obra:

Richard Bukey, Loyola University
Duane Carmony, Purdue University
J. Richard Chrisman, U. S. Coast Guard Academy
John Dixon, California State University-San Bernardino
John Federici, New Jersey Institute of Technology
David Gavenda, University of Texas-Austin
Stuart Gazes, University of Chicago
James Gerhart, University of Washington
John Gruber, San Jose State University
Martin Hackworth, Idaho State University
Jonathan Hall, Pennsylvania State University, Behrend
Oshri Karmon, Diablo Valley College
Jim Napolitano, Rensselaer Polytechnic Institute
Donald Naugle, Texas A&M University
Douglas Osheroff, Stanford University
Harvey Picker, Trinity College
Anthony Pitucco, Prima Community College
Robert Scherrer, Ohio State University
John Toutonghi, Seattle University

Queremos expresar nuestra profunda gratitud a todas estas personas por su esfuerzo y por las ideas que nos dieron. También queremos agradecer las recomendaciones del Physics Education Group de la Universidad de Washington, especialmente a Paula Heron y a Lillian McDermott.

El personal de John Wiley & Sons nos brindó su constante ayuda en el proyecto, por lo cual le estamos profundamente agradecidos. Un testimonio especial de gratitud a Stuart Johnson por el manejo de él y por su dedicación hasta una feliz culminación. Contribuyeron mucho a la calidad del libro la editora de producción Elizabeth Swain, la editora de fotografías Hilary Newman, la editora de ilustraciones Anna Melhorn y la diseñadora gráfica Karin Kinchloe. Este proyecto no hubiera sido posible sin las habilidades y el trabajo de ellas.

Pese a los esfuerzos de los autores, de los revisores y de los editores, es inevitable que aparezcan errores en el texto; agradeceríamos mucho a los usuarios que nos hicieran llegar sus correcciones y comentarios sobre el contenido o la estructura didáctica de la obra. Nos comprometemos a leer el mayor número posible de ellos, pero sentimos no poder contestarles a todos. No obstante, solicitamos a nuestros lectores enviarnos sus comentarios a la dirección electrónica: info@patriacultural.com.mx

CONTENIDO

CAPÍTULO 25

CARGA ELÉCTRICA Y LEY DE COULOMB 567

25-1 Electromagnetismo: introducción 567
25-2 Carga eléctrica 568
25-3 Conductores y aislantes 571
25-4 Ley de Coulomb 573
25-5 Distribuciones continuas de carga 576
25-6 Conservación de la carga 580
Preguntas y problemas 9

CAPÍTULO 26

CAMPO ELÉCTRICO 587

26-1 ¿Qué es un campo? 587
26-2 Campo eléctrico 588
26-3 Campo eléctrico de cargas puntuales 590
26-4 Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga 592
26-5 Las líneas del campo eléctrico 595
26-6 Una carga puntual en un campo eléctrico 597
26-7 Dipolo en un campo eléctrico 600
26-8 El modelo nuclear del átomo (opcional) 602
Preguntas y problemas 605

CAPÍTULO 27

LEY DE GAUSS 611

27-1 ¿A qué se refiere la ley de Gauss? 611
27-2 El flujo de un campo vectorial 612
27-3 El flujo de un campo eléctrico 613
27-4 Ley de Gauss* 616
27-5 Aplicaciones de la ley de Gauss 617
27-6 Ley de Gauss y los conductores 621
27-7 Pruebas experimentales de la ley de Gauss y de la de Coulomb 624
Preguntas y problemas 627

CAPÍTULO 28

LA ENERGÍA ELÉCTRICA Y EL POTENCIAL ELÉCTRICO 635

28-1 Energía potencial 635
28-2 Energía potencial eléctrica 636
28-3 El potencial eléctrico 639
28-4 Cálculo del potencial a partir del campo 640
28-5 Potencial generado por cargas puntuales 641
28-6 El potencial eléctrico de las distribuciones de carga continua 644
28-7 Cálculo del campo a partir del potencial 646
28-8 Superficies equipotenciales 648
28-9 El potencial de un conductor cargado 649
28-10 El acelerador electrostático (opcional) 651
Preguntas y problemas 654

CAPÍTULO 29

PROPIEDADES ELÉCTRICAS DE LOS MATERIALES 661

29-1 Tipos de materiales 661
29-2 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones estáticas 662
29-3 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones dinámicas 663
29-4 Materiales óhmicos 666
29-5 Ley de Ohm: una perspectiva microscópica 668
29-6 Un aislante en un campo eléctrico 670
Preguntas y problemas 674

CAPÍTULO 30

CAPACITANCIA 679

30-1 Capacitores 679
30-2 Capacitancia 679
30-3 Cálculo de la capacitancia 681
30-4 Capacitores en serie y en paralelo 683
30-5 Almacenamiento de energía en un campo eléctrico 685
30-6 Capacitor con dieléctrico 687
Preguntas y problemas 692

CAPÍTULO 31

CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA 701

31-1 Corriente eléctrica 701
31-2 Fuerza electromotriz 703
31-3 Análisis de circuitos 704

31-4 Campos eléctricos en los circuitos* 709
31-5 Resistores en serie y en paralelo 710
31-6 Transferencias de energía en un circuito eléctrico 713
31-7 Circuitos *RC* 713
Preguntas y problemas 717

CAPÍTULO 32

EL CAMPO MAGNÉTICO 725

32-1 Interacciones y polos magnéticos 725
32-2 La fuerza magnética sobre una carga en movimiento 727
32-3 Cargas circulantes 731
32-4 El efecto Hall 734
32-5 La fuerza magnética en un alambre portador de corriente 736
32-6 El par en una espira de corriente 738
Preguntas y problemas 742

CAPÍTULO 33

EL CAMPO MAGNÉTICO DE UNA CORRIENTE 749

33-1 El campo magnético producido por una carga en movimiento 749
33-2 El campo magnético de una corriente 752
33-3 Dos corrientes paralelas 756
33-4 El campo magnético de un solenoide 758
33-5 Ley de Ampère 760
33-6 Electromagnetismos y marcos de referencia (opcional) 764
Preguntas y problemas 772

CAPÍTULO 34

LA LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY 775

34-1 Los experimentos de Faraday 775
34-2 La ley de inducción de Faraday 776
34-3 Ley de Lenz 777
34-4 Fuerza electromotriz de movimiento 780
34-5 Generadores y motores 782
34-6 Campos eléctricos inducidos 783
34-7 La inducción y el movimiento relativo (opcional) 786
Preguntas y problemas 791

CAPÍTULO 35

PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LOS MATERIALES 801

35-1 El dipolo magnético 801
35-2 La fuerza sobre un dipolo en un campo no uniforme 804
35-3 Magnetismo atómico y nuclear 805
35-4 Magnetización 807
35-5 Materiales magnéticos 808
35-6 El magnetismo de los planetas (opcional) 811
35-7 Ley de Gauss aplicada al magnetismo 814
Preguntas y problemas 817

CAPÍTULO 36

INDUCTANCIA 823

36-1 Inductancia 823
36-2 Cálculo de la inductancia 824
36-3 Circuitos *LR* 826
36-4 Almacenamiento de energía en un campo magnético 827
36-5 Oscilaciones electromagnéticas: cualitativas 830
36-6 Oscilaciones electromagnéticas: cuantitativas 832
36-7 Oscilaciones amortiguadas y forzadas 833
Preguntas y problemas 837

CAPÍTULO 37

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA 845

37-1 Corrientes alternas 845
37-2 Tres elementos separados 846
37-3 El circuito *RLC* de una malla simple 848
37-4 Potencia en los circuitos de corriente alterna 851
37-5 El transformador (opcional) 852
Preguntas y problemas 855

CAPÍTULO 38

LAS ECUACIONES DE MAXWELL Y LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS 861

38-1 Las ecuaciones básicas del electromagnetismo 861
38-2 Campos magnéticos inducidos y la corriente de desplazamiento 862
38-3 Ecuaciones de Maxwell 864
38-4 Generación de una onda electromagnética 866
38-5 Ondas viajeras y las ecuaciones de Maxwell 868
38-6 Transporte de energía y el vector de Poynting 870
38-7 Presión de radiación 872
Preguntas y problemas 875

CAPÍTULO 39

ONDAS DE LUZ 883

39-1 El espectro electromagnético 883
39-2 La luz visible 886
39-3 La velocidad de la luz 887
39-4 Reflexión y refracción de las ondas de luz 890
39-5 Reflexión interna total 897
39-6 El efecto Doppler para la luz 899
Preguntas y problemas 904

CAPÍTULO 40

ESPEJOS Y LENTES 913

40-1 Formación de imágenes por medio de espejos y lentes 913
40-2 Espejos planos 914
40-3 Espejos esféricos 917
40-4 Superficies esféricas refractantes 921
40-5 Lentes delgadas 923
40-6 Instrumentos ópticos 928
Preguntas y problemas 932

CAPÍTULO 41

INTERFERENCIA 941

41-1 Interferencia de dos fuentes 941
41-2 Interferencia de rendija doble 942
41-3 Coherencia 944
41-4 Intensidad en la interferencia de rendija doble 946
41-5 Interferencia proveniente de películas delgadas 948
41-6 Interferómetro de Michelson 953
Preguntas y problemas 957

CAPÍTULO 42

DIFRACCIÓN 963

42-1 La difracción y la teoría ondulatoria de la luz 963
42-2 Difracción de rendija simple 965
42-3 Intensidad en la difracción de rendija simple 967
42-4 Difracción en una abertura circular 970
42-5 Combinación de interferencia y difracción de rendija doble 971
Preguntas y problemas 976

CAPÍTULO 43

REJILLAS Y ESPECTROS 981

43-1 Rendijas múltiples 981
43-2 Rejillas de difracción 985
43-3 Dispersión y potencia de resolución 986
43-4 Difracción de rayos X 988
43-5 Holografía (opcional) 992
Preguntas y problemas 994

CAPÍTULO 44

POLARIZACIÓN 999

44-1 Polarización de las ondas electromagnéticas 999
44-2 Hojas de polarización 1001
44-3 Polarización por reflexión 1003
44-4 Refracción doble 1004
44-5 Polarización circular 1006
44-6 Polarización por dispersión 1008
Preguntas y problemas 1011

CAPÍTULO 45

LA NATURALEZA DE LA LUZ 1015

45-1 Introducción al fotón 1015
45-2 Radiación térmica 1016
45-3 El efecto fotoeléctrico 1019
45-4 El efecto Compton 1021
45-5 Descubrimiento del fotón 1025
45-6 Fotones y ondas 1024
45-7 Reducción de la velocidad de los átomos por bombardeo con fotones 1026
Preguntas y problemas 1029

CAPÍTULO 46

LA NATURALEZA DE LA MATERIA 1035

46-1 Ondas de materia 1035
46-2 Pruebas de la hipótesis de DeBroglie 1036
46-3 Ondas y partículas 1041
46-4 Principio de incertidumbre de Heisenberg 1042
46-5 La función de onda 1044
46-6 La ecuación de Schrödinger 1045
46-7 El efecto túnel 1046
Preguntas y problemas 1050

CAPÍTULO 47

ELECTRONES EN POZOS DE POTENCIAL 1055

47-1 Electrones libres y ligados 1055
47-2 Un electrón atrapado en un pozo de potencial 1055
47-3 Un electrón atrapado en un pozo finito 1060
47-4 Un electrón atrapado en un átomo 1062
47-5 El estado base del átomo de hidrógeno 1065
47-6 Momento angular de los electrones en los átomos 1066
47-7 Un estado excitado del átomo de hidrógeno 1069
47-8 Conteo de los estados del hidrógeno 1070
Preguntas y problemas 1073

CAPÍTULO 48

ESTRUCTURA ATÓMICA 1079

48-1 El espectro de rayos X de los átomos 1079
48-2 Los rayos X y la numeración de los elementos 1081
48-3 Construcción de átomos 1082
48-4 La tabla periódica 1083
48-5 Magnetismo atómico 1086
48-6 El experimento de Stern-Gerlach 1087
48-7 Resonancia magnética nuclear 1089
48-8 Magnetismo y radiaciones atómicas (opcional) 1090
48-9 Láseres y luz láser 1092
Preguntas y problemas 1097

CAPÍTULO 49

CONDUCCIÓN ELÉCTRICA EN LOS SÓLIDOS 1103

49-1 Teoría cuántica de los sólidos 1103
49-2 Electrones de conducción en un metal 1104
49-3 Llenado de los estados permitidos 1105
49-4 Conducción eléctrica en metales 1108
49-5 Bandas y brechas 1109
49-6 Conductores, aislantes y semiconductores 1111
49-7 Semiconductores dopados 1112
49-8 La unión *pn* 1114
49-9 Optoelectrónica 1117
49-10 El transistor 1119
49-11 Superconductores 1120
Preguntas y problemas 1123

CAPÍTULO 50

FÍSICA NUCLEAR 1129

50-1 Descubrimiento del núcleo 1129
50-2 Algunas propiedades del núcleo 1131
50-3 Decaimiento radiactivo 1135
50-4 Decaimiento alfa 1136
50-5 Decaimiento beta 1138
50-6 Medición de la radiación de ionización 1139
50-7 Radiactividad natural 1140
50-8 Reacciones nucleares 1141
50-9 Modelos nucleares (opcional) 1143
Preguntas y problemas 1146

CAPÍTULO 51

ENERGÍA PROCEDENTE DEL NÚCLEO 1153

51-1 El átomo y el núcleo 1153
51-2 Fisión nuclear: el proceso básico 1154
51-3 Teoría de la fisión nuclear 1155
51-4 Reactores nucleares: los principios básicos 1157
51-5 Un reactor natural 1159
51-6 Fusión termonuclear: el proceso básico 1161
51-7 Fusión termonuclear en las estrellas 1162
51-8 Fusión termonuclear controlada 1164
Preguntas y problemas 1168

CAPÍTULO 52

FÍSICA DE PARTÍCULAS Y COSMOLOGÍA 545

52-1 Interacciones de las partículas 545
52-2 Familias de partículas 546
52-3 Leyes de conservación 547
52-4 El modelo de los quarks 551
52-5 La cosmología del Big Bang 551
52-6 Nucleosíntesis 555
48-7 La edad del universo 557
Preguntas y problemas 536

APÉNDICES

A. El sistema internacional de unidades (SI) A-1
B. Constantes físicas fundamentales A-3
C. Datos astronómicos A-4
D. Propiedades de los elementos A-6
E. Tabla periódica de los elementos A-9
F. Partículas elementales A-10
G. Factores de conversión A-12
H. Vectores A-17
I. Fórmulas matemáticas A-20
J. Premios Nobel de Física A-22

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS IMPARES A-26

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS P-1

ÍNDICE I-1

CAPÍTULO 25

CARGA ELÉCTRICA Y LEY DE COULOMB

Iniciamos, en este capítulo, un estudio detallado del electromagnetismo, que abarcará casi toda la parte restante del libro. Las fuerzas electromagnéticas producen la estructura de los átomos y la unión de éstos en moléculas y sólidos. Muchas propiedades de los materiales examinados hasta ahora son de índole electromagnética, entre ellas la elasticidad de los sólidos y la tensión superficial de los líquidos. La fuerza de resorte, la fricción y la fuerza normal provienen de la fuerza electromagnética existente entre los átomos.

Entre los ejemplos del electromagnetismo que vamos estudiar se encuentran la fuerza entre cargas eléctricas, como la que ocurre entre un electrón y el núcleo de un átomo; el movimiento de un cuerpo cargado sujeto a una fuerza eléctrica externa (por ejemplo, un electrón en un haz de osciloscopio); el flujo de cargas eléctricas a través de circuitos y el comportamiento de los elementos de un circuito; la fuerza entre imanes permanentes y las propiedades de los materiales magnéticos; la radiación electromagnética, que finalmente culmina con el estudio de la óptica, la naturaleza y la propagación de la luz.

En este capítulo comenzaremos con la exposición de la carga eléctrica, algunas propiedades de los cuerpos cargados y la fuerza eléctrica fundamental entre dos cuerpos con carga.

25-1 ELECTROMAGNETISMO: INTRODUCCIÓN

¿Qué tienen en común las tres situaciones siguientes?

1. Encendemos el apagador del cuarto. El consumo de combustible en una planta eléctrica produce energía electromagnética al hacer que una espira de un alambre conductor gire cerca de un imán. Finalmente parte de esta energía se transfiere a los electrones en el filamento de la lámpara, el cual transforma la energía eléctrica en luz visible.

2. Introducimos una orden en el teclado de la computadora. Se forma un haz de electrones que transmite nuestras instrucciones. En los circuitos del sistema existen miles de trayectorias posibles para los electrones, pero casi todas están bloqueadas por puertas electrónicas. Los electrones pueden desplazarse sólo a través de las que abrió la orden, de modo que el haz de electrones llega a su destino y se ejecuta la misma orden.

3. Oprimimos el botón de selección de canales en el control remoto de nuestro televisor. Las ondas electromagnéticas se dirigen desde la unidad del control hasta un receptor del televisor, el cual entonces lo sintoniza para que acepte otra onda electromagnética proveniente de un satélite situado a gran altura de la Tierra. Las ondas provenientes del satélite dan instrucciones al televisor para que, con las fuerzas eléctrica y magnética, concentre y dirija un haz de electrones que choca contra la superficie del tubo de la imagen y produzca una imagen visible.

El factor común en estos tres fenómenos aparentemente diversos es que se basan en fuerzas *eléctricas* o *magnéticas* que controlan y dirigen el flujo de energía o de partículas. Estas fuerzas constituyen las bases para el estudio del *electromagnetismo*. En este estudio veremos que todos los efectos electromagnéticos pueden explicarse mediante cuatro ecuaciones básicas, conocidas como *ecuaciones de Maxwell*. Éstas representan las leyes individuales del electromagnetismo, al igual que las ecuaciones antes expuestas, que representan

las leyes de la mecánica de Newton o las de la termodinámica.

Vamos a analizar primero los fenómenos eléctricos y luego los magnéticos. Más adelante demostraremos que es imposible separarlos: algunos fenómenos eléctricos producen efectos magnéticos, y algunos fenómenos magnéticos, efectos eléctricos. Esto nos lleva a unificarlos bajo la designación común de electromagnetismo. El descubrimiento de las leyes del electromagnetismo y su unificación fue un gran triunfo de la física del siglo XIX. Su aplicación ha dado origen a muchos aparatos de uso práctico: motores, radios, televisores, radar, hornos de microondas y teléfonos celulares.

El desarrollo de la teoría electromagnética prosiguió en el siglo XX, con tres adelantos de gran trascendencia. En 1905 Albert Einstein demostró que, para un observador en movimiento, los efectos eléctricos aparecen como efectos magnéticos; por tanto, los observadores en movimiento relativo podrían disentir al asignar las mismas medidas a las causas eléctricas o magnéticas. Esta conclusión es la base de la teoría especial de la relatividad, la cual terminaría revolucionando nuestros conceptos de espacio y tiempo. El segundo adelanto fue la formulación de una teoría cuántica del electromagnetismo, denominada *electrodinámica cuántica*, que alcanzó su plenitud hacia 1949 y que permitió calcular las propiedades del átomo con extraordinaria precisión, actualmente con 11 cifras significativas. El tercer avance fue la unificación del electromagnetismo con otra fuerza, la fuerza "débil", la cual causa decaimiento radiactivo y otras interacciones entre las partículas. Del mismo modo que los efectos eléctricos y magnéticos fueron unificados como la interacción electromagnética, también, en la década de 1960, se comprobó que los efectos electromagnéticos y débiles estaban unificados bajo la interacción *electrodébil*. En nuestro estudio de las fuerzas eléctricas y magnéticas, esta interacción no aporta nada nuevo; conviene más estudiar de manera separada la interacción electromagnética.

La figura 25-1 es una cronología de algunos de los grandes acontecimientos que han permitido el desarrollo de nuestro conocimiento del electromagnetismo.

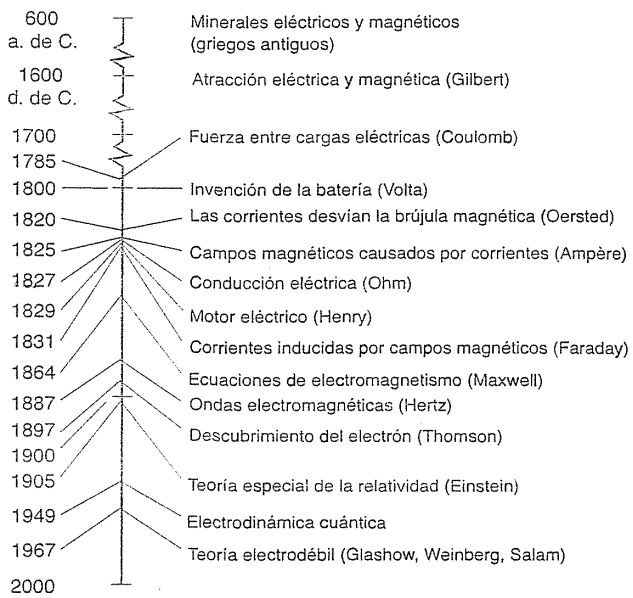


FIGURA 25-1. Cronología de los principales avances en el electromagnetismo.

25-2 CARGA ELÉCTRICA

Después de pasar varias veces un peine de plástico por el cabello, encontraremos que el peine ejerce una fuerza sobre los mechones. También observaremos que, una vez atraídos los mechones hacia el peine y una vez que entran en contacto con él, dejan de verse atraídos.

Parece razonable concluir lo siguiente: la atracción entre el peine y el cabello se debe a que una entidad física es transferida desde el peine hacia el cabello cuando se frotan; la misma entidad física vuelve a ser transferida para que neutralice la atracción cuando entran en contacto. Esta entidad física recibe el nombre de *carga eléctrica;* hoy interpretamos la transferencia sobre la base de que los electrones pueden ser extraídos de los átomos de un objeto y fijados a los de otro.

La transferencia de una carga eléctrica mediante fricción es un fenómeno común. Lo conocían los antiguos griegos, quienes observaron que el ámbar al ser frotado con piel, atraía pedazos de heno. Cuando uno camina sobre una alfombra y siente un choque eléctrico al tocar una manija metálica de la puerta o cuando un relámpago llega al suelo desde una nube, son fenómenos que nos permiten observar esta transferencia de carga.

Cuando "cargamos" un objeto (es decir, cuando le transferimos carga), descubrimos que éste ejerce fuerza sobre otro también cargado. Las primeras observaciones de que esta fuerza puede ser atractiva o repulsiva, nos llevan a la conclusión de que existen dos tipos de carga eléctrica: positiva y negativa.*

Los efectos resultantes de la transferencia de carga son a veces potentes; no obstante, conviene señalar que se originan en la transferencia de una pequeña fracción de la carga eléctrica contenida en los objetos. La materia ordinaria se compone de átomos o moléculas eléctricamente neutros, que contienen cantidades iguales de carga positiva (el núcleo) y negativa (los electrones). Cuando se frotan dos objetos, unos pocos electrones de los átomos de un objeto se transfieren al otro; la mayoría de los electrones permanecen inalterados. Esta ligera perturbación del equilibrio entre las enormes, pero iguales, cantidades de carga positiva y negativa en un objeto, ocasio-

* Benjamín Franklin (1706-1790) propuso arbitrariamente la clasificación de la carga eléctrica en positiva y negativa. Era además un científico de fama internacional. De hecho, gracias a su reputación científica obtuvo triunfos diplomáticos en Francia durante la Guerra de Independencia de Estados Unidos.

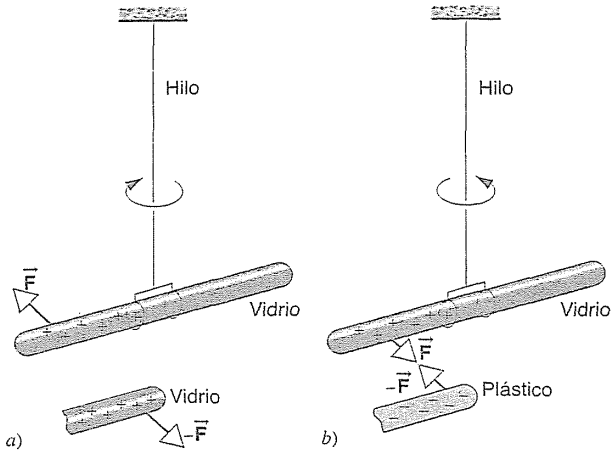


FIGURA 25-2. *a*) Dos varillas de la misma carga se repelen. *b*) Dos varillas de carga opuesta se atraen.

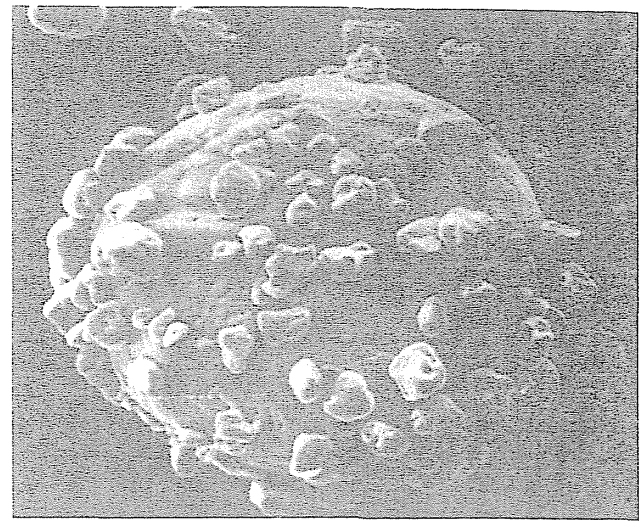


FIGURA 25-3. Partícula portadora de una fotocopiadora Xerox, cubierta con partículas toner que se pegan a ella por atracción electrostática. El diámetro de las partículas mide 0.3 mm aproximadamente.

na la mayor parte de los efectos eléctricos observados comúnmente.

Cuando frotamos con piel una varilla de plástico, se transfieren electrones a ella; como tiene un exceso de electrones (que portan carga negativa), la varilla adquiere carga negativa. La piel presenta ahora una deficiencia de electrones y, en consecuencia, tiene carga positiva. Vemos la atracción que la varilla ejerce sobre las partes de la piel, proveniente de la carga en cada una. De modo parecido, cuando frotamos con seda una varilla de vidrio, observamos que adquiere carga positiva y que se atraen entre sí. En ambos casos, hemos transferido un número relativamente pequeño de electrones y alterado la neutralidad eléctrica de los objetos.

Carguemos ahora una varilla de cristal, frotando un extremo con seda y luego colgándola de un hilo, como en la figura 25-2. Si colocamos cerca otra varilla cargada en forma similar, encontraremos que las dos se repelen entre sí, como en la figura 25-2*a*. Pero si situamos cerca una varilla de plástico cargada (frotándola con piel), las dos varillas se atraerán una a otra, como en la figura 25-2*b*.

Explicamos la existencia de esos dos tipos de fuerza en función de dos clases de carga. Cuando frotamos el plástico con piel, se transfieren electrones al plástico, y éste presenta carga negativa. Cuando frotamos vidrio con seda, se transfieren a ella, dejando el vidrio con una deficiencia de electrones y, por tanto, con una carga positiva neta. En la siguiente regla pueden resumirse las fuerzas de la figura 25-2:

> *Las cargas del mismo signo se repelen y las de signo contrario se atraen.*

En la sección 25-4 le damos una forma cuantitativa a esta regla designándola como la ley de fuerza de Coulomb. Tenemos en cuenta sólo las cargas que se encuentran en reposo una respecto a otra o que se mueven con mucha lentitud, restricción que define el tema de la *electrostática*.

Las fuerzas eléctricas entre cuerpos cargados se prestan a muchas aplicaciones industriales, entre ellas la pintura por rociado y el revestimiento con polvo, la precipitación de ceniza, impresión de inyección de tinta de no impacto y fotocopiado. La figura 25-3, por ejemplo, muestra una pequeña partícula portadora de una fotocopiadora, cubierta con partículas de polvo negro, llamado *toner*, que se pega al bastidor por medio de fuerzas electrostáticas. Las partículas del toner con carga negativa finalmente son atraídas de sus partículas portadoras a una imagen latente de carga positiva del documento a copiar, la cual se forma en un tambor giratorio. Entonces una hoja cargada de papel atrae las partículas de toner del tambor, tras lo cual se fusionan en su sitio aplicándoles calor para obtener la copia definitiva.

La carga eléctrica neta de un objeto suele representarse con el símbolo q. Es una cantidad escalar. Puede ser positiva o negativa, dependiendo de si el objeto tiene una carga neta positiva o negativa. La carga eléctrica se mide en coulombs (C). El coulomb es una unidad muy grande de carga; se necesitan unos 6×10^{18} electrones para obtener un coulomb.

El coulomb no puede derivarse de unidades definidas previamente. Por ser la carga eléctrica una magnitud nueva, podemos definir su unidad básica en forma accesible. Una opción es hacerlo en función de la fuerza ejercida entre dos cargas estándar con una separación determinada; por ejemplo, la carga que ejerce una fuerza de un newton sobre otra similar a un metro de distancia. Sin embargo, la fuerza entre cargas estáticas es difícil de medir; así que en la práctica es más útil definir el coulomb a partir de la fuerza magnética entre los alambres portadores de corriente (tema que trataremos en el Cap. 33). Esta fuerza se mide con mayor precisión que la fuerza eléctrica entre cargas estáticas. Conviene, pues, definir

una unidad básica del SI en función de la corriente (rapidez de flujo de la carga eléctrica por unidad de tiempo). En conclusión, el coulomb, como unidad de carga eléctrica, es una unidad derivada, la cual se obtiene de las unidades fundamentales de corriente y tiempo (apéndice A).

La carga eléctrica está cuantizada

Cuando transferimos carga eléctrica de un objeto a otro, la transferencia no puede efectuarse en unidades arbitrariamente pequeñas. En otras palabras, el flujo de carga como corriente no es continuo, sino que consta de elementos discretos.* Los experimentos demuestran que la carga eléctrica siempre existe sólo en cantidades que son múltiplos enteros de cierta magnitud elemental de carga e. Es decir,

$$q = ne \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad (25\text{-}1)$$

donde (con cuatro cifras significativas)

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{C}.$$

La *carga elemental* e es una de las constantes fundamentales de la naturaleza, cuyo valor experimental se ha calculado con una incertidumbre de alrededor de 4 partes en 10^8.

El electrón y el protón son ejemplos de partículas comunes que portan una unidad fundamental de carga. El electrón tiene una carga de $-e$, y el protón una de $+e$. Algunas partículas, entre ellas el neutrón, no portan una carga eléctrica neta. Por lo que se sabe, otras partículas elementales transportan cargas que son múltiplos pequeños de e, generalmente ± 1, ± 2, o ± 3). Toda partícula tiene una *antipartícula* correspondiente, que posee la misma masa pero la carga opuesta; el antielectrón, que se conoce como *positrón*, tiene una carga de $+e$. Las antipartículas no abundan en la naturaleza, pero pueden crearse en el decaimiento y en las reacciones de los núcleos y de las partículas elementales.

La ecuación 25-1 indica que es posible tener, en un objeto, una carga neta de $+10e$ o de $-6e$, pero nunca una de $3.57e$. Cuando los valores de una propiedad quedan restringidos a múltiplos discretos de una magnitud básica, decimos que la propiedad está *cuantizada*.

Como la carga elemental es pequeña, en condiciones ordinarias no nos percatamos de la naturaleza discreta de su flujo. Por ejemplo, en un alambre de un circuito electrónico, donde suele haber corrientes pequeñas de un miliampere, cada segundo pasan 6×10^{15} electrones en cualquier sección transversal del alambre.

Los átomos comunes son neutros desde el punto de vista eléctrico, o sea que contienen cantidades iguales de carga positiva y negativa. Su núcleo contiene Z protones (donde Z se conoce como *número atómico* del átomo) y, por tanto, una carga de $+Ze$. En un átomo neutro, los electrones con carga negativa Z circulan alrededor del núcleo. A menudo es posible extraer uno o más electrones de un átomo, creando así un ión que presenta un exceso de carga positiva de $+e$, $+2e$,.... Por ejemplo, si pudiéramos extraer todos los electrones de un átomo de uranio ($Z = 92$), obtendríamos una partícula con una carga de $+92e$. En ciertas circunstancias hasta podemos unir un electrón adicional a un átomo neutro, creando un ion de carga negativa.

Aunque creemos que los electrones son partículas fundamentales sin subestructura, los protones no son partículas fundamentales. Constan de entidades más elementales denominadas *quarks*. A los *quarks* se les asignan cargas eléctricas fraccionales de $-\frac{1}{3}e$ y $+\frac{2}{3}e$. El protón se compone de tres quarks: dos con cargas de $+\frac{2}{3}e$ y uno con carga de $-\frac{1}{3}e$, que al ser sumadas nos dan una carga neta de $+e$. La evidencia experimental en favor de la existencia de quarks dentro del protón es sumamente sólida (por ejemplo, podemos hacer que los protones de mucha energía se dispersen de los quarks con carga fraccional dentro del protón); sin embargo, aunque hagamos chocar los protones con gran violencia, no se ha obtenido un solo quark libre. De ahí que nunca se haya observado una partícula libre con una carga fraccional. Este hecho se explica si la fuerza de atracción que un quark ejerce sobre otro *aumenta* con su separación. Ello contrasta con las fuerzas electromagnéticas y gravitacionales, que *disminuyen* conforme va creciendo la distancia entre un par de cuerpos en interacción.

PROBLEMA RESUELTO 25-1. Un centavo de dólar, por ser eléctricamente neutro, contiene la misma cantidad de carga positiva y negativa. ¿Qué magnitud tienen estas cargas iguales?

Solución La carga q está dada por NZe, donde N es el número de átomos de un centavo, y Ze la magnitud de las cargas positivas y negativas transportadas por cada átomo.

El número N de átomos en un centavo, que para simplificar el problema suponemos que está hecho de cobre, es $N_A m/M$, donde N_A es la constante de Avogadro. La masa m de la moneda es 3.11 g y la masa M de 1 mol de cobre (su *masa molar*) es 63.5 g. Encontramos

$$N = \frac{N_A m}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol})(3.11\ \text{g})}{63.5\ \text{g/mol}}$$

$$= 2.95 \times 10^{22}\ \text{átomos}.$$

Todo átomo neutro tiene una carga negativa de magnitud Ze asociada a sus electrones y una carga positiva de la misma magnitud asociada a su núcleo. Aquí, e es la carga elemental, 1.60×10^{-19} C, y Z el número atómico del elemento en cuestión. En el cobre, Z es 29. Por tanto, la magnitud de la carga negativa o positiva total en un centavo de dólar es

$$q = NZe = (2.95 \times 10^{22})(29)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})$$

$$= 1.37 \times 10^{5}\ \text{C}.$$

Es una carga enorme. En comparación con ella, la que podría obtenerse frotando una varilla de plástico es quizá 10^{-9} C, más pequeña en un factor aproximado de 10^{14}. He aquí otra comparación: una carga de 1.37×10^5 C tardaría de 1 a 2 días en fluir por el filamento de una lámpara común. La materia ordinaria tiene una gran carga eléctrica.

* En la época de Franklin se pensaba que la carga eléctrica era una sustancia y que fluía como fluido continuo. Hoy sabemos que los fluidos están constituidos por átomos y moléculas individuales: la materia es discreta. Asimismo, el "fluido eléctrico" no es continuo sino discreto.

25-3 CONDUCTORES Y AISLANTES

Los materiales se clasifican generalmente atendiendo la capacidad de los electrones para fluir por ellos. En algunos, como los metales, los electrones pueden desplazarse con relativa libertad. Estos materiales reciben el nombre de *conductores*. Los electrones depositados en un lugar del material se mueven a través de él. Otros ejemplos de conductores son la llave de agua y el cuerpo humano.

En otros materiales los electrones apenas si pueden fluir. Los que se depositan en un lugar permanecerán allí. Se les conoce como *aislantes*. He aquí algunos ejemplos: vidrio, plástico y muchos materiales cristalinos, como el NaCl.

Si usted intenta cargar una varilla de cobre sosteniéndola en la mano y frotándola con piel, no lo logrará. Tal vez se transfieran los electrones de la varilla a la piel a causa de la fricción, pero otros fluirán fácilmente del cuerpo por la mano hasta la varilla para reemplazar los electrones que fueron extraídos. En consecuencia, con la fricción no se acumula una carga neta en la varilla. Podemos suponer que la Tierra posee un suministro infinito de electrones, algunos de los cuales entran en el cuerpo para sustituir los que pasaron a la varilla. Se dice que un objeto está *aterrizado* eléctricamente cuando existe un camino por donde los electrones pueden fluir entre un objeto y la Tierra.

Si, por el contrario, le ponemos una manija de plástico a la varilla de cobre, veremos que podemos crear una carga frotándola. La manija aislante bloquea el flujo de electrones entre la varilla y nuestro cuerpo.

Los átomos aislados de un material conductor, como el cobre, generalmente contienen electrones no ligados firmemente que podemos desprender con facilidad, dejando un ion con carga positiva. Cuando los átomos de cobre se combinan para formar cobre sólido, esos electrones no permanecen adheridos a los átomos individuales, sino que pueden vagar libremente por el material. Se les conoce como *electrones de conducción;* en el cobre, un conductor típico, hay unos 10^{23} electrones de conducción por cm^3. Los iones con carga positiva no pueden desplazarse libremente y permanecen fijos dentro de la sólida estructura de la red del cobre.

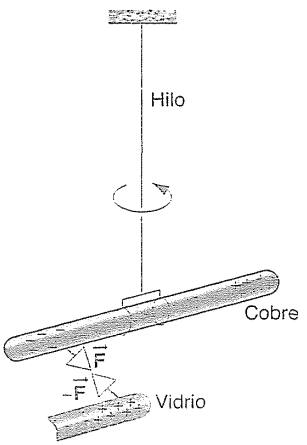


FIGURA 25-4. Una varilla cargada de signo positivo o negativo atrae ambos extremos de una varilla de cobre aislada y sin carga. En este caso los electrones de conducción de la varilla de cobre son atraídos hacia el extremo cercano a ella, dejando el extremo lejano con una carga positiva neta.

El experimento de la figura 25-4 demuestra la movilidad de la carga en un conductor. Una varilla de cobre, sin carga, se cuelga de un hilo aislante. Cuando acercamos una varilla de vidrio con carga positiva a un extremo de la de cobre, los electrones móviles de conducción de este material son atraídos por las cargas positivas en la varilla de vidrio. El flujo de electrones hacia un extremo de la varilla de cobre deja al otro con una deficiencia de electrones y con una carga positiva neta. El extremo con carga negativa de la varilla de cobre y la de vidrio de carga positiva ejercen fuerzas recíprocas de atracción. Nótese que esta situación es muy distinta a la de la figura 25-2; en la figura 25-4 la varilla de vidrio atrae a la varilla de cobre que no lleva carga neta. (Como veremos en la siguiente sección, la fuerza eléctrica depende inversamente de la separación entre las cargas; por tanto, la fuerza de atracción entre la varilla de vidrio y el extremo negativo de la varilla de cobre es mucho más fuerte que la fuerza de repulsión existente entre la varilla de vidrio y el extremo positivo de la varilla de cobre.)

Si, en vez de la varilla de vidrio con carga positiva de la figura 25-4, usáramos una varilla de plástico con carga negativa, el efecto sería el mismo: una fuerza de atracción entre el plástico y el cobre. En este caso el plástico de carga negativa repelería los electrones de conducción del cobre, dejando un extremo del material con una carga positiva. Habría entonces una fuerza de atracción entre el plástico de carga negativa y el extremo con carga positiva de la varilla de cobre.

También es posible tener una fuerza de atracción entre un cuerpo cargado y un aislante no cargado. La figura 25-5*a* muestra un peine cargado que atrae trozos no cargados de papel. La explicación de la atracción es distinta de la explicación de la atracción entre la varilla de vidrio y la de cobre. En este caso, el papel es un aislante y no es posible que los electrones se acumulen en un extremo de él (como sucedió con el conductor en la Fig. 25-4). Por el contrario, los electrones de las moléculas individuales de los trozos de papel son repelidos por el peine de carga negativa; de ahí que, los electrones se sitúen preferentemente al lado de las moléculas alejadas del peine. En ellas, el extremo positivo (en el que faltan electrones) está más cerca del peine y experimenta una fuerza mayor de atracción hacia él. Es la causa de la fuerza neta de atracción entre los dos objetos (Fig. 25-5*b*). La misma fuerza de atracción habría tenido lugar si el peine tuviera carga positiva.

Se da el nombre de *polarización* a la separación de la carga positiva y negativa en un objeto aislado bajo la influencia de un objeto cargado cercano. La polarización puede ocurrir a nivel macroscópico, como en la varilla de cobre de la figura 25-4, o a nivel molecular, como en la figura 25-5.

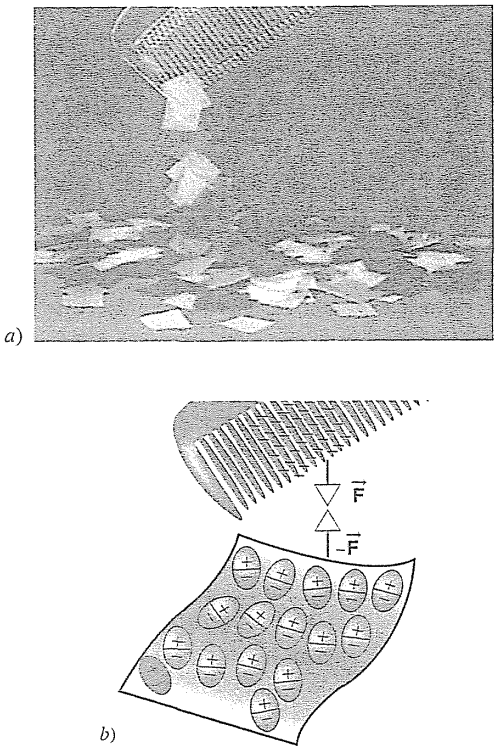


FIGURA 25-5. *a*) Un peine cargado atrae pedazos no cargados de papel. (*b*) El peine de carga negativa polariza las cargas de las moléculas, produciendo una fuerza de atracción entre el peine y el papel.

Carga por contacto y por inducción

Supóngase que ahora tocamos con una varilla de vidrio de carga positiva una varilla de cobre sin carga, como en la figura 25-6. Los electrones fluirán del cobre para neutralizar la carga positiva del vidrio. Sin embargo, debido a que los electrones no fluyen por el vidrio, pueden neutralizar sólo las cargas positivas situadas en el punto de contacto con el cobre. Si queremos eliminar los electrones adicionales en el cobre, podemos limpiar frotando la varilla de vidrio a lo largo de la de cobre; transferiremos así los electrones a las áreas no neutralizadas del vidrio que entran en contacto con el cobre (Fig. 25-6*a*). Si después extraemos la varilla de vidrio, el cobre tendrá una deficiencia de electrones y, en consecuencia, una carga positiva neta. Los electrones fluirán a través del cobre, de modo que las cargas positivas (los núcleos de iones) estarán distribuidos uniformemente en la superficie del cobre. *Carga por contacto* es el nombre que se da a esta transferencia directa de la carga de un objeto a otro. Aun cuando se transfieren los electrones negativos, a menudo conviene considerar el experimento de la figura 25-6 como si se transfiriesen cargas positivas de la varilla de vidrio a la de cobre.

Retomemos la situación de la figura 25-4. Si colocamos un alambre entre el extremo positivo del cobre y la tierra (como en la Fig. 25-7*a*), los electrones fluirán desde tierra para

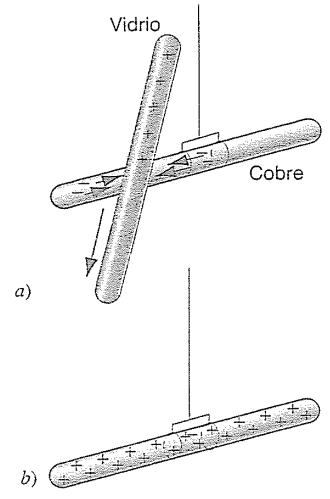


FIGURA 25-6. *a*) Carga por contacto. Los electrones fluyen del cobre para neutralizar las cargas positivas en el punto de contacto con el vidrio. *b*) Carga resultante en el cobre cuando se quita el vidrio.

neutralizar la carga positiva del cobre. Si dejamos la varilla de vidrio en su sitio y luego quitamos la conexión a tierra, la varilla de cobre conservará una carga negativa neta. Si después quitamos la varilla de vidrio, las cargas negativas se distribuirán sobre la superficie del cobre (Fig. 25-7*b*) para separarse lo más posible una de otra. Este método de cargar un objeto recibe el nombre de *carga por inducción*. Nótese que hemos logrado utilizar la varilla de vidrio cargada positivamente para transferir la carga positiva al cobre por contacto o la carga negativa (desde tierra) por inducción.

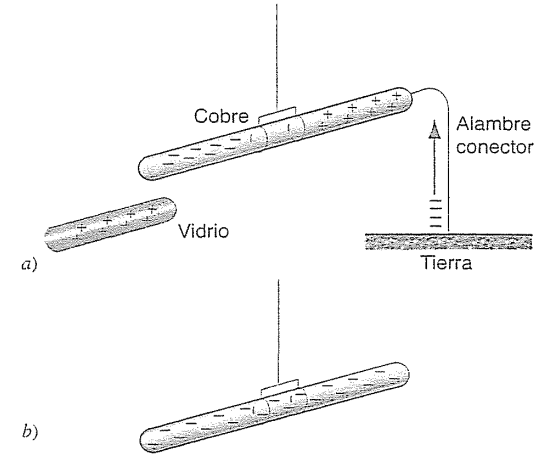


FIGURA 25-7. *a*) Carga por inducción. Los electrones fluyen de tierra para neutralizar la carga positiva en el extremo opuesto de la varilla de cobre. *b*) Carga resultante en el cobre cuando se quita el vidrio.

25-4 LEY DE COULOMB

Hasta ahora, en este capítulo, hemos establecido que existen dos clases de carga eléctrica y que las cargas ejercen fuerza una sobre otra. Ahora nuestro objetivo es entender la naturaleza de esta fuerza.

Los primeros experimentos cuantitativos exitosos con que se estudió la fuerza entre cargas eléctricas fueron realizados por Charles Augustin Coulomb (1736-1806), quien midió las atracciones y repulsiones eléctricas deduciendo la ley que las rige. En principio su aparato se parece al de la figura 25-2, salvo Coulomb que empleó pequeñas esferas cargadas, las cuales se indican con las letras *a* y *b* en la figura 25-8.

Si las esferas *a* y *b* están cargadas, la fuerza eléctrica en *a* tiende a retorcer la fibra de suspensión. Coulomb anuló el efecto de torsión girando la cabeza de suspensión por el ángulo θ necesario para mantener cierta separación entre las dos cargas. Entonces, el ángulo θ es una medida relativa de la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga *a*. El aparato de la figura 25-8 es una *balanza de torsión*; Cavendish utilizó más tarde un dispositivo similar para medir las atracciones gravitacionales (Sec. 14-3).

Los experimentos de Coulomb y de sus contemporáneos demostraron que la fuerza eléctrica ejercida por un cuerpo cargado sobre otro depende directamente del producto de sus magnitudes e inversamente del cuadrado de su separación. En otras palabras,

$$F \propto \frac{|q_1||q_2|}{r^2}.$$

Aquí, F es la magnitud de la fuerza mutua que opera sobre las dos cargas q_1 y q_2, y r la distancia entre sus centros. La fuerza

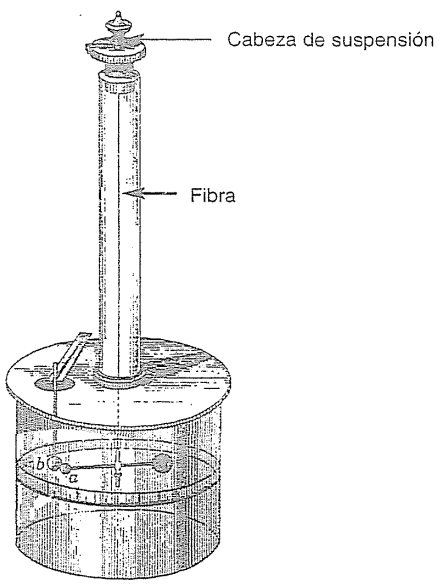


FIGURA 25-8. Balanza de torsión de Coulomb, tomado de su memoria presentada en 1785 a la Academia de Ciencias de París.

en una carga debido a la otra actúa en la línea que las conecta. Tal como lo establece la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida por q_1 sobre q_2 tiene la misma magnitud pero dirección opuesta a la fuerza ejercida por q_2 sobre q_1, a pesar de que la magnitud de las cargas puede ser distinta.

Para convertir la proporcionalidad anterior en una ecuación, se introduce una constante de proporcionalidad K, que llamaremos constante de Coulomb. Para la fuerza entre las cargas, obtenemos así:

$$F = K\frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \tag{25-2}$$

La ecuación 25-2, conocida como *ley de Coulomb,* generalmente se cumple exclusivamente con objetos cargados cuyo tamaño es mucho menor que la distancia entre ellos. A menudo se dice que esta ecuación se aplica sólo a *cargas puntuales.*

La aceptación de la ley de Coulumb no se funda cuantitativamente en los experimentos de Coulomb. Tales mediciones no podrían, por ejemplo, convencernos de que el exponente de r en la ecuación 25-2 es exactamente 2 y no, digamos, 2.0001. En la sección 27-7 demostraremos que la ley también puede deducirse de un experimento directo, el cual prueba que si el exponente de la ecuación 25-2 no es exactamente 2, su diferencia será a lo más de 1×10^{-16}.

La ley de Coulomb nos recuerda la ley de cuadrados inversos de la gravitación de Newton, $F = Gm_1m_2/r^2$, que ya tenía 100 años en la época de los experimentos de Coulomb. Ambas son leyes de cuadrados inversos, y la carga q desempeña la misma función en la ley de Coulomb que la masa m en la ley de gravitación. Una diferencia entre ellas es que las fuerzas gravitacionales siempre son atractivas, mientras que las electrostáticas pueden ser atractivas o repulsivas, dependiendo, de si las dos cargas tienen signos iguales u opuestos.

En el Sistema Internacional de Unidades, la constate K se expresa de la siguiente manera:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \tag{25-3}$$

Aunque la selección de esta forma de la constante K parece hacer innecesariamente compleja la ley de Coulumb, pero termina por simplificar las fórmulas del electromagnetismo que se emplean más que la ley.

La constante ϵ_0, que se conoce como *constante eléctrica* (o *permitividad*), tiene un valor que depende del valor de la velocidad de la luz, según veremos en el capítulo 39. Su valor exacto es

$$\epsilon_0 = 8.85418781762 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}.$$

La constante de Coulomb K tiene el valor correspondiente (hasta tres cifras significativas)

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}.$$

Con esta selección de la constante K, la ley de Coulomb puede escribirse así:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \tag{25-4}$$

Cuando K tiene el valor anterior, la fuerza en newtons se obtiene expresando q en coulombs y r en metros.

La importancia de la ley de Coulomb trasciende la mera descripción de las fuerzas ejercidas por las esferas cargadas una sobre otra. Esta ley, cuando la incorporamos a la estructura de la física cuántica, describe correctamente 1) las fuerzas eléctricas que unen los electrones de un átomo a su núcleo, 2) las fuerzas que enlazan los átomos para que formen moléculas y 3) las fuerzas que ligan átomos y moléculas para que formen sólidos o líquidos. Así pues, la mayor parte de las fuerzas en la experiencia cotidiana que no son gravitacionales son eléctricas.

PROBLEMA RESUELTO 25-2. En el problema resuelto 25-1 vimos que un centavo de cobre contiene cargas positivas y negativas, cada una con una magnitud de 1.37×10^5 C. Supóngase que podamos concentrarlas en dos bultos independientes, mantenidos a una distancia de 100 metros. ¿Qué fuerza de atracción operará sobre cada uno?

Solución Con base en la ecuación 25-4 tenemos

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|^2}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1.37 \times 10^5\ \mathrm{C})^2}{(100\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 1.69 \times 10^{16}\ \mathrm{N}.$$

¡Alrededor de 2×10^{12} toneladas de fuerza! Aun cuando las cargas estuvieran a una distancia de 1 diámetro terrestre, la fuerza de atracción seguiría siendo de unas 120 toneladas. En este cálculo hemos eludido el problema de formar las cargas individuales en un bulto cuyas dimensiones sean pequeñas en comparación con su separación. Si alguna vez pueden formarse los bultos, los desharán las fuerzas mutuas de repulsión de Coulomb.

Este problema resuelto nos da una lección: no es posible perturbar mucho la neutralidad eléctrica de la materia común. Si se intenta extraer una parte considerable de la carga contenida en un cuerpo, de modo automático aparece una gran fuerza de Coulomb que tiende a recuperarla.

PROBLEMA RESUELTO 25-3. La distancia promedio r entre el electrón y el protón del átomo de hidrógeno es 5.3×10^{-11}m. *a*) ¿Qué magnitud tiene la fuerza electrostática promedio que actúa entre las dos partículas? *b*) ¿Qué magnitud tiene la fuerza gravitacional promedio que opera entre ellas?

Solución *a*) En el caso de la fuerza electrostática, conforme a la ecuación 25-4 tenemos

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(5.3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 8.2 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}.$$

Aunque esta fuerza puede parecer pequeña (equivale más o menos al peso de una mancha de polvo), produce una enorme aceleración del electrón dentro del átomo: 10^{23} m/s^2 aproximadamente.

b) En el caso de la fuerza gravitacional tenemos

$$F_g = G\frac{m_e m_p}{r^2}$$

$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})}{(5.3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 3.6 \times 10^{-47}\ \mathrm{N}.$$

Vemos que la fuerza gravitacional es más débil que la electrostática por un factor aproximado de 10^{39}. Pese a ello siempre es una fuerza de atracción. En consecuencia, puede acumular masas muy grandes, como sucede en la formación de estrellas y galaxias, de modo que pueden originarse importantes fuerzas gravitacionales. Por el contrario, la fuerza electrostática repele las cargas del mismo signo; así que es imposible acumular una fuerte concentración de carga positiva o negativa. Siempre hay que mantener unidos ambos tipos de carga, a fin de que se compensen entre sí. Las cargas que acostumbramos en la vida diaria son pequeñas perturbaciones de este equilibrio tan avasallador.

PROBLEMA RESUELTO 25-4. El núcleo de un átomo de hierro tiene un radio aproximado de 4×10^{-15} y contiene 26 protones. ¿Qué fuerza electrostática de repulsión opera entre dos protones del núcleo si se hallan a una distancia de un radio?

Solución De acuerdo con la ecuación 25-4 tenemos

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(4 \times 10^{-15}\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 14\ \mathrm{N}.$$

La gran fuerza electrostática de repulsión de más de 3 lb, que actúa sobre un solo protón, ha de ser equilibrada por la fuerza nuclear de atracción que mantiene unido al núcleo. Esta fuerza, cuyo alcance es tan corto que sus efectos no se sienten muy lejos del núcleo, se conoce como "fuerza nuclear fuerte", nombre que la describe a la perfección.

Ley de Coulomb: forma vectorial

Hasta ahora nos hemos ocupado exclusivamente de la magnitud de la fuerza ejercida por una carga sobre otra, la cual calculamos basándonos en la ley de Coulomb. La fuerza también posee propiedades direccionales por ser un vector. En el caso de esta ley, su dirección la determina el signo relativo de las dos cargas eléctricas.

Como se aprecia en la figura 25-9, supóngase que hay dos cargas puntuales q_1 y q_2 separadas por una distancia r_{12}. Supongamos, por ahora, que las dos cargas tienen el mismo signo y que, por lo mismo, se repelen. Consideremos la fuerza que la partícula 2 *ejerce sobre* la partícula 1, fuerza que escribimos en la forma habitual como $\vec{F}_{12}$. El vector de posición que ubica la partícula 1 en relación con la partícula 2 es $\vec{r}_{12}$; en otras palabras, si tuviéramos que definir el origen de nuestro sistema coordenado en el lugar de la partícula 2, $\vec{r}_{12}$ sería el vector de posición de la partícula 1.

Si las dos cargas tienen el mismo signo, la fuerza será de repulsión y, como se advierte en la figura 25-9*a*, $\vec{F}_{12}$ ha de ser paralela a $\vec{r}_{12}$. Si las cargas tienen signos opuestos, como en la figura 25-9*b*, la fuerza $\vec{F}_{12}$ será de atracción y paralela a $\vec{r}_{12}$. En uno y otro caso podemos representarla así

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}. \qquad (25\text{-}5)$$

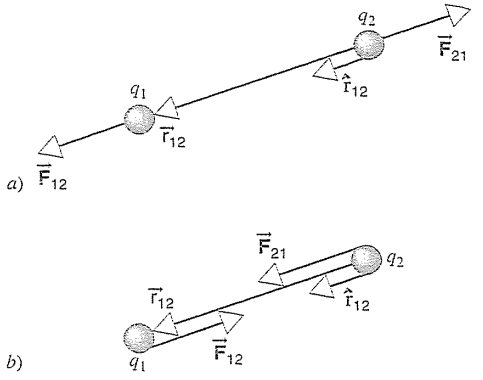


FIGURA 25-9. *a*) Dos cargas puntuales q_1 y q_2 del mismo signo ejercen fuerzas iguales y opuestas de repulsión una sobre otra. El vector $\vec{r}_{12}$ sitúa q_1 en relación con q_2, y el vector unitario $\hat{r}_{12}$ señala en la dirección de $\vec{r}_{12}$. Nótese que $\vec{F}_{12}$ es paralelo a $\vec{r}_{12}$. *b*) Ahora las dos cargas tienen signos opuestos y la fuerza es de atracción. Adviértase que $\vec{F}_{12}$ es antiparalela a $\vec{r}_{12}$.

Aquí r_{12} representa la magnitud del vector $\vec{r}_{12}$ y $\hat{r}_{12}$, e indica el *vector unitario* en la dirección de $\vec{r}_{12}$. Esto es,

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \tag{25-6}$$

Hemos utilizado una forma similar a la ecuación 25-5 para expresar la fuerza gravitacional (véanse las Ecs. 14-2 y 14-3).

Otra característica salta a la vista en la figura 25-9. Conforme a la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida *sobre* la partícula 2 *por* la partícula 1, $\vec{F}_{21}$, es opuesta a $\vec{F}_{12}$. Así pues, esta fuerza se expresa exactamente en la misma forma:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}. \tag{25-7}$$

Aquí $\hat{r}_{21}$ es un vector unitario que apunta de la partícula 1 a la 2, es decir, sería el vector unitario en dirección de la partícula 2 si las coordenadas tuvieran su origen en el sitio de la partícula 1.

La forma vectorial de la ley de Coulomb es útil porque contiene la información direccional alrededor de $\vec{F}$ e indica si la fuerza atrae o repele. Su empleo es importantísimo cuando se trata de fuerzas que operan sobre más de dos cargas. En este caso, la ecuación 25-5 se aplicará a los pares de ellas, y la fuerza total de una se calculará tomando la suma *vectorial* de las fuerzas debidas a cada una de las cargas restantes. Por ejemplo, la fuerza sobre la partícula 1 en un sistema sería

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \cdots, \tag{25-8}$$

donde $\vec{F}_{12}$ es la fuerza sobre la partícula 1 proveniente de la partícula 2, $\vec{F}_{13}$ es la fuerza sobre la partícula 1 proveniente de la partícula 3 y así sucesivamente. La ecuación 25-8 es la representación matemática del *principio de superposición* aplicado a las fuerzas eléctricas. Establece que la fuerza que opera sobre una carga debido a otra no depende de la presencia o ausencia de otras cargas; por tanto, puede calcularse por separado en cada par de cargas y luego servirse de su suma vectorial para obtener la fuerza neta en cualquiera de ellas. Así, la presencia de la partícula 2 no afecta en absoluto a la fuerza $\vec{F}_{13}$ que la partícula 3 ejerce sobre la partícula 1. El principio de superposición no es de ninguna manera evidente y puede no cumplirse tratándose de fuerzas eléctricas muy intensas. Su aplicabilidad sólo se verifica por medio de experimentos. Pero sí se cumple en todos los casos presentados en este libro.

PROBLEMA RESUELTO 25-5. La figura 25-10 muestra tres partículas cargadas, que se mantienen en su sitio por fuerzas que no se ven en ella. ¿Qué fuerza electrostática, debido a las otras dos caras, actúa sobre q_1? supóngase $q_1 = -1.2\ \mu C$, $q_2 = +3.7\ \mu C$, $q_3 = -2.3\ \mu C$, $r_{12} = 15$ cm, $r_{13} = 10$ cm y $\theta = 32°$.

Solución En este problema se aplica el principio de superposición. Comenzamos calculando la magnitud de las fuerzas que q_2 y q_3 ejercen sobre q_1. Las sustituimos en la ecuación 25-5:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2}$$

$$= \frac{(8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.2 \times 10^{-6}\ \text{C})(3.7 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.15\ \text{m})^2}$$

$$= 1.77\ \text{N}.$$

Las cargas q_1 y q_2 tienen signos opuestos, por lo cual la fuerza ejercida por q_2 sobre q_1 es de atracción. Por tanto, $\vec{F}_{12}$ apunta a la derecha en la figura 25-10.

También tenemos

$$F_{13} = \frac{(8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.2 \times 10^{-6}\ \text{C})(2.3 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.10\ \text{m})^2}$$

$$= 2.48\ \text{N}.$$

Estas dos cargas tienen el mismo signo (negativo) y, por lo mismo, la fuerza ejercida por q_3 sobre q_1 es de repulsión. Así $\vec{F}_{13}$ apunta hacia la derecha, como se indica en la figura 25-10.

Los componentes de la fuerza resultante $\vec{F}_1$ que actúa sobre q_1, están determinados por los componentes correspondientes de la ecuación 25-8, o sea

$$F_{1x} = F_{12x} + F_{13x} = F_{12} + F_{13}\,\text{sen}\,\theta$$

$$= 1.77\ \text{N} + (2.48\ \text{N})(\text{sen}\,32°) = 3.08\ \text{N}$$

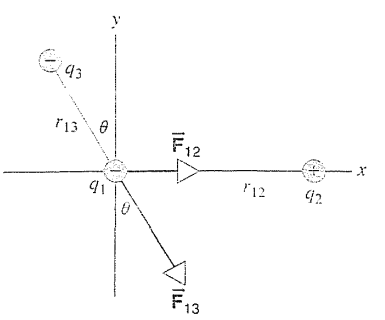


FIGURA 25-10. Problema resuelto 25-5. Las tres cargas ejercen tres pares de fuerzas de acción reacción una sobre otra. Se muestran sólo las dos fuerzas que operan sobre q_1.

y

$$F_{1y} = F_{12y} + F_{13y} = 0 - F_{13}\cos\theta$$
$$= -(2.48\ \text{N})(\cos 32°) = -2.10\ \text{N}.$$

Por medio de los componentes anteriores, puede demostrarse que la magnitud de $\vec{F}_1$ es 3.73 N y que este vector forma un ángulo de $-34°$ con el eje x.

25-5 DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

Hasta ahora hemos visto cómo calcular las fuerzas debidas a cargas puntuales. Pero en muchas aplicaciones las fuerzas son ejercidas por objetos cargados, como varillas, placas o sólidos. Para simplificar la exposición supondremos que los objetos son aislantes y que la carga se esparce por su superficie, o volumen, formando una *distribución continua de carga.*

La figura 25-2 mostró las fuerzas que una varilla cargada ejerce sobre otra. La ley de Coulomb se aplica sólo a las cargas puntuales; así que no podemos emplearla en esta forma para calcular la fuerza que una varilla cargada ejerce sobre otra. Es posible imaginar que estén cubiertas con cargas puntuales y calcular, con la ley de Coulomb, la fuerza ejercida por las cargas de una varilla sobre las cargas de la otra varilla; sólo que el procedimiento resultaría demasiado complicado: si las varillas tienen la carga pequeña de apenas 1 nC, habría que considerar 10^{10} cargas puntuales en cada una.

Optamos por retomar una idea de la época de Benjamin Franklin y concebir la carga como una propiedad continua. El procedimiento básico consiste en dividirla en elementos infinitesimales y usar los métodos de cálculo para obtener la fuerza total debida a todos ellos.

Si un objeto contiene una carga neta q, imaginemos que se divide en muchos elementos pequeños dq. Cada uno posee cierta longitud, superficie o volumen, según que consideremos cargas que se distribuyen, respectivamente, en una, dos o tres dimensiones. Expresamos dq en función del tamaño del elemento y de la *densidad de carga,* que describe cómo se distribuyen las cargas en la longitud, superficie o volumen del objeto. En la generalidad de los problemas incluidos en el libro, las cargas estarán distribuidas uniformemente en el objeto, lo cual significa que la densidad posee el mismo valor en todas sus partes.

En algunas situaciones, las cargas se distribuyen en una dimensión, como las delgadas varillas cargadas de la figura 25-2. En este caso expresamos dq atendiendo a la *densidad lineal de carga* (carga por unidad de longitud) λ, cuya unidad básica es C/m. Un elemento pequeño de la varilla con una longitud dx tiene una carga dq dada por

$$dq = \lambda\, dx. \tag{25-9}$$

Si la varilla presenta una carga uniforme de modo que una carga total q se distribuya uniformemente por su longitud L, entonces $\lambda = q/L$. Por ejemplo, una varilla de longitud $L = 0.12$ m que lleva una carga distribuida uniformemente de $q = 5.4 \times 10^{-6}$ tendrá una densidad lineal de carga de $\lambda = q/L = 4.5 \times 10^{-5}$ C/m. Un pedazo pequeño de ella con una longitud $dx = 1.0$ mm tendrá una carga $dq = \lambda\, dx = 4.5 \times 10^{-8}$ C.

En otros casos la carga podría estar distribuida en una superficie bidimensional, digamos la superficie del bastidor portador de la figura 25-3. En este caso, dq se expresa a partir de la *densidad superficial de carga* (carga por unidad de superficie) σ, medida en la unidad de C/m^2 del SI. Entonces un elemento pequeño de la superficie dA tendría una carga dada por

$$dq = \sigma\, dA. \tag{25-10}$$

Si una carga q se distribuye uniformemente en un área de superficie A, entonces $\sigma = q/A$.

La carga también podría distribuirse en todo el volumen de un objeto tridimensional. En tal caso se utiliza la *densidad volumétrica de carga* (carga por unidad de volumen) ρ, cuya unidad es C/m^3 en el SI. Entonces la carga dq en un elemento de volumen dV sería

$$dq = \rho\, dV. \tag{25-11}$$

Si la carga q se distribuye uniformemente en todo el volumen V, entonces $p = q/V$.

Para ejemplificar los conceptos anteriores calcularemos expresiones referentes a la fuerza que sobre una carga puntual q_0 ejerce una distribución continua de carga. Al ampliar estos métodos es posible calcular la fuerza ejercida por una distribución de carga continua sobre otra.

El procedimiento con que se calcula la fuerza que este tipo de distribución ejerce sobre una carga puntual es el siguiente:

1. Se supone que la distribución continua está dividida en muchos elementos pequeños de carga.

2. Se selecciona un elemento arbitrario y se expresa su carga dq a partir de las ecuaciones 25-9, 25-10 o 25-11, según que se distribuya en una línea, en una superficie o volumen, respectivamente.

3. Por ser dq infinitesimalmente pequeña, se la trata como una carga puntual. Se expresa la magnitud del elemento de fuerza dF ejercido por la carga dq sobre la carga q_0 en función de la ley de Coulomb, ecuación 25-4:

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|dq||q_0|}{r^2}, \tag{25-12}$$

donde r es la distancia entre dq y q_0.

4. Se tienen en cuenta los signos y la ubicación de dq y de q_0 para determinar la dirección del elemento de fuerza $d\vec{F}$.

5. Luego se calcula la fuerza total, sumando todos sus elementos infinitesimales, que implica la integral

$$\vec{F} = \int d\vec{F}. \tag{25-13}$$

Al calcular esta integral se necesita normalmente recordar que los elementos de carga dq pueden producir elementos de fuerza $d\vec{F}$ en diversas direcciones. La ecuación 25-13, en rea-

lidad, significa tres ecuaciones distintas para los tres componentes de $\vec{F}$:

$$F_x = \int dF_x, \qquad F_y = \int dF_y, \qquad F_z = \int dF_z. \quad (25\text{-}14)$$

En ocasiones puede recurrirse a los argumentos basados en la simetría para no calcular una o dos de estas integrales.

Línea con carga uniforme

La figura 25-11 muestra una delgada varilla de longitud L que se halla sobre el eje z y que tiene una carga positiva q, distribuida uniformemente de modo que la densidad lineal de carga es $\lambda = q/L$. Queremos calcular la fuerza que la varilla ejerce sobre la carga puntual positiva q_0 ubicada en la bisectriz perpendicular de la varilla (el eje positivo y), a una distancia y de su centro.

La figura muestra los resultados obtenidos al efectuar los pasos 1, 2 y 3 del procedimiento. Imaginamos que la varilla está dividida en elementos pequeños de longitud dz. Un elemento arbitrario de carga $dq = \lambda\, dz$ se halla situado a una distancia z de su centro y ejerce una fuerza dF sobre q_0, donde

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 dq}{r^2}.$$

La dirección de la fuerza $d\vec{F}$ aparece en la figura. La fuerza $d\vec{F}$ no tiene componentes en la dirección x (perpendicular a la página), así que $F_x = 0$. También podemos recurrir a un argumento de simetría para probar que $F_z = 0$. Por cada elemento de carga dq ubicado en la posición $+z$, hay otro elemento de carga ubicado en $-z$. Cuando sumamos las fuerzas provenientes de los elementos de carga en $+z$ y en $-z$, encontramos que los componentes z tienen igual magnitud pero que señalan en dirección opuesta; por tanto, su suma es igual a cero. Como la carga q_0 se encuentra en el plano medio de la varilla, esta cancelación ocurrirá con todos los pares de elementos de carga en toda la longitud de la varilla. Podemos, pues, concluir que $F_z = 0$.

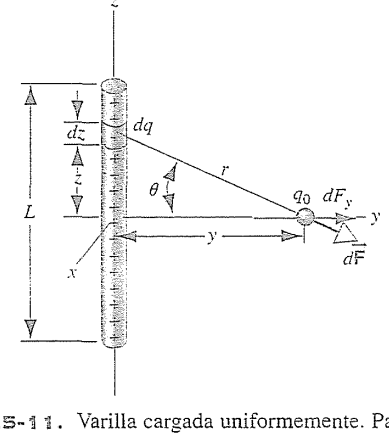


FIGURA 25-11. Varilla cargada uniformemente. Para calcular la fuerza ejercida sobre la carga puntual q_0, se supone que la varilla consta de muchos elementos individuales de carga, como dq.

Sólo queda por calcular F_y. El elemento $dF_y = dF\cos\theta$ se muestra en la figura 25-11. Con $dq = \lambda\, dz$, $r^2 = y^2 + z^2$ y $\cos\theta = y/r$, tenemos

$$dF_y = dF\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0\lambda\, dz}{(y^2+z^2)}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$F_y = \int dF_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0\lambda y \int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Al calcular la integral (consúltese el Ap. I y observe que y es una constante), obtenemos

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q}{y\sqrt{y^2 + L^2/4}}. \quad (25\text{-}15)$$

Esta fuerza sigue la dirección y positiva cuando q_0 y q son positivas. Si movemos la carga q_0 a otra posición del plano xy, cambia la expresión de la fuerza (Ej. 14).

A menudo resulta esclarecedor evaluar expresiones como la anterior en varios casos límite. Examinemos el resultado cuando $y >> L$, en este caso la fuerza se convierte en

$$F_y \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q}{y^2},$$

precisamente la expresión de la fuerza de una carga puntual sobre otra. La varilla se parece a una carga puntual cuando estamos muy lejos de la varilla cargada o cuando la varilla es muy pequeña.

Anillo con carga

En la figura 25-12 vemos un anillo delgado de radio R que tiene una carga positiva q distribuida uniformemente, de manera que la densidad de carga lineal es $\lambda = q/2\,\pi R$. Queremos calcular la fuerza que ejerce el anillo sobre la carga puntual positiva q_0, ubicada en el eje del anillo (que consideraremos como el eje positivo x), a una distancia z del centro del anillo. Un elemento del anillo con carga pequeña tiene una longitud

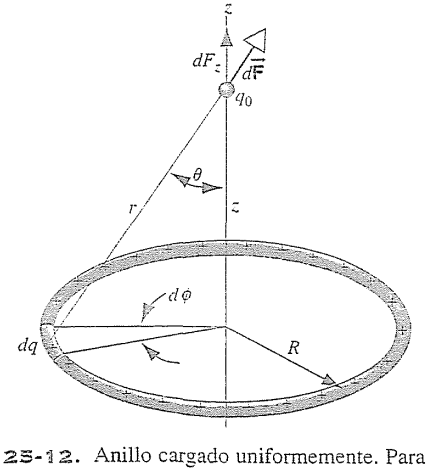


FIGURA 25-12. Anillo cargado uniformemente. Para calcular la fuerza ejercida sobre una carga puntual q_0, se supone que el anillo consta de muchos elementos individuales de carga, como dq.

$R\,d\phi$ y, en consecuencia, porta una carga $dq = \lambda R\,d\phi$. La fuerza dF ejercida sobre q_0 por dq es

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0\lambda R\,d\phi}{(z^2+R^2)}.$$

Podemos servirnos de un argumento de simetría para probar que la única componente no cero de $\vec{F}$ es su componente z. Por cada elemento dq del anillo, habrá otro elemento de igual carga dq en el extremo opuesto de un diámetro que cruza el centro del anillo; cuando se suman los elementos de fuerza sobre q_0 provenientes de los dos elementos, se cancelarán todos los componentes de la fuerza, excepto F_z. Con $\cos\theta = z/r$, tenemos

$$\begin{aligned} F_z &= \int dF_z = \int dF\cos\theta \\ &= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0\lambda R\,d\phi}{(z^2+R^2)}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi. \end{aligned}$$

La integral evaluada alrededor del anillo da 2π y, por tanto, el resultado final de la fuerza es

$$F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q z}{(z^2+R^2)^{3/2}}. \qquad (25\text{-}16)$$

¿Es válido el resultado anterior si q_0 se halla en el eje z negativo? (Ej. 15.)

Este resultado podemos examinarlo como $z \to \infty$ para $z \gg R$ en el caso límite y obtenemos

$$F_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q}{z^2},$$

expresión que vuelve a darnos el resultado de las cargas puntuales. Aparecerá como un carga puntual cuando estemos muy lejos del anillo.

Nótese, asimismo, que $F_z = 0$ para $z = 0$. Esto es razonable porque en el centro del anillo los elementos constitutivos del anillo empujarán la carga q_0 en todas direcciones.

Disco con carga

En la figura 25-13 se muestra un disco circular de radio R que porta una carga positiva q distribuida uniformemente en su superficie, de modo que la densidad de carga superficial es $\sigma = q/\pi R^2$. Una carga puntual positiva q_0 se halla en el eje del disco (el eje positivo z), a una distancia z del centro del disco. Para calcular la fuerza que ejerce el disco sobre la carga puntual, podemos dividirlo en una serie de anillos concéntricos. La carga en el anillo, de radio w y de espesor dw, que aparece en la figura 25-13, es $dq = \sigma\,dA = \sigma(2\pi w\,dw) = 2\pi\sigma w\,dw$. La fuerza que sobre dF_z ejerce este anillo se calcula por medio de la ecuación 25-16, reemplazando q por dq y R por w:

$$dF_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0(2\pi\sigma w\,dw)z}{(z^2+w^2)^{3/2}}.$$

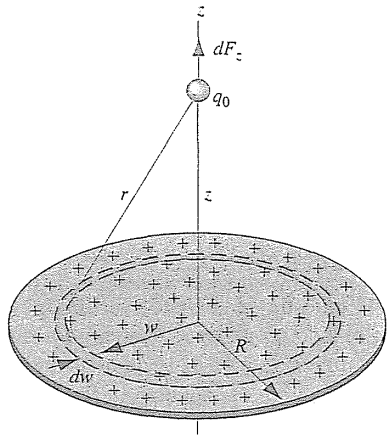


FIGURA 25-13. Disco circular que porta una densidad de carga superficial uniforme. La fuerza ejercida sobre una carga puntual q_0 se calcula dividiendo el disco en delgados anillos circulares.

Si queremos sumar los elementos de fuerza procedentes de todos los anillos, integramos cuando w varía de 0 a R:

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 2\pi\sigma z\int_0^R \frac{w\,dw}{(z^2+w^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q_0 q}{R^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right). \end{aligned} \qquad (25\text{-}17)$$

Nótese que la integral tiene la forma $\int u^{-3/2}$, la cual puede calcularse directamente. ¿Cómo se distinguirá la ecuación anterior cuando $z < 0$ (Ej. 15). Dado que $z \to \infty$, puede utilizarse la expansión binomial (consúltese el Ap. 1) para demostrar que esta expresión se reduce a la ley de Coulomb aplicada a las cargas puntuales.

En los tres ejemplos precedentes hemos supuesto que todas las cargas son positivas. Si la carga puntual, o el objeto extendido (pero no ambos) porta carga negativa, la dirección de la fuerza es opuesta a la que se observa en las figuras 25-11 a 25-13.

PROBLEMA RESUELTO 25-6. Dos discos circulares de radio R = 5.0 cm están a una distancia de 6.0 cm en un eje vertical común. Llevan cargas eléctricas iguales en magnitud pero contrarias en signo, distribuidas uniformemente a lo largo de su superficie. ¿Cuánta carga q debe colocarse en cada disco para suspender una pequeña gota de aceite de masa 4.0×10^{-15} kg y de carga $-e$ en un punto del eje de los discos y en medio de ellos?

Solución Supongamos que la parte superior del disco tiene carga positiva y que el fondo tiene carga negativa. Entonces la parte superior atrae la gota y el fondo la repele. Puesto que la gota se encuentra a la mitad de ellos, las fuerzas tendrán la misma magnitud F_z dada por la ecuación 25-17. Para mantenerla en equilibrio, es necesario que la fuerza electrostática ascendente neta $2F_z$ sea igual a su peso mg. Si hacemos iguales las dos fuerzas y utilizamos la ecuación 25-17, obtenemos

$$q = \frac{mg}{\frac{4e}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)}.$$

Y resolviendo tenemos $q = 35$ nC.

Este método lo utilizó Robert A. Millikan en una serie de experimentos, iniciados en 1906, para medir la carga del electrón (Sec. 26-6).

Un caso especial

Existe un caso especial en el cual una distribución de carga continua puede tratarse como carga puntual, lo cual permite aplicar la ley de Coulumb en su forma de carga puntual. Se presenta cuando la carga se distribuye con simetría esférica. Dicho de otra manera, la densidad de carga volumétrica puede variar con el radio, pero la densidad es uniforme en un cascarón delgado sin importar su radio.

Primero consideraremos el caso de un cascarón esférico delgado. En la sección 14-5 mencionamos dos propiedades de la fuerza gravitacional que sobre una masa puntual ejerce un cascarón esférico uniforme, a saber: 1) la fuerza sobre una partícula dentro del cascarón es cero y 2) la fuerza sobre una partícula externa es la misma que si la masa del cascarón se concentrase totalmente en su centro.

La simetría entre las leyes de la fuerza gravitacional y electrostática (ambas dependen de $1/r^2$) nos permitirá hacer varias analogías entre la gravitación y la electrostática. A menudo podemos aplicar los resultados de la gravitación a la electrostática sin cálculos ni pruebas adicionales. Esto lo hacemos con las propiedades de los cascarones uniformes. Las pruebas de esos dos resultados tan importantes en la electrostática se deducen exactamente de las de la sección 14-5 aplicables a la fuerza gravitacional.

Un cascarón esférico de carga uniforme no ejerce fuerza electrostática sobre una carga puntual ubicada en cualquier parte del interior del cascarón.

Un cascarón esférico uniformemente cargado ejerce fuerza electrostática sobre una carga puntual ubicada fuera de dicho cascarón, como si la carga entera del cascarón estuviese concentrada en una carga puntual en su centro.

Existe una diferencia entre los casos gravitacional y electrostático: la fuerza gravitacional siempre es de atracción, pero la fuerza electrostática puede ser de atracción o de repulsión. Sin embargo, esta diferencia no afecta la transferencia de las dos reglas anteriores de la fuerza gravitacional a la electrostática.

Las dos reglas pueden servir para obtener una relación conexa que es válida con las distribuciones esféricas de carga. Supóngase que tenemos una distribución esférica donde la densidad de carga volumétrica ρ es constante o varía sólo en función del radio r. Podemos, pues, suponer que la esfera se compone de varios cascarones esféricos delgados. Cada cascarón está cargado uniformemente, esto es, la densidad de carga de un cascarón puede diferir de la de otro cascarón, pero en cada cascarón individual la carga esta distribuida de manera uniforme. Entonces podemos aplicar las dos reglas a todos los cascarones de la esfera. Si la carga de prueba se encuentra en algún lugar del interior de la esfera, según la primera regla, los cascarones de la carga no ejercen fuerza sobre ella. (Este resultado se usó con la fuerza gravitacional en el problema resuelto 14-14.) Si la carga de prueba se encuentra fuera de la esfera, todos los cascarones pueden ser reemplazados por una carga puntual en el centro; por consiguiente, la esfera puede reemplazarse íntegramente por una carga puntual igual a la carga total de la misma.

Por tal razón, la fuerza que el núcleo de un átomo ejerce sobre sus electrones generalmente no puede proporcionarnos información sobre la distribución de la carga positiva dentro del núcleo. En los núcleos esféricos donde la densidad de la carga depende sólo de r, *todas* las distribuciones suministran fuerzas idénticas a un electrón fuera del núcleo. No obstante, en ocasiones un electrón puede vagar *en su interior* y ofrecernos información referente a su distribución de carga positiva.

PROBLEMA RESUELTO 25-7. El núcleo esférico de cierto átomo contiene una carga positiva Ze en un volumen de radio R. Compare la fuerza que se ejerce sobre un electrón dentro del núcleo en el radio $0.5R$, con la fuerza de radio R en un núcleo donde *a*) la densidad de carga es constante en todo su volumen y donde *b*) aumenta en proporción directa con el radio r.

Solución *a*) En el núcleo de carga uniforme (que constituye una buena aproximación al comportamiento de muchos núcleos), la densidad de carga volumétrica es

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Cuando el electrón se halla en $r = R$, todo el núcleo puede sustituirse por una carga puntual $q = Ze$ ubicada en su centro, de modo que la fuerza $F(r)$ en $r = R$ es

$$F(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{R^2}.$$

Cuando el electrón se encuentra en $r = R/2$, la carga en todos los radios más grandes no ejerce fuerza alguna sobre el electrón (según lo establece la primera regla de los cascarones esféricos). La carga dentro de $R/2$ puede reemplazarse con una carga puntual. ¿Cuánta carga está contenida en el interior hasta $R/2$? Puesto que el volumen de una esfera depende de r^3, el volumen en el interior de $r = R/2$ es $(1/2)^3 = 1/8$ de su volumen. Por tanto, la carga dentro de $r = R/2$ es 1/8 de la carga de toda la esfera; así concluimos que

$$\frac{F(R/2)}{F(R)} = \frac{1}{8}.$$

b) Podemos escribir la densidad de carga como $\rho(r) = br$. Primero debemos calcular la constante de proporcionalidad b. Sabemos que la carga total en el núcleo debe ser Ze, así que

$$\int_0^R \rho\, dV = \int_0^R (br)4\pi r^2\, dr = Ze,$$

donde $dV = 4\pi r^2\, dr$ es el volumen de un cascarón esférico. Al resolver la integral tenemos $b = Ze/\pi R^4$.

De la segunda regla de los cascarones esféricos, se deduce que la fuerza $F(R)$ es la misma en ambas distribuciones de carga. Sin em-

bargo, $F(R/2)$ será distinta para las dos distribuciones. Si queremos calcular esta última es necesario saber cuánta carga q' está contenida dentro de la esfera de radio $R/2$, ya que la carga fuera del radio $R/2$ no ejerce fuerza alguna sobre el electrón. Esta carga es

$$q' = \int_0^{R/2} \rho\, dV = \int_0^{R/2} \frac{Zer}{\pi R^4} 4\pi r^2\, dr = \frac{Ze}{16}.$$

La fuerza sobre el electrón, con $r = R/2$, se obtiene sustituyendo la esfera dentro de $R/2$ por una carga puntual q' en su centro, lo cual nos da $1/16$ de la fuerza en la superficie:

$$\frac{F(R/2)}{F(R)} = \frac{1}{16}.$$

El resultado anterior es muy distinto del de la esfera uniforme de la parte *a*); lo cual demuestra que, aunque el electrón fuera del núcleo no puede distinguir entre las dos distribuciones, el del interior sí puede.

En forma esporádica los electrones atómicos penetran en el núcleo, y un acelerador puede disparar los electrones hacia su interior. Ambos métodos aportan información sobre la distribución de la carga dentro del núcleo. Un resultado de estos experimentos es que la densidad de carga es casi uniforme en la generalidad de los núcleos. Los protones del núcleo se distribuyen con una densidad más o menos uniforme, a pesar de la repulsión de Coulomb de los protones (que se supone que los impulse hacia la superficie nuclear) y a pesar de la intensa fuerza nuclear entre los protones (que se espera que los haga reunirse cerca del centro del núcleo). Más aún, la densidad es aproximadamente igual en los núcleos ligeros que en los núcleos pesados. Resultados tan sorprendentes permiten entender las propiedades importantes de la fuerza nuclear.

25-6 CONSERVACIÓN DE LA CARGA

Cuando se frota con seda una varilla de vidrio, aparece una carga positiva en ella. La medición revela que una carga negativa correspondiente aparece en la seda. Ello significa que el frotamiento no crea la carga, sino que se limita a transferirla de un objeto a otro, perturbando un poco su neutralidad eléctrica. Esta hipótesis de la *conservación de la carga* ha pasado rigurosas pruebas experimentales en objetos a gran escala y en átomos, en núcleos y en partículas elementales. Nunca se han descubierto excepciones.

En analogía con otras leyes de conservación, entre ellas la de la conservación del momento o de la energía, podemos expresar la conservación de la carga eléctrica así:

$$\sum q = \text{constante} \quad \text{o} \quad q_i = q_f. \qquad (25\text{-}18)$$

En todo proceso que se realice en un sistema aislado la carga inicial neta debe ser igual a la carga final neta. Al determinar la carga neta, hay que tener en cuenta los signos de las cargas individuales.

Un ejemplo interesante de este tipo de conservación se observa cuando se acercan un electrón (carga $= -e$) y un antielectrón o positrón (carga $= +e$). Las dos partículas pueden aniquilarse entre sí, convirtiendo su energía de reposo en energía radiante. Esta última puede manifestarse en dos rayos gamma (paquetes de gran energía de radiación electromagnética que no tienen carga):

$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma + \gamma.$$

La carga neta es cero antes y después del evento, conservándose la carga.

Algunas partículas sin carga, como el mesón neutral π a veces decaen y se transforman en rayos gamma:

$$\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma.$$

El decaimiento conserva la carga, y la carga total es otra vez 0 antes y después de él. Un ejemplo más: un neutrón ($q = 0$) decae y se convierte en un protón ($q = +e$) y en un electrón ($q = -e$), más otra partícula neutra, un neutrino ($q = 0$):

$$n \longrightarrow p + e^- + \nu.$$

La carga total es cero antes y después del decaimiento, conservando la carga. Se han hecho experimentos para buscar el decaimiento de un neutrón y su transformación en protón sin que emita electrones, lo cual violaría la conservación de la carga. No se han encontrado este tipo de eventos.

Están prohibidos el decaimiento de un electrón ($q = -e$) y su conversión en partículas neutras, como los rayos gamma (γ) o en neutrinos (ν); por ejemplo,

$$e^- \not\rightarrow \gamma + \nu,$$

porque el decaimiento violaría la conservación de la carga. Los intentos de observarlo han fracasado; ello significa que, si el decaimiento se produce, el electrón debe tener una vida de por lo menos 10^{23} años.

Otro ejemplo de conservación de la carga se encuentra en la fusión de dos núcleos de deuterio ^2H (llamados "hidrógeno pesado) para producir helio. Entre las reacciones posibles figuran:

$$^2H + {}^2H \longrightarrow {}^3H + p,$$

$$^2H + {}^2H \longrightarrow {}^3He + n.$$

El núcleo del deuterio contiene un protón y un neutrón; tiene, pues, una carga de $+e$. El núcleo del isótopo de hidrógeno con masa 3, que se escribe ^3H y se conoce como *tritio*, contiene un protón y dos neutrones; así que tiene una carga de $+e$. En consecuencia, la primera reacción presenta una carga neta de $+2e$ a ambos lados y la conserva. En la segunda reacción el neutrón no tiene carga, mientras que el núcleo del isótopo de helio con masa 3 contiene dos protones y un neutrón; por tanto, tiene una carga de $+2e$. Así pues, la segunda reacción también conserva la carga. La conservación de esta última explica por qué nunca vemos un protón emitido junto con ^3H ni un neutrón junto con ^3H.

En resumen, la carga se conserva en *todas* las interacciones conocidas entre partículas; nunca se ha observado una excepción.

OPCIÓN MÚLTIPLE

25-1 Electromagnetismo: introducción

25-2 Carga eléctrica

1. Las cargas eléctricas A y B se atraen entre sí. Las cargas eléctricas B y C se repelen una a otra. Si mantienen juntas A y C,
   A) se atraerán. B) se repelerán.
   C) una no afectará a la otra.
   D) Se necesita más información para contestar.

2. Las cargas eléctricas A y B se atraen entre sí. Las cargas eléctricas B y C también se atraen una a otra. Si se mantienen juntas A y C,
   A) se atraerán. B) se repelerán.
   C) una no afectará a la otra.
   D) Se necesita más información para contestar.

3. Las cargas eléctricas A y B se repelen entre sí. Las cargas eléctricas B y C también se repelen una a otra. Si se mantienen juntas A y C,
   A) se atraerán. B) se repelerán.
   C) una no afectará a la otra.
   D) Se necesita más información para contestar.

25-3 Conductores y aislantes

4. Si un objeto hecho de la sustancia A frota a otro hecho de la sustancia B, A adquiere carga positiva, y B carga negativa. Pero si un objeto hecho de la sustancia A se frota contra otro hecho de la sustancia C, A adquiere carga negativa. ¿Qué sucederá si un objeto hecho de la sustancia B se frota contra otro hecho de la sustancia C?
   A) B adquiere carga positiva y también C.
   B) B adquiere carga positiva y C carga negativa.
   C) B adquiere carga negativa y C carga positiva.
   D) B adquiere carga negativa y también C.

5. Un varilla con carga positiva es mantenida cerca de una bola colgada de un hilo aislante. La vemos oscilar hacia la varilla. ¿Qué conclusión podemos sacar?
   A) La bola debe haber tenido una carga opuesta a la de la varilla.
   B) La bola debe haber sido neutra originalmente, pero se cargó cuando se mantuvo la varilla cerca de ella.
   C) La bola debe ser un conductor.
   D) La bola no tiene carga positiva, pero podría ser neutra.

6. Se cuelga una bola esférica conductora de un hilo conductor aterrizado. Le acercamos una carga puntual. La bola
   A) será atraída a la carga puntual y oscilará hacia ella.
   B) será repelida de la carga puntual y se alejará de ella oscilando.
   C) no se verá afectada por la carga puntual.

7. Colgamos una bola esférica conductora de un hilo aislante. Le acercamos una carga positiva puntual. La bola
   A) será atraída a la carga puntual y oscilará hacia ella.
   B) será repelida de la carga puntual y se alejará de ella oscilando.
   C) no se verá afectada por la carga puntual.

25-4 Ley de Coulomb

8. Un carga puntual 3-μC de q_1 se halla a una distancia d de otra -6-μC de q_2. ¿Cuál es la razón $|\vec{F}_{12}|/|\vec{F}_{21}|$?
   A) 1/2 B) 1 C) 2 D) 18

9. Dos bolas de plomo de 200 libras se hallan a una distancia de 1 m una de otra. Poseen la misma carga positiva q. ¿Qué carga producirá entre ellas una fuerza electrostática que tenga la misma magnitud que el peso de una de las bolas?
   A) 1×10^{-14} C B) 1×10^{-7} C
   C) 3×10^{-4} C D) 2×10^{-2} C

10. Dos pequeñas esferas conductoras idénticas están a una distancia de 1 m una de otra. Originalmente poseen la misma carga positiva y la fuerza entre ellas es F_0. Después, la mitad de la carga de una se deposita en la otra. Ahora la fuerza entre ellas es
    A) $F_0/4$. B) $F_0/2$. C) $3F_0/4$.
    D) $3F_0/2$. E $3F_0$.

11. Dos pequeñas esferas conductoras idénticas se encuentran a una distancia de 1 m una de otra. Originalmente poseen cargas iguales, pero opuestas, y la fuerza entre ellas es F_0. La mitad de la carga de una se deposita después en la otra. Ahora la fuerza entre ellas es
    A) $F_0/4$. B) $F_0/2$. C) $3F_0/4$.
    D) $3F_0/2$. E $3F_0$.

25-5 Distribuciones continuas de carga

12. Una carga puntual q se halla a una distancia a de la superficie de una esfera de radio $2a$. Una carga Q se distribuye uniformemente a través de todo el volumen de la esfera. La magnitud de la fuerza electrostática entre la carga puntual q y la esfera es F, donde
    A) $F = |qQ|/4\pi\epsilon_0 a^2$.
    B) $|qQ|/4\pi\epsilon_0 a^2 > F > |qQ|/12\pi\epsilon_0 a^2$.
    C) $|qQ|/12\pi\epsilon_0 a^2 > F > |qQ|/20\pi\epsilon_0 a^2$.
    D) $|qQ|/20\pi\epsilon_0 a^2 > F > |qQ|/36\pi\epsilon_0 a^2$.
    E) $F = |qQ|/36\pi\epsilon_0 a^2$.

25-6 Conservación de la carga

13. Con un hilo aislante mantenemos una esfera conductora neutra cerca de una varilla con carga positiva. La esfera
    A) no se verá afectada por ser neutra.
    B) permanecerá neutra, pero de todos modos será repelida por la varilla.
    C) permanecerá neutra, pero de todos modos será atraída por la varilla.
    D) adquirirá una carga negativa y será repelida por la varilla.
    E) adquirirá una carga negativa y será atraída hacia la varilla.

14. Los objetos A, B y C son tres conductores esféricos idénticos y aislados. Originalmente A y B tienen carga de + 3 mC, en tanto que C tiene una carga de − 6 mC. Se deja que los objetos A y C se toquen y luego se los separa. Después se deja que los objetos B y C se toquen y se les separa.
    a) Si se sostienen los objetos A y B cerca uno de otro,
    A) se atraerán. B) se repelerán.
    C) no tendrán efecto recíproco.
    b) Si, en cambio, se sostienen los objetos A y C cerca uno de otro,
    A) se atraerán. B) se repelerán.
    C) no tendrán efecto recíproco.

PREGUNTAS

1. Recibe usted dos esferas metálicas montadas sobre soportes aislantes portátiles. Encuentre la manera de suministrarles una carga igual y opuesta. Puede utilizar una varilla de vidrio frotada con seda, pero sin que ésta las toque. ¿Deben las esferas tener el mismo tamaño para que este método dé resultado?
2. En la pregunta 1 encuentre la forma de suministrarles a las esferas una carga igual del mismo signo. Una vez más, ¿deben tener el mismo tamaño para que este método dé resultado?
3. Una varilla cargada atrae fragmentos de polvo de corcho seco, los cuales a menudo después de tocarla se alejan de ella saltando violentamente. Explique por qué.
4. ¿Cómo cambiarán sus respuestas a las preguntas 1, 2 y 3 de opción múltiple, si se pudiera eliminar la carga de uno de los objetos *A*, *B* o *C*?
5. Los experimentos descritos en la sección 25-2 podrían explicarse postulando cuatro tipos de carga, es decir, con vidrio, con seda, con plástico y con piel. ¿Qué argumento rechaza esto?
6. Acercamos mucho una carga positiva a un conductor aislante no cargado. Aterrizamos el conductor y mantenemos cerca la carga. ¿Tendrá carga positiva, negativa o de ninguna clase si *a*) se elimina la carga y después también la conexión a tierra y *b*) se elimina la conexión y luego la carga?
7. Puede descargarse un aislante con carga pasándolo por encima de una llama. Explique cómo sucede esto.
8. Si frotamos fuertemente una moneda entre los dedos, tendremos la impresión de que no se carga con la fricción. ¿Por qué?
9. Si caminamos rápidamente por una alfombra, sentimos a menudo un chispa al tocar la manija de una puerta. *a*) ¿A qué se debe esto? *b*) ¿Cómo puede evitarse?
10. ¿Por qué en los experimentos electrostáticos no se obtiene buenos resultados en días húmedos?
11. ¿Por qué se recomienda tocar el marco metálico de la computadora personal antes de instalar accesorios internos?
12. Se dice que una varilla aislada porta carga eléctrica. ¿Cómo podría verificarse esto y determinar el signo de la carga?
13. Si sostenemos una varilla cargada de vidrio cerca de un extremo de una varilla metálica sin carga, como en la figura 25-14, los electrones son atraídos hacia un extremo según se aprecia. ¿Por qué cesa el flujo de electrones? Después de todo, en la varilla metálica hay un suministro casi inagotable de ellos.

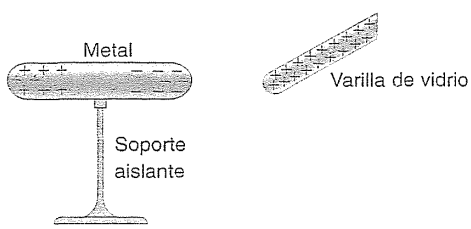


FIGURA 25-14. Preguntas 13 y 14.

14. En la figura 25-14. ¿actúa sobre la varilla metálica una fuerza eléctrica resultante? Explique su respuesta.
15. Una persona de pie sobre un taburete aislante toca un conductor aislado y cargado. ¿Se descarga por completo el conductor?
16. *a*) Una varilla de vidrio con carga positiva atrae un objeto suspendido. ¿Podemos concluir que éste tiene carga negativa? *b*) Un varilla de vidrio con carga positiva repele un objeto suspendido. ¿Podemos concluir que éste tiene carga positiva?
17. Explique que se entiende al decir que las fuerzas electrostáticas obedecen el principio de superposición.
18. ¿Cambia la fuerza eléctrica que una carga ejerce sobre otra si se acercan otras cargas?
19. Una solución de sulfato de cobre es un conductor. ¿Qué partículas cumplen la función de portadores en este caso?
20. Si los electrones de un metal como el cobre pueden moverse libremente, a menudo se verán empujados hacia la superficie del metal. ¿Por qué no siguen su camino y salen de él?
21. ¿Tendría gran importancia que Benjamin Franklin hubiera llamado positivos a los electrones y negativos a los protones?
22. La ley de Coulomb predice que la fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra es proporcional al producto de las dos. ¿Cómo demostraría usted en el laboratorio este aspecto de la ley?
23. Explique por qué un núcleo atómico puede ser estable si se compone de partículas que son neutras (neutrones) o que portan cargas (protones).
24. Un electrón (carga $= -e$) circula alrededor de un núcleo de helio (carga $= +2e$) en un átomo de helio. ¿Qué partículas ejercen la máxima fuerza una sobre otra?
25. La carga es una característica auténtica de una partícula, prescindiendo de su estado de movimiento. Explique cómo puede probar esta afirmación haciendo una vigorosa verificación experimental de si el átomo de hidrógeno es verdaderamente neutro desde el punto de vista eléctrico.
26. Suponga que la carga de la figura 25-11 no estuviera distribuida uniformemente a lo largo de la varilla, sino que se concentrara en su centro y que fuera disminuyendo con la misma rapidez hacia los dos extremos. ¿Tendrá ahora la fuerza una componente z? Si la varilla presentara la misma carga total q que la varilla de carga uniforme, ¿cuál sería la magnitud de F_y en relación con la ecuación 25-15? Repita ambas preguntas si la carga se distribuye a través de la varilla de modo que haya una deficiencia cerca del centro y que la densidad de carga aumenta con la misma rapidez hacia los dos extremos.
27. Según el teorema de Earnshaw, ninguna partícula puede permanecer en equilibrio estable exclusivamente bajo la acción de fuerzas electrostáticas. Suponga, sin embargo, que el punto P se halla en el centro de un cuadrado de cuatro cargas positivas iguales, según se advierte en la figura 25-15. Si coloca allí una carga positiva de prueba, podría dar la impresión de hallarse en equilibrio estable. Las cuatro cargas externas la impulsan hacia P y aun así se cumple el teorema de Earnshaw. ¿Puede explicar por qué?

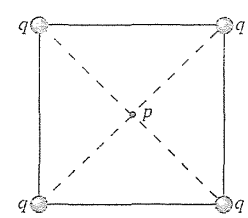


FIGURA 25-15. Pregunta 27.

28. El cuanto de la carga es 1.60×10^{-19} C. ¿Existe un cuanto correspondiente de masa?
29. ¿Qué significa decir que una cantidad física *a*) está cuantizada o *b*) que se conserva? Dé algunos ejemplos.
30. En el problema resuelto 25-3 indicamos que la fuerza eléctrica es alrededor de 10^{39} más intensa que la fuerza gravitacional. ¿Puede concluirse de ello que una galaxia, una estrella o un planeta han de ser esencialmente neutros desde el punto de vista eléctrico?
31. ¿Cómo sabemos que las fuerzas electrostáticas no son la causa de la atracción gravitacional, por ejemplo, entre la Tierra y la Luna?

EJERCICIOS

25-1 Electromagnetismo: introducción

25-2 Carga eléctrica

1. En el golpe de vuelta de un rayo típico (Fig. 25-16), una corriente de 2.5×10^4 C/s fluye durante 20 μs. ¿Cuánta carga se transfiere en este fenómeno?

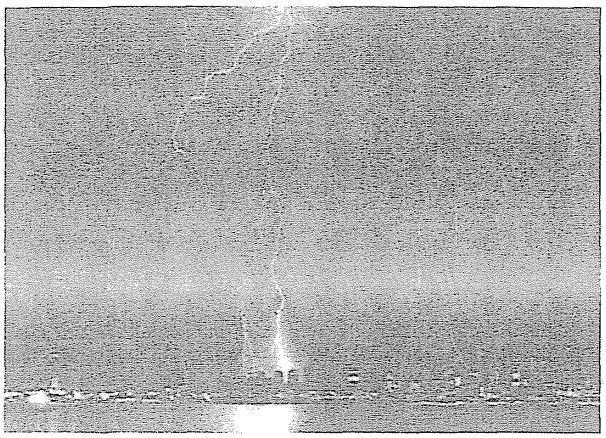


FIGURA 25-16. Ejercicio 1.

25-3 Conductores y aislantes

25-4 Ley de Coulomb

2. ¿Cuál ha de ser la distancia entre una carga puntual $q_1 = 26.3$ μC y otra $q_2 = -47.1$ μC para que la fuerza eléctrica de atracción entre ellas tenga una magnitud de 5.66 N?
3. Una carga puntual de $+ 3.12 \times 10^{-6}$ C se halla a 12.3 cm de una segunda carga puntual de $- 1.48 \times 10^{-6}$ C. Calcule la magnitud de la fuerza entre ambas.
4. Se liberan del reposo dos partículas de la misma carga, sostenidas a 3.20 mm de distancia entre sí. La aceleración inicial de la primera partícula es 7.22 m/s^2 y la segunda es 9.16 m/s^2. La masa de la primera es 6.31×10^{-7} kg. Calcule *a*) la masa de la segunda partícula y *b*) la magnitud de la carga común.
5. La figura 25-17*a* muestra dos cargas, q_1 y q_2, mantenidas fijas y separadas por un distancia *d*. *a*) Determine la intensidad de la fuerza eléctrica que actúa sobre q_1. Suponga que $q_1 = q_2 = 21.3$ μC y $d = 1.52$ m. *b*) Se introduce una tercera carga $q_3 = 21.3$ μC y se coloca como se indica en la figura 25-17*b*. Encuentre la intensidad de la fuerza eléctrica que ahora opera sobre q_1.

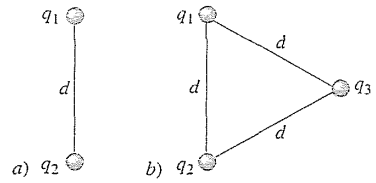


FIGURA 25-17. Ejercicio 5.

6. Dos esferas conductoras idénticas, 1 y 2, portan igual cantidad de carga y están fijas y separadas por una distancia grande en comparación con su diámetro. Se repelen una a otra con una fuerza eléctrica de 88 mN. Suponga ahora que una tercera esfera idéntica 3, que tiene un mango aislante e inicialmente sin carga, es puesta en contacto con la esfera 1, luego con la esfera 2 y que finalmente se separa. Calcule la fuerza entre las esferas 1 y 2 (Fig. 25-18).

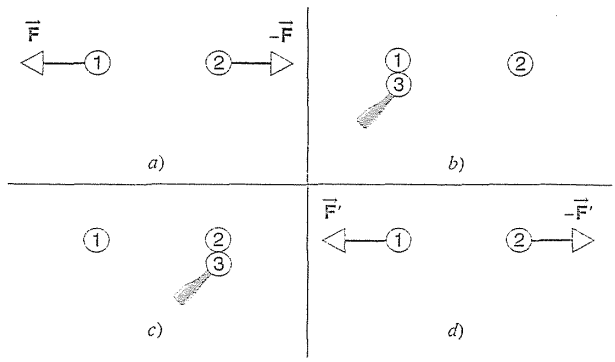


FIGURA 25-18. Ejercicio 6.

7. Tres partículas cargadas se encuentran en una línea recta y separadas por una distancia *d*, como se ve en la figura 25-19. Se mantienen fijas las cargas q_1 y q_2. La carga q_3, que puede moverse libremente, está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas eléctricas. Obtenga q_1 en función de q_2.

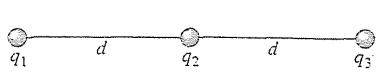


FIGURA 25-19. Ejercicio 7.

8. En la figura 25-20, encuentre *a*) los componentes horizontales y *b*) los componentes verticales de la fuerza eléctrica resultante que operan sobre la carga en el ángulo inferior izquierdo del cuadrado. Suponga que $q = 1.13\ \mu C$ y $a = 15.2$ cm. Las cargas se hallan en reposo.

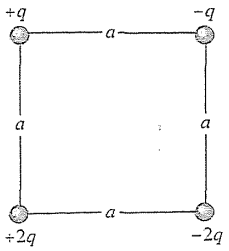


FIGURA 25-20. Ejercicio 8.

9. Dos cargas positivas, de 4.18 μC cada una, y una carga negativa de $-6.36\ \mu C$ están fijas en los vértices de un triángulo equilátero cuyas lados miden 13.0 cm. Calcule la fuerza eléctrica que opera sobre la carga negativa.
10. Dos esferas pequeñas presentan carga positiva, siendo 52.6 μC la carga total. Se repelen entre sí con una fuerza de 1.19 N cuando se hallan a 1.94 m de distancia una de otra. Calcule la carga de ambas.
11. Dos cargas fijas, + 1.07 μC y − 3.28 μC, se hallan a una distancia de 61.8m. ¿Dónde puede encontrarse una tercera carga de modo que una fuerza neta no opere sobre ella?
12. Tres bolas pequeñas, con una masa de 13.3 g cada una, están colgadas de un punto común de hilos de seda que miden 1.17 m de largo. Tienen la misma carga y cuelgan en las esquinas de un triángulo equilátero de 15.3 cm por lado. Determine la carga de cada una.
13. Un cubo de borde *a* lleva una carga puntual *q* en cada esquina. Demuestre que la fuerza eléctrica resultante en cualquiera de las cargas está dada por

$$F = \frac{0.262q^2}{\epsilon_0 a^2},$$

que se aleja del cubo a través de la diagonal del cuerpo.

25-5 Distribuciones de carga continua

14. La ecuación 25-15 se obtuvo suponiendo que la carga q_0 se encuentra en el eje positivo *y*. *a*) ¿Conserva su validez si la carga está en el eje negativo *y*? Explique su respuesta. *b*) Escriba una ecuación similar a la 25-15, si la carga puntual q_0 se halla ahora a una distancia *x* de la varilla en el eje positivo o negativo *x*. *c*) Escriba una ecuación en forma de componentes vectoriales de la fuerza, cuando q_0 está a una distancia *d* de la varilla en la línea de 45° que bisecta los ejes *x* y *y* positivos. *d*) Escriba una ecuación en forma de componentes vectoriales que indique la fuerza cuando q_0 se encuentra en un punto arbitrario *x,y* en algún lugar del plano *xy*. Compruebe que los componentes tienen los signos correctos cuando el punto *x,y* está en cada uno de los cuatro cuadrantes.
15. *a*) Comenzando con la ecuación 25-16, escriba una ecuación en forma vectorial que indique la fuerza cuando q_0 se halla en el eje positivo o negativo *z* del anillo de la carga. *b*) Haga lo mismo con el disco de carga, empleando la ecuación 25-17.
16. Obtenga la fuerza que actúa sobre una carga puntual positiva *q* situada a una distancia *x* del extremo de una varilla de longitud *L*, con una carga positiva *Q* distribuida uniformemente (Fig. 25-21).

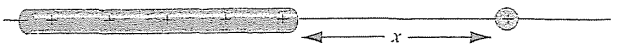


FIGURA 25-1. Ejercicio 16.

17. Considere una varilla y una carga q_0 en la figura 25-11. ¿Dónde colocaría usted una segunda carga puntual *q* (igual a la de la varilla) para que q_0 esté en equilibrio (no tenga en cuenta la gravedad)? Resuelve el problema suponiendo *a*) que *q* es positiva y *b*) que es negativa.
18. Demuestre que el equilibrio de q_0 en el ejercicio 17 es inestable. (Sugerencia: este problema puede resolverse con argumentos de simetría y en realidad requiere pocas operaciones matemáticas.)
19. Suponga que la varilla de la figura 25-11 tiene una densidad uniforme de carga positiva λ en su mitad superior y una densidad de carga uniforme $-\lambda$ en su mitad inferior. Calcule la fuerza neta que opera sobre la carga puntual q_0.
20. Cuatro varillas cargadas forman los lados de un cuadrado en el plano horizontal (*xy*). Tienen una longitud $L = 25.0$ cm y transportan una carga positiva *Q* distribuida uniformemente. Una esfera pequeña, que puede considerarse una carga puntual de masa 3.46×10^{-4} y otra $q = +2.45 \times 10^{-12}$ se hallan en equilibrio y a una distancia $z = 21.4$ cm por encima del centro del cuadrado. Determine el valor de *Q*.

25-6 Conservación de la carga

21. Identifique el elemento X en las siguientes reacciones nucleares:

    a) $^1H + {}^9Be \rightarrow X + n$;
    b) $^{12}C + {}^1H \rightarrow X$;
    c) $^{15}N + {}^1H \rightarrow {}^4He + X$.

    (Sugerencia: consulte el Ap. E.)
22. En el decaimiento radiactivo de ^{238}U ($^{238}U \rightarrow {}^4He + {}^{234}Th$), en cierto momento el centro de la partícula emergente ^4H se encuentra a 12×10^{-15} del centro del núcleo del ^{234}Th residual. En ese instante, *a*) ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula ^4H y *b*) cuál es su aceleración?
23. En un cristal de sal, un átomo de sodio transfiere uno de sus electrones a un átomo vecino de cloro, formando un enlace iónico. El ion positivo sodio y el ion negativo cloro que se producen se atraen entre sí a causa de la fuerza electrostática. Calcule la fuerza de atracción si la distancia entre los iones es de 282 pm.
24. La fuerza electrostática entre dos iones idénticos que se hallan a una distancia de 5.0×10^{-10} m es 3.7×10^{-9} N. *a*) Determine la carga de cada uno. *b*) ¿Cuántos electrones faltan en ellos?
25. Se cree que el neutrón se compone de un quark superior de carga $+\frac{2}{3}e$ y de dos quarks inferiores, con una carga de $-\frac{1}{3}e$ cada uno. Si la distancia entre estos últimos es de 2.6×10^{-15} dentro del neutrón, ¿qué fuerza de repulsión habrá entre ellos?
26. *a*) ¿Cuántos electrones deberían extraerse de una moneda de un centavo para dejarle una carga de $+1.15 \times 10^{-7}$ C. *b*) ¿A qué fracción de los electrones en la moneda corresponde esto? Consúltese el problema 25-1.
27. Un electrón se encuentra en un vacío cerca de la superficie de la Tierra. ¿Dónde deberíamos colocar otro para que sea cero la

fuerza neta que opera sobre el primer electrón, debido a la gravedad y al otro electrón?

28. Calcule en coulombs la carga total de 75.0 kg de electrones.

29. Calcule el número de coulombs de carga positiva en un vaso de agua. Suponga que el volumen del agua es 250 cm^3.

30. La distancia entre dos estudiantes de física (María de 52.0 kg y Juan de 90.7 kg) es 28.0 m. Supongamos que tengan un desequilibrio de 0.01% en su carga positiva y negativa; uno es positivo y negativo el otro. Estime la fuerza electrostática de atracción entre ellos. (Sugerencia: reemplace los estudiantes por esferas de agua y utilice el resultado del Ej. 29.)

31. *a)* ¿Qué cantidad igual de carga positiva y negativa han de ponerse en la Tierra y en la Luna para neutralizar su atracción gravitacional? ¿Es necesario conocer la distancia de la Luna para resolver el problema? Explique su contestación afirmativa o negativa. *b)* ¿Cuántas toneladas métricas de hidrógeno se requerirían para generar la carga positiva que se calculó en la parte *a*)? La masa molar del hidrógeno es 1.008 g/mol.

PROBLEMAS

1. Dos esferas conductoras idénticas, con cargas de signo opuesto, se atraen entre sí con una fuerza de 0.108 N cuando las separa una distancia de 50.0 cm. De repente las conecta un alambre conductor delgado, que después se quita; después de eso las esferas se repelen con una fuerza de 0.0360 N. ¿Cuál era su carga inicial?

2. Una carga Q está fija en dos ángulos opuestos de un cuadrado. Se pone una carga q en los dos ángulos restantes. *a)* Si la fuerza eléctrica resultante que opera sobre Q es cero, ¿qué relación se da entre Q y q? *b)* ¿Podría elegirse q para hacer que la fuerza eléctrica resultante en todas las cargas fuera cero? Explique su respuesta.

3. Dos cargas puntuales libres $+q$ y $+4q$ están separadas por una distancia L. Una tercera carga se coloca de modo que el sistema entero se encuentre en equilibrio. *a)* Encuentre el signo, la magnitud y la ubicación de esta carga. *b)* Demuestre que el equilibrio es inestable.

4. Dos bolas pequeñas y similares de masa m se cuelgan de hilos de seda de longitud L y portan la misma carga q, como se muestra en la figura 25-22. Suponga que θ es tan pequeña que tan θ puede ser reemplazada por su igual aproximado, sen θ. *a)* Con esta aproximación pruebe que, en el estado de equilibrio,

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3},$$

donde x es la distancia entre las bolas. *b)* Si $L = 122$ cm, $m = 11.2$ g y $x = 4.70$ cm, ¿cuál es el valor de q?

5. Si las bolas de la figura 25-22 son conductoras, *a)* ¿qué les sucede después que descargamos una? Explique su contestación. *b)* Encuentre la distancia del nuevo equilibrio.

6. Suponga que las pelotas del problema 4 pierden carga con una rapidez de 1.20 nC/s. ¿Con qué velocidad instantánea relativa ($= dx/dt$) se acercan inicialmente una a otra?

7. Una carga Q debe ser dividida en dos partes, $Q - q$ y q. ¿Qué relación existe entre Q y q si las dos partes, separadas por cierta distancia, debe tener una repulsión de Coulomb máxima?

8. Dos cargas positivas $+Q$ se sostienen fijas y separadas por un distancia d. Una partícula de carga negativa $-q$ y de masa m se coloca a la mitad de distancia entre ellas y luego se le imprime un pequeño desplazamiento perpendicular a la línea que las une, liberándolas después. Demuestre que la partícula describe un movimiento armónico simple de periodo $(\epsilon_0 m\pi^3 d^3 / qQ)^{1/2}$.

9. Calcule el periodo de oscilación de una partícula de carga positiva $+q$ desplazada del punto medio y que se desplaza en la línea que une las dos cargas $+Q$ en el problema 8.

10. En el compuesto CsCl (cloruro de cesio), los átomos Cs se encuentran en los ángulos de un cubo, con un átomo Cl en el centro de él. La longitud de lado del cubo es 0.40 nm (Fig. 25-23). A los átomos Cs les falta un electrón y el átomo Cl porta un electrón de exceso. *a)* ¿Qué intensidad tiene la fuerza eléctrica neta que opera sobre el átomo Cl, resultante de los ocho átomos Cs mostrados? *b)* Suponga que el átomo Cs marcado con una flecha no está presente (defecto de cristal). ¿Cuál es ahora la fuerza eléctrica neta que actúa sobre el átomo Cl proveniente de los siete átomos Cs restantes?

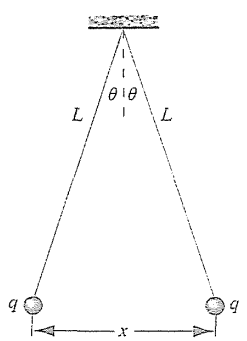


FIGURA 25-22. Problemas 4, 5 y 6.

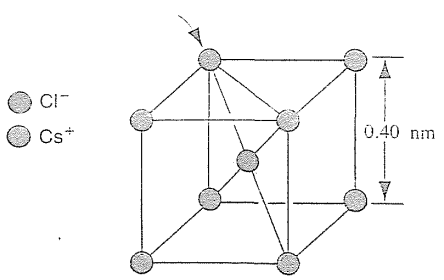


FIGURA 25-23. Problema 10.

11. Dos cargas puntuales positivas e iguales q son sostenidas separadas una distancia fija $2a$. Se coloca una carga puntual de prueba en un plano normal a la línea que une las cargas y a la mitad entre ellas. Determine el radio R del círculo en este plano en el cual la fuerza que opera sobre la partícula de prueba alcanza su valor máximo (Fig. 25-24).

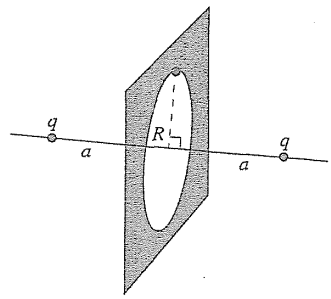


FIGURA 25-24. Problema 11.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Calcule la fuerza de atracción entre dos anillos con cargas uniformemente distribuidas $+q$ y $-q$. Su eje es el eje x, cada uno con un radio R, y una distancia de $2R$ separa los anillos. La respuesta final ha de tener la forma $F = C_r q^2/4\pi\epsilon_0 R^2$, donde C_r es una constante adimensional que usted determinará.
2. Repita el problema anterior en el caso de dos discos con cargas uniformemente distribuidas $+q$ y $-q$. La respuesta final seguirá siendo del tipo $F = C_d q^2/4\pi\epsilon_0 R^2$, donde C_d es una constante adimensional que encontrará; C_d del disco es *distinta* de C_r del anillo.
3. Calcule la fuerza de atracción entre dos esferas sólidas con cargas distribuidas uniformemente $+q$ y $-q$. Se centran en el eje x, con un radio R cada una; una distancia de $d > 2R$ las separa. La respuesta final será del tipo $F = C_s q^2/4\pi\epsilon_0 d^2$, donde C_s es una constante adimensional que usted calculará.
4. Un anillo uniforme de carga Q tiene un radio $R = 1.00$ cm. Se hace que un electrón se desplace en el plano del anillo. *a*) Suponiendo que $Q = -1.00\ \mu$C, calcule la rapidez de un electrón que se mueve en una órbita circular de radio $r = 0.50$ cm, concéntrico al anillo. *b*) Suponiendo que $Q = +1.00\ \mu$C calcule la rapidez de un electrón que describa una órbita circular de radio $r = 1.50$ cm, concéntrico al anillo. *c*) Integrando numéricamente el movimiento, demuestre que ninguna de las órbitas es estable.

CAPÍTULO 26

CAMPO ELÉCTRICO

Las cargas eléctricas pueden interactuar desde grandes distancias. Los electrones, o los átomos ionizados, en los lugares más remotos del universo conocido, ejercen una fuerza que ocasiona que los electrones se dirijan hacia la Tierra.

¿Cómo se explican esas interacciones? A partir del campo eléctrico: las cargas lejanas crean un campo eléctrico, que abarca todo el espacio entre la Tierra y el origen de este campo. El movimiento de las cargas ocasiona perturbaciones en el campo, las cuales se desplazan a través del espacio con la velocidad de la luz y son detectadas más tarde como eones (como radiación) cuando provocan movimiento de electrones en los circuitos terrestres.

En el presente capítulo nos ocuparemos sólo del campo eléctrico estático producido por cargas en reposo. Más tarde ampliaremos la exposición para mostrar cómo las cargas en movimiento originan los campos asociados con la radiación electromagnética, como emisión de radio o luz.

26-1 ¿QUÉ ES UN CAMPO?

La temperatura tiene un valor bien definido en cualquier lugar del cuarto donde se encuentra usted. Puede medirla en cada punto colocando un termómetro. Después podría representar su distribución dibujando un mapa del cuarto que muestre en todos los lugares la temperatura medida o especificando una función matemática $T(x, y, z)$ que sirva para calcularla en los puntos x, y, z. Se da el nombre de *campo de temperatura* a esta distribución representada mediante un mapa o una función. En forma parecida podría medirse la presión en todos los sitios y determinar así el *campo de presión*. Los dos campos son ejemplo de *campos escalares*, ya que la temperatura y la presión son magnitudes escalares. Si ni la temperatura ni la presión variasen con el tiempo, serían también *campos estáticos*; de lo contrario, serían *campos que varían con el tiempo* y podrían representarse matemáticamente con una función dependiente del tiempo como $T(x, y, z, t)$.

En cambio, si quisiéramos medir la velocidad en todos los puntos de un fluido que fluye, habríamos que especificar el valor del *vector* velocidad en todos ellos. También en este caso podríamos trazar un mapa que muestre la magnitud y la dirección de la velocidad en un punto cualquiera o bien especificar una función matemática $\vec{v}(x, y, z)$ que permitiría calcular en cualquier punto la velocidad del flujo. Éste es un ejemplo de *campo vectorial*.

El campo gravitacional de la Tierra es otro ejemplo de campo vectorial. Se podría medir su valor en cualquier punto con sólo agregar una masa de prueba m_0 a una báscula de resorte. Después se determinarían la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional $\vec{F}$ en cualquier punto; los resultados se presentarían dibujando un mapa que indique la magnitud y la dirección en varios puntos o especificando una función matemática $\vec{F}(x, y, z)$. Sin embargo, el mapa no sería útil para otras personas, salvo que usaran la misma masa de prueba que nosotros. La fuerza que se mide es directamente proporcional al valor de la masa de prueba; de ahí que un procedimiento más adecuado consistiría en preparar un mapa que tuviera no la fuerza ejercida sobre la masa, sino la fuerza por unidad de masa, o sea $\vec{F}/m_0$. Esta cantidad, que tendría unidades de N/kg, sería independiente del valor de la masa de prueba m_0. Si se escoge una masa de otro tamaño, se obtendría exactamente el mismo mapa con idénticos valores de la fuerza por unidad de masa en todos los pun-

tos.* A la magnitud $\vec{F}/m_0$ se le denomina *campo gravitacional.* El lector se dará cuenta de que también es igual a la aceleración en caída libre $\vec{g}$ en cualquier lugar:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_0}. \tag{26-1}$$

El campo $\vec{g}$ es un vector cuya dirección indica la dirección de la fuerza gravitacional en ese punto y cuya magnitud indica la "fuerza" del efecto gravitacional allí. La fuerza que se ejerce sobre una masa m en un punto cualquiera se calcula multiplicando $\vec{g}$ en ese punto por el valor de la masa:

$$\vec{F} = m\vec{g}. \tag{26-2}$$

En este capítulo explicaremos el concepto tan útil de *campo eléctrico,* el cual se basa en un procedimiento semejante que consiste en determinar la fuerza eléctrica por unidad de carga (en vez de la fuerza gravitacional por unidad de masa). El campo eléctrico es un campo vectorial, pues interviene una fuerza. Por ahora nos ocuparemos únicamente de campos estáticos, pero más tarde, al hablar de la radiación magnética, nos ocuparemos también de los campos que varían con el tiempo.

Antes de que el concepto de campo lograra aceptación general, se creía que la fuerza ejercida por un cuerpo gravitacional sobre otro era una interacción directa e instantánea. Esta concepción, llamada *acción a distancia*, se aplicaba asimismo a las fuerzas electromagnéticas. En el caso de la gravitación puede representarse de modo esquemático así:

$$\text{masa} \rightleftarrows \text{masa}$$

lo cual indica que las dos masas interactúan directamente. Desde esta perspectiva, el efecto del movimiento de un cuerpo se transmite de inmediato al otro. Ello viola la teoría especial de la relatividad, la cual limita como máximo a la velocidad de la luz c, la rapidez con que puede transmitirse en la información. La actual interpretación, basada en el concepto de campo, puede representarse como

$$\text{masa} \rightleftarrows \text{campo} \rightleftarrows \text{masa}$$

donde una masa no interactúa directamente con la otra, sino con el campo gravitacional creado por esta última. En otras palabras, la primera masa origina un campo que posee cierto valor en todos los puntos del espacio; la segunda interactúa entonces con el campo en su propio lugar. El campo desempeña la función de intermediario entre los dos cuerpos. La fuerza ejercida sobre la segunda masa puede calcularse por medio de la ecuación 26-2, si se conoce el valor del campo $\vec{g}$ debido a la primera masa. La situación es enteramente simétrica desde el punto de vista de la primera masa, la cual interactúa con el campo gravitacional generado por la segunda masa. Los cambios en la ubicación de una masa provocan variaciones en su campo gravitacional; estas variaciones se desplazan a la velocidad de la luz, por lo cual el concepto de campo es compatible con las restricciones impuestas por la teoría especial de la relatividad.

26-2 CAMPO ELÉCTRICO

La descripción anterior del campo gravitacional puede aplicarse directamente a la electrostática. La ley de Coulomb relativa a la fuerza que una carga eléctrica ejerce sobre otra nos estimula a pensar en función de la acción a distancia, representada así:

$$\text{carga} \rightleftarrows \text{carga}$$

Una vez más introducimos el campo como intermediario entre las cargas, lo cual nos permite representar la interacción en la siguiente forma

$$\text{carga} \rightleftarrows \text{campo} \rightleftarrows \text{carga}$$

En otras palabras, la primera carga crea un *campo eléctrico,* y la segunda carga interactúa con el campo eléctrico de la primera. El problema de determinar la interacción entre las cargas se reduce con ello a dos problemas separados: 1) determinar por medición o cálculo el campo eléctrico creado por la primera carga en todos los lugares del espacio y 2) calcular la fuerza que el campo ejerce sobre la segunda carga ubicada en un punto particular del espacio.

En analogía con la ecuación 26-1 concerniente al campo gravitacional, podemos definir el campo eléctrico $\vec{E}$ asociado a cierto grupo de cargas en función de la fuerza ejercida sobre una carga positiva de prueba q_0 en un punto particular, o sea

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \tag{26-3}$$

La dirección del vector $\vec{E}$ es la misma que la de $\vec{F}$, porque q_0 es un escalar positivo. Definido de este modo, el campo eléctrico no depende de la magnitud de la carga de prueba q_0.

La figura 26-1 indica cómo usamos esta definición para determinar el campo eléctrico en un punto particular P. Colocamos una carga positiva de prueba en P y luego determinamos la fuerza electrostática ejercida sobre q_0 que proviene de los objetos en el área circundante, los cuales no se muestran en la figura. La ecuación 26-3 nos da entonces el campo eléctrico que aparece en la figura 26-1*b*. Nótese que $\vec{E}$ y $\vec{F}$ son paralelos, como lo exige la definición de la ecuación 26-3.

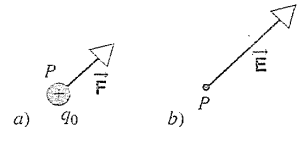


FIGURA 26-1. *a)* Objetos cargados en un ambiente ejercen una fuerza $\vec{F}$ sobre una carga de prueba positiva q_0 en el punto P. *b)* El campo eléctrico en el punto P debido a estos objetos cargados del ambiente.

* Solemos especificar que la masa de prueba m_0 ha de ser pequeña. Es decir, no queremos que altere el campo gravitacional de la Tierra. Por ejemplo, si utilizáramos una masa de prueba del tamaño de la Luna, su fuerza gravitacional en la Tierra haría que los efectos de la marea modificasen la distribución de las masas terrestres y, en consecuencia, alterarían la fuerza gravitacional en varios lugares. Para evitar que ello ocurra, conservamos m_0 mucho más pequeño que la masa de la Tierra.

TABLA 26-1 Algunos campos eléctricos

Ubicación	*Campo eléctrico* (N/C)
En la superficie de un núcleo de uranio	3×10^{21}
En un átomo de hidrógeno, en el radio promedio del electrón	5×10^{11}
La ruptura eléctrica ocurre en el aire	3×10^{6}
En el tambor cargado de una fotocopiadora	10^{5}
El acelerador de haces de electrones en un televisor	10^{5}
Cerca de un peine de plástico cargado	10^{3}
En la atmósfera inferior	10^{2}
Dentro del alambre de cobre de los circuitos caseros	10^{-2}

Desde el punto de vista dimensional, el campo eléctrico es la fuerza por unidad de carga, y su unidad en el SI es el newton/coulomb (N/C), aunque, como veremos en el capítulo 28, con frecuencia se expresa en la unidad equivalente de volt/metro (V/m). Nótese la semejanza con el campo gravitacional, donde g (que generalmente se indica en unidades de m/s^2) también puede expresarse como la fuerza por unidad de masa en unidades de newton/kilogramo (N/kg). Los campos gravitacional y eléctrico pueden expresarse como una fuerza dividida por una propiedad (masa o carga) del cuerpo de prueba. La tabla 26-1 contiene algunos campos eléctricos que ocurren en unas pocas situaciones.

Como lo hicimos en la ecuación 26-2 con la fuerza gravitacional ejercida sobre un cuerpo, podemos emplear el campo eléctrico para calcular la fuerza que opera sobre un cuerpo cargado. Una vez obtenido el campo eléctrico en un punto (usando el cuerpo de prueba, por ejemplo), es posible calcular la fuerza eléctrica ejercida sobre un objeto cualquiera de carga q en ese lugar:

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}. \tag{26-4}$$

Aquí, el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ proviene de otras cargas que pueden estar presentes, no de la carga q. La ecuación 26-4 no es más que una manera de especificar la fuerza que esas otras cargas ejercen sobre q.

Ahora entendemos cómo el campo eléctrico actúa como intermediario en la interacción entre dos cargas q_1 y q_2. Como se ilustra en la figura 26-2*a*, la carga q_1 ubicada en A da origen a un campo eléctrico en todos los puntos circundantes. Sea $\vec{\mathbf{E}}_1$ su valor en el lugar B. El valor del campo se obtiene colocando la carga de prueba en B y midiendo la fuerza que q_1 ejerce sobre ella. Si ponemos una carga diferente q_2 en B, experimentará una fuerza eléctrica $\vec{\mathbf{F}}_{21}$, la cual puede calcularse con el uso la ecuación 26-4: $\vec{\mathbf{F}}_{21} = q_2\vec{\mathbf{E}}_1$ (Fig. 26-2*b*). La situación es totalmente simétrica: podríamos, en cambio, primero utilizar la carga de prueba para determinar el campo $\vec{\mathbf{E}}_2$ en A debido a q_2 (Fig. 26-2*c*). Después, al colocar q_1 en A, se calcula la fuerza ejercida sobre q_1 por q_2: $\vec{\mathbf{F}}_{12} = q_1\vec{\mathbf{E}}_2$ (Fig. 26-2*d*). Conforme a la tercera ley de Newton, las fuerzas son iguales y opuestas ($\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$), a pesar de ser diferentes los campos eléctricos creados por las dos cargas.

Si queremos utilizar la ecuación 26-3 como procedimiento operativo para medir el campo eléctrico, es necesario aplicar la misma precaución que cuando medimos, con la masa de prueba, el campo gravitacional: la carga de prueba deberá ser tan pequeña que no perturbe la distribución de las cargas cuyo campo eléctrico intentamos medir. En otras palabras, hay que escribir la ecuación 26-3 como:

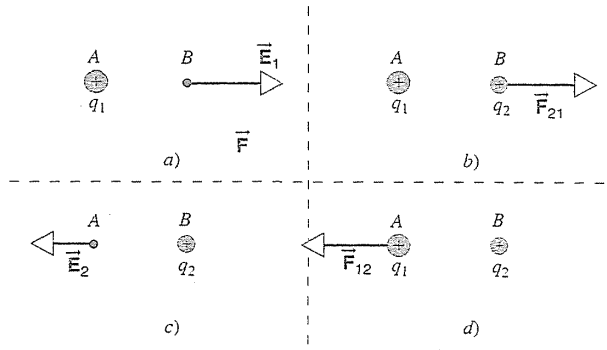


FIGURA 26-2. *a*) q_1 en A crea un campo eléctrico en B. *b*) El campo eléctrico en B ejerce fuerza sobre q_2. *c*) q_2 en B crea un campo eléctrico en A. *d*) El campo eléctrico en A ejerce fuerza sobre q_1. Nótese que $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$.

$$\vec{\mathbf{E}} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_0}, \tag{26-5}$$

aunque, como vimos en el capítulo 25, no puede suponerse que este límite sea cero, pues la carga de prueba nunca puede ser más pequeña que la carga elemental e. Desde luego, si estamos *calculando* (no midiendo) el campo eléctrico debido a un conjunto específico de cargas en posiciones fijas, ni la magnitud ni el signo de q_0 alteran el resultado. Como veremos más adelante en este capítulo, los campos eléctricos de grupos de cargas pueden calcularse con el uso de la ecuación 26-3 y la ley de Coulomb sin considerar de manera directa la ecuación 26-5.

PROBLEMA RESUELTO 26-1. Un electrón ($q = -e$) colocado cerca de un cuerpo cargado experimenta una fuerza en la dirección $+y$ de magnitud 3.60×10^{-8} N. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico en ese lugar? *b*) ¿Qué fuerza ejercería el mismo cuerpo cargado sobre una partícula alfa ($q = +2e$) puesta en el sitio ocupado antes por el electrón?

Solución *a*) Con el uso de la ecuación 26-4 tenemos

$$E_y = \frac{F_y}{q} = \frac{3.60 \times 10^{-8}\ \text{N}}{-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}} = -2.25 \times 10^{11}\ \text{N/C}.$$

El campo eléctrico presenta la dirección y negativa.

b) La fuerza ejercida sobre la partícula alfa se deduce de la ecuación 26-4:

$$F_y = qE_y = 2(+1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(-2.25 \times 10^{11}\ \text{N/C}) = -7.20 \times 10^{-8}\ \text{N}.$$

La fuerza sigue la dirección negativa y, la misma que el campo eléctrico, sólo que en dirección opuesta a la de la fuerza en el electrón. En el mismo campo eléctrico, la fuerza ejercida sobre la partícula alfa es el doble de la ejercida sobre el electrón, porque la carga de la partícula alfa tiene el doble de magnitud que la carga de electrón.

26-3 CAMPO ELÉCTRICO DE CARGAS PUNTUALES

En la presente sección vamos a estudiar el campo eléctrico de cargas puntuales, primero como una carga individual y luego como un conjunto de cargas individuales.

Supongamos que una carga positiva de prueba q_0 se coloca a una distancia r de una carga puntual q. La magnitud de la fuerza que opera sobre q_0 está dada por la ley de Coulomb,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0|q|}{r^2}.$$

Conforme a la ecuación 26-3, la magnitud del campo eléctrico en el sitio de la carga de prueba es

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2}. \qquad (26\text{-}6)$$

En la línea radial proveniente de q, la dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ es la misma que la de $\vec{\mathbf{F}}$: señala hacia afuera si q es positiva y hacia adentro si es negativa. La figura 26-3 muestra la magnitud y la dirección del campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en varios sitios cerca de una carga puntual positiva. ¿Cómo se dibujaría la figura si la carga fuera negativa?

He aquí el procedimiento con que se obtiene $\vec{\mathbf{E}}$ de un grupo de N cargas puntuales: 1) se calcula $\vec{\mathbf{E}}_n$ debido a cada carga n en el punto dado *como si fuera la única carga presente.* 2) Por separado estos campos se suman vectorialmente para encontrar el campo resultante $\vec{\mathbf{E}}$ en el punto. En forma de ecuación,

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \vec{\mathbf{E}}_3 + \cdots$$
$$= \sum \vec{\mathbf{E}}_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, N). \qquad (26\text{-}7)$$

La suma es una suma vectorial e incluye todas las cargas. La ecuación 26-7 (como la Ec. 25-8) es un ejemplo de la aplicación del *principio de superposición*, el cual establece, dentro de este contexto, que en un punto cualquiera los campos eléctricos debido a distribuciones individuales de carga simplemente se suman (en forma vectorial) o se sobreponen de modo independiente. Este principio puede no cumplirse cuando la magnitud de los campos es demasiado grande, pero será válido en todas las situaciones que se incluyen en este libro.

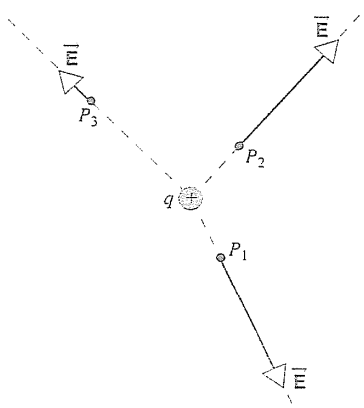


FIGURA 26-3. El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en varios puntos cerca de una carga puntual positiva q. Adviértase que en todas partes la dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ se encuentra radialmente hacia afuera de q. Los campos en P_1 y P_2, situados a la misma distancia de q, poseen la misma magnitud. El campo en P_3, que está a una distancia doble de q que P_1 o P_2 tiene un cuarto de magnitud del campo en P_1 o P_2.

PROBLEMA RESUELTO 26-2. En un átomo de helio ionizado (al cual se le ha quitado uno de los dos electrones), el electrón y el núcleo están separados por una distancia de 26.5 pm. ¿Qué magnitud del campo eléctrico se debe al núcleo en el sitio del electrón?

Solución Utilizamos la ecuación 26-6, con q (la carga del núcleo) igual a $+2e$:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})[2(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})]}{(26.5 \times 10^{-12}\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 4.10 \times 10^{12}\ \mathrm{N/C}.$$

Este valor es 8 veces el campo eléctrico que opera sobre un electrón en el hidrógeno (Tabla 26-1). El incremento se origina porque 1) la carga nuclear del helio es el doble de la del hidrógeno y 2) porque el electrón en el helio ionizado está más cerca del núcleo (por un factor de 2) que en el caso de un electrón en el átomo de hidrógeno.

PROBLEMA RESUELTO 26-3. La figura 26-4 muestra una carga q_1 de $+1.5\ \mu$C y una carga q_2 de $+2.3\ \mu$C. La primera se halla en el origen del eje x, y la segunda en una posición $x = L$, donde $L = 13$ cm. ¿En qué punto P sobre el eje x es cero el campo eléctrico?

Solución El punto ha de encontrarse entre las cargas porque sólo en esta región las fuerzas ejercidas por q_1 y q_2 sobre una carga de prueba se oponen entre sí. Si $\vec{\mathbf{E}}_1$ es el campo eléctrico debido a q_1 y $\vec{\mathbf{E}}_2$ es a causa de q_2, la magnitud de estos vectores ha de ser igual, o sea

$$E_1 = E_2$$

Entonces, con base en la ecuación 26-6 tenemos

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{(L-x)^2},$$

donde x es coordenada del punto P. Al sacar la raíz cuadrada de ambos lados y al despejar x, obtenemos

$$x = \frac{L}{1 \pm \sqrt{q_2/q_1}},$$

donde hemos tenido en cuenta que el valor de la raíz cuadrada puede ser positivo o negativo. Sustituimos los valores numéricos para L, q_1 y q_2 y así obtenemos

$$x = 5.8\ \mathrm{cm} \quad \text{y} \quad x = -54.6\ \mathrm{cm}.$$

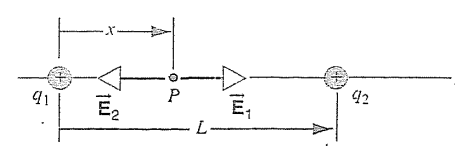


FIGURA 26-4. Problema resuelto 26-3. En el punto P los campos eléctricos de las cargas q_1 y q_2 son iguales y contrarios; así que el campo neto en él es cero.

La primera solución, que define un punto entre las cargas, es la que buscamos. La segunda define un punto ubicado a la izquierda de las dos. En este punto es verdad que $E_1 = E_2$, pero los campos apuntan en la misma dirección, por lo cual su suma vectorial no puede ser cero. Se justifica, pues, descartar la segunda solución.

Dipolo eléctrico

Muchos objetos que se encuentran en la naturaleza se analizan muy bien como cuerpos aislados que poseen una carga neta, como lo hemos hecho hasta ahora en este libro. Otros presentan tipos diferentes de comportamiento. Un tipo de este comportamiento es característico de un objeto que no tiene carga *neta*, sino que consta de cargas positivas y negativas iguales $+q$ y $-q$, separadas por una distancia fija d. Por ejemplo, una molécula iónica como el NaCl (en su estado de vapor a alta temperatura, no en su forma cristalina común) es neutra desde el punto de vista eléctrico, pero puede considerarse como un ion Na^+ unido al ion Cl^-. Un ejemplo más: un tipo similar de comportamiento de la molécula de agua es, en parte, la causa de una gran solubilidad de muchas sustancias en el agua.

Se da el nombre de *dipolo eléctrico* a la configuración de dos cargas iguales y opuestas separadas por una distancia. En las ecuaciones que describen los dipolos eléctricos, observamos que la magnitud de la carga q en los componentes y su separación d con frecuencia ocurren como el producto qd. Conviene definir esta magnitud como el *momento de dipolar eléctrico* p:

$$p = qd. \tag{26-8}$$

Resulta que esta cantidad se comporta como un vector. Por definición el vector momento dipolar eléctrico posee una magnitud $p = qd$ y una dirección que apunta de la carga negativa a la carga positiva en la línea que las une. La figura 26-5*a* muestra un dipolo eléctrico y su momento dipolar vectorial. Por ejemplo, en el NaCl la magnitud de la carga q en cada uno de los iones es e y la distancia medida de la separación es de 0.236 nm, por lo cual esperamos que el momento dipolar de la molécula sea

$$\begin{aligned} p = ed &= (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.236 \times 10^{-9}\ \text{m}) \\ &= 3.78 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

El valor medido es 3.00×10^{-29} C · m, lo que indica que el electrón no fue eliminado enteramente del Na ni agregado al Cl. En cierto modo, el electrón se comparte entre el Na y Cl, lo cual genera un momento dipolar un poco menor al previsto.

A continuación calculamos el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ del dipolo en el punto P a una distancia x en el bisector perpendicular del dipolo, como se muestra en la figura 26-5*b*.

Las cargas positiva y negativa crean los campos eléctricos $\vec{\mathbf{E}}_+$ y $\vec{\mathbf{E}}_-$, respectivamente. La magnitud de estos dos campos en P es igual, ya que P equidista de ambas cargas. En la figura 26-5*b* se incluyen también las direcciones de $\vec{\mathbf{E}}_+$ y $\vec{\mathbf{E}}_-$, determinadas por las direcciones de la fuerza proveniente de cada carga que actuaría sobre una carga positiva de prueba en P. De acuerdo con la ecuación 26-7, el campo eléctrico total en este punto se obtiene mediante la suma vectorial

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_-.$$

Según la ecuación 26-6, la magnitud de los campos creados por las cargas está dada por

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2 + (d/2)^2}. \tag{26-9}$$

Debido a que los campos $\vec{\mathbf{E}}_+$ y $\vec{\mathbf{E}}_-$ tienen igual magnitud y se hallan en ángulos iguales θ respecto a la dirección z, como se observa en la figura, el componente x del campo total es E_+ sen $\theta - E_-$ sen $\theta = 0$. En consecuencia, el campo total $\vec{\mathbf{E}}$ tiene sólo un componente z de magnitud

$$E = E_+ \cos\theta + E_- \cos\theta = 2E_+ \cos\theta. \tag{26-10}$$

En la figura vemos que el coseno del ángulo θ se determina mediante

$$\cos\theta = \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}}.$$

Al sustituir el resultado anterior y la ecuación 26-9 en la ecuación 26-10, obtenemos

$$E = (2)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2 + (d/2)^2}\frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}}$$

o bien

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{[x^2 + (d/2)^2]^{3/2}}, \tag{26-11}$$

empleando la ecuación 26-8 ($p = qd$) para el momento dipolar.

La ecuación 26-11 nos da la magnitud del campo eléctrico en P debido al dipolo. Nótese que el problema presenta simetría cilíndrica alrededor del eje z, es decir, podríamos haber decidido que el eje x tuviera cualquier dirección perpendicular al eje dipolar, y la ecuación 26-11 nos hubiera dado el campo.

A menudo observamos el campo de un dipolo eléctrico en los puntos P cuya distancia x del dipolo es muy grande en comparación con la separación d. En este caso es posible simplificar un poco el campo dipolar recurriendo a la expansión binomial,

$$(1 + y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!}y^2 + \cdots.$$

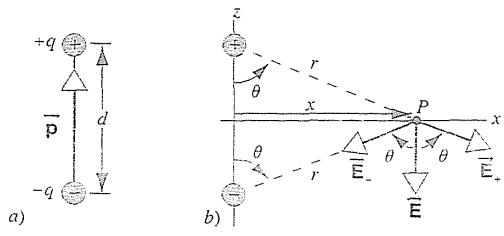


FIGURA 26-5. *a*) Las cargas positivas y negativas de igual magnitud forman un dipolo eléctrico. *b*) El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en cualquier punto es la suma vectorial de los campos creados por las cargas individuales. En el punto P del eje x el campo tiene sólo un componente z.

Escribamos la ecuación 26-11 así

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}\frac{1}{[1 + (d/2x)^2]^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}\left[1 + \left(\frac{d}{2x}\right)^2\right]^{-3/2}$$

y apliquemos la expansión binomial al factor entre corchetes, lo cual nos da

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}\left[1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{d}{2x}\right)^2 + \cdots\right].$$

Cuando $x \gg d$, basta conservar sólo el primer término de los corchetes (el 1); así encontramos una expresión de la magnitud del campo eléctrico debido a un dipolo en los puntos lejanos en su plano mediano:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}. \qquad (26\text{-}12)$$

Una expresión de forma semejante se consigue para el campo situado en el eje dipolar (el eje z en la Fig. 26-5*b*) (Prob. 1). Se obtiene un resultado más general para el campo en cualquier punto del plano xz (Prob. 2). En todos los casos, el campo en los puntos distantes varía como $1/r^3$ con la distancia r respecto al dipolo. Es un resultado típico del campo del dipolo eléctrico. Éste cambia más rápidamente con la distancia que con la dependencia $1/r^2$ característica de una carga puntual.

Asimismo, existen distribuciones más complejas de carga creadoras de campos eléctricos que varían como potencias inversas más grandes de r. En el ejercicio 11 y en el problema 4 se dan ejemplos de la variación $1/r^4$ en el campo de un *cuadrupolo* eléctrico.

26-4 CAMPO ELÉCTRICO DE DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

En la sección 25-5 estudiamos la fuerza que varias distribuciones continuas de carga ejercen sobre una carga puntual. Las hemos analizado considerándolas conjuntos de elementos infinitesimales de carga, que tratamos como cargas puntuales, y luego hemos integrado sobre la distribución para determinar la fuerza. Ahora aplicamos un método similar para calcular el campo eléctrico debido a distribuciones de carga continua. De hecho, como veremos luego, podemos usar los resultados de la sección 25-5 para obtener el campo eléctrico producido por las distribuciones estudiadas en esa sección.

Primero, explicamos el método general para encontrar el campo eléctrico de una distribución continua de carga. Dividimos la distribución en elementos infinitesimales dq, expresando el elemento de carga dq como $\lambda\, ds$, $\sigma\, dA$ o $\rho\, dV$, dependiendo de si se distribuyen en la línea (λ = densidad de carga lineal o carga por unidad de longitud), en la superficie (σ = densidad de carga superficial o carga por unidad de área) o en el volumen (ρ = densidad de carga volumétrica o carga por unidad de volumen). Al escoger un elemento arbitrario de carga, escribimos la magnitud de la contribución al campo eléctrico en el punto de observación P como si dq fuera una carga puntual:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|dq|}{r^2}, \qquad (26\text{-}13)$$

por medio de la ecuación 26-6. La dirección del vector $d\vec{\mathbf{E}}$ se determina con el signo de dq según la dirección de la fuerza que ejercería sobre una carga positiva de prueba en P. El campo total resultante en el punto p para la distribución entera se obtiene sumando las aportaciones de todos los elementos de carga del objeto, teniendo en cuenta las direcciones que podrían tener todos los $d\vec{\mathbf{E}}$:

$$\vec{\mathbf{E}} = \int d\vec{\mathbf{E}}. \qquad (26\text{-}14)$$

En las coordenadas cartesianas, podemos considerar que la ecuación 26-14 es una representación abreviada de las tres ecuaciones constitutivas:

$$E_x = \int dE_x, \qquad E_y = \int dE_y, \qquad E_z = \int dE_z. \qquad (26\text{-}15)$$

Como veremos luego, a menudo es posible simplificar el cálculo razonando, a partir de la simetría, que una o dos de las integrales desaparecen o que dos de ellas poseen valor idéntico.

Una línea de carga uniforme

Como ejemplo de la aplicación de las ecuaciones 26-13 a 26-15 vamos a estudiar el campo eléctrico debido a una línea con carga (una delgada varilla cargada por ejemplo) de longitud L que presenta una densidad uniforme de carga lineal positiva $\lambda = q/L$, donde q es la carga total transportada por la varilla. La figura 26-6 muestra la geometría para realizar el cálculo. Queremos encontrar el campo en el punto P a una distancia y de la varilla en su bisector perpendicular (el eje positivo y). La magnitud del campo eléctrico $d\vec{\mathbf{E}}$ en el punto P debido al elemento de carga dq está dada por la ecuación 26-13. Podemos concluir que $E_x = 0$, porque ninguno de los elementos de

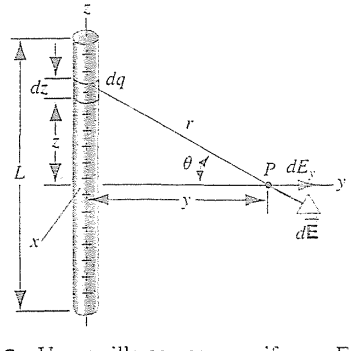


FIGURA 26-6. Una varilla con carga uniforme. El campo eléctrico en el punto P se debe al efecto total de todos los elementos de carga como dq.

carga dq en cualquier punto de la varilla produce un $d\vec{\mathbf{E}}$ con un componente x. De la simetría también podemos concluir que $E_z = 0$, porque por cada dq en z positivo hay un dq correspondiente en z negativo tal que se cancelan los componentes z cuando sumamos los vectores $d\vec{\mathbf{E}}$ de las dos cargas elementales. El único componente no cero del campo eléctrico en P es E_y. Por tanto, tenemos

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\,dz}{y^2+z^2}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

donde hemos empleado la ecuación 26-13 con dE cuando $dq = \lambda\,dz$, $\cos\theta = y/r$ y $r^2 = y^2 + z^2$. El campo total en P es

$$E_y = \int dE_y = \int_{-L/2}^{+L/2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda y\,dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Al integrar respecto a z, manteniendo constante y, obtenemos (véase integral 18 en el Ap. 1)

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L}{y\sqrt{y^2+L^2/4}}. \qquad (26\text{-}16)$$

Esta ecuación nos da el campo eléctrico en el punto P sobre el eje y positivo debido a la línea con carga. Nótese que podríamos haber conseguido el mismo resultado directamente de la ecuación 25-15 para la fuerza entre la línea con carga y la carga puntual q_0, con sólo sustituir q por λL y usar la ecuación 26-3, $E_y = F_y/q_0$.

Como en el caso del dipolo eléctrico, este problema también presenta simetría cilíndrica alrededor del eje z; podríamos haber decidido que el eje y apuntara en cualquier dirección perpendicular al eje de la varilla y a través de su punto medio. La figura 26-7 es una representación del campo en el plano xy debido a una varilla con carga positiva uniforme.

Como lo hicimos con la fuerza calculada en el capítulo 25, es importante revisar los cálculos del campo eléctrico para verificar que tengan los límites correctos. En el límite $y \to \infty$, la ecuación 26-16 se aproxima a la expresión del campo eléctrico de una carga puntual,

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y^2},$$

donde hemos utilizado $q = \lambda L$.

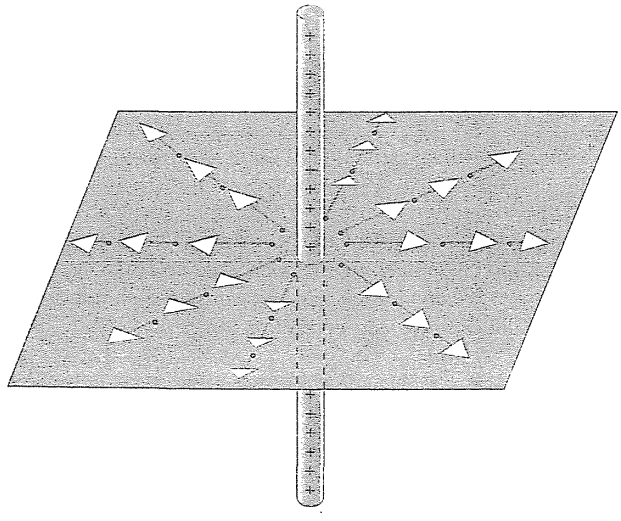


FIGURA 26-7. Campo eléctrico producido por una varilla con carga positiva. Tiene simetría cilíndrica alrededor del eje de la varilla.

En situaciones con cargas lineales, el punto de observación está tan cerca de la línea que y es pequeño en comparación con L. Si tomamos el límite de la ecuación 26-16 cuando $L \gg y$ si λ permanece constante, tenemos el campo eléctrico debido a una línea infinitamente larga con carga:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}. \qquad (26\text{-}17)$$

El campo se dirige radialmente hacia afuera de la varilla y depende en forma inversa de la distancia con la varilla.

El lector seguramente se preguntará por qué es útil calcular el campo debido a una línea infinita con carga cuando una línea real cualquiera ha de tener longitud finita. Sin embargo, en los puntos cercanos a la línea y lejanos de ambos extremos, la ecuación 26-17 ofrece una aproximación excelente y útil al campo eléctrico. A menudo es insignificante la diferencia entre el resultado aproximado (Ec. 26-17) y el exacto (Ec. 26-16). En este caso el resultado aproximado nos da una idea más física, porque la variación de E con la distancia de la varilla se percibe más inmediatamente.

Un anillo o disco con carga uniforme

Si se desea conocer el campo eléctrico proveniente de un anillo o de un disco de radio R que transportan una densidad de carga uniforme, no es preciso efectuar el cálculo completo comenzando con la ecuación 26-13. Ya hemos obtenido la fuerza que un anillo o disco con carga ejercen sobre una carga puntual q_0. La fuerza ejercida por un anillo sobre una carga puntual q_0 en el eje x del anillo estaba dada por la ecuación 25-16. Si utilizamos la ecuación 26-3, $E_z = F_z/q_0$, se determina directamente de la ecuación 25-16 el campo eléctrico en un punto del eje positivo z, debido a un anillo con carga:

$$E_z = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{Rz}{(z^2+R^2)^{3/2}}, \qquad (26\text{-}18)$$

donde hemos empleado $q = \lambda(2\,\pi R)$. El campo eléctrico está dirigido a lo largo del eje del anillo (el eje z) y se aleja de este último. La ecuación 26-18 es válida con z positivo y negativo. Si el anillo tiene carga negativa, el campo apunta a lo largo del eje en la dirección opuesta (hacia el anillo).

En forma parecida, con la ecuación 25-17 podemos determinar el campo eléctrico producido por un disco con carga:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right). \qquad (26\text{-}19)$$

Aquí, utilizando $q = \sigma A = \sigma(\pi R^2)$, hemos expresado el campo eléctrico a partir de la densidad de carga superficial del disco. Esta expresión da el campo en un punto del eje z posi-

tivo a una distancia z del disco. El campo apunta lejos del disco si éste tiene carga positiva. La ecuación 26-19 es válida sólo cuando $z > 0$. ¿Cómo habría que modificarla si P se hallara en el eje z negativo?

Una hoja infinita con carga

Examinemos ahora el caso límite de la ecuación 26-19 como $R \longrightarrow \infty$, de modo que el disco cargado se convierte en una hoja infinita con carga. Suponemos que, al aumentar R, agregamos carga al disco para que la densidad de carga superficial σ permanezca constante. En tales condiciones, podemos aproximar la ecuación 26-19 como

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \qquad (26\text{-}20)$$

El resultado anterior resulta de muchísima utilidad, pues es aproximadamente válido para un disco con densidad de carga uniforme cuando estamos cerca de él y lejos de uno de sus bordes. De hecho, si estuviéramos lejos de sus bordes, no sería imposible saber si la distribución de carga se esparce en un área circular o en una cuadrada, rectangular o de forma irregular. Como veremos en el siguiente capítulo, este resultado es válido con cualquier hoja grande de carga uniforme, sin importar su forma. El campo posee magnitud uniforme y (en una hoja con carga positiva) se aleja de la hoja con carga.

Un cascarón esférico con carga uniforme

En la sección 25-5 mencionamos dos propiedades de un cascarón esférico con carga uniforme: no ejerce fuerza alguna sobre una carga de prueba en su interior, y en los puntos exteriores la fuerza que ejerce es la misma como si toda la carga del cascarón se concentrase en un punto en su centro. Podemos usar estas propiedades para deducir el campo eléctrico debido a un cascarón delgado cargado uniformemente. Supongamos que el cascarón tiene el radio R y la carga q, que por ahora suponemos positiva. Tenemos entonces los siguientes resultados del campo eléctrico en varias distancias del centro del cascarón:

$$E = 0 \qquad (r < R) \qquad (26\text{-}21a)$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (r \geq R). \qquad (26\text{-}21b)$$

El subíndice r en el campo eléctrico nos recuerda que este último apunta en dirección radial. Los resultados anteriores se deducen directamente de la fuerza ejercida sobre una carga de prueba en varios lugares. El campo eléctrico es cero dentro del cascarón. En los puntos exteriores el campo eléctrico es radial e idéntico al de una carga puntual, de manera que su aspecto sería como el del campo de la figura 26-3.

Podemos servirnos de las propiedades de los cascarones de carga para deducir el campo eléctrico producido por una distribución de carga simétricamente esférica en la esfera de radio R. Para simplificar la explicación supondremos que la carga se distribuye uniformemente a través de toda la esfera,

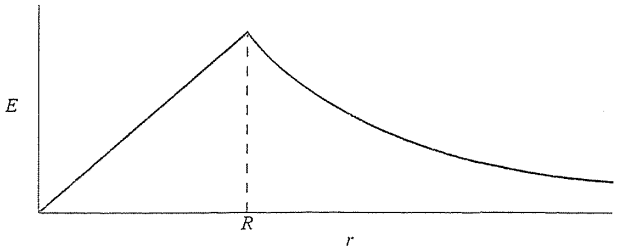


FIGURA 26-8. Magnitud del campo eléctrico creado por una esfera cargada uniformemente de radio R.

así que su densidad de carga volumétrica es una constante. Si Q es la carga total de la esfera, la densidad es

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \qquad (26\text{-}22)$$

Imagine que la esfera va a ser divida en muchos cascarones delgados de radio r y de espesor dr. Si colocamos una carga de prueba a una distancia r del origen y dentro del cascarón ($r < R$), el campo eléctrico en ese sitio de la carga se origina sólo por los cascarones de radio menor; por la ecuación 26-21a sabemos que $E = 0$ en todas los de radio mayor. Más aún, en la ecuación 26-21b vimos que el campo debido a todos los cascarones de radio menor es el mismo que el de una carga puntual en el origen. La magnitud de la carga puntual es igual a la carga total de todos los cascarones de radio menor que r o, en forma equivalente, la carga total q dentro de la esfera de radio r, dada por la densidad de carga volumétrica multiplicada por el volumen de la esfera de radio r.

$$q = \rho(\tfrac{4}{3}\pi r^3) = Q\frac{r^3}{R^3}, \qquad (26\text{-}23)$$

usando la densidad de carga obtenida de la ecuación 26-22.

La ecuación 26-21b proporciona entonces el componente radial del campo eléctrico en este sitio del interior de la esfera:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3} \qquad (r < R). \qquad (26\text{-}24)$$

Si, como supusimos, Q es positiva, el campo apunta radialmente hacia afuera; si Q es negativa, el campo se dirige radialmente al interior. Con $r > R$, el campo es idéntico al de una carga puntual Q ubicada en el origen (Ec. 26-6). Nótese que el campo crece linealmente con r cuando $r < R$, y disminuye como $1/r^2$ con $r > R$. En la figura 26-8 se muestra la magnitud del campo eléctrico en función de r.

PROBLEMA RESUELTO 26-4. Una varilla de plástico, que mide 220 cm de largo y 3.6 mm de radio, transporta una carga negativa q de magnitud 3.8×10^{-7} C, distribuida uniformemente en su superficie. ¿Cuál es el campo eléctrico cerca del punto medio de la varilla, en un lugar de su superficie?

Solución Aunque la varilla no es infinitamente larga, es muy larga en un punto de su superficie y cerca de su punto medio; así que se

justifica emplear la ecuación 26-17. La densidad de carga lineal de la varilla es

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{-3.8 \times 10^{-7}\ \text{C}}{2.2\ \text{m}} = -1.73 \times 10^{-7}\ \text{C/m}.$$

Con $y = 0.0036$ m, a partir de la ecuación 36-17 tenemos

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

$$= \frac{-1.73 \times 10^{-7}\ \text{C/m}}{(2\pi)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.0036\ \text{m})}$$

$$= -8.6 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

El signo negativo indica lo siguiente: la varilla tiene carga negativa, por eso el campo eléctrico se dirige radialmente hacia adentro, en dirección de su eje. Se producen chispas en el aire seco a presión atmosférica en un campo eléctrico cuya magnitud aproximada es 3×10^6 N/C. La fuerza del campo calculado es menor que la anterior en un factor de alrededor de 3.4, por lo cual no deberían saltar chispas.

26-5 LAS LÍNEAS DEL CAMPO ELÉCTRICO

Michael Faraday introdujo el concepto de campo eléctrico a comienzos del siglo XIX. No formuló una representación matemática de él; más bien, preparó una representación gráfica donde imaginó que el espacio alrededor de una carga eléctrica estaba lleno de *líneas de fuerza*. Hoy ya no consideramos las líneas tan reales como Faraday, pero las conservamos como un medio útil para visualizar el campo eléctrico. Las llamamos *líneas del campo eléctrico.*

La figura 26-9*a* muestra las líneas del campo eléctrico que representan un campo uniforme. Nótese que las líneas son paralelas y presentan el mismo espaciamiento. En la figura 26-9*b* vemos líneas que representan un campo no uniforme. Por convención trazamos las líneas con la siguiente propiedad:

> *La tangente a la línea del campo eléctrico que cruza un punto cualquiera del espacio denota la dirección del campo eléctrico allí.*

Por ejemplo, en la figura 26-9a en el punto P la dirección del campo eléctrico se dirige verticalmente hacia arriba, tangente a las líneas del campo. Por ser uniforme el campo, tiene esta dirección en todos los puntos de esa región del espacio. En la figura 26-9*b*, que contiene un campo no uniforme, el campo eléctrico tiene distintas direcciones en los puntos P_1 y P_2, en todos los casos tangentes al que pasa por allí.

Para las líneas de campo que poseen esta propiedad, deben también trazarse, de modo que

> *Las líneas del campo eléctrico comiencen en las cargas positivas y terminen en las negativas.*

Así, la figura 26-10 representa las líneas del campo de una carga puntual positiva aislada (o una esfera pequeña con carga positiva). Las líneas apuntan radialmente hacia afuera, de manera que el campo es radial en cualquier punto P. Las líneas del campo empiezan en la carga positiva y se extienden al infinito, ya que no hay cargas negativas en la región. Si la carga fuera negativa, las líneas del campo apuntarían en dirección contraria (radialmente hacia adentro).

Una última propiedad de las líneas del campo eléctrico es la siguiente:

> *La magnitud del campo eléctrico en un punto cualquiera es proporcional al número de líneas por unidad de superficie perpendicular a estas líneas.*

En otras palabras, cuando más densamente empacadas estén las líneas cerca de cualquier punto, más fuerte será el campo en ese punto. Por ejemplo, la figura 26-9*b* indica que la magnitud del campo es mayor en el fondo del dibujo (cerca del punto P_1) que en la parte superior (cerca del punto P_2). Por el contrario, en la figura 26-9*a* el espaciamiento entre las líneas es el mismo en todos los puntos, lo cual significa que el campo posee la misma magnitud por todas partes. En una carga puntual (Fig. 26-10), las líneas del campo están muy juntas cerca de la carga y más separadas lejos de ella, lo cual indica que el campo se debilita al incrementarse la distancia respecto a la carga.

En la figura 26-11 aparece el campo uniforme cerca de una hoja grande de carga positiva. La dirección del campo es perpendicular a la hoja. Cerca de los bordes de la hoja, el campo se vuelve no uniforme y ya no se dirige perpendicularmente a la hoja; pero mientras permanezcamos cerca del centro y lejos de los bordes, el campo será casi uniforme. Una vez más sus líneas se extienden hacia el infinito.

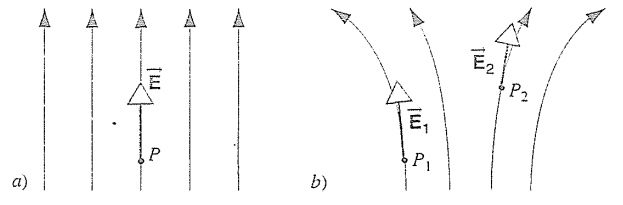


FIGURA 26-9. *a)* Líneas del campo eléctrico de un campo uniforme. *b)* Líneas del campo eléctrico de un campo no uniforme.

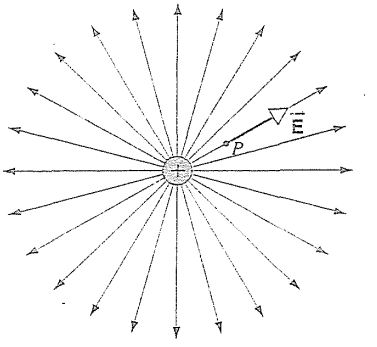


FIGURA 26-10. Líneas del campo eléctrico que rodean una carga puntual positiva y aislada o una esfera uniforme de carga positiva. Se muestra el campo situado en un punto arbitrario P.

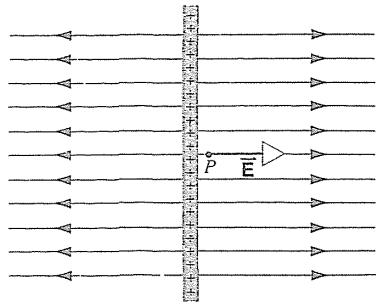


FIGURA 26-11. Líneas del campo eléctrico cerca de una hoja uniforme delgada de carga. Estamos viendo el borde de la hoja, que se orienta perpendicularmente a la página.

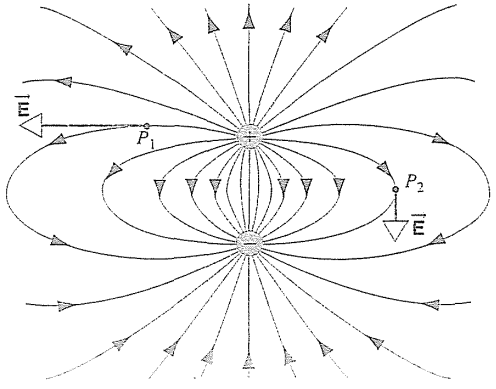


FIGURA 26-12. Líneas del campo eléctrico de un dipolo eléctrico.

En la figura 26-12 se muestra el campo cerca de un dipolo (que indica gráficamente cómo las líneas de campo empiezan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas); en la figura 26-13 se observa el campo cerca de dos cargas positivas iguales. Nótense las diferencias de los dos patrones. En la región entre las cargas, la densidad de las líneas es mayor en la figura 26-12 que en la 26-13, lo cual significa que el dipolo genera un campo mayor allí que las dos cargas positivas. Debido a que el campo eléctrico es cero entre las cargas de la figura 26-13, no pueden trazarse líneas a través de ese punto. Al alejarnos de las cargas de la figura 26-13, el patrón empieza a parecerse al de una carga simple (como en la Fig. 26-10). En

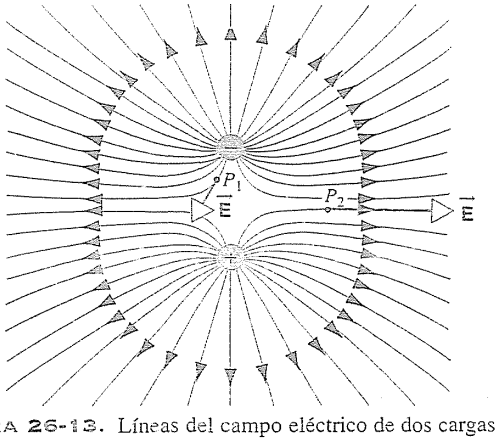


FIGURA 26-13. Líneas del campo eléctrico de dos cargas positivas iguales.

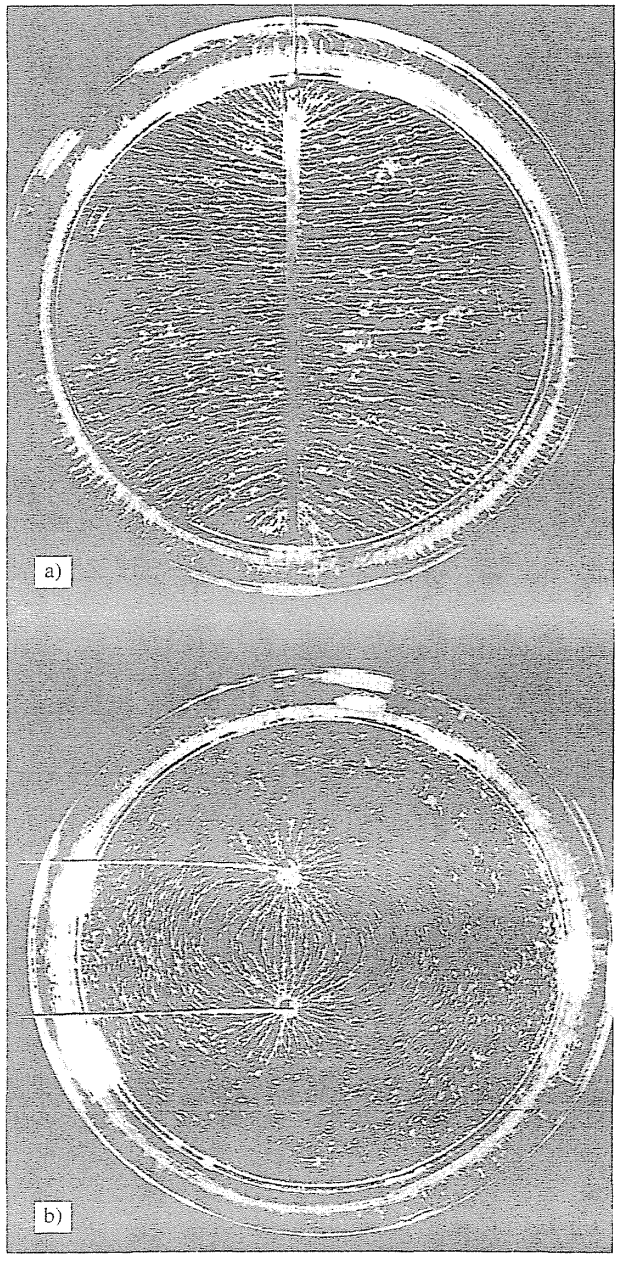


FIGURA 26-14. Fotografías de los patrones de las líneas del campo eléctrico alrededor de *a*) una placa cargada (que produce líneas paralelas de campo) y *b*) de dos varillas con carga igual pero opuesta (semejante al dipolo eléctrico de la Fig. 26-12). Se hicieron visibles los patrones suspendiendo semillas de pasto en un líquido aislante.

los puntos externos del plano mediano (perpendicular a la página y a la mitad entre las cargas), el campo es pequeño en el dipolo y se dirige hacia abajo; en cambio, en las cargas iguales es mayor y se dirige radialmente hacia afuera, como se aprecia en los puntos P_2 de las figuras 26-12 y 26-13.

Estos dibujos ayudan mucho a visualizar el patrón de las líneas del campo eléctrico. Pero no olvide que representan tan sólo una "rebanada" bidimensional de lo que es en realidad un patrón tridimensional. Los espaciamientos relativos de las líneas en dos dimensiones no corresponden estrictamente al patrón tridimensional; los espaciamientos de las líneas en nuestros dibujos bidimensionales no guardan una relación matemática directa con la magnitud del campo; indican únicamente las regiones donde el campo puede ser uniforme o su magnitud puede aumentar o disminuir.

El patrón de líneas del campo eléctrico puede hacerse visible aplicando un campo eléctrico a una suspensión de objetos diminutos en un fluido aislante. La figura 26-14 ofrece fotografías de patrones que se asemejan al dibujo de líneas del campo eléctrico en una hoja cargada y en un dipolo eléctrico.

26-6 UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO

En secciones anteriores hemos examinado la primera parte de la interacción carga $\rightleftarrows$ campo $\rightleftarrows$ carga: ¿cuál es el campo eléctrico resultante de un conjunto de cargas? En esta sección y en la siguiente vamos a estudiar la segunda parte: ¿qué sucede cuando en un campo eléctrico conocido colocamos una partícula cargada?

En la ecuación 26-4 vemos que una partícula de carga q en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ experimenta una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ dada por

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}.$$

Si queremos estudiar el movimiento de la partícula en el campo eléctrico, tan sólo necesitamos emplear la segunda ley de Newton $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, donde la fuerza resultante en la partícula incluye la fuerza eléctrica y cualquiera otra que pueda intervenir.

Como hicimos en la explicación inicial de las leyes de Newton, podemos lograr una simplificación si consideramos el caso en que la fuerza es constante. Así pues, comenzaremos analizando los casos en que el campo eléctrico y la fuerza eléctrica correspondiente son uniformes (no varían con la posición) y constantes (no varían con el tiempo). En la práctica ello se consigue en la región cercana a una hoja grande con carga uniforme, según vimos en la sección 26-4. Si queremos una uniformidad aún mayor, podemos emplear un par de hojas poco espaciadas con carga opuesta, obtenidas al conectar las terminales de una batería a un par de placas metálicas paralelas. En los siguientes problemas resueltos supondremos que el campo existe tan sólo en la región entre las placas y que se reduce abruptamente a cero cuando las partículas la abandonan. En realidad, el campo disminuye con rapidez en una distancia del orden del espaciamiento entre las placas; cuando esta distancia es pequeña, no cometemos un error demasiado grande al calcular el movimiento de la partícula si prescindimos del efecto de borde.

PROBLEMA RESUELTO 26-5. Mantenemos en equilibrio una gota de aceite cargada que tiene un radio de $R = 2.76\ \mu m$ y una densidad de $\rho = 918\ \text{kg}/m^3$ bajo la influencia combinada de su peso y de un campo eléctrico uniforme y descendente de magnitud $E = 1.65 \times 10^6\ \text{N/C}$ (Fig. 26-15). *a)* Calcule la magnitud y el signo de la carga en ella. Exprese el resultado en función de la carga elemental e. *b)* Se expone la gota a una fuente radiactiva que emite electrones. Dos electrones chocan contra la gota y son capturados por ella, lo cual cambia su carga en dos unidades. Suponiendo que el campo eléctrico conserva su valor constante, calcule la aceleración resultante de la gota.

Solución *a)* Para mantener en equilibrio la gota, su peso mg ha de ser equilibrado con una fuerza eléctrica igual de magnitud qE que actúe hacia arriba. Como se supone que el campo eléctrico sigue una dirección descendente, la carga q de la gota deberá ser negativa para que la fuerza eléctrica apunte en dirección opuesta al campo. La condición de equilibrio es

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}} + q\vec{\mathbf{E}} = 0.$$

Al tomar la componente y, obtenemos

$$-mg + q(-E) = 0$$

o, al resolver la incógnita q,

$$q = -\frac{mg}{E} = -\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}{E}$$

$$= -\frac{\frac{4}{3}\pi(2.76 \times 10^{-6}\ \text{m})^3(918\ \text{kg/m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)}{1.65 \times 10^6\ \text{N/C}}$$

$$= -4.80 \times 10^{-19}\ \text{C}.$$

Si a partir de la carga eléctrica $-e$ escribimos q como $q = n(-e)$, donde n es el número de cargas electrónicas en la gota, tendremos

$$n = \frac{q}{-e} = \frac{-4.80 \times 10^{-19}\ \text{C}}{-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 3.$$

b) Si incorporamos dos electrones más a la gota, su carga se convertirá en

$$q' = (n + 2)(-e) = 5(-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}) = -8.00 \times 10^{-19}\ \text{C}.$$

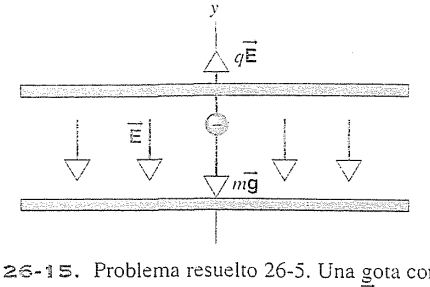


FIGURA 26-15. Problema resuelto 26-5. Una gota con carga negativa se pone en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$. Se mueve bajo la influencia combinada de su peso $m\vec{\mathbf{g}}$ y de la fuerza eléctrica $q\vec{\mathbf{E}}$.

La segunda ley de Newton puede escribirse

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + q'\vec{E} = m\vec{a}$$

y, tomando los componentes y, obtenemos

$$-mg + q'(-E) = ma.$$

Ahora podemos resolver para la aceleración:

$$a = -g - \frac{q'E}{m}$$

$$= -9.80 \text{ m/s}^2 - \frac{(-8.00 \times 10^{-19} \text{ C})(1.65 \times 10^6 \text{ N/C})}{\frac{4}{3}\pi(2.76 \times 10^{-6} \text{ m})^3(918 \text{ kg/m}^3)}$$

$$= -9.80 \text{ m/s}^2 + 16.3 \text{ m/s}^2 = +6.5 \text{ m/s}^2.$$

La gota acelera en la dirección positiva y.

En el cálculo anterior hemos ignorado la fuerza viscosa de arrastre, muy importante en esta situación. En efecto, hemos determinado la aceleración de la gota en el instante en que adquirió dos electrones más. La fuerza de arrastre, que depende de la velocidad de la gota, es cero inicialmente si la gota parte del reposo; pero aumenta a medida que comienza a moverse y, por tanto, disminuirá la magnitud de su aceleración.

En esta configuración experimental se fundamenta el experimento de la gota de aceite de Millikan, en el que se midió la magnitud de la carga electrónica. El experimento se explica más adelante en esta sección.

PROBLEMA RESUELTO 26-6. La figura 26-16 muestra el sistema deflector de electrodos en una impresora de inyección de tinta. Una gota de tinta de masa m 1.3×10^{-10} kg transporta una carga q de -1.5×10^{-13} C y entra en el sistema deflector de placas con una velocidad $v = 18$ m/s. La longitud, L, de las placas es 1.6 cm y la magnitud del campo eléctrico, E, entre ellas es 1.4×10^6 N/C. ¿Cuál es la deflección vertical de la gota en el borde extremo de las placas? No tenga en cuenta el campo eléctrico variable en los bordes de ellas.

Solución. Sea t el tiempo que la gota tarda en pasar por el sistema deflector. Los desplazamiento vertical y horizontal están dados por

$$y = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \text{y} \quad L = vt,$$

respectivamente, donde a es la aceleración vertical de la gota.

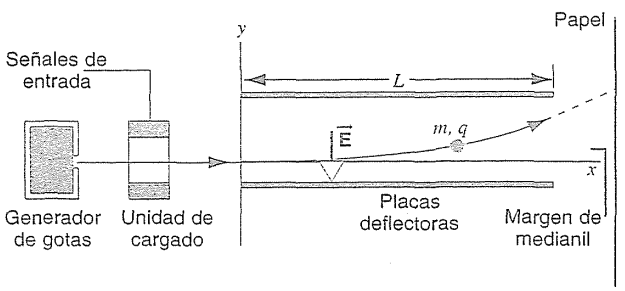


FIGURA 26-16. Problema resuelto 26-6. Características esenciales de una impresora de inyección de tinta. Una señal de entrada proveniente de la computadora controla la carga aplicada a la gota y, por tanto, la posición en que golpea al papel. Una fuerza transversal procedente del campo eléctrico $\vec{E}$ hace que la gota se desvíe. Ésta describe una trayectoria parabólica mientras se encuentre entre las placas, desplazándose a lo largo de una línea recta (líneas punteadas) después de salir de la placa.

Igual que en el problema resuelto anterior, podemos escribir el componente y de la segunda ley de Newton como $-mg + q(-E) = ma$. Como se puede verificar fácilmente, la fuerza eléctrica que opera sobre la gota, $-qE$, es mucho mayor, en este caso, que la fuerza gravitacional mg; por tanto, puede suponerse que la aceleración de la gota es $-qE/m$. Al eliminar t entre las dos ecuaciones de desplazamiento y al sustituir a por este valor, se tiene

$$y = \frac{-qEL^2}{2mv^2}$$

$$= \frac{-(-1.5 \times 10^{-13} \text{ C})(1.4 \times 10^6 \text{ N/C})(1.6 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{(2)(1.3 \times 10^{-10} \text{ kg})(18 \text{ m/s})^2}$$

$$= 6.4 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.64 \text{ mm}.$$

La deflexión en el papel será mayor que esto, pues la gota de tinta sigue una trayectoria recta hacia el papel tras abandonar la región de deflexión, como lo indica la línea punteada de la figura 26-16. Para dirigir las gotas de tinta de modo que formen bien los caracteres, es preciso controlar la carga q en ellas, a las cuales es proporcional la deflexión a un porcentaje bajo. En nuestra exposición, hemos vuelto a prescindir de las fuerzas de arrastre que operan sobre la gota; son importantes en estas velocidades tan altas de la gota.

Medición de la carga elemental

Hoy sabemos que la carga eléctrica está cuantizada, esto es, se observa sólo en múltiplos enteros de la carga elemental e, cuyo valor actualmente aceptado es $1.602176462 \times 10^{-19}$ C, con una incertidumbre experimental que aparece sólo en los dos últimos dígitos. Este valor actual, como el de casi todas las constantes fundamentales de la física, se obtuvo de varios experimentos interrelacionados y cada vez más precisos.

¿Cómo descubrimos que la carga está cuantizada? y ¿cómo se midió por primera vez el valor de e? Las primeras respuestas definitivas a ambas preguntas surgieron de experimentos efectuados por el físico norteamericano Robert A. Millikan* (1868-1953). Por este trabajo y por otros afines obtuvo el Premio Nobel de Física en 1923.

En la figura 26-17 se muestra el aparato de Millikan. Un atomizador introduce gotitas de aceite en la cámara A. Algunas adquieren carga (positiva o negativa) en el proceso. Consideramos una gota de carga q (supuestamente negativa); entra en la cámara C a través de un orificio pequeño de la placa P_1.

Si no hay campo eléctrico en la cámara, dos fuerzas operan sobre la gota, su peso mg y una fuerza viscosa de arrastre ascendente, cuya magnitud es proporcional a la rapidez de la gota que cae. Rápidamente ésta adquiera una velocidad termi-

* Consulte los detalles del experimento de Millikan en Henry A. Borres y Lloyd Motz (eds), *The World of the Atom* (Basic Book, 1966) capítulo 40. El punto de vista de dos físicos que conocieron a Millikan cuando estudiaban el posgrado se encuentra en "Robert A. Millikan, Physics Teacher", por Alfred Romer, *The Physics Teacher*, Febrero de 1978, p. 78 y "My work with Millikan on the Oil – Drop Experiment", por Harvey Fletcher, *Physics Today*, Junio de 1982, p. 43.

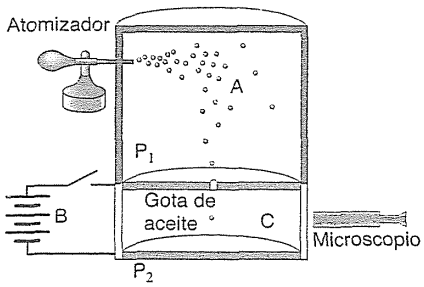


FIGURA 26-17. Aparato de la gota de aceite diseñado por Millikan para medir la carga elemental *e*. El movimiento de una gota se observa en la cámara C, donde la gravedad actúa sobre ella, la batería B crea el campo eléctrico y, si la gota se mueve, una fuerza viscosa de arrastre.

nal constante v a la cual las dos fuerzas quedan apenas balanceadas.

Se conecta la batería B entre las placas P_1 y P_2 y produce ahora un campo eléctrico descendente $\vec{E}$. Una tercera fuerza, $q\vec{E}$, actúa sobre la gota. Si q es negativa, esta fuerza apunta hacia arriba y, suponemos, la gota se desplaza hacia arriba con una nueva velocidad terminal v'. En ambos casos la fuerza de arrastre apunta en dirección opuesta a aquella en que se mueve la gota y tiene una magnitud proporcional a la velocidad de la gota. Su carga q se calcula midiendo v y v'.

Millikan descubrió que los valores de q eran todos compatibles con la relación

$$q = ne \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots .$$

En otras palabras, las cargas de la gota ocurrían sólo en múltiplos enteros de cierta magnitud fundamental, la carga elemental e, que según dedujo tiene un valor de 1.64×10^{-19} C, lo cual coincide exactamente con el valor aceptado hoy. El experimento de Millikan ofrece una prueba convincente de que la carga está cuantizada.

Movimiento en campos eléctricos no uniformes (opcional)

Hasta ahora hemos considerado sólo campos uniformes donde el campo eléctrico tiene magnitud y dirección constantes en la región donde se desplaza la partícula. Sin embargo, a menudo debemos ocuparnos de campos no uniformes. Por ejemplo, consideramos un anillo con carga positiva como el de la figura 26-18. El campo eléctrico en su eje está dado por la ecuación 26-18. Supóngase que desde una gran distancia lanzamos una partícula cargada con la velocidad inicial v_0 a lo largo del eje z hacia el anillo. A medida que ella recorre el eje, aumenta el campo eléctrico (y, por tanto, la fuerza eléctrica de la partícula). ¿Cómo podemos analizar su movimiento subse-

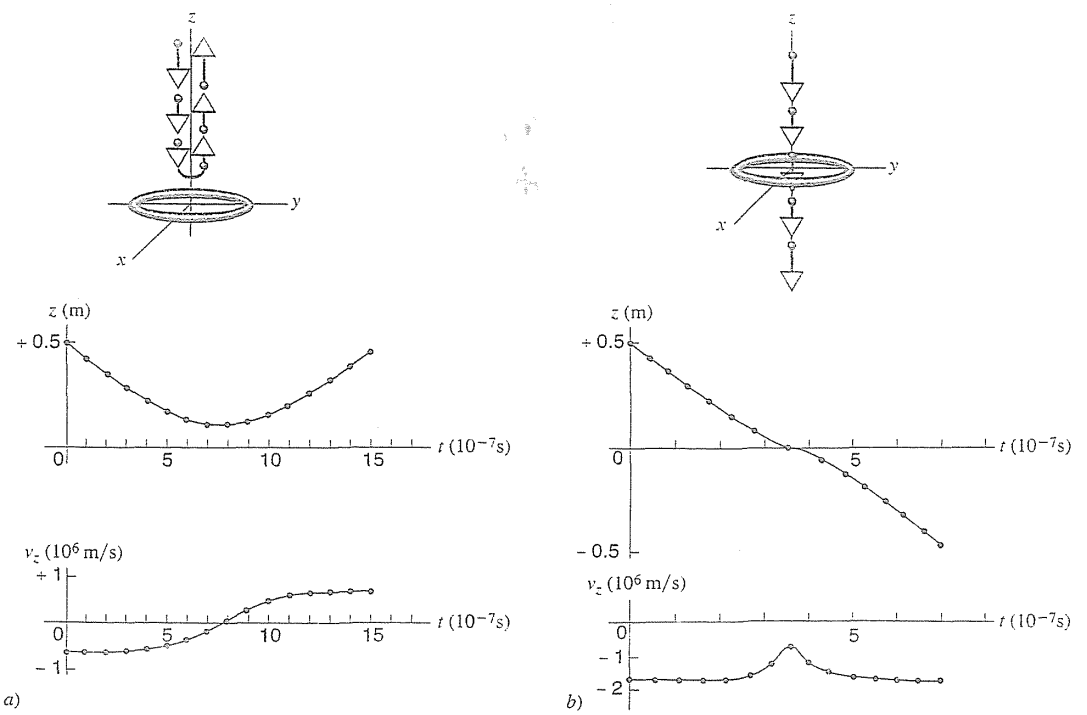


FIGURA 26-18. *a)* Movimiento de un protón proyectado a lo largo del eje de un anillo con carga positiva uniforme. Se muestran la posición y la velocidad. El protón se detiene inmediatamente en un tiempo aproximado de 8×10^{-7} s e invierte su movimiento. Los puntos son resultado de un cálculo numérico; se hacen pasar las curvas por los puntos. *b)* Si se aumenta lo suficiente la velocidad inicial de un protón, podrá cruzar el anillo; su rapidez es mínima cuando atraviesa el centro del anillo.

cuente si prescindimos de la gravedad y consideramos sólo la fuerza eléctrica de la partícula?

En tales casos hay que recurrir a métodos analíticos para calcular las fuerzas dependientes de la posición parecidos a los descritos en la sección 5-5 y aplicables a las fuerzas dependientes del tiempo. Un método equivalente consiste en usar el procedimiento expuesto en la sección 12-5, pues, como veremos en el capítulo 28, la fuerza electrostática es conservativa. Otra opción consiste en emplear métodos numéricos para encontrar la solución, dividiendo el movimiento en intervalos infinitesimalmente pequeños donde suponemos que la aceleración es casi constante; una solución aproximada puede obtenerse con una computadora.

En este cálculo utilizamos un anillo de radio $R = 3$ cm y con una densidad de carga lineal $\lambda = +2 \times 10^{-7}$ C/m. Se lanza un protón ($q = +1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) sobre un eje de una espira desde una posición inicial en $z = +0.5$ m, a una velocidad inicial de $v_{z0} = -7 \times 10^5$ m/s. (La velocidad negativa inicial significa que el protón se desplaza hacia abajo en dirección de la espira, que se halla en el plano xy.) La espira con carga positiva ejerce una fuerza de repulsión sobre el protón con carga positiva, reduciendo su rapidez. En la figura 26-18*a* graficamos el movimiento resultante en el caso de que el protón no posea suficiente energía cinética inicial para alcanzar el plano de la espira. Se detiene de inmediato en un punto situado arriba del plano de la espira y luego invierte su movimiento conforme la espira la acelera, ahora en la dirección positiva z. Nótese que, con excepción de la región cercana a la espira, la velocidad del protón es casi constante porque el campo eléctrico es débil en distancias mayores.

La figura 26-18*b* muestra gráficamente el movimiento en el caso de que el protón tenga energía cinética inicial más que suficiente para llegar al plano de la espira. La fuerza de repulsión reduce el movimiento del protón, pero no lo detiene. El protón atraviesa la espira; la magnitud de su velocidad alcanza un mínimo al pasar por ella. Una vez más, lejos de la espira se desplaza con una velocidad casi constante. ■

26-7 DIPOLO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Cuando ponemos un dipolo eléctrico (Fig. 26-5*a*) en un campo eléctrico *externo*, la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga positiva seguirá una dirección, y la ejercida sobre la carga negativa seguirá otra. Al explicar el efecto neto de estas fuerzas, es conveniente utilizar el vector de momento dipolar $\vec{p}$, que posee una magnitud $p = qd$ y que apunta desde la carga negativa hacia la positiva. El escribir el momento dipolar como vector nos permite expresar en forma concisa las relaciones fundamentales en que intervienen los dipolos.

En la figura 26-19*a* se muestra un dipolo dentro de un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. (Este campo *no* es el del dipolo propiamente dicho, sino que lo produce un agente externo que no aparece en la figura.) El momento dipolar $\vec{p}$ forma un ángulo θ con la dirección del campo. Suponemos que éste es

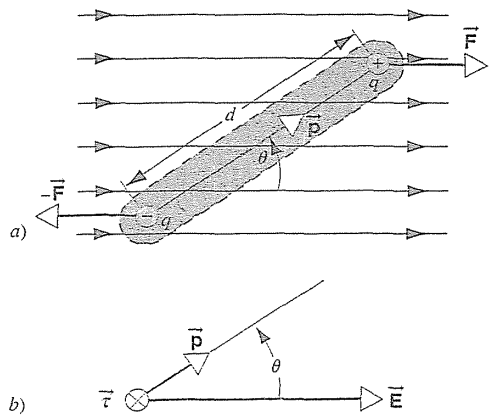


FIGURA 26-19. *a*) Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme. *b*) La relación vectorial $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ entre el momento dipolar $\vec{p}$, el campo eléctrico $\vec{E}$ y el par de torsión resultante $\vec{\tau}$ en el dipolo. El par de torsión apunta hacia la página.

uniforme, así que $\vec{E}$ tiene la misma magnitud y dirección en el lugar de $+q$ y $-q$. En consecuencia, las fuerzas ejercidas sobre esas dos cargas poseen igual magnitud $F = qE$ pero dirección contraria, como se muestra en la figura 26-19*a*. Por ello, la fuerza neta en el dipolo debida al campo externo será cero, pero hay un par de torsión neto en su centro de masa que tiende a girar el dipolo para alinear $\vec{p}$ con $\vec{E}$. El par de torsión de las cargas está dado por $\tau = Fr_\perp$; el par de torsión neto alrededor del centro del dipolo debido a causa de las dos fuerzas posee la magnitud

$$\tau = F\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta + F\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta = Fd\operatorname{sen}\theta, \quad (26\text{-}25)$$

y su dirección es perpendicular al plano de la página y a su interior, como se indica en la figura 26-19*b*. Podemos escribir la ecuación 26-25 así

$$\tau = (qE)d\operatorname{sen}\theta = (qd)E\operatorname{sen}\theta = pE\operatorname{sen}\theta. \quad (26\text{-}26)$$

La ecuación 26-26 puede escribirse en forma vectorial

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad (26\text{-}27)$$

lo cual es consistente con las relaciones direccionales del producto cruz, como lo muestran los tres vectores de la figura 26-19*b*.

Como sucede generalmente en la dinámica cuando intervienen fuerzas conservativas (a esta categoría pertenece la fuerza electrostática según vimos en el Cap. 28), el sistema puede representarse con la misma fidelidad empleando ecuaciones de fuerza o de energía. Por tanto, consideremos el trabajo ejecutado por el campo eléctrico al hacer girar un dipolo en un ángulo θ. Con la expresión adecuada del trabajo en el movimiento rotacional (Ec. 11-25), el trabajo hecho por el campo externo al girar el dipolo de un ángulo inicial θ_0 a un ángulo final θ es

$$W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta} -\tau\, d\theta, \quad (26\text{-}28)$$

donde $\vec{\tau}$ es el par de torsión ejercido por el campo eléctrico externo. El signo menos en la ecuación 26-28 es necesario porque el par de torsión τ tiende a *disminuir* θ; en la terminología de vectores $\vec{\tau}$ y $d\vec{\theta}$ siguen direcciones opuestas, por lo cual $\vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = -\tau\, d\theta$. La combinación de las ecuaciones 26-28 y 26-26 nos da

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} -pE \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -pE\int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$
$$= pE(\cos\theta - \cos\theta_0). \qquad (26\text{-}29)$$

El trabajo efectuado por el agente que produce el campo externo es igual al negativo del cambio en la energía potencial del sistema dipolo + campo; por tanto, tenemos

$$\Delta U \equiv U(\theta) - U(\theta_0) = -W = -pE(\cos\theta - \cos\theta_0). \qquad (26\text{-}30)$$

Definiremos arbitrariamente que el ángulo de referencia θ_0 es 90° y decidimos que la energía potencial $U(\theta_0)$ sea cero en ese ángulo. Así pues, en cualquier ángulo θ la energía potencial es

$$U = -pE\cos\theta, \qquad (26\text{-}31)$$

que puede escribirse en forma vectorial

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}. \qquad (26\text{-}32)$$

Por tanto, U es un mínimo cuando $\vec{p}$ y $\vec{E}$ son paralelos.

Una molécula de agua tiene un momento dipolar eléctrico. En un horno de microondas el campo eléctrico de la radiación de microondas tiende a girar el momento dipolar de las moléculas de agua para alinearlas al campo. Una molécula libre de agua simplemente oscilaría alrededor de su posición de equilibrio; en cambio, en los materiales (la comida entre ellos) las interacciones de las moléculas vecinas de agua convierten en energía interna el movimiento angular debido al par de torsión (o, equivalentemente, la energía cinética de la rotación atribuible a la reducción de la energía potencial del dipolo en el campo). La dirección del campo eléctrico se invierte cada 2×10^{-10} s; a medida que los momentos dipolares tratan continuamente de seguir el campo, transfieren la energía que cocina la comida.

El movimiento de un dipolo en un campo externo puede interpretarse partiendo de un par de torsión que lo gira para alienarlo con el campo (Ec. 26-27), o partiendo de una energía potencial que se reduce a un mínimo, cuando el dipolo se alinea con el campo (Ec. 26-32). La elección de una u otra interpretación suele fundarse en la facilidad con que se aplica a un problema en particular.

PROBLEMA RESUELTO 26-7. Una molécula de vapor de agua (H_2O) tiene un momento dipolar eléctrico de magnitud $p = 6.2 \times 10^{-30}$ C · m. (Este gran momento es el origen de muchas de las propiedades que hacen del agua una sustancia tan importante, entre otras cosas por su capacidad de funcionar como un solvente universal.) La figura 26-20 es una representación de la molécula: muestra los tres núcleos y las distribuciones de los electrones circundantes. El momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ está representado por un vector en el eje de simetría. Este momento se produce porque el centro efectivo de la carga positiva no coincide con el de la carga negativa. (Un caso contrastante es el de una molécula de dióxido de carbono, CO_2. Aquí los tres átomos están unidos en una línea recta, con el carbono en la mitad y los oxígenos a ambos lados. El centro de la carga positiva y el de la carga negativa coinciden en el centro de masa de la molécula; el momento dipolar eléctrico de CO_2 es cero.) *a*) ¿A qué distancia se halla el centro efectivo de las cargas positiva y negativa en una molécula de H_2O? *b*) ¿Cuál es el par de torsión máximo en una molécula de H_2O en un campo eléctrico típico de laboratorio que tiene una magnitud 1.5×10^4 N/C. *c*) Suponga que el momento dipolar de una molécula de H_2O apunta inicialmente en dirección opuesta al campo. ¿Cuánto trabajo realiza el campo eléctrico al hacer girar la molécula para alinearla con él?

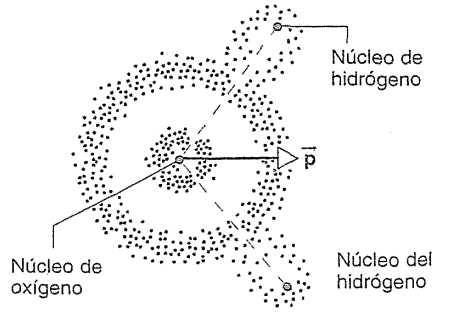


FIGURA 26-20. Una molécula de H_2O, que muestra los tres núcleos, la distribución de electrones y el vector momento dipolar eléctrico $\vec{p}$.

Solución *a*) En esta molécula hay 10 electrones y 10 cargas positivas correspondientes. En el caso de la magnitud del momento dipolar podemos escribir

$$p = qd = (10e)(d),$$

donde d es la separación que buscamos y e es la carga elemental. Por tanto,

$$d = \frac{p}{10e} = \frac{6.2 \times 10^{-30}\ \text{C}\cdot\text{m}}{(10)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})}$$
$$= 3.9 \times 10^{-12}\ \text{m} = 3.9\ \text{pm}.$$

Esto representa alrededor del 4% de la distancia de enlace OH en la molécula.

b) Como se indica en la ecuación 26-26, el par de torsión alcanza su máximo cuando $\theta = 90°$. La sustitución de este valor en la ecuación da por resultado

$$\tau = pE\operatorname{sen}\theta = (6.2 \times 10^{-30}\ \text{C}\cdot\text{m})(1.5 \times 10^4\ \text{N/C})(\operatorname{sen} 90°)$$
$$= 9.3 \times 10^{-26}\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

c) El trabajo efectuado al girar el dipolo de $\theta_0 = 180°$ o $\theta = 0°$ está dado por la ecuación 26-29,

$$W = pE(\cos\theta - \cos\theta_0)$$
$$= pE(\cos 0° - \cos 180°)$$
$$= 2pE = (2)(6.2 \times 10^{-30}\ \text{C}\cdot\text{m})(1.5 \times 10^4\ \text{N/C})$$
$$= 1.9 \times 10^{-25}\ \text{J}.$$

En cambio, la contribución translacional promedio a la energía interna ($=\frac{3}{2}kT$) de una molécula a temperatura ambiente es 6.2×10^{-21} J, que es 33,000 veces mayor. En las condiciones del problema, la agitación térmica eliminaría la tendencia de los dipolos a alinearse con el campo. En otras palabras, si tuviésemos un grupo de moléculas a temperatura ambiente con momentos dipolares orientados al azar, a causa de la intensidad de la energía interna la aplicación de un cam-

po eléctrico de tal magnitud influiría muy poco en la alineación de los momentos dipolares. Si queremos alinear los dipolos, hay que utilizar campos mucho más fuertes, temperaturas mucho más bajas o ambas cosas.

26-8 EL MODELO NUCLEAR DEL ÁTOMO (opcional)

Hoy sabemos que el átomo está formado por un núcleo diminuto que transporta una carga positiva Ze, donde Z es el número atómico. El núcleo esta rodeado por un volumen mucho más grande que contiene Z electrones, todos los cuales llevan una carga de $-e$, de modo que en general el átomo es neutro. Sabemos asimismo que el núcleo contiene gran parte (casi siempre mayor que 99.995%) de la masa del átomo.

En los primeros años del siglo XX los datos anteriores no se conocían y se especulaba sobre la estructura del átomo y, en especial sobre la distribución de su carga positiva. Según una teoría de gran aceptación en aquel tiempo, la carga positiva se distribuye más o menos uniformemente en todo el volumen esférico del átomo. Este modelo de la estructura del átomo se conoce como *modelo de Thomson* en honor de J. J. Thomson, quien lo propuso. (Thomson fue el primero en medir la razón de carga a masa del electrón; de ahí que se reconozca como el descubridor del electrón.) También se le llama modelo "budín de ciruelas" porque los electrones se adhieren a la esfera difusa de carga positiva a manera de pasas en este tipo de budín.

Una manera de probar el modelo consiste en determinar el campo eléctrico del átomo, sondeándolo con un haz de proyectiles de carga positiva que pasan cerca de él. El campo eléctrico del átomo desvía o *dispersa* las partículas del haz. En esta exposición vamos a analizar exclusivamente el efecto que la esfera de carga positiva tiene en el proyectil. Suponemos que éste es mucho *menos* masivo que el átomo y mucho *más* masivo que un electrón. De este modo los electrones producen un efecto despreciable en la dispersión del proyectil y puede suponerse que el átomo permanece en reposo mientras se desvía al proyectil.

Podemos estimar la deflexión de un átomo en el modelo de Thomson, en el cual una carga positiva se distribuye uniformemente en todo su volumen. En la ecuación 26-6 se indicó el campo eléctrico producido por una esfera uniforme de carga positiva en el caso de los puntos fuera de la esfera y en la ecuación 26-24 en el caso de los puntos del interior. Calculemos ahora el campo eléctrico en la superficie, el cual, como se aprecia en la figura 26-8, es el *más grande* posible que esta distribución puede producir. Consideramos un átomo pesado como el del oro, que tiene una carga positiva Q de $79e$ y un radio R de unos 1.0×10^{-10} m. Prescindiendo de los electrones, el campo eléctrico en $r = R$ debido a las cargas positivas es

$$E_{\text{máx}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2} = 1.1 \times 10^{13}\ \text{N/C}.$$

Para los proyectiles de nuestro experimento, usaremos un haz de partículas alfa, que tiene una carga positiva q de $2e$ y una masa m de 6.6×10^{-27} kg. Las partículas alfa son núcleos de átomos de helio, que se emiten en algunos procesos de decaimiento radiactivo. Una energía cinética típica de ellos podría ser de unos $K = 6$ MeV o 9.6×10^{-13} J. A esta energía es fácil verificar que la partícula tiene una velocidad aproximada de 1.7×10^7 m/s.

Supongamos que la partícula pasa cerca de la superficie de los átomos, donde experimenta el máximo campo eléctrico que este átomo puede ejercer. La fuerza correspondiente que opera sobre la partícula es

$$F = qE_{\text{máx}} = 3.5 \times 10^{-6}\ \text{N}.$$

La figura 26-21 es un diagrama esquemático del experimento de dispersión. El cálculo real de la deflexión es bastante complicado, pero podemos efectuar algunas aproximaciones que lo simplifiquen y permitan estimar la deflexión máxima. Supongamos que la fuerza anterior es constante y que actúa sólo durante el tiempo Δt que el proyectil tarda en recorrer una distancia igual a un diámetro del átomo, como se advierte en la figura 26-21. Este intervalo de tiempo es

$$\Delta t = \frac{2R}{v} = 1.2 \times 10^{-17}\ \text{s}.$$

La fuerza imprime a la partícula una aceleración transversal a, la cual le produce una velocidad transversal Δv dada por

$$\Delta v = a\,\Delta t = \frac{F}{m}\Delta t = 6.4 \times 10^3\ \text{m/s}.$$

La partícula se desviará un ángulo pequeño θ que puede estimarse en alrededor de

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\Delta v}{v} = 0.02°.$$

En 1911 este tipo de experimento de dispersión lo realizaron por primera vez Ernest Rutherford y sus colaboradores

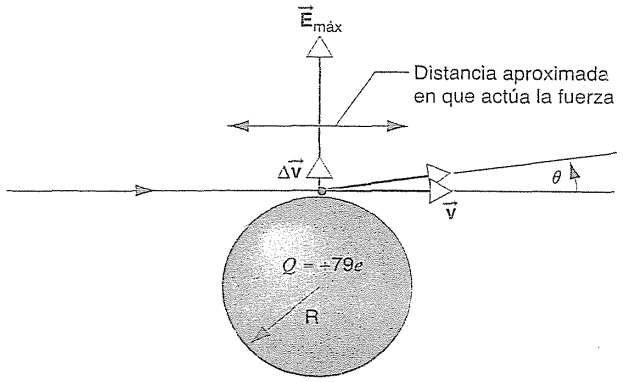


FIGURA 26-21. La dispersión de un proyectil con carga positiva que pasa cerca de la superficie de un átomo, representado por una esfera uniforme de carga positiva. El campo eléctrico causa al proyectil una deflexión transversal por un ángulo θ.

en la Universidad de Manchester (Inglaterra). Pasaron un haz de partículas alfa por una delgada hoja de oro y calcularon la probabilidad relativa de que se dispersaran en varios ángulos θ en relación con su dirección original. Por supuesto no podían controlar cómo atravesaban un átomo en particular; de hecho, en vez de rozar el borde, casi todas cruzaban el volumen del átomo de la figura 26-21 y (según el modelo de Thomson) se desviaban menos del ángulo máximo que hemos calculado.

Los resultados demostraron que aunque casi todas las partículas alfa se desviaban en ángulos de unas cuantas centésimas de grado, un número pequeño (quizá 1 en 10^4) se desviaba en ángulos mayores que 90°. Tal resultado contradice totalmente el modelo de Thomson, e hizo a Rutherford comentar: "Fue el acontecimiento más increíble que me ha ocurrido en toda la vida. Casi tan increíble como si disparáramos una bala de 15 pulgadas contra un trozo de papel y rebotara para golpearnos".

Basándose en este tipo de experimentos de dispersión, Rutherford concluyó que la carga positiva de un átomo *no* se distribuía a través de una esfera del mismo tamaño que el átomo, sino que se concentraba en una región diminuta (el *núcleo*) cerca de su centro. En el caso de un átomo de oro, el núcleo tiene un radio de unos 7×10^{-15} m (7 fm), aproximadamente 10^{-4} menor que el radio del átomo. Es decir, el núcleo ocupa un volumen apenas 10^{-12} del total del átomo.

Calculemos el campo eléctrico máximo y la fuerza correspondiente ejercida sobre una partícula alfa que pasa cerca de la superficie del núcleo. Si lo consideramos una bola esférica de carga uniforme $Q = 79e$ y de radio $R = 7$ fm, el campo eléctrico máximo es

$$E_{\text{máx}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2} = 2.3 \times 10^{21} \text{ N/C}.$$

La cifra anterior equivale a una magnitud de más de ocho órdenes mayor que el campo eléctrico que operaría sobre una partícula en la superficie de un átomo del modelo de budín de ciruelas. La fuerza correspondiente es

$$F = qE_{\text{máx}} = 740 \text{ N}.$$

¡Esta es una fuerza enorme! Realicemos la misma simplificación que hicimos en el cálculo anterior y supongamos que la fuerza es constante y que actúa sobre la partícula sólo durante el tiempo Δt que la partícula tarda en recorrer una distancia igual a un diámetro nuclear:

$$\Delta t = \frac{2R}{v} = 8.2 \times 10^{-22} \text{ s}.$$

Puede estimarse que el cambio correspondiente de velocidad de la partícula es

$$\Delta v = a\,\Delta t = \frac{F}{m}\Delta t = 9 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

La magnitud anterior es semejante a la velocidad. Concluimos que un átomo nuclear puede producir un campo eléctrico suficientemente grande para invertir el movimiento del proyectil.

Basándose en el modelo nuclear del átomo, Rutherford logró obtener una fórmula exacta del número de partículas esparcidas en un ángulo cualquiera; los experimentos revelaron una coincidencia perfecta con esta fórmula. También pudo utilizarla para determinar el número atómico Z de los átomos blanco. Más aún, si se usan partículas de mayor energía que penetran en el núcleo (Prob. res. 25-7), el método sirve además para determinar el radio nuclear.

Esta serie clásica y laboriosa de experimentos, así como su interpretación tan brillante, sentaron las bases de la física atómica y nuclear modernas; a Rutherford se le conoce generalmente como el fundador de estas disciplinas. ■

OPCIÓN MÚLTIPLE

26-1 ¿Qué es un campo?

26-2 Campo eléctrico

1. El campo eléctrico se define en la ecuación 26-3 en función de q_0, una carga *positiva* pequeña. Si en cambio la definición se hiciera en función de una carga *negativa* pequeña de la misma magnitud, en comparación con el campo *original* recién definido

   A) apuntaría en la misma dirección y tendría la misma magnitud.

   B) apuntaría en dirección opuesta pero tendría la misma magnitud.

   C) apuntaría en la misma dirección pero tendría una magnitud distinta.

   D) apuntaría en dirección opuesta y tendría una magnitud distinta.

26-3 Campo eléctrico de cargas puntuales

2. Una carga puntual $+q$ se halla en el origen y otra $+2q$ está en $x = a$, donde a es positiva.

   a) ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

   A) Cerca de las cargas, el campo eléctrico puede ser cero fuera del eje x.

   B) Cerca de las cargas, la magnitud del campo eléctrico puede ser máxima fuera del eje x.

   C) El campo eléctrico puede ser cero en alguna parte entre las cargas.

   D) El campo eléctrico puede ser cero en el eje x en los puntos finitos no situados entre las cargas.

   b) ¿En cuál de las siguientes regiones pudiera existir un punto donde el campo eléctrico fuera cero?

A) $-\infty < x < 0$ B) $0 < x < a$
C) $a < x < \infty$
D) E no desaparece en la región $-\infty < x < \infty$.

3. Una carga puntual $+q$ se encuentra en el origen y otra $-2q$ está en $x = a$, donde a es positiva.
a) ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?
A) Cerca de las cargas, el campo eléctrico puede ser cero fuera del eje x.
B) Cerca de las cargas, la magnitud del campo eléctrico puede alcanzar su máximo fuera del eje x.
C) El campo eléctrico puede ser cero entre las cargas.
D) El campo eléctrico puede ser cero a lo largo el eje x en los puntos finitos, pero no entre las cargas.
b) ¿En cuál de las siguientes regiones pudiera existir un punto donde el campo eléctrico es cero?
A) $-\infty < x < 0$ B) $0 < x < a$
C) $a < x < \infty$
D) E no desaparece en la región $-\infty < x < \infty$.

26-4 Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga

4. Considere la magnitud del campo eléctrico $E(z)$ en el eje de un anillo con carga uniforme.
a) $E(z)$ tendrá su máximo valor cuando
A) $z = 0$. B) $0 < |z| < \infty$.
C) $|z| = \infty$. D) A) y C) son correctas.
b) $E(z)$ puede ser cero cuando
A) $z = 0$. B) $0 < |z| < \infty$.
C) $|z| = \infty$. D) A) y C) son correctas.

5. Considere la magnitud del campo eléctrico $E(z)$ en el eje de un disco con carga uniforme.
a) $E(z)$ tendrá su valor máximo cuando
A) $z = 0$. B) $0 < |z| < \infty$.
C) $|z| = \infty$. D) A) y C) son correctas.
b) $E(z)$ puede ser cero cuando
A) $z = 0$. B) $0 < |z| < \infty$.
C) $|z| = \infty$. D) A) y C) son correctas.

26-5 Las líneas del campo eléctrico

6. En la figura 26-22 se muestran las líneas del campo eléctrico alrededor de un dipolo eléctrico. ¿Cuál de las flechas representan mejor el campo eléctrico en el punto P?

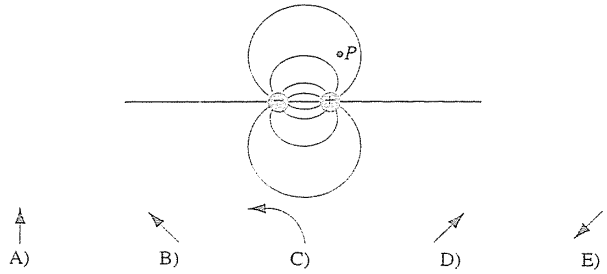


FIGURA 26-22. Pregunta de opción múltiple 6.

7. La figura 26-23 muestra las líneas del campo eléctrico alrededor de tres cargas puntuales, A, B y C. *a*) ¿Cuáles cargas son positivas? *b*) ¿Cuál tiene la máxima magnitud? *c*) ¿En cuál región o regiones de la figura pudiera ser cero el campo eléctrico?
A) cerca de A. B) cerca de B.
C) cerca de C. D) en ninguna parte.

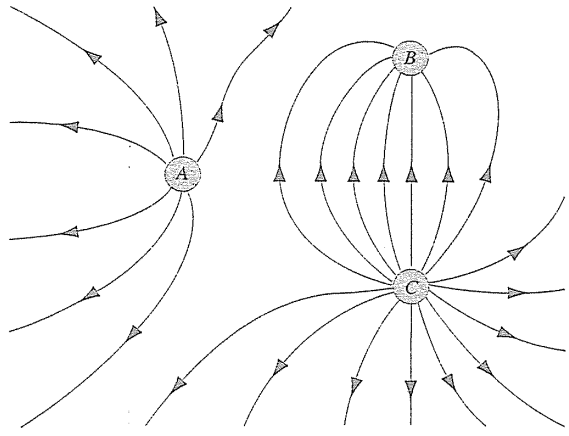


FIGURA 26-23. Pregunta de opción múltiple 7.

26-6 Una carga puntual en un campo eléctrico

8. Tres esferas pequeñas x, y y z transportan cargas de igual magnitud y con los signos que aparecen en la figura 26-24. Están en los vértices de un triángulo isósceles; la distancia entre x y y es igual a la existente entre x y z. Se mantiene en su sitio a las esferas y y z, pero la esfera x puede desplazarse libremente en una superficie sin fricción.
a) ¿Qué dirección sigue la fuerza eléctrica en la esfera x en el punto que se ve en la figura?
b) ¿Qué trayectoria adoptará la esfera x cuando la suelten?

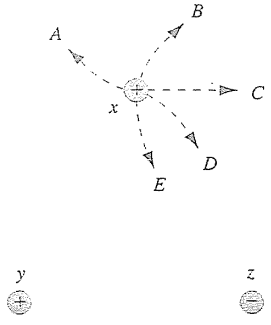


FIGURA 26-24. Pregunta de opción múltiple 8.

9. Un electrón se halla en un campo eléctrico *uniforme*, creado entre placas paralelas cargadas positiva y negativa. ¿Cuándo experimentará la mayor fuerza electrostática?
A) Cuando esté más cerca de la placa positiva.
B) Cuando esté más cerca de la placa negativa.
C) Cuando esté en la mitad de las placas.
D) El electrón experimenta la misma fuerza sin importar su ubicación entre las placas.

10. Se tomaron las siguientes mediciones de la carga (en unidades de 10^{-19} C) en una serie de gotas cargadas. ¿Cuál es la mayor unidad fundamental posible de la carga que puede deducirse de esos datos?

48	19.2	28.8
9.6	38.4	24

A) 1.6×10^{-19} C B) 4.8×10^{-19} C
C) 9.6×10^{-19} C D) 48×10^{-19} C

26-7 Dipolo en un campo eléctrico

11. El campo eléctrico en cierta región del espacio obedece $E_y \neq 0$, $E_x = E_z = 0$ y $\partial\vec{E}/\partial x \neq 0$, $\partial\vec{E}/\partial y = \partial\vec{E}/\partial z = 0$.

a) En este campo la fuerza neta en un dipolo eléctrico orientado paralelamente al eje x
A) se dirige a lo largo del eje x.
B) se dirige a lo largo del eje y.
C) se dirige a lo largo del eje z.
D) ninguna de las posibilidades anteriores.

b) En este campo el par de torsión neto en un dipolo eléctrico paralelo al eje x
A) se dirige a lo largo del eje x.
B) se dirige a lo largo del eje y.
C) se dirige a lo largo del eje z.
D) ninguna de las posibilidades anteriores.

26-8 El modelo nuclear del átomo

PREGUNTAS

1. Mencione el mayor número posible de campos escalares y vectoriales.

2. *a*) En la atracción gravitacional entre la Tierra y una piedra, ¿podemos decir que aquélla se halla en el campo gravitacional de ésta? *b*) ¿Qué relación hay entre el campo gravitacional producido por la piedra y por la Tierra?

3. Una bola con carga positiva cuelga de un largo hilo de seda. Queremos medir la fuerza E en un punto del mismo plano horizontal de la carga suspendida. Para ello hemos colocado una carga q_0 en el punto y medimos F/q_0. ¿Será F/q_0 menor, igual o mayor que E en el punto en cuestión?

4. Al explorar los campos eléctricos con una carga de prueba, para facilitar la exposición supusimos a menudo que era positiva. ¿Influye esto al momento de determinar el campo? Explique esto con un caso imaginario simple.

5. Las líneas del campo eléctrico nunca se cruzan. ¿Por qué?

6. En la figura 26-13, ¿por qué las líneas de campo alrededor del borde de la figura, al ser extendidas hacia atrás, dan la impresión de irradiar uniformemente del centro de la figura?

7. Una carga puntual se desplaza a través de un campo eléctrico en ángulo recto con las líneas de campo. ¿Actúa alguna fuerza sobre ella?

8. En la figura 26-14, ¿por qué las semillas de pasto se alinean con las líneas del campo eléctrico? En condiciones normales no transportan carga eléctrica. (Consulte "Demostration of the Electric Fields of Current-Carrying Conductors" de O. Jefimenko, *American Journal of Physics,* enero de 1962, p. 19.)

9. ¿Cuál es el origen del "pegado estático", un fenómeno que a veces se presenta en la ropa que se saca del secador?

10. Una distancia d separa dos cargas puntuales de magnitud y signo desconocidos. En la línea que las une, el campo eléctrico es cero en un punto entre ellas. ¿Qué conclusión puede extraerse acerca de las cargas?

11. Separamos por una distancia d dos cargas puntuales de magnitud y signo desconocidos *a*) Si es posible tener $E = 0$ en cualquier punto no entre las cargas sino en la línea que las une, ¿qué condiciones se requieren y dónde se localiza el punto? *b*) En un arreglo cualquiera de dos cargas puntuales es posible encontrar dos puntos (ninguno en el infinito) donde $E = 0$. De ser así, ¿En qué circunstancias?

12. Dos cargas puntuales de magnitud y signo desconocidos se encuentran fijas a una distancia d. ¿Podemos tener $E = 0$ en los puntos fuera del eje (sin incluir el infinito)? Explique su respuesta.

13. En el problema resuelto 26-3, una carga colocada en el punto P de la figura 26-4 está en equilibrio, porque ninguna fuerza opera sobre ella. ¿Es estable el equilibrio *a*) en los desplazamientos a lo largo de la línea que las une y *b*) en los que forman ángulo recto con esta línea?

14. En la figura 26-12, la fuerza en la carga inferior apunta hacia arriba y es finita. No obstante, el apiñamiento de las líneas de campo indica que E es infinitamente grande en el sitio de la carga (puntual). Una carga inmersa en un campo infinitamente grande debería recibir sobre ella una fuerza también infinitamente grande. ¿Cómo se resuelve este dilema?

15. Liberamos del reposo una carga puntual q de masa m en un campo no uniforme. *a*) ¿Seguirá necesariamente la línea del campo eléctrico que pasa por el punto liberado? *b*) ¿En qué circunstancias, si las hay, seguirá una partícula cargada las líneas del campo eléctrico?

16. Una carga positiva y otra negativa de la misma magnitud se hallan en una larga línea recta. ¿Qué dirección sigue $\vec{E}$ en los puntos de esta línea que se encuentran *a*) entre las cargas positivas, *b*) fuera de las cargas en dirección de la carga positiva, c) fuera de las cargas en dirección de la carga negativa y *d*) fuera de la línea, pero en el plano mediano de las cargas?

17. En el plano mediano de un dipolo eléctrico, ¿es el campo eléctrico paralelo o antiparalelo al momento dipolar eléctrico $\vec{p}$?

18. ¿En qué forma la ecuación 26-12 no logra representar las líneas del campo de la figura 26-12, si atenuamos el requisito de que $x \gg d$?

19. *a*) Se colocan dos dipolos eléctricos idénticos en una línea recta como se ve en la figura 26-25*a*. ¿Qué dirección de la fuerza eléctrica de un dipolo se debe a la presencia del otro? *b*) Suponga que los dipolos se reordenan como en la figura 26-25*b*. ¿Cuál es ahora la dirección de la fuerza?

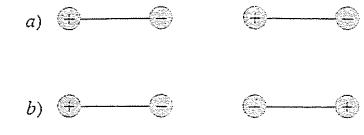


FIGURA 26-25. Pregunta 19.

20. Compare la forma en que E varía con r en *a)* una carga puntual, *b)* en un dipolo y *c)* en un cuadrupolo.
21. ¿Qué problemas matemáticos encontraría usted si tuviera que calcular el campo eléctrico de un anillo (o disco) cargado en puntos fuera del eje?
22. La ecuación 26-20 muestra que E_z tiene el mismo valor en todos los puntos frente a una hoja infinita con carga ¿Es razonable esto? Uno podría pensar que el campo debería ser más fuerte cerca de la hoja, dado que las cargas no están muy cercanas.
23. Con sus propias palabras describa el propósito del experimento de las gotas de aceite de Millikan.
24. ¿De qué manera el signo de la carga en la gota de aceite afecta a la realización del experimento de Millikan?
25. ¿Por qué Millikan no intentó balancear los electrones en su aparato en vez de las gotas de aceite?
26. En un campo eléctrico uniforme giramos un dipolo extremo por extremo. ¿Por qué el trabajo que realizamos depende de la orientación inicial del dipolo respecto al campo?
27. ¿En qué orientaciones de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme es la energía potencial del dipolo *a)* máxima y *b)* mínima?
28. Se coloca un dipolo eléctrico en un campo eléctrico no uniforme. ¿Tiene una fuerza eléctrica neta?
29. Se coloca en reposo un dipolo eléctrico dentro de un campo eléctrico externo uniforme, como el de la figura 26-19*a*; después se le libera. Explique su movimiento.
30. Un dipolo eléctrico tiene su momento dipolar $\vec{p}$ alineado con un campo eléctrico externo uniforme $\vec{E}$. *a)* ¿Es estable o inestable el equilibrio? *b)* Explique la naturaleza del equilibrio si $\vec{p}$ y $\vec{E}$ apuntan en dirección contraria.
31. En condiciones normales un átomo es neutro desde el punto de vista eléctrico. ¿Por qué entonces debería una partícula alfa ser desviada por un átomo en cualquier circunstancia?

EJERCICIOS

26-1 ¿Qué es un campo?

26-2 Campo eléctrico

1. Un campo eléctrico acelera un electrón hacia el este a 1.84×10^9 m/s^2. Determine la magnitud y la dirección del campo.
2. El aire húmedo se divide (su moléculas se ionizan) en un campo eléctrico de 3.0×10^6 N/C. ¿Qué magnitud tiene la fuerza eléctrica en *a)* un electrón y *b)* en un ion (con un solo electrón faltante) en este campo?
3. Una partícula alfa, el núcleo de un átomo de helio, tiene una masa de 6.64×10^{-27} kg y una carga de $+2e$, ¿Qué magnitud y dirección del campo eléctrico balancearán su peso?
4. En un campo eléctrico uniforme cerca de la superficie terrestre, una fuerza eléctrica de 3.0×10^{-6} N hacia abajo actúa sobre una partícula con una carga de -2.0×10^{-9} C. *a)* Determine el campo eléctrico. b)¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza eléctrica ejercida sobre un protón puesto en este campo? *c)* ¿Cuál es la fuerza gravitacional ejercida sobre el protón? *d)* ¿Cuál es la razón de la fuerza eléctrica a la gravitacional en este caso?

26-3 Campo eléctrico de cargas puntuales

5. ¿Qué magnitud tiene una carga puntual elegida de modo que el campo eléctrico a 75.0 cm de distancia posea la magnitud 2.30 N/C?
6. Calcule el momento dipolar de un electrón y de un protón separados por una distancia de 4.30 nm.
7. Calcule la magnitud del campo eléctrico generado por un dipolo eléctrico, cuyo momento dipolar es 3.56×10^{-29} C · m, en un punto situado a 25.4 nm a lo largo del eje bisectorial.
8. Determine el campo eléctrico en el centro del cuadrado de la figura 26-26. Suponga que $q = 11.8$ nC y que $a = 5.20$ cm.
9. La carátula de un reloj tiene las cargas puntuales negativas $-q$, $-2q$, $-3q$, ... , $-12q$ fijas en las posiciones de los numerales correspondientes. Las manecillas no perturban el campo. ¿A qué hora el horario apuntará en la misma dirección que el campo eléctrico en el centro de la carátula? (Sugerencia: suponga cargas diametralmente opuestas.)

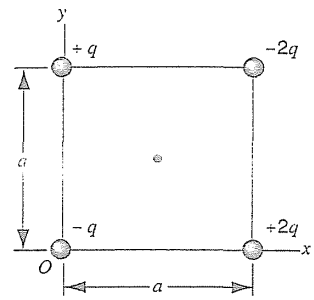


FIGURA 26-26. Ejercicio 8.

10. En la figura 26-5 suponga que ambas cargas son positivas. Demuestre que, suponiendo $x \gg d$, la magnitud de E en el punto P está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{x^2}.$$

11. Un tipo de cuadrupolo eléctrico se compone de cuatro cargas ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado $2a$. El punto P está a una distancia x del centro del cuadrupolo en una línea paralela a ambos lados del cuadrado, según se aprecia en la figura 26-27. Cuando $x \gg a$, demuestre que el campo eléctrico en P está dado aproximadamente por

$$E = \frac{3(2qa^2)}{2\pi\epsilon_0 x^4}.$$

(Sugerencia: trata el cuadrupolo como dos dipolos.)

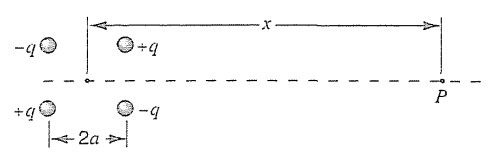


FIGURA 26-27. Ejercicio 11.

26-4 Campo eléctrico de distribuciones continuas de carga

12. Demuestre que, en el campo eléctrico de un disco cargado de radio R en puntos a lo largo de su eje, la ecuación 26-19 se reduce a una carga puntual cuando $z \gg R$.
13. ¿A qué distancia en el eje de un disco cargado de radio R es la magnitud del campo eléctrico igual a la mitad del valor del campo en la superficie del disco en el centro?
14. ¿A qué distancia en el eje de un anillo cargado de radio R alcanza su máximo la magnitud axial del campo eléctrico?
15. *a)* ¿Qué carga total q debe transportar un disco de radio 2.50 cm, para que el campo eléctrico de su superficie en el centro sea igual al valor que tiene el aire cuando se divide eléctricamentey produce chispas? (Tabla 26-1). *b)* Suponga que los átomos de una superficie tienen un área transversal efectiva de 0.015 nm^2. ¿Cuántos átomos se encuentran en la superficie del disco? *c)* La carga en *a)* proviene de algunos de los átomos superficiales que portan un electrón en exceso. ¿Qué fracción de ellos ha de tener esta carga?
16. Se dobla una delgada varilla de vidrio en un semicírculo de radio r. Una carga $+q$ se distribuye uniformemente en la mitad superior, y una carga $-q$ se distribuye uniformemente en la mitad inferior, como se observa en la figura 26-28. Calcule el campo eléctrico $\vec{E}$ en P, el centro del semicírculo.

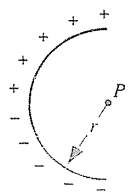


FIGURA 26-28. Ejercicio 16.

17. En el cuadro anexo se incluyen los valores medidos del campo eléctrico E situado a una distancia z en el eje de un disco de plástico cargado:

z (cm)	E (10^7 N/C)
0	2.043
1	1.732
2	1.442
3	1.187
4	0.972
5	0.797

Calcule *a)* el radio del disco y *b)* la carga en él.

18. Una varilla aislante de longitud L tiene una carga $-q$ uniformemente distribuida a lo largo de su longitud, como se muestra en la figura 26-29. *a)* ¿Qué densidad de carga lineal tiene la varilla? *b)* ¿Determine el campo eléctrico en el punto P situado a una distancia a del extremo de ella. *c)* Si P estuviera mucho más lejos de la varilla que L, ésta parecería una carga puntual. Demuestre que su respuesta a *b)* se reduce al campo eléctrico de una carga puntual $a \gg L$.

FIGURA 26-29. Ejercicio 18.

19. Bosqueje cualitativamente las líneas del campo asociadas a tres largas líneas paralelas de carga en un plano perpendicular. Suponga que las intersecciones de las líneas de carga con este plano forman un triángulo equilátero (Fig. 26-30) y que las líneas de carga tienen la misma densidad de carga lineal λ.

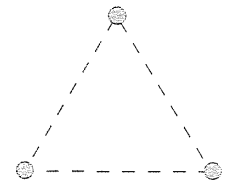


FIGURA 26-30. Ejercicio 19.

26-5 Las líneas del campo eléctrico

20. La figura 26-31 muestra las líneas del campo de un campo eléctrico; el espaciamiento entre ellas, perpendicular a la página, es igual en todas partes. *a)* Si la magnitud del campo en A es 40 N/C, ¿qué fuerza experimenta un electrón allí? *b)* ¿Qué magnitud tiene el campo en B?

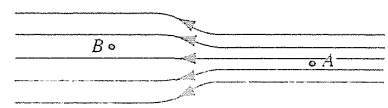


FIGURA 26-31. Ejercicio 20.

21. Bosqueje cualitativamente las líneas de campo asociadas a un disco delgado, circular y cargado uniformemente de radio R. (Sugerencia: suponga como casos límite los puntos muy cercanos al disco, donde el campo eléctrico es perpendicular a la superficie, y los muy lejanos de él, donde se parece al campo de una carga eléctrica puntual.)
22. Bosqueje cualitativamente las líneas de campo asociadas a dos cargas puntuales separadas $+q$ y $-2q$.
23. Tres cargas están dispuestas en un triángulo equilátero como en la figura 26-32. Considere las líneas de campo debidas a $+Q$ y a $-Q$; a partir de ellas identifique la dirección de la fuerza que opera sobre $+q$ por la presencia de las otras dos cargas. (Sugerencia: vea la figura 26-12.)

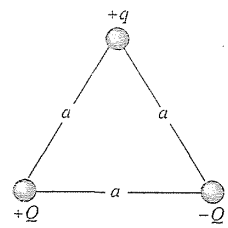


FIGURA 26-32. Ejercicio 23.

24. *a*) En la figura 26-33, localice el punto (o puntos) donde el campo eléctrico es cero. *b*) Bosqueje cualitativamente las líneas de campo.

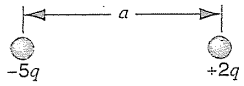


FIGURA 26-33. Ejercicio 24.

25. En el eje x dos cargas puntuales están fijas y separadas por una distancia d (Fig. 26-34). Grafique $E_x(x)$ suponiendo que $x = 0$ en la carga de la izquierda. Incluya valores positivos y negativos de x. Grafique E_x como positivo si $\vec{E}$ apunta hacia la derecha y como negativo si apunta a la izquierda. Suponga que $q_1 = +1.0 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = +3.0 \times 10^{-6}$ y $d = 10$ cm.

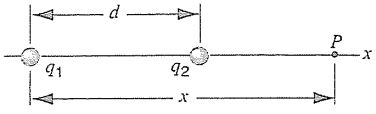


FIGURA 26-34. Ejercicio 25.

26. Las cargas $+q$ y $-2q$ están fijas y separadas a una distancia d como se ve en la figura 26-35. *a*) Encuentre $\vec{E}$ en los puntos *A*, *B* y *C*. *b*) Bosqueje aproximadamente las líneas del campo eléctrico.

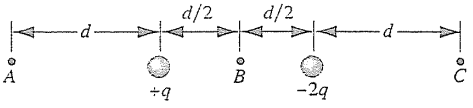


FIGURA 26-35. Ejercicio 26.

26-6 Una carga puntual en un campo eléctrico

27. Un electrón que se desplaza con una velocidad 4.86×10^6 m/s se dispara paralelamente a un campo eléctrico uniforme de magnitud 1030 N/C, dispuesto de modo que retrase el movimiento. *a*) ¿Qué distancia recorrerá el electrón en el campo antes de detenerse (momentáneamente) y *b*) cuánto tiempo transcurrirá? *c*) Si el campo eléctrico termina de modo abrupto al cabo de 7.88 mm, ¿qué fracción de su energía cinética perderá el electrón al atravesarlo?
28. Un arma, considerada en la defensa antimisiles, utiliza haces de partículas. Por ejemplo, un haz de protones que golpea un misil enemigo podría anularla por completo. Los haces pueden producirse en "armas" que se sirven de campos eléctricos para acelerar las partículas cargadas. *a*) ¿Qué aceleración experimentará un protón si el campo eléctrico es 2.16×10^4 N/C? *b*) ¿Qué velocidad alcanzará el protón si el campo actúa en una distancia de 1.22 cm?
29. Se mantienen a una distancia de 15.2 cm dos cargas iguales y opuestas de magnitud 1.88×10^{-7} C. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de $\vec{E}$ en un punto intermedio entre las cargas? *b*) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) operaría en un electrón puesto allí?
30. Un campo eléctrico uniforme existe en una región entre dos placas con carga contraria. Se libera del reposo un electrón en la superficie de un placa de carga negativa y 14.7 ns más tarde golpea la superficie de la placa contraria, a 1.95 cm de distancia. *a*) ¿Qué velocidad lleva el electrón al chocar contra la segunda placa? *b*) ¿Qué magnitud tiene el campo eléctrico?
31. En el experimento de Millikan, se balancea una gota de radio 1.64 μm y de una densidad 0.851 g/cm^3 cuando se aplica un campo eléctrico de 1.92×10^5 N/C. Calcule la carga en la gota en términos de e.
32. Una distancia de 11.7 cm separa dos cargas puntuales de magnitud $q_1 = 2.16$ μC y $q_2 = 85.3$ nC. *a*) Obtenga la magnitud del campo eléctrico que una produce en el sitio de la otra. *b*) Obtenga la magnitud de la fuerza en ellas.
33. En una de las primeras sesiones (1911), Millikan observó que las siguientes cargas medidas, entre otras, aparecían en varios momentos en un sola gota:

6.563×10^{-19} C	13.13×10^{-19} C	19.71×10^{-19} C
8.204×10^{-19} C	16.48×10^{-19} C	22.89×10^{-19} C
11.50×10^{-19} C	18.08×10^{-19} C	26.13×10^{-19} C

¿Qué valor del cuanto de la carga e puede deducirse de los datos anteriores?
34. Un campo uniforme vertical $\vec{E}$ se crea en el espacio entre dos grandes placas paralelas. En el campo una pequeña esfera conductora de masa m se suspende de una cuerda de longitud L. Determine el periodo del péndulo cuando a la esfera se le coloca una carga $+q$ si la placa inferior *a*) tiene carga positiva y *b*) si tiene carga negativa.
35. En el problema resuelto 26-6 encuentre la deflexión total de la gota de tinta al chocar contra el papel a 6.8 mm del extremo de las placas de deflexión (Fig. 26-16).

26-7 Dipolo en un campo eléctrico

36. Un dipolo, compuesto por cargas de 1.48 nC y a una distancia de 6.23 μm, está en un campo eléctrico de magnitud 1100 N/C. *a*) ¿Qué magnitud tiene el momento del dipolo eléctrico? *b*) ¿Qué diferencia hay entre la energía potencial correspondiente a las orientaciones dipolares paralelas y a las antiparalelas del campo?
37. Un dipolo consta de las cargas $+2e$ y $-2e$ separadas por 0.78 nm. Se halla en un campo eléctrico de magnitud 3.4×10^6 N/C. Calcule la magnitud del par de torsión en el dipolo cuando el momento dipolar es *a*) paralelo, *b*) en ángulo recto y c) opuesto al campo eléctrico.
38. Una carga $q = 3.16$ μC se halla a 28.5 cm de un pequeño dipolo en el bisector perpendicular. La fuerza en la carga es 5.22×10^{-16} N. Demuestre en un diagrama *a*) la dirección de la fuerza en la carga y *b*) su dirección en el dipolo. Determine *c*) la magnitud de la fuerza en el dipolo y *d*) el momento dipolar del dipolo.

26-8 El modelo nuclear del átomo

39. En un trabajo publicado en 1911, Ernest Rutherford señalaba, a fin de hacerse una idea de las fuerzas necesarias para desviar una partícula alfa a través de un gran ángulo: consideremos un átomo que contenga una carga puntual positiva Ze en su centro y que esté rodeado de una distribución de electricidad negativa, $-Ze$ distribuida uniformemente en una esfera de radio R. El campo eléctrico E ... a una distancia r del centro en un punto dentro del átomo (es)

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right).$$

Verifique la ecuación anterior.

40. La figura 26-36 muestra un modelo del átomo de helio, propuesto por Thomson ($Z = 2$). Dos electrones en reposo están incorporados en el interior de una esfera uniforme de carga positiva $2e$. Calcule la distancia d entre los electrones de modo que la configuración presente equilibrio estático.

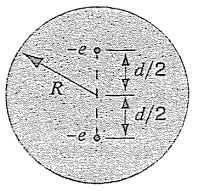


FIGURA 26-36. Ejercicio 40.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
BIBLIOTECA REGIONAL OBERA

PROBLEMAS

1. En la figura 26-5 considere un punto a una distancia z del centro de un dipolo a lo largo del eje. *a*) Demuestre que, con valores grandes de z, la magnitud del campo eléctrico está dada por

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{p}{z^3}.$$

(Compare lo anterior con el campo en un punto del bisector perpendicular.) *b*) ¿Qué dirección sigue $\vec{E}$?

2. Demuestre que en puntos lejanos los componentes de $\vec{E}$ debidos al dipolo están dados por

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3pxz}{(x^2+z^2)^{5/2}}, \qquad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p(2z^2-x^2)}{(x^2+z^2)^{5/2}},$$

donde x y y son coordenadas del punto P en la figura 26-37. Demuestre que este resultado general incluye los resultados especiales de la ecuación 26-12 y del problema 1.

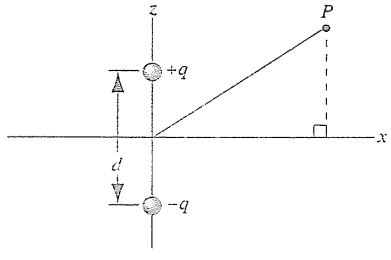


FIGURA 26-37. Problema 2.

3. Considere el anillo con carga de la sección 26-4. Suponga que la carga q no se distribuye uniformemente en el anillo, pero que la carga q_1 se distribuye uniformemente en la mitad de la circunferencia y que la carga q_2 se distribuye uniformemente en la otra mitad. Supóngase que $q_1 + q_2 = q$. *a*) Encuentre el componente del campo eléctrico en un punto cualquiera del eje dirigido a lo largo del eje y compárelo con el caso uniforme. *b*) Encuentre el componente del campo eléctrico en un punto del eje perpendicular a él y compárelo con el caso uniforme.
4. La figura 23-38 muestra un tipo de cuadrupolo eléctrico. Lo constituyen dos dipolos cuyos efectos en los puntos externos no se cancelan del todo. Demuestre que el valor de E sobre el eje del cuadrupolo en los puntos a una distancia z de su centro (suponga que $z \gg d$) está dado por

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 z^4},$$

donde Q ($= 2qd^2$) es el *momento cuadrupolar* de la distribución de carga.

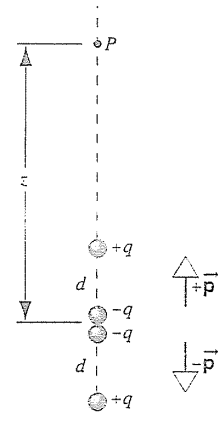


FIGURA 26-38. Problema 4.

5. Construya una distribución de cargas puntuales a lo largo del eje x, de modo que lejos de ellas el campo eléctrico a lo largo del eje varíe como $1/r^6$.
6. Una varilla aislante "semi-infinita" (Fig. 26-39) transporta una carga constante por unidad de longitud de λ. Demuestre que el campo eléctrico en el punto P forma un ángulo de 45° con ella y que este resultado no depende de la distancia R.

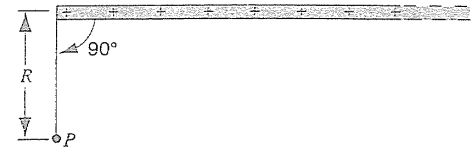


FIGURA 26-39. Problema 6.

7. Una delgada varilla no conductora de longitud finita L transporta una densidad uniforme de carga lineal + λ en la mitad supe-

rior y de una densidad $-\lambda$ en la mitad inferior; compare esto con la figura 26-6. *a*) Mediante el argumento de simetría determine la dirección del campo eléctrico en P generado por la varilla. *b*) Determine $\vec{\mathbf{E}}$ en P. *c*) Tome el límite de esta expresión con y grande. ¿Por qué depende de y? ¿Qué nos recuerda?

8. Un vaso hemisférico no conductor de radio interno R posee una carga total q distribuida uniformemente a través de la superficie interna. Calcule el campo eléctrico en el centro de la curvatura. (Sugerencia: considere el vaso como un conjunto de anillos.)
9. Suponga que el exponente en la ley de Coulomb no es 2 sino n. Demuestre que con $n \neq 2$ es imposible construir líneas que tengan las propiedades de las líneas del campo eléctrico mencionadas en la sección 26-5. Para simplificar el procedimiento tome una carga puntual aislada.
10. Dos grandes placas paralelas de cobre están separadas por una distancia de 5.00 cm y tienen un campo eléctrico uniforme entre ellas, como se indica en la figura 26-40. Se libera un electrón de la placa negativa al mismo tiempo que se libera un protón de la placa positiva. Prescinda de la fuerza que las partículas ejercen entre sí y determine la distancia desde la placa positiva cuando una pasa al lado de la otra. ¿Le sorprende que no necesite conocer el campo eléctrico para resolver este problema?

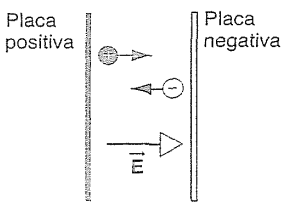


FIGURA 26-40. Problema 10.

11. Como se ve en la figura 26-41, se proyecta un electrón a una velocidad de $v_0 = 5.83 \times 10^6$ m/s y en un ángulo de $\theta = 39.0°$; $E = 1870$ N/C (dirigido hacia arriba), $d = 1.97$ cm y $L = 6.20$ cm. ¿Golpeará a una de las placas? Si lo hace, ¿cuál de ellas golpeará y a qué distancia del lado izquierdo?

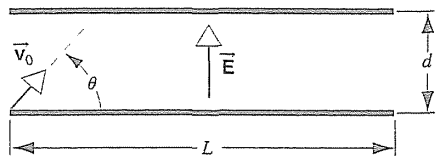


FIGURA 26-41. Problema 11.

12. Un electrón se ve forzado a moverse en el eje del anillo con carga mencionado en la sección 26-4, demuestre que el electrón puede efectuar pequeñas oscilaciones a través del centro del anillo, con una frecuencia dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}.$$

13. Calcule el trabajo requerido para girar un extremo de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$, en función del momento dipolar $\vec{\mathbf{p}}$ y del ángulo inicial θ_0 entre $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$.
14. Determine la frecuencia de oscilación de un dipolo eléctrico, de momento p y de inercia rotacional I en amplitudes pequeñas de oscilación alrededor de su posición de equilibrio dentro de un campo eléctrico uniforme E.
15. Dos cargas puntuales positivas e iguales $+q$ se hallan en $z = +a/2$ y en $z = -a/2$. *a*) Obtenga una expresión con dE_z/dz para los puntos a lo largo del eje z y evalúe dE_z/dz en el límite $z \ll a/2$. *b*) Demuestre que la fuerza ejercida sobre un dipolo pequeño o colocado en este punto, con su eje en la línea que une las cargas, está dada por $F = p(dE_z/dz)$, donde p es el momento dipolar, y dE_z/dz es el valor límite obtenido en la parte *a*).

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Un anillo de radio $r = 1.0$ m tiene una densidad uniforme de carga dada por $\lambda = (2.0\ \mu\text{C/m})(2 + \text{sen}\ \theta)$. Con operaciones numéricas encuentre las coordenadas de un punto donde desaparezca el campo eléctrico.
2. La densidad de carga en una varilla de longitud L centrada en el eje x está dada por $\lambda = (1.0\ \mu\text{C/m})\ \text{sen}^2(\pi x/L)$. Con operaciones numéricas genere una gráfica de las líneas del campo eléctrico en el plano xy.
3. Considere dos partículas que ejercen fuerzas eléctricas recíprocas. Una acelera en respuesta al campo eléctrico de la otra, y al cambiar su posición también ellas se alteran. Dos partículas idénticas, con una carga $q = +1.9 \times 10^{-9}$ C y con una masa $m = 6.1 \times 10^{-15}$ kg cada una, comienzan con velocidades idénticas de 3.0×10^4 m/s en la dirección positiva x. Al inicio una se halla en $x = 0$, $y = 6.7 \times 10^{-3}$ m y la otra en $x = 0$, $y = -6.7 \times 10^{-3}$ m. Ambas están en el plano xy y continúan desplazándose por él. Considere sólo las fuerzas eléctricas que ejercen una sobre otra. *a*) Con un programa de computadora grafique las trayectorias del tiempo $t = 0$ a $t = 1.0 \times 10^{-6}$ s. Por tratarse de una situación simétrica, deberá calcular únicamente la posición y la velocidad de una de las cargas. Use la simetría para determinar la posición y la velocidad de la otra al principio de cada intervalo de integración. Utilice $\Delta t = 1 \times 10^{-8}$ s con el intervalo de integración. *b*) Ahora suponga que una de las partículas posee la carga $q = -1.9 \times 10^{-9}$ C, pero que el resto de las condiciones son iguales. Grafique las trayectorias de $t = 0$ a $t = 5.0 \times 10^{-7}$ s.

CAPÍTULO 27

LEY DE GAUSS

La ley de Coulomb siempre puede usarse para calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ de cualquier distribución de cargas en reposo discreta o continua. Las sumas o las integrales podrían complicarse (y podría necesitarse una computadora para evaluarlas numéricamente), pero invariablemente puede calcularse el campo eléctrico resultante.

En algunos casos estudiados en el capítulo anterior, se emplearon argumentos de simplificación basados en la simetría de la situación física. Por ejemplo, al calcular el campo eléctrico en los puntos del eje de una espira circular cargada, nos servimos de un argumento de simetría para deducir que deben desaparecer los componentes de $\vec{E}$ perpendiculares al eje. En el presente capítulo vamos a estudiar una alternativa a la ley de Coulomb, llamada ley de Gauss, *la cual ofrece un método más útil e instructivo para determinar el campo eléctrico en situaciones con ciertas simetrías.*

Son pocas las situaciones que pueden analizarse directamente por medio de la ley de Gauss, pero es posible resolverlas con una facilidad extraordinaria. Aunque las dos leyes ofrecen resultados idénticos en los casos en que pueden aplicarse, la ley de Gauss se considera una ecuación más fundamental que la de Coulomb. Conviene puntualizar que, mientras que ésta representa el caballo de batalla de la electrostática, aquélla representa la parte conceptual.

27-1 ¿A QUÉ SE REFIERE LA LEY DE GAUSS?

Hasta ahora todo lo que hemos hecho en electrostática se basa en la ley de Coulomb, ecuación 25-4, la cual nos da la fuerza electrostática entre cargas puntuales. A partir de esta ley, que en esencia es la representación matemática de una observación experimental, hemos *definido* el campo eléctrico de una carga puntual q de modo que $\vec{E} = \vec{F}/q_0$), donde $\vec{F}$ es la fuerza que q ejerce sobre q_0. Al generalizar las distribuciones de carga, que pueden considerarse como conjuntos de muchas cargas puntuales infinitesimales, pudimos determinar el campo eléctrico de varias distribuciones de carga, como las de una línea o de un disco.

La ley de Gauss proporciona otra manera de calcular los campos eléctricos. Equivale a la de Coulomb para cargas puntuales; ello significa que cuanto hemos hecho hasta ahora aplicando la ley de Coulomb pudimos haberlo realizado partiendo de la ley de Gauss.

¿Por qué necesitamos la ley de Gauss si la ley de Coulomb es suficiente para calcular los campos eléctricos en cualquier arreglo estático de cargas? Una respuesta es la siguiente: ofrece una forma mucho más simple de calcularlos en situaciones con alto grado de simetría; por ejemplo, una distribución de carga esférica. Otra consiste en que, al escribirla, en vez de la de Coulomb, como ley fundamental de la electrostática, es posible diseñar un sistema de ecuaciones para todos los fenómenos electrostáticos que ilustran más claramente la relación entre el campo eléctrico y el magnético. Una tercera respuesta es que la ley de Gauss es válida en el caso de cargas de movimiento rápido, mientras que la ley de Coulomb se aplica sólo a las cargas que se hallan en reposo o que se desplazan con lentitud. Finalmente, como veremos más adelante en el capítulo, la ley de Coulomb puede obtenerse como caso especial, de la de Gauss; por tanto, esta última es más general que la primera. Por las razones que acabamos de mencionar, a la ley de Gauss se le considera más funda-

mental y se le incluye como una de las cuatro ecuaciones básicas del electromagnetismo (las ecuaciones de Maxwell que estudiaremos en el Cap. 38).

Antes de presentar la ley de Gauss, hay que definir y explicar una nueva magnitud: el *flujo del campo eléctrico*. Éste es una propiedad matemática de cualquier campo, se representa por vectores y depende de la *integral de superficie* del campo vectorial en un área particular. Existe también una interpretación geométrica del flujo, la cual se basa en el número de líneas del campo que atraviesan el área.

27-2 EL FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL

El término "flujo" es una palabra de origen latino y significa "fluir"; el flujo de un campo vectorial puede concebirse como una medida del flujo o de la penetración de los vectores del campo a través de un elemento fijo e imaginario de una superficie en el campo. Más adelante nos ocuparemos del flujo del campo eléctrico; por ahora vamos a considerar un ejemplo más común: el campo de vectores velocidad de un fluido que fluye.

Imagine una corriente de flujo estacionario, en la cual representamos el flujo especificando el vector de velocidad en cada punto. La figura 27-1 muestra un flujo uniforme; los vectores de velocidad son paralelos a lo largo de él. Supóngase que ponemos en la corriente un alambre doblado en una espira cuadrada de superficie A. En la figura 27-1*a*, la espira se pone de modo que su plano es perpendicular a la dirección del flujo. Definimos el flujo Φ del campo de velocidad de manera que su magnitud está dada por

$$|\Phi| = vA, \tag{27-1}$$

donde v es la magnitud de la velocidad en el sitio de la espira. El flujo tiene unidades de m^3/s y podríamos decir que representa la velocidad con la que el fluido atraviesa la espira; sin embargo, atendiendo al concepto de campo (y para introducir la ley de Gauss) conviene considerar el flujo como una medida del *número de líneas del campo que atraviesan la espira.*

En la figura 27-1*b* se ha girado la espira de modo que su plano ya no es perpendicular a la dirección de la velocidad. Nótese que el número de las líneas del campo de velocidad que pasan por la espira es menor en esta figura que en la 27-1*a*. La superficie proyectada del cuadrado es $A \cos \theta$; con sólo examinar la figura 27-1*b*, el lector se convencerá de que el número de las líneas del campo que cruzan la espira inclinada de superficie A es igual al que atraviesa la espira más pequeña, de superficie $A \cos \theta$ perpendicular a la corriente. Por tanto, la magnitud del flujo en la situación de la figura 27-1*b* es

$$|\Phi| = vA \cos \theta. \tag{27-2}$$

Si se girara la espira de modo que la velocidad del fluido fuese paralela a su superficie, como en la figura 27-1*c*, el flujo sería cero y correspondería a $\theta = 90°$ en la ecuación 27-2. Nótese que en este caso ninguna línea del campo atraviesa por la espira.

Como veremos, la ley de Gauss se refiere al flujo neto que atraviesa una superficie *cerrada.* Por tanto, hay que distinguir entre el flujo positivo y negativo que penetra en una superficie. El lado derecho de la ecuación 27-2 puede expresarse en función del producto punto entre $\vec{v}$ y un vector $\vec{A}$, cuya magnitud es el área de la superficie y cuya dirección es perpendicular a la superficie (Fig. 27-1*d*). Pero como la normal a la superficie puede señalar en la dirección, que aparece en la figura 27-1*d*, o en dirección opuesta, se necesita una forma de especificar esa dirección; de lo contrario el signo de Φ no estaría definido claramente. Por convención decidimos que la dirección de $\vec{A}$ es la de la *normal hacia afuera* de una superficie cerrada. Por tanto, el flujo que *sale* del volumen delimitado por la superficie se considera positivo, y el que *entra* en él, negativo. Con esta elección, podemos escribir el flujo de una superficie cerrada compuesta por varias superficies individuales (Fig. 27-1*e*, por ejemplo) así

$$\Phi = \sum \vec{v} \cdot \vec{A}, \tag{27-3}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad del vector velocidad en la superficie. La suma se efectúa en todas las superficies individuales que constituyen la superficie cerrada. El flujo es una magnitud es-

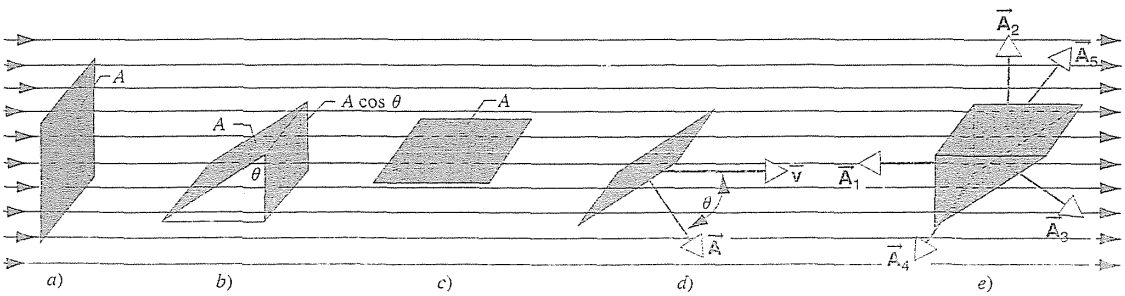


FIGURA 27-1. Se sumerge una espira de alambre de superficie A en una corriente que fluye, la que representamos como un campo de velocidad. *a*) La espira forma ángulos rectos con el flujo. *b*) La giramos por un ángulo θ; la proyección del área perpendicular al flujo es $A \cos \theta$. *c*) Cuando $\theta = 90°$, ninguna de las líneas del flujo atraviesa por el plano de la espira. *d*) La superficie de la espira se representa con un vector $\vec{A}$ perpendicular al plano de ella. El ángulo entre $\vec{A}$ y la velocidad del flujo $\vec{v}$ es θ. *e*) Superficie cerrada formada por cinco superficies planas. El área $\vec{A}$ de cada una se representa con la normal hacia afuera.

calar porque se define en función del producto punto de dos vectores.

PROBLEMA RESUELTO 27-1. Consideremos la superficie cerrada de la figura 27-1*e*, la cual muestra un volumen delimitado por cinco superficies (1, 2 y 3, que son paralelas a la de las Figs. 27-1*a*, 27-1*c*, 27-1*b* respectivamente, junto con las superficies 4 y 5, que son paralelas a las líneas de corriente). Calcule el flujo total que pasa por una superficie cerrada, suponiendo que el campo de velocidad es uniforme y que por ello tiene la misma magnitud y dirección en todas partes.

Solución Si se utiliza la ecuación 27-3, puede escribirse el flujo total como la suma de los valores del flujo que pasa por las cinco superficies separadas:

$$\Phi = \vec{v}\cdot\vec{A}_1 + \vec{v}\cdot\vec{A}_2 + \vec{v}\cdot\vec{A}_3 + \vec{v}\cdot\vec{A}_4 + \vec{v}\cdot\vec{A}_5.$$

Nótese que en la superficie 1 el ángulo entre la *normal hacia afuera* $\vec{A}_1$ y la velocidad $\vec{v}$ es 180°, de manera que el producto punto $\vec{v}\cdot\vec{A}_1$ puede escribirse $-vA_1$. Desaparecen en su totalidad las contribuciones de las superficies 2, 4 y 5, porque en todos los casos (como se aprecia en la Fig. 27-1*e*) el vector $\vec{A}$ es perpendicular a $\vec{v}$. En la superficie A_3, el flujo puede escribirse $vA_3 \cos\theta$ y, en consecuencia, el flujo total será

$$\Phi = -vA_1 + 0 + vA_3\cos\theta + 0 + 0 = -vA_1 + vA_3\cos\theta.$$

Pero de la geometría de la figura 27-1*e*, puede deducirse que $A_3 \cos\theta = A_1$ y como resultado se obtiene

$$\Phi = 0.$$

Es decir, el flujo total que atraviesa la superficie cerrada es cero.

El resultado del problema resuelto anterior no debería sorprendernos si recordamos que el campo de velocidad es una forma equivalente de representar el flujo real de las partículas materiales en la corriente. Todas las líneas del campo que entran en la superficie cerrada de la figura 27-1*e* por la superficie 1 salen a través de la superficie 3. De modo equivalente, puede afirmarse que, en la superficie cerrada de la figura 27-1*e*, la cantidad neta de fluido que entra en el volumen delimitado por la superficie es igual a la cantidad neta que sale de allí. Cabe esperar esto en una *superficie cerrada cualquiera,* siempre que en el volumen no haya *fuentes* ni *sumideros* de líquido, o sea sitios donde se cree un flujo neto o quede atrapado el fluido que fluye. Si existiera una fuente dentro del volumen (digamos un cubo de hielo que introduce más líquido en la corriente), el fluido que sale de la superficie sería mayor que el que entra en ella, y el flujo total sería positivo. Si hubiera un sumidero en el volumen, la cantidad de fluido que entraría sería mayor que el que sale y el flujo neto sería negativo. El flujo, positivo o negativo, neto que se desplaza por la superficie depende de la intensidad de la fuente o del sumidero (es decir, de la rapidez volumétrica a la que el fluido sale de la fuente o entra en la fuente). Por ejemplo, si el sólido que se derrite en la superficie liberase 1 cm^3 de fluido por segundo hacia la corriente, descubriríamos que el flujo neto en la superficie cerrada es + 1cm^3/s.

La figura 27-1 indica el caso especial de un campo uniforme y de superficies planas. Es fácil generalizar los conceptos anteriores a un campo no uniforme y a superficies de forma y orientación arbitrarias. Cualquier superficie arbitraria puede dividirse en elementos infinitesimales de área *dA*, que son aproximadamente superficies planas. La dirección del vector $d\vec{A}$ sigue la de la normal hacia afuera de este elemento infinitesimal. El campo posee un valor $\vec{v}$ en el sitio del elemento; el flujo neto se obtiene sumando las contribuciones de todos esos elementos, es decir, integrando sobre la superficie entera.

$$\Phi = \int \vec{v}\cdot d\vec{A}. \qquad (27\text{-}4)$$

Las conclusiones antes obtenidas conservan su validez en este caso general: si la ecuación 27-4 se evalúa en un superficie cerrada, el flujo será *1) cero si la superficie no delimita fuentes ni sumideros, 2) positivo* y de igual magnitud que su intensidad si la superficie contiene fuentes exclusivamente o *3) negativo* y de igual magnitud que su intensidad sólo si contiene sumideros. Cuando la superficie delimita *tanto* fuentes *como* sumideros, el flujo neto es cero, positivo o negativo, según la intensidad relativa de las fuentes y sumideros.

En la siguiente sección aplicaremos consideraciones parecidas al flujo de otro campo vectorial: el campo eléctrico $\vec{E}$. Como cabe suponer, al hablar de la electrostática, las fuentes o sumideros del campo son cargas positivas o negativas; y la intensidad de ambos es proporcional a la magnitud de estas cargas. La ley de Gauss relaciona el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada, calculado por analogía con la ecuación 27-4, con la carga eléctrica neta delimitada por la superficie.

27-3 EL FLUJO DE UN CAMPO ELÉCTRICO

Imagine que las líneas del campo de la figura 27-1 representan un campo eléctrico de cargas en reposo, y no un campo de velocidad. Seguiremos utilizando el concepto de flujo, pese a que nada fluye en el caso electrostático. Su definición se asemeja a la del flujo de velocidad, sólo que $\vec{E}$ reemplaza a $\vec{v}$, siempre que ésta aparece. En analogía con la ecuación 27-3, definimos el flujo de un campo eléctrico en los siguientes términos:

$$\Phi_E = \sum \vec{E}\cdot\vec{A}. \qquad (27\text{-}5)$$

Igual que en el caso del flujo de velocidad, el flujo Φ_E puede considerarse una medida del número de líneas del campo eléctrico que cruzan por la superficie. El subíndice E en Φ_E nos recuerda que estamos hablando del flujo *eléctrico* y sirve para distinguir el flujo eléctrico y el magnético, que se estudiará en el capítulo 34. La ecuación 27-5 se aplica, como se hizo en la ecuación 27-3, únicamente a casos donde $\vec{E}$ presenta magnitud y dirección constantes en cada superficie $\vec{A}$ incluida en la suma.

A semejanza del flujo de velocidad, el flujo del campo eléctrico constituye una magnitud escalar. De acuerdo con la ecuación 27-5, sus unidades son N · m^2/C.

La ley de Gauss se ocupa del flujo de un campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada. Para definir Φ_E en términos más generales, sobre todo en los casos en que $\vec{E}$ no

es uniforme, examinemos con detenimiento la figura 27-2, la cual muestra una superficie arbitraria cerrada que está en medio de un campo eléctrico no uniforme. Dividamos la superficie en pequeños cuadrados de superficie ΔA, tan pequeños que pueden considerarse planos. Cada elemento de la superficie puede representarse como un vector $\Delta\vec{A}$, cuya magnitud es la superficie ΔA. Se supone que la dirección de $\Delta\vec{A}$ es la normal, trazada hacia afuera, a la superficie, como se ve en la figura 27-1. $\vec{E}$ puede considerarse como constante en todos los puntos de un cuadrado, pues se los ha hecho muy pequeños.

Los vectores $\vec{E}$ y $\Delta\vec{A}$ que caracterizan a cada cuadrado forman un ángulo θ entre sí. La figura 27-2 muestra una vista amplificada de tres cuadrados en la superficie, denotados *a*, *b* y *c*. Nótese que en *a*, $\theta > 90°$ ($\vec{E}$ el cuadrado apunta hacia adentro); en *b*, $\theta = 90°$ ($\vec{E}$ es paralelo a la superficie); y en *c*, $\theta < 90°$ ($\vec{E}$ apunta hacia afuera).

En analogía con la ecuación 27-5, una definición provisional del flujo total del campo eléctrico en una superficie es

$$\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}, \tag{27-6}$$

que nos indica sumar la magnitud escalar $\vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$ de todos los elementos del área en que ha sido dividida la superficie. En los puntos como *a* de la figura 27-2, la contribución al flujo es negativa; en *b*, cero y en *c*, positiva. Por tanto, si $\vec{E}$ se dirige hacia afuera en todas partes ($\theta < 90°$), cada $\vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$ es positivo y también lo será Φ_E en la superficie entera. Si en todas partes $\vec{E}$ se dirige hacia adentro ($\theta > 90°$), cada $\vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$ será negativo y Φ_E en la superficie será negativo. Siempre que en todas partes $\vec{E}$ sea paralelo a una superficie ($\theta = 90°$), cada $\vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$ será cero, y también lo será Φ_E en la superficie.

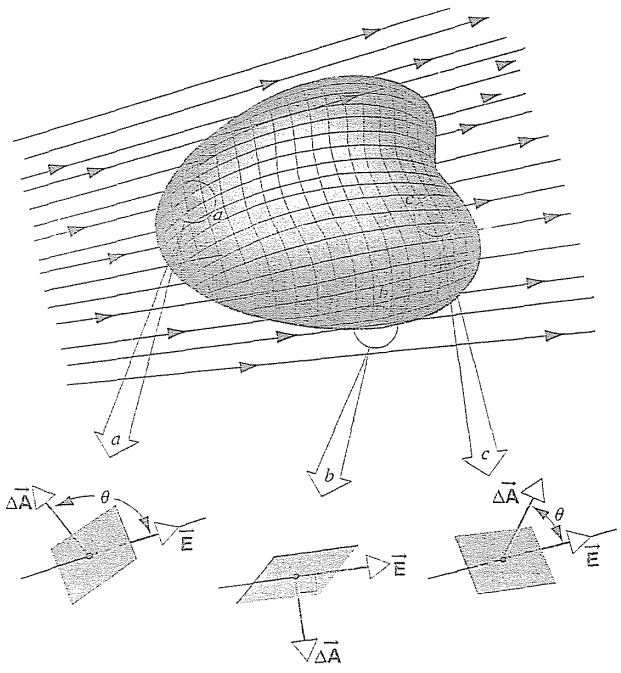


FIGURA 27-2. Superficie de forma arbitraria inmersa en un campo eléctrico no uniforme $\vec{E}$. La superficie se divide en pequeños elementos de área $\Delta\vec{A}$. La relación entre los vectores $\vec{E}$ y $\Delta\vec{A}$ se muestra en tres elementos diferentes (*a*, *b* y *c*).

La definición exacta del flujo eléctrico se encuentra en el límite diferencial de la ecuación 27-6. Al reemplazar la suma en la superficie por la integral en ella se obtiene

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}. \tag{27-7}$$

Esta *integral de superficie* indica que la superficie en cuestión ha de dividirse en elementos infinitesimales de área ($d\vec{A}$) y que la magnitud escalar $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ ha de evaluarse en cada elemento y sumarse en la superficie entera. En el caso de la ley de Gauss, queremos evaluar esta integral en una superficie *cerrada*. En tal caso el signo de la integral se escribe con un círculo $\oint$ a manera de recordatorio.

PROBLEMA RESUELTO 27-2. La figura 27-3 muestra un cilindro hipotético, cerrado de radio *R*, inmerso en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$; su eje es paralelo al campo. ¿Cuál es Φ_E en esta superficie cerrada?

Solución El flujo Φ_E puede escribirse como la suma de tres términos: una integral en *a*) la tapa del cilindro de la izquierda, *b*) la superficie cilíndrica y *c*) la tapa del lado derecho. Por tanto, conforme a la ecuación 27-7 escrita para una superficie cerrada, tenemos

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$
$$= \int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

En la tapa de la izquierda, el ángulo θ es 180° en todos los puntos, $\vec{E}$ posee un valor constante y los vectores $d\vec{A}$ son todos paralelos. En consecuencia,

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E\, dA \cos 180° = -E \int dA = -EA,$$

donde A ($= \pi R^2$) es la superficie de la tapa de la izquierda. Asimismo, en la tapa de la derecha

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = +EA,$$

aquí el ángulo θ es cero en todos los puntos. Por último, en la pared del cilindro,

$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0,$$

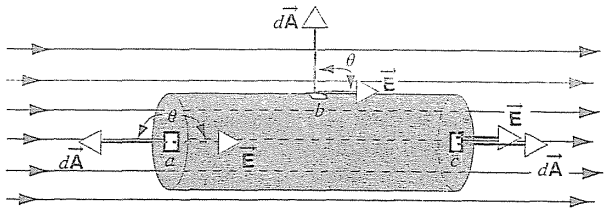


FIGURA 27-3. Problema resuelto 27-2. Un cilindro cerrado está inmerso en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ paralelo a su eje.

ya que $\theta = 90°$; por tanto, $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ en todos los puntos de la superficie cilíndrica. Así pues, el flujo total será

$$\Phi_E = -EA + 0 + EA = 0.$$

Se esperaba el resultado anterior, puesto que no existen cargas dentro de la superficie cerrada de la figura 27-5. Las líneas de $\vec{E}$ (constante) entran por la izquierda y salen por la derecha, como se observa en la figura 27-1*e*.

Flujo y líneas del campo

Para explicar la relación entre el flujo y el número de líneas del campo eléctrico que cruzan una superficie cerrada, supongamos que cada unidad de carga q se representa con un número específico de líneas —seis por ejemplo—, como se muestra en la figura 27-4.* Seis líneas del campo salen alejándose de una carga $+ q$ y seis terminan en una carga $- q$. Si cada carga está rodeada por una superficie cerrada, el flujo eléctrico que atraviesa la superficie que rodea la carga positiva es de $+6$ unidades, y el flujo eléctrico que atraviesa la superficie que rodea la carga negativa es de -6 unidades. (Contamos $+ 1$ unidad arbitraria de flujo por las líneas que se dirigen hacia afuera por las superficies y $- 1$ unidad por las que se dirigen hacia adentro.) Sin importar el tamaño de la superficie que rodea a las cargas, las seis líneas del campo siempre penetran en la superficie, y el flujo es de seis unidades.

En la figura 27-4*b*, las líneas del campo en el fondo del dibujo atraviesan la superficie tres veces. Desplazándose hacia la carga desde afuera de la superficie, la primera vez las líneas del campo entran en la superficie que contamos $- 1$, porque se dirige hacia adentro por la superficie; la segunda vez contamos $+ 1$, porque ahora se dirige hacia afuera y la tercera pasada hacia adentro por la superficie nos da otro -1. La aportación neta del flujo en esta línea del campo es -1, y el flujo neto de la superficie entera es $- 6$ unidades. Sin importar la forma de la superficie ni cómo se estire ni se deforme, el flujo neto a través de ella es el mismo y depende sólo de cuánta carga encierre la superficie.

La figura 27-5 muestra una superficie cerrada que encierra las cargas $+ q$ y $- q$. El flujo neto por la superficie es cero, porque en todas las líneas del campo desde la carga positiva que se dirigen hacia afuera por la superficie hay una línea que va de la carga negativa hacia el interior. Como ambas cargas poseen la misma magnitud, el número total de líneas del campo será cero y, por lo mismo, también el flujo neto.

Supóngase ahora que nos dicen que hay $+ 30$ líneas de campo (o $+ 30$ unidades de flujo) que cruzan una superficie arbitraria cerrada. ¿Podemos determinar cuánta carga está contenida dentro de la superficie y dónde se ubica dentro de ella? Sabemos que la carga *neta* en el interior de ella es $+ 5q$, pero no si una partícula contiene la carga entera ni si existen dos partículas de carga $+ 6q$ y $- q$, tres partículas de $+ 8q$, $+ 4q$ y $- 7q$, ni alguna de un número infinito de posibilidades. Además, la carga o cargas pueden encontrarse en cualquier parte del interior de la superficie y, aun así, producir las mismas $+ 30$ unidades de flujo. Si conocemos sólo el flujo, conoceremos la magnitud neta de la carga en el interior, pero no podremos deducir nada respecto al tamaño ni al lugar de las cargas; por tanto, tampoco podremos deducir nada sobre el campo eléctrico en la superficie o en otra parte del espacio.

Pero, si trazamos una superficie esférica, y si sabemos que el flujo se distribuye uniformemente en ella, estaremos en condiciones de concluir que toda la carga se halla en el centro de la esfera de una partícula simple de carga $+ 5q$; y si conocemos la magnitud y la ubicación de esta partícula cargada, deduciremos el campo eléctrico en cualquier sitio. En consecuencia, concluimos que

La relación entre el flujo total que atraviesa una superficie cerrada y la carga neta delimitada por ella siempre es válida, y podemos usarla para deducir el campo eléc-

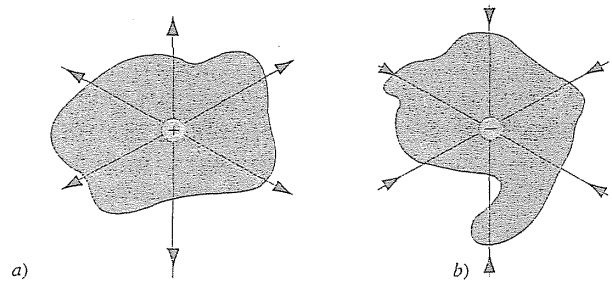


FIGURA 27-4. *a*) Seis líneas del campo pasan por una superficie cerrada arbitraria que rodea una carga positiva $+ q$. *b*) Seis líneas del campo entran en la superficie que rodea una carga negativa $- q$.

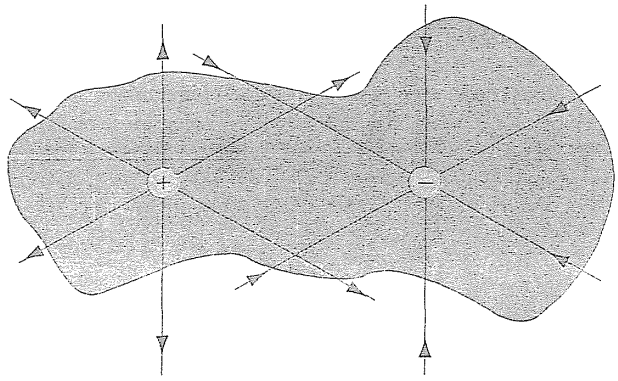


FIGURA 27-5. Si la carga neta encerrada por una superficie es cero, también lo será el número de las líneas del campo (y el flujo eléctrico total) que atraviesa la superficie.

* Para facilitar la explicación representamos los diagramas de líneas del campo no en tres dimensiones sino en dos. En tres dimensiones, a menudo son más complejas y debe procurarse representar el patrón de campo relacionado con las cargas. Una exposición muy completa se encuentra en "Electric Field Line Diagrams Don't Work" de A. Wolf, S. J. Van Hook y E. R. Weeks, *American Journal of Physics*, junio de 1996, p. 714.

trico en puntos del espacio sólo si la geometría de la carga y de la superficie poseen un alto grado de simetría.

La ley de Gauss da la relación entre el flujo a través de una superficie cerrada y la carga neta encerrada por esta superficie.

27-4 LEY DE GAUSS*

Ahora que hemos definido el flujo del vector del campo eléctrico a través de una superficie *cerrada,* estamos en condiciones de escribir la ley de Gauss. Supóngase que tenemos una colección de cargas positivas y negativas, la cual genera un campo eléctrico $\vec{E}$ en cierta región del espacio. En esta región construimos una superficie imaginaria cerrada, llamada *superficie gaussiana,* que puede encerrar o no algunas cargas. La ley de Gauss, que relaciona el flujo total Φ_E a través de esta superficie con la carga *neta* q encerrada por ella, puede expresarse así

$$\epsilon_0 \Phi_E = q \tag{27-8}$$

o así

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q. \tag{27-9}$$

El círculo en el símbolo de la integral indica que ésta debe calcularse sobre una superficie *cerrada.* Vemos que la ley de Gauss predice que Φ_E es cero en la superficie mencionada en el problema resuelto 27-2, porque no encierra carga alguna.

Como vimos en la sección 26-5, la magnitud del campo eléctrico es proporcional al número de líneas del campo que atraviesan un elemento de área perpendicular al campo. La integral de la ecuación 27-9 explica esencialmente el número de líneas que atraviesan la superficie. Es lógico que ese número sea proporcional a la carga neta encerrada por la superficie, tal como lo exige la ecuación 27-9.

La elección de la superficie de Gauss es arbitraria. Suelen escogerse de manera que la simetría de la distribución dé, por lo menos en parte de la superficie, un campo eléctrico de magnitud constante que después por factorización se extrae de la integral de la ecuación 27-9. En tal situación puede aplicarse la ley de Gauss para evaluar el campo eléctrico.

En la figura 27-6 se incluyen las líneas de fuerza (y, por tanto, del campo eléctrico) de un dipolo. Se dibujaron cuatro superficies cerradas gaussianas, cuya sección transversal aparecen en ella. En la superficie S_1, el campo eléctrico se encuentra en todas partes hacia afuera de ella; en consecuencia, como en el caso del elemento de superficie c de la figura 27-2, en todas partes $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ es positivo en S_1. Cuando evaluamos la integral de la ecuación 27-9 en una superficie cerrada total, obtenemos un resultado positivo. Entonces la ecuación 27-9 exige que la superficie debe encerrar una carga positiva neta como ocurre en realidad. En la terminología de Faraday, salen más líneas de fuerza que las que entran en ella; así que debe encerrar una carga positiva neta.

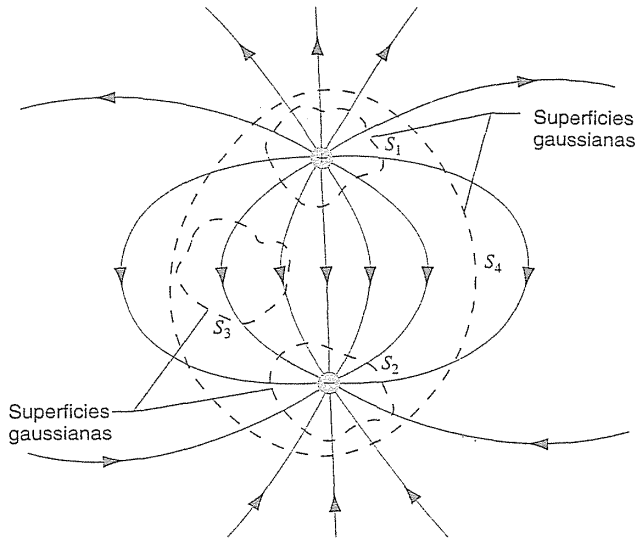


FIGURA 27-6. Dos cargas iguales y opuestas y las líneas que representan el campo eléctrico en su cercanía. Se muestran las secciones transversales de cuatro superficies gaussianas cerradas.

Por el contrario, en la superficie S_2 de la figura 27-6 el campo eléctrico se halla en todas partes entrando en ella. A semejanza del elemento de superficie a de la figura 27-2, $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ es negativo en todos los elementos de área, y la integral de la ecuación 27-9 produce un valor negativo; esto indica que la superficie encierra una carga negativa neta (como sucede en realidad). En esta superficie entran más líneas que las que salen de ella.

La superficie S_3 no encierra carga alguna, por lo cual, según la ley de Gauss, el flujo total por ella ha de ser cero. Esto concuerda con la figura 27-6, donde se muestra que en la parte superior de la superficie entran el mismo número de líneas que las que salen del fondo. No es mera casualidad; en la figura 27-6 puede dibujarse una superficie de cualquier forma irregular; mientras no encierre ninguna de las cargas, el número de líneas del campo que entren en dicha superficie será igual al de las que salgan.

Tampoco, la superficie S_4 encierra carga *neta* alguna, pues supusimos que la magnitud de las dos cargas es igual. Una vez más, el flujo total que la atraviesa ha de ser cero. Algunas de las líneas del campo están encerradas totalmente dentro de la superficie; así que no contribuyen al flujo que la *atraviesa.* Pero como todas las líneas del campo que salen de la carga positiva terminan finalmente en la carga negativa, las líneas provenientes de la carga positiva que atraviesan la superficie hacia afuera tienen una línea correspondiente que la atraviesa hacia adentro mientras busca la carga negativa. Por consiguiente, el flujo total es cero.

* Karl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un matemático alemán que realizó importantes descubrimientos en la teoría de números, en la geometría y en la probabilidad. Hizo, además, aportaciones a la astronomía y a la medición del tamaño y la forma de la Tierra. Consúltese en "Gauss" de Ian Stewart, *Scientific American,* julio de 1977, p. 122 un fascinante relato de la vida de este notable matemático.

Ley de Gauss y ley de Coulomb

La ley de Coulomb puede deducirse de la de Gauss y de consideraciones de simetrías. Para ello vamos a aplicar la ley de Gauss a una carga puntual positiva y aislada q, como en la figura 27-7. Aunque la ley de Gauss es válida con cualquier superficie, escogemos una superficie esférica de radio r centrada en la carga. Esta superficie ofrece la ventaja de que, por simetría, $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la superficie, de modo que el ángulo θ entre $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ sea cero en toda la superficie. Más aún, $\vec{E}$ posee la misma magnitud en todas partes de ella. *Construir una superficie gaussiana que se sirva de esta simetría es muy importante cuando se aplica la ley de Gauss.*

En la figura 27-7 $\vec{E}$ y $d\vec{A}$, en cualquier punto de la superficie gaussiana, se dirigen radialmente hacia afuera, por lo cual la magnitud $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ se convierte simplemente en $E\,dA$. Así pues, la ley de Gauss (Ec. 27-9) se reduce a

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint E\,dA = q.$$

Como E posee la misma magnitud en todos los puntos de la esfera, puede factorizarse extrayéndose del símbolo de la integral, lo cual nos da

$$\epsilon_0 E \oint dA = q.$$

La integral es simplemente el área superficial total de la esfera, $4\pi r^2$, así que obtenemos

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

o bien

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}. \qquad (27\text{-}10)$$

La ecuación 27-10 contiene la magnitud del campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto, a una distancia r de la carga puntual aislada q, y es idéntica a la ecuación 26-6, que se obtuvo de la ley de Coulomb. Así, al escoger una superficie gaussiana con la simetría apropiada, se deduce la ley de Coulomb de la de Gauss. Estas dos leyes pueden considerarse equivalentes en nuestras aplicaciones, pero (como vimos en la Sec. 27-1) esta última tiene mayor aplicabilidad y, por lo mismo, es una ecuación más fundamental del electromagnetismo.

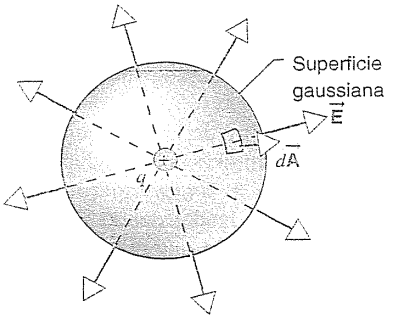


FIGURA 27-7. Superficie gaussiana esférica de radio r que rodea una carga puntual positiva q.

Es interesante señalar que, al escribir como $1/4\ \pi\epsilon_0$ la constante de proporcionalidad en la ley de Coulomb, es posible simplificar la ley de Gauss. Si hubiéramos escrito la constante de la primera simplemente como K, podríamos haber expresado la segunda como $(1/4\ \pi K)\Phi_E = q$. Preferimos dejar el factor 4π en la ley de Coulomb, de modo que no aparezca en la de Gauss ni en otras relaciones de uso frecuente que se derivan más adelante.

27-5 APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

Esta ley sirve para calcular $\vec{E}$ cuando la simetría de una distribución de carga es grande. Un ejemplo de este cálculo —el campo de una carga puntual, ya se explicó al ocuparnos de la ecuación 27-10. Ahora vamos a presentar otros ejemplos.

Línea infinita de carga

En la figura 27-8 se incluye una sección de una línea infinita de carga con una densidad constante de carga lineal positiva (carga por unidad de longitud) λ. Nos gustaría determinar el campo eléctrico a una distancia r de la línea.

En la sección 26-4 expusimos los argumentos de simetría que nos permiten concluir que en este caso el campo eléctrico tiene un solo componente radial. Así pues, el problema presenta simetría cilíndrica y, por lo mismo, como en la superficie gaussiana seleccionamos un cilindro circular de radio r y de longitud h, cerrado en los extremos por tapas planas normales al eje. E es constante en la superficie cilíndrica y perpendicular a ella. El flujo de $\vec{E}$ a través de esta superficie es $E(2\pi rh)$, donde $2\pi rh$ es el área de la superficie. No pasa flujo por las tapas circulares porque aquí $\vec{E}$ es paralelo a la superficie en todos los puntos, de manera que $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ en todos los puntos de las tapas.

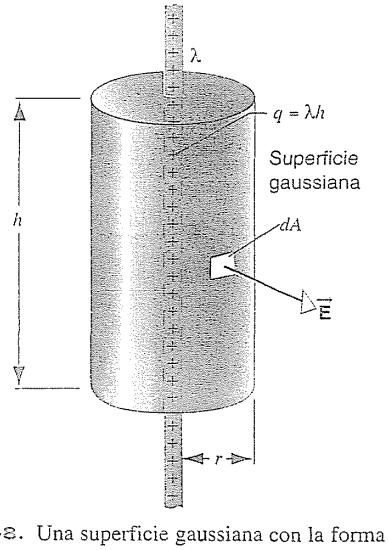


FIGURA 27-8. Una superficie gaussiana con la forma de un cilindro cerrado rodea una parte de una línea infinita de carga positiva.

La carga q encerrada por la superficie gaussiana de la figura 27-8 es λh. Entonces la ley de Gauss (Ec. 27-9) nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q$$

$$\epsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h,$$

o bien

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \qquad (27\text{-}11)$$

en concordancia con la ecuación 26-17.

Nótese que es mucho más simple la solución usando la ley de Gauss que la que usando métodos de integración, como en el capítulo 26. Nótese asimismo que es posible usar la ley de Gauss sólo si escogemos la superficie gaussania adecuada para aprovechar la simetría cilíndrica del campo eléctrico creado por una larga línea de carga. Existe la opción de seleccionar como superficie gaussiana cualquier superficie cerrada; por ejemplo, un cubo o una esfera (Ej. 24). Aunque la ley de Gauss se cumple a todas las superficies de este tipo, no todas son útiles en el problema en cuestión; sólo la superficie cilíndrica de la figura 27-8 es la apropiada.

La ley de Gauss tiene la propiedad de ofrecer una técnica útil de cálculo únicamente en los problemas que presentan cierto grado de simetría, y en ellos la solución es extraordinariamente simple.

Hoja infinita de carga

La figura 27-9 contiene una parte de una delgada hoja infinita no conductora cargada con una densidad constante de carga superficial positiva σ (carga por unidad de superficie). El campo eléctrico lo calculamos en los puntos cercanos a la hoja.

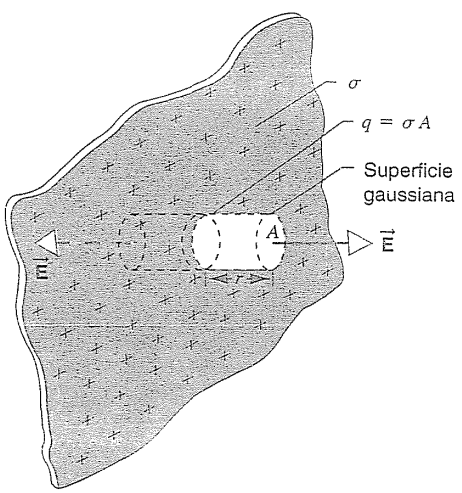


FIGURA 27-9. Una superficie gaussiana con la forma de un pequeño cilindro cerrado intersecta una parte pequeña de una hoja de carga positiva. El campo es perpendicular a la hoja y, por ello, sólo las tapas terminales de la superficie gaussiana contribuyen al flujo.

Una superficie gaussiana adecuada es un cilindro cerrado de superficie transversal A, dispuesto de modo que atraviesa el plano como se indica. De la simetría se deduce que $\vec{\mathbf{E}}$ apunta en ángulos rectos hacia las tapas extremas y alejándose del plano. Dado que $\vec{\mathbf{E}}$ no traspasa la superficie cilíndrica, no contribuye al flujo proveniente de la pared curva del cilindro. Suponemos que las tapas extremas equidistan de la hoja. Por simetría el campo posee la misma magnitud en ellas. El flujo por cada una es EA y positivo en ambas. La ley de Gauss nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q$$

$$\epsilon_0(EA + EA) = \sigma A,$$

donde σA es la carga encerrada. Al resolver para E obtenemos

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \qquad (27\text{-}12)$$

Nótese que E es igual en todos los puntos de los lados de la hoja.

Aunque desde el punto de vista físico no puede existir una hoja infinita con carga; este resultado sigue siendo útil porque la ecuación 27-12 proporciona resultados aproximadamente correctos de las hojas reales (no infinitas) con carga, si consideramos sólo los puntos lejanos de los bordes y cuya distancia de la hoja es pequeña en comparación con las dimensiones de la hoja. De hecho, la figura 27-12 concuerda con la ecuación 26-20, que obtuvimos al tomar los puntos cercanos a un disco circular con carga.

Un cascarón esférico con carga

En la sección 25-5 nos servimos de la semejanza entre las fuerzas electrostáticas y gravitacionales para demostrar dos propiedades de las fuerzas ejercidas por cascarones esféricos de carga uniforme. Después en la sección 26-4 aprovechamos las propiedades de la fuerza electrostática para deducir el campo eléctrico que un cascarón esférico con carga uniforme produce en puntos dentro o fuera del cascarón.

Podemos resumir los *teoremas de cascarones* para los campos eléctricos así:

1. *En los puntos externos un cascarón esférico uniforme con carga se comporta como si toda su carga se concentrase en su centro.*
2. *Un cascarón esférico uniforme con carga no ejerce fuerza eléctrica sobre una partícula con carga colocada dentro del mismo.*

Veamos cómo la ley de Gauss simplifica el cálculo del campo eléctrico y las pruebas de los dos teoremas de cascarón en esta geometría tan simétrica. La figura 27-10 muestra un cascarón esférico delgado, donde la carga q se distribuye uniformemente. Está rodeado por dos superficies esféricas concéntricas gaussianas, S_1 y S_2. A partir de un argumento de simetría concluimos que el campo puede tener sólo un componente radial E_r. (Suponga que hay un componente radial y que alguien gira el cascarón en un ángulo alrededor de un diá-

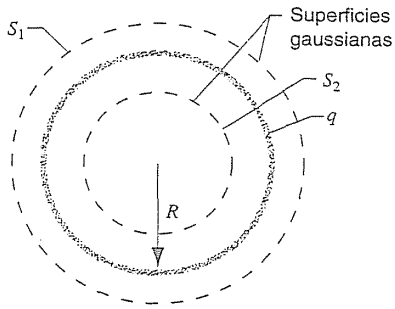


FIGURA 27-10. Sección transversal de un cascarón uniformemente cargado con carga total q. El cascarón está rodeado por dos superficies gaussianas esféricas cerradas, una dentro de él, y la otra en su exterior.

metro cuando volvemos la espalda. En esta posición podríamos sondear el campo eléctrico —digamos con una carga de prueba— para averiguar que el campo eléctrico cambió de dirección, a pesar de que la distribución de carga era la misma que antes de la rotación. Claro que es una contradicción. ¿Sería válido el argumento de simetría si la carga no se distribuyese uniformemente por la superficie?) Al aplicar la ley de Gauss a la superficie S_1, donde $r > R$, se obtiene

$$\epsilon_0 E_r(4\pi r^2) = q,$$

o bien

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \text{(cascarón esférico, } r > R\text{)}, \quad (27\text{-}13)$$

lo mismo que en relación con la figura 27-7. En consecuencia, el *cascarón de carga uniforme se comporta como una carga puntual en todos los puntos fuera de él.* Con ello queda demostrado el primer teorema de los cascarones.

Al aplicar la ley de Gauss a la superficie S_2, donde $r < R$, se obtiene directamente

$$E_r = 0 \qquad \text{(cascarón esférico, } r < R\text{)}, \qquad (27\text{-}14)$$

porque esta superficie gaussiana no encierra carga alguna y porque E_r (por otro argumento de simetría) posee el mismo valor en todas las partes de la superficie. *Por tanto, el campo eléctrico desaparece dentro de un cascarón uniforme con carga;* una carga de prueba colocada en cualquier punto del interior no sentirá fuerza eléctrica alguna. Se demuestra así el segundo teorema del cascarón.

Estos dos teoremas se aplican exclusivamente en el caso de un cascarón con carga *uniforme.* No se aplicarían si las cargas se dispersasen de manera no uniforme por la superficie, de modo que la densidad de carga variara en ella. Se perdería la simetría y, como resultado, $\vec{E}$ no podría extraerse de la integral en la ley de Gauss. El flujo se mantendría en q/ϵ_0 en todas las superficies exteriores y sería cero en todas las interiores; pero no se podría establecer una conexión directa con $\vec{E}$ como se hace en el caso uniforme. En contraste con el cascarón uniformemente cargado, el campo *no* sería cero en todo el interior.

Distribución de carga esféricamente simétrica

La figura 27-11 contiene una sección transversal de una distribución de carga esférica de radio R. Aquí, la carga se distribuye por todo el volumen de la esfera. No suponemos que la densidad de carga volumétrica ρ (la carga por unidad de volumen) sea constante; sin embargo, imponemos la restricción de que ρ en todos los puntos depende *sólo* de la distancia del punto con el centro, condición denominada *simetría esférica.* En otras palabras, ρ puede ser una función de r, pero no de una coordenada angular cualquiera. Vamos a obtener una expresión de E para los puntos situados afuera (Fig. 27-11*a*) y dentro (Fig. 27-11*b*) de la distribución de carga.

Toda distribución de carga con simetría esférica, como la de la figura 27-11, puede considerarse como un nido de cascarones concéntricos delgados. La densidad de carga volumétrica ρ puede variar de un cascarón al siguiente pero se puede hacer tan delgado que podemos suponer que ρ es uniforme en cualquier cascarón. Con los resultados de la subsección anterior se calcula la contribución de cada cascarón al campo eléctrico total. El campo eléctrico proveniente de los cascarones delgados tienen únicamente un componente radial; así que el campo eléctrico total de la esfera también puede tener un solo componente radial. (Esta conclusión se extrae también de un argumento de simetría, pero no será válida si la distribución de carga carece de simetría esférica, esto es, si ρ depende de la dirección.)

Calculemos el componente radial del campo eléctrico en los puntos situados a una distancia r mayor que el radio R de la esfera, como se advierte en la figura 27-11*a*. Cada cascarón concéntrico, con una carga dq, aporta un componente radial dE_r al campo eléctrico, según la ecuación 27-13. El campo total es la suma de todos los componentes; como todos son radiales, hay que obtener únicamente la suma algebraica, y no la suma vectorial. Entonces, la suma en todos los cascarones da

$$E_r = \int dE_r = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

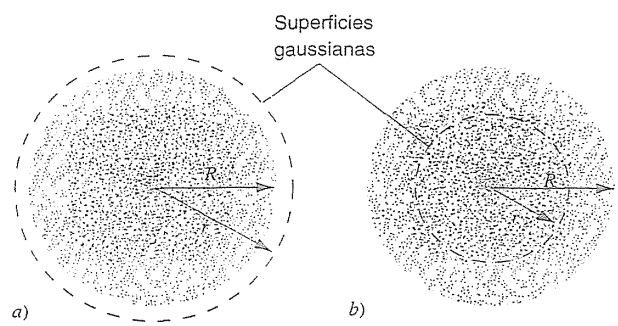


FIGURA 27-11. Sección transversal de una distribución de carga con simetría esférica, en que la densidad de carga volumétrica puede variar con r en este material supuestamente no conductor. Las superficies gaussianas esféricas cerradas se dibujaron *a)* afuera de la distribución y *b)* en su interior.

o como r es constante en la integral sobre q,

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}, \qquad (27\text{-}15)$$

donde q es la carga total de la esfera. Por tanto, en los puntos fuera de una distribución de carga con simetría esférica, el campo eléctrico posee el valor que tendría si la carga se concentrase en su centro. Este resultado se parece al caso gravitacional de la sección 14-5. Ambos resultados se deducen de que las leyes correspondientes de fuerza son del tipo de cuadrado inverso.

A continuación analizaremos el campo eléctrico en los puntos dentro de la distribución de carga. La figura 27-11*b* muestra una superficie esférica gaussiana de radio $r < R$. La ley de Gauss nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \epsilon_0 E_r(4\pi r^2) = q'$$

o bien

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{r^2}, \qquad (27\text{-}16)$$

donde q' es la parte de q contenida *dentro* de la esfera de radio r. Conforme al segundo teorema de los cascarones, la parte q situada afuera de la esfera no aporta nada a $\vec{\mathbf{E}}$ en el radio r.

Si queremos proseguir con el cálculo hay que conocer la carga q' que se halla dentro del radio r, es decir, conocer $\rho(r)$. Vamos ahora a abordar el caso especial en que la esfera está cargada uniformemente; así, la densidad de carga ρ posee el mismo valor en todos los puntos dentro de una esfera de radio R y es cero en todos los que están fuera de ella. En los puntos internos de ella, la fracción de carga dentro de r es igual a la del volumen en el interior de r, de modo que

$$\frac{q'}{q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

o bien

$$q' = q\left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

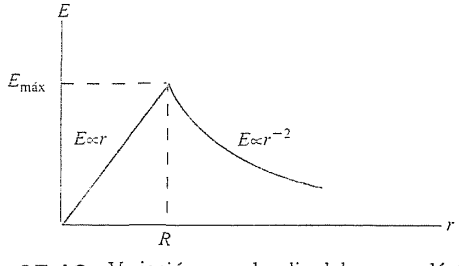


FIGURA 27-12. Variación con el radio del campo eléctrico debido a una distribución de carga esférica uniforme, de radio R. La variación para $r > R$ se aplica a *cualquier* distribución de carga con simetría esférica, en tanto que $r < R$ se aplica *sólo* a una distribución uniforme.

donde $\frac{4}{3}\pi R^3$ es el volumen de la distribución de carga esférica. Entonces, la expresión correspondiente a E_r se transforma en

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qr}{R^3} \qquad \text{(esfera uniforme, } r < R\text{)}. \qquad (27\text{-}17)$$

en concordancia con la ecuación 26-24. Según lo previsto, esta ecuación se vuelve cero cuando $r = 0$. La ecuación 27-17 se aplica *exclusivamente* si la densidad de carga es uniforme independientemente de r. Adviértase que las ecuaciones 27-15 y 27-17 arrojan el mismo resultado, como deberían, con los puntos en la superficie de la distribución de carga (es decir, cuando $r = R$). La figura 27-12 muestra el campo eléctrico en los puntos con $r < R$ (dado por la Ec. 27-17) y en los puntos con $r > R$ (dado por la Ec. 27-15).

PROBLEMA RESUELTO 27-3. La figura 27-13*a* muestra porciones de dos grandes hojas cargadas con densidades uniformes de carga superficial de $\sigma_+ = +6.8\ \mu C/m^2$ y $\sigma_- = -4.3\ \mu C/m^2$. Encuentre el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ situado a la izquierda de la hojas, entre ellas y a su derecha.

Solución Nuestra estrategia consiste en ocuparnos de cada hoja por separado y sumar luego los campos eléctricos resultantes, aplicando el principio de superposición. De acuerdo con la ecuación 27-12, en la hoja positiva tenemos

$$E_+ = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} = \frac{6.8 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2}{(2)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} = 3.84 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

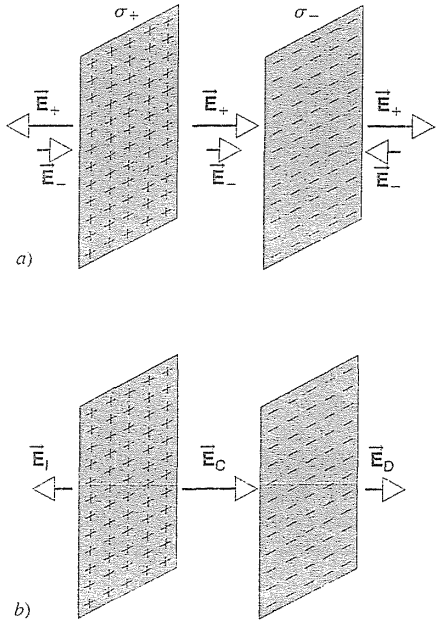


FIGURA 27-13. Problema resuelto 27-3. *a*) Dos grandes hojas paralelas transportan distintas distribuciones de carga σ_+ y σ_-. Los campos $\vec{\mathbf{E}}_+$ y $\vec{\mathbf{E}}_-$ deben ser producidos por cada hoja si los otros no están presentes. *b*) Campos netos en las regiones vecinas a la izquierda (I), al centro (C) y a la derecha (D) de las hojas, calculados a partir de la suma vectorial de $\vec{\mathbf{E}}_+$ y $\vec{\mathbf{E}}_-$ en cada región.

De manera semejante en la hoja negativa la magnitud del campo es

$$E_- \quad \frac{|\sigma_-|}{2\epsilon_0} = \frac{4.3 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2}{(2)(8.85 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)} = 2.43 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

En la figura 27-13*a* se ven estos campos a la izquierda de las hojas, entre ellas y a la derecha de las hojas.

Los campos resultantes en las tres regiones se obtienen de la suma vectorial de $\vec{\mathbf{E}}_+$ y $\vec{\mathbf{E}}_-$. En la parte izquierda de las hojas tenemos (suponiendo que los componentes de $\vec{\mathbf{E}}$ en la figura 27-13 son positivos si $\vec{\mathbf{E}}$ apunta hacia la derecha y que son negativos si $\vec{\mathbf{E}}$ apunta hacia la izquierda.

$$\begin{aligned} E_L &= -E_+ + E_- = -3.84 \times 10^5\ \text{N/C} + 2.43 \times 10^5\ \text{N/C} \\ &= -1.4 \times 10^5\ \text{N/C}. \end{aligned}$$

El campo eléctrico resultante (negativo) en esta región apunta hacia la izquierda como se indica en la figura 27-13*b*. A la derecha de las hojas, el campo eléctrico posee la misma magnitud, pero apunta hacia la derecha en la figura.

Entre las hojas la suma de los dos campos nos da

$$\begin{aligned} E_C &= E_+ + E_- = 3.84 \times 10^5\ \text{N/C} + 2.43 \times 10^5\ \text{N/C} \\ &= 6.3 \times 10^5\ \text{N/C}. \end{aligned}$$

Fuera de las hojas, el campo eléctrico se comporta como el producido por una hoja simple cuya densidad de carga superficial es $\sigma_+ + \sigma_-$ o $2.5 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2$. Así lo confirma el patrón de campo de la figura 27-13*b*. En los ejercicios 14 y 15 podrá investigar el caso en que dos densidades de este tipo poseen la misma magnitud y signo opuesto, así como el caso en que tienen magnitud y signo iguales.

27-6 LEY DE GAUSS Y LOS CONDUCTORES

Hemos visto que, al usar la ley de Gauss, se obtiene el campo eléctrico en varias distribuciones de carga muy asimétrica. También nos sirve para deducir las propiedades de los conductores que transportan una carga neta. He aquí una de las propiedades:

> *Un exceso de carga puesta en un conductor aislado se dirige en su totalidad hacia la superficie externa del conductor. Ninguna parte del exceso se encuentra en el cuerpo del conductor.*

Veamos ahora lo que sucede cuando colocamos una cantidad de carga eléctrica en un conductor aislado. En teoría, las cargas pueden depositarse en cualquier parte de él, aun en lo profundo de su interior. En un principio hay un campo eléctrico dentro del conductor debido a las cargas. Produce fuerzas en ellas que las hacen redistribuirse. Muy pronto (en un lapso de 10^{-9} s), el campo eléctrico se vuelve cero y las cargas dejan de moverse. Es el estado que llamamos *equilibrio electrostático*. Si el campo del interior fuera no cero, los electrones de conducción en el metal experimentarían una fuerza y se observarían cargas en movimiento (una corriente eléctrica). Puesto que no las observamos, concluimos que el campo eléctrico es cero en el interior.

No olvide que aquí estamos considerando sólo un conductor "aislado", es decir, un conductor libre de influencias externas. Un alambre que lleve una corriente no puede considerarse conductor aislado, pues ha de conectarse a un agente externo como una batería. El campo eléctrico en el alambre no es cero, el alambre *no* está en equilibrio electrostático y las conclusiones extraídas de esta sección no se aplican al alambre.

Si aceptamos que el campo eléctrico en el interior del conductor es cero en condiciones electrostáticas, la ley de Gauss afirma que la carga en el conductor ha de hallarse en su superficie externa. La figura 27-14*a* muestra un conductor de forma arbitraria, quizá una masa de cobre, que tiene una carga neta q y que cuelga de un hilo aislante. Se dibujó una superficie gaussiana dentro de la superficie externa del conductor.

Si el campo eléctrico es cero en todo el interior del conductor, también lo será en todas las partes de la superficie gaussiana que se encuentra enteramente dentro del conductor. Ello significa que el flujo a través de estas superficies es cero. Entonces la ley de Gauss nos permite concluir que la carga neta encerrada por la superficie gaussiana ha de ser cero. En caso de que no haya carga en el interior de esta superficie, deberá estar fuera de ella; en otras palabras, la carga ha de hallarse en la superficie externa del conductor.

¿Por qué es cero el campo eléctrico dentro del conductor? Supóngase que de alguna manera pudiésemos "congelar" las cargas en la superficie —quizá introduciéndolas en una delgada capa de plástico—, mientras eliminamos el conductor por completo dejando sólo una delgada capa de carga. El campo eléctrico no cambiará en absoluto; seguirá siendo cero en todo el interior del cascarón. Esto demuestra que el campo eléctrico proviene de las cargas y no del conductor. Éste se limita a ofrecer una trayectoria para que las cargas puedan moverse fácilmente a la posición donde generan un campo eléctrico neto de cero dentro del conductor.

La carga en las superficies interiores

Hasta ahora nos hemos ocupado de la carga en la superficie externa de un conductor sólido. Supóngase que éste tiene una cavidad interna como la que se aprecia en la figura 27-14*b*. ¿Aparecerá la carga también en la superficie de la cavidad?

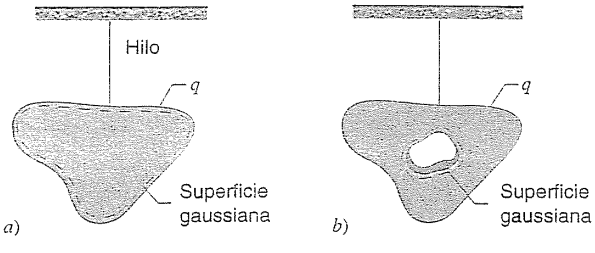


FIGURA 27-14. *a*) Un conductor metálico aislado que tiene una carga q cuelga de un hilo. Se dibujó una superficie gaussiana dentro de la superficie del conductor. *b*) Una cavidad interna del conductor está rodeada por una superficie gaussiana diferente.

Es lógico suponer lo siguiente: si se excava material eléctricamente neutro para formar la cavidad, no se modificará la distribución de carga en la superficie externa ni el campo eléctrico del interior. La ley de Gauss puede usarse en una prueba cuantitativa.

Dibujamos una superficie gaussiana que rodee la cavidad, cerca de la superficie pero dentro del conductor, como se indica en la figura 27-14*b*. Como $\vec{E} = 0$ en todo el interior del conductor, no puede haber flujo en ella. Por tanto, conforme a la ley de Gauss la superficie no puede encerrar carga neta alguna; así que tampoco puede haber carga en la superficie de la cavidad interior del conductor aislado.

Si introducimos un objeto con carga q' en la cavidad (de modo que el conductor ya no pueda ser calificado de aislado), la ley de Gauss requiere todavía que la carga neta dentro de la superficie gaussiana sea cero. En este caso, la carga $-q'$ ha de ser atraída a la superficie de la cavidad para que la carga neta siga siendo cero en ella. Si el conductor externo transporta inicialmente una carga neta q, una carga de $q + q'$ aparecerá en su superficie externa y, por lo mismo, la carga neta no cambiará.

El campo eléctrico fuera de un conductor

Aunque el exceso de carga en un conductor aislado se mueve enteramente en su superficie, en general, no se distribuye uniformemente por ella salvo en un conductor esférico aislado. Dicho de otra manera, la densidad de carga superficial σ ($= dq/dA$) varía de punto en punto a lo largo de esta superficie.

Podemos recurrir a la ley de Gauss para encontrar una relación —en cualquier punto superficial— entre la densidad de carga superficial σ y el campo eléctrico $\vec{E}$ fuera de la superficie en ese mismo punto. La figura 27-15*a* muestra una superficie cilíndrica gaussiana corta y gruesa; el área (pequeña) de sus dos tapas extremas es A. Las tapas que están en los extremos son paralelas a la superficie: una se encuentra enteramente dentro del conductor, y la otra completamente afuera. Las paredes cilíndricas cortas son perpendiculares a la superficie del conductor. Una vista amplificada de la superficie gaussiana se muestra en la figura 27-15*b*.

El campo eléctrico fuera del conductor aislado y cargado en equilibrio electrostático debe formar ángulos rectos con la superficie del conductor. De no ser así, habría un componente de $\vec{E}$ situado en la superficie y produciría corrientes superficiales que redistribuirían las cargas superficiales. Por tanto, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie del conductor, y el flujo a través de la tapa terminal de la superficie gaussiana de la figura 27-15*b* es EA. El que pasa por el interior de la tapa es cero, ya que $\vec{E} = 0$ en todos los puntos del conductor. El flujo a través de las paredes cilíndricas también es cero, porque las líneas de $\vec{E}$ son paralelas a la superficie, de modo que no pueden atravesarla. La carga q encerrada por la superficie gaussiana es σA.

Entonces el flujo total puede calcularse así

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{\text{tapa exterior}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{tapa interior}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{paredes laterales}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= EA + 0 + 0 = EA.$$

Ahora el campo eléctrico se obtiene aplicando la ley de Gauss:

$$\epsilon_0 \Phi_E = q,$$

y, al sustituir los valores del flujo y las cargas encerradas q ($= \sigma A$), obtenemos

$$\epsilon_0 EA = \sigma A$$

o

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \qquad (27\text{-}18)$$

Compare el resultado anterior con la ecuación 27-12 referente al campo eléctrico cercano a una hoja de carga: $E = \sigma/2\epsilon_0$. El campo eléctrico que se encuentra cerca de un conductor es el *doble* de que esperaríamos obtener, si consideráramos que el conductor es una hoja con carga, incluso en puntos muy cercanos a la superficie, donde el ambiente inmediato *no* se parece a una hoja con carga. ¿Cómo podemos interpretar la diferencia entre los dos casos?

Una hoja con carga se construye esparciendo cargas en un lado de una capa delgada de plástico. Las cargas se adhieren donde llegan y no pueden moverse. No es posible cargar un conductor en la misma forma. Podemos imaginar que la superficie del conductor está dividida en dos secciones: la región cercana al sitio donde queremos encontrar el campo eléctrico y el resto del conductor. Si nos aproximamos lo bastante a él en la figura 27-15, la región cercana a la superficie gaussiana puede considerarse como una hoja cargada y aportará una cantidad $E = \sigma/2\epsilon_0$ al campo eléctrico. No obstante, puede demostrarse que la carga en el resto del conductor aporta esa misma cantidad. El campo eléctrico total es la suma de las dos contribuciones, o sea σ/ϵ_0.

Esto podemos verlo muy directamente en el caso de una placa delgada de un conductor. Si esparcimos la carga q por todas partes del plano, se distribuirá en *ambas* superficies de ella como se aprecia en la figura 27-16. Cabe, pues, esperar

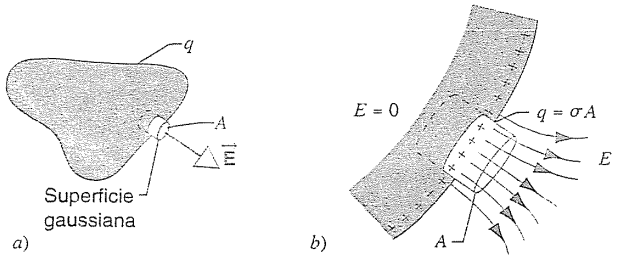


FIGURA 27-15. *a*) Una pequeña superficie gaussiana se colocó sobre la superficie de un conductor cargado. *b*) Vista ampliada de la superficie gaussiana que encierra una carga q igual a σA.

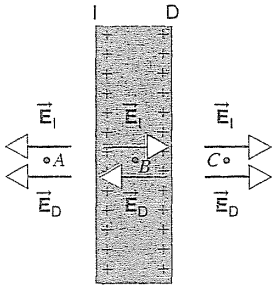


FIGURA 27-16. Carga eléctrica cerca de una hoja conductora delgada. Nótese que ambas superficies tienen carga. Los campos $\vec{E}_I$ y $\vec{E}_D$ generados, respectivamente, por las cargas de las superficies izquierda y derecha se refuerzan en los puntos A y C; se cancelan en los puntos B del interior de las hojas.

encontrar la carga $q/2$ y una densidad de carga $\sigma = q/2A$ en las superficies de la placa. Podemos considerar cada superficie como un hoja con carga, la cual (de acuerdo con la Ec. 27-12) crea un campo eléctrico $E = \sigma/2\epsilon_0 = q/4A\epsilon_0$. Cerca de la placa (en los puntos A o C de la figura 27-16), los campos debido a las superficies izquierda y derecha son iguales y se suman para darnos un campo eléctrico total de $E = q/4A\epsilon_0 + q/4A\epsilon_0 = q/2A\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$. En el interior de la placa (punto B), los campos se hallan en dirección opuesta y suman cero, como cabe esperar en el interior de un conductor.

Supóngase que acercamos a la primera placa una segunda que transporta una carga $-q$. Ahora el conductor original ya no puede considerarse "aislado", y la carga en su superficie externa deja de estar distribuida uniformemente. Existe una atracción entre las cargas positivas en una placa y las negativas en la otra que aproxima las cargas a la superficie de las placas que están una frente a otra (Fig. 27-17). Las superficies tienen carga q (en vez de $q/2$), y la densidad de carga $\sigma = q/A$. Consideradas como hojas de carga, producen un campo eléctrico $E = \sigma/2\epsilon_0 = q/2A\epsilon_0$ de acuerdo con la ecuación 27-12. En la región situada entre ellas, las placas positiva y negativa generan campos eléctricos de igual magnitud y dirección idéntica, de manera que el campo eléctrico neto entre las placas es $E = \sigma/\epsilon_0 = q/A\epsilon_0$. Esto es el campo eléctrico de un capacitor de placas paralelas que se observa en la figura 27-17.

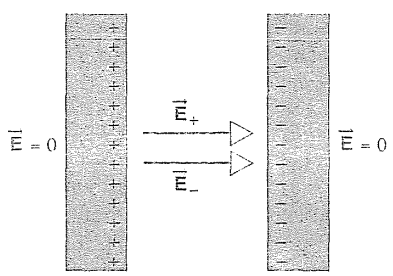


FIGURA 27-17. Dos placas delgadas conductores tienen cargas iguales y opuestas. $\vec{E}_+$ es el campo producido por la placa de carga positiva y $\vec{E}_-$ es el producido por la placa de carga negativa.

PROBLEMA RESUELTO 27-4. El campo eléctrico situado arriba de la superficie del tambor cargado de una fotocopiadora tiene una magnitud E de 2.3×10^5 N/C. ¿Cuál es la densidad de carga superficial en el tambor si es un conductor?

Solución Con base en la ecuación 27-18 tenemos

$$\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.3 \times 10^5\ \text{N/C})$$
$$= 2.0 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2 = 2.0\ \mu\text{C/m}^2.$$

PROBLEMA RESUELTO 27-5. El campo eléctrico promedio que normalmente se encuentra en la atmósfera terrestre por encima de su superficie posee una magnitud aproximada de 150 N/C, que se dirige hacia abajo (radialmente hacia el interior apuntando al centro de la Tierra). ¿Qué carga superficial neta total tiene la Tierra? Suponga que ésta es un conductor?

Solución Las líneas de fuerza terminan en cargas negativas; por eso, si el campo eléctrico de la Tierra apunta hacia abajo, su densidad promedio de carga superficial σ debe ser negativa. A partir de la ecuación 27-18 obtenemos

$$\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(-150\ \text{N/C})$$
$$= -1.33 \times 10^{-9}\ \text{C/m}^2.$$

La carga total de la Tierra q es la densidad de carga superficial multiplicada por $4\pi R^2$, el área superficial de la la Tierra (supuestamente esférica). Por tanto,

$$q = \sigma 4\pi R^2$$
$$= (-1.33 \times 10^{-9}\ \text{C/m}^2)(4\pi)(6.37 \times 10^6\ \text{m})^2$$
$$= -6.8 \times 10^5\ \text{C} = -680\ \text{kC}.$$

PROBLEMA RESUELTO 27-6. Un largo conductor cilíndrico hueco (radio interno a y de radio externo b) está rodeado por una larga capa coaxial cilíndrica conductora (radio interno c y radio externo d), como se aprecia en la figura 27-18. El conductor interno lleva una carga positiva $2q$ y el externo una carga $-3q$. Calcule la carga que se encuentra en la superficie de los dos conductores.

Solución La ley de Gauss da resultados similares en las geometrías cilíndrica y esférica. En particular, el campo eléctrico generado por el conductor externo en la región $r < c$ es cero, como hemos demostrado en el caso del cascarón esférico de carga. Las cargas del conductor externo no producen un campo eléctrico en el sitio del conductor interno, que por ello puede considerarse "aislado" dentro de este contexto. Si tratamos como aislado al conductor interno, concluire-

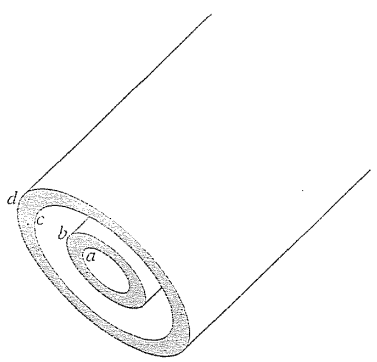


FIGURA 27-18. Problema resuelto 27-6. Dos cascarones conductores cilíndricos coaxiales.

mos que la carga ha de hallarse enteramente en su superficie externa. En consecuencia, no hay carga en la superficie a y una carga positiva $2q$ en la superficie b.

Si dibujáramos una superficie coaxial cilíndrica gaussiana por el interior del cilindro externo ($c < r < d$), podríamos aplicar la ley de Gauss y concluir que el flujo a través de ella es cero. El flujo que cruza la parte curva de la superficie es cero, porque $E = 0$ en todo el interior del conductor; el que cruza los extremos planos también lo es, porque el campo para $b < r < c$ debe ser radial y, por lo mismo, paralelo a las superficies planas. Conforme a la ley de Gauss, ello significa que la carga total dentro de la superficie gaussiana será cero. Sabemos que hay una carga $2q$ en el conductor interno, por lo cual, para hacer cero la carga neta, tiene que existir una carga $-2q$ en la superficie c. Dado que la carga total en el cilindro externo es $-3q$, la carga restante de $-q$ debe aparecer en la superficie d.

Nótese que en el conductor externo influye la carga del conductor interno y no puede considerarse aislado; así que la carga del conductor no se encuentra toda en su superficie externa.

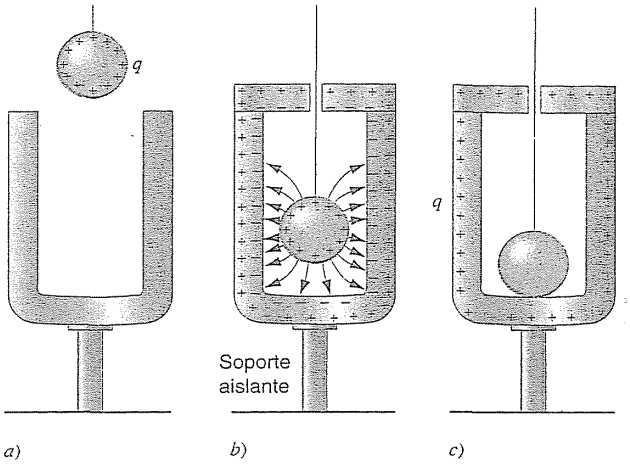


FIGURA 27-19. Arreglo concebido por Benjamín Franklin para demostrar que la carga colocada en un conductor se dirige a su superficie. *a*) Una bola metálica se baja y se introduce en una lata metálica sin carga. *b*) La bola se halla dentro de la lata y se le pone una cubierta. Se muestran las líneas del campo entre la bola y la lata sin carga. La bola atrae las cargas de signo contrario hacia el interior de la lata. *c*) Cuando la bola toca la lata, las dos forman un solo conductor y la carga neta fluye en dirección de la superficie externa. Entonces la bola puede quitarse de la lata y se demuestra que está completamente descargada, con lo cual se prueba que la carga ha de haber sido transferida a la lata.

27-7 PRUEBAS EXPERIMENTALES DE LA LEY DE GAUSS Y DE LA DE COULOMB

En la sección 27-6 dedujimos que el exceso de carga en un conductor ha de encontrarse sólo en su superficie externa. No puede existir carga dentro de su volumen ni en la superficie de una cavidad interna vacía. Este resultado se consiguió directamente de la ley de Gauss. Por consiguiente, probar si toda la carga efectivamente se encuentra en la superficie externa es una forma de demostrar la ley de Gauss. Si la carga está dentro del conductor o en una superficie interior (como la cavidad de la Fig. 27-14*b*), entonces no se cumple la ley de Gauss. En la sección 27-4 se demostró que la ley de Coulomb se deduce directamente de la de Gauss. Por eso, si ésta no se cumple, lo mismo sucede con la de Coulomb. En concreto, la ley de la fuerza, quizá, no sea exactamente una ley de cuadrados inversos. El exponente de r podría diferir de 2 en una magnitud pequeña δ, por lo cual, quizá, el campo eléctrico radial sería

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^{2+\delta}}, \qquad (27\text{-}19)$$

donde δ es exactamente cero, si se cumplen las leyes de Coulomb y de Gauss.

La medición directa de la fuerza entre dos cargas, descritas en el capítulo 25, no ofrece suficiente precisión para probar si δ es cero más allá de un pequeño porcentaje. La observación de la carga dentro de un conductor nos da los medios para realizar una prueba que es mucho más precisa, según veremos luego.

En teoría, el experimento sigue el procedimiento descrito gráficamente en la figura 27-19. Un bola metálica cargada cuelga de un hilo aislante; se baja y se introduce en una lata metálica que se halla sobre una base aislante. Cuando se hace que entren en contacto la bola y el interior de la lata, los dos objetos forman un *conductor simple*; si la ley de Gauss es válida, toda la carga proveniente de la bola ha de dirigirse al exterior del conductor combinado, como se indica en la figura 27-19*c*. Al quitar la bola, ya no debería portar carga alguna. Si se ponen en contacto otros objetos metálicos aislados con el interior de la lata, no debería transferirse carga alguna a ellos. Sólo en el exterior de la lata será posible la transferencia de carga.

Al parecer, Benjamin Franklin fue el primero en observar que no había carga en el interior de una lata metálica aislada. En 1755 escribió a un amigo:

> Electrifiqué una lata de plata en una base eléctrica; después la baje y la introduje en una bola de corcho, de una pulgada de diámetro aproximadamente, que colgaba de un hilo de seda, hasta que el corcho tocó el fondo de la lata. La bola no era atraída hacia el interior de ella como hubiera sido atraída al exterior. Y aunque tocaba el fondo, al sacarla no estaba electrificada con el contacto, como debería haber ocurrido al entrar en contacto con el exterior. El hecho es extraordinario. Debe tener una explicación; yo todavía no la sé....

Unos 10 años más tarde Franklin mencionó este "hecho extraordinario" a su amigo Joseph Priestley (1733-1804). En 1767 (unos 20 años antes de los experimentos de Coulomb), Priestley comprobó la observación de Franklin y, con admirable penetración, descubrió que la ley de fuerza de cuadrados inversos se deducía de ella. Así pues, el método indirecto no sólo es más exacto que el directo expuesto en la sección 25-4, sino que además se llevó a cabo antes.

Razonando por analogía con la gravitación, Priestley señaló lo siguiente: el hecho de que ninguna fuerza eléctrica operase sobre la bola de corcho de Franklin cuando estaba rodeada por una gran lata metálica recuerda el hecho (Sec. 14-15) de que ninguna fuerza gravitacional actúa sobre una partícula dentro de un cascarón esférico de materia; si la gravitación obedece una ley de cuadrados inversos, quizá la fuerza eléctrica también. Teniendo en cuenta el experimento de Franklin, Priestley razonó así:

> ¿Podemos inferir de esto que la atracción de la electricidad está sujeta a las mismas leyes que la gravitación y que, por tanto, a los cuadrados de la distancia; como se demuestra fácilmente que si la Tierra tuviera la forma de un cascarón, un cuerpo en su interior no sería atraída a un lado más que a otro?

Nótese que el conocimiento de un tema (la gravitación) ayuda a entender otro (electrostática).

Michael Faraday también llevó a cabo experimentos diseñados para demostrar que el exceso de carga se encuentra en la superficie externa de un conductor. Más concretamente, construyó una gran caja cubierta de metal, que montó en soportes aislantes y cargó con un potente generador electrostático. En su propias palabras:

> Me metí en el cubo y viví allí; usé velas iluminadas, electrómetros y otras pruebas de los estados eléctricos, pero no pude observar la mínima influencia en ellos... aunque el exterior del cubo siempre presentaba una potente carga y grandes chispas y escobillas se desprendían en toda su superficie externa.

La ley de Coulomb es importantísima en física; si δ en la ecuación 27-19 no es cero, nos será muy difícil entender el electromagnetismo y la física cuántica. La mejor manera de medir δ consiste en averiguar *mediante experimentos* si un exceso de carga, colocada en un conductor aislado, se desplaza, o no, *enteramente* hacia la superficie externa.

Los experimentos modernos, realizados con notable precisión, han demostrado que, si δ en la ecuación 27-19 no es cero, será sin duda, pequeña en extremo. En la tabla 27-1 se resumen los resultados de los experimentos más importantes.

En la figura 27-20 se incluye el dibujo del aparato con que Plimpton y Lawton medieron δ. Consta fundamentalmente de dos cascarones metálicos concéntricos, A y B; el segundo mide 1.5 m de diámetro. El cascarón interno contiene un electrómetro sensible E conectado de modo que indique si una carga se mueve entre los cascarones A y B. Si éstos se conectan eléctricamente, cualquier carga colocada en ellos debería encontrarse enteramente en el cascarón A, si se formuló correctamente la ley de Gauss y, por tanto, la de Coulomb.

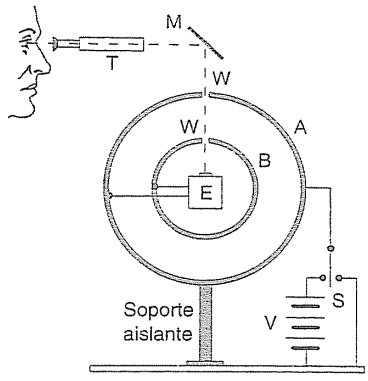


FIGURA 27-20. Versión moderna y más precisa del aparato de la figura 27-19, también diseñada para verificar que la carga se encuentra sólo en la superficie externa de un conductor. Se pone la carga en una esfera A colocando el interruptor S a la izquierda; se emplea el electrómetro sensible E para buscar una carga que pudiera desplazarse hacia la esfera interna B. Se prevé que toda la carga permanecerá en la superficie externa (esfera A).

Al mover el interruptor S a la izquierda, la batería V podría poner una carga importante en el conjunto de esferas. Cuando una parte de ella se desplaza hacia la capa B, pasaría por el electrómetro y causaría una deflexión observable ópticamente por medio de un telescopio T, un espejo M y unas ventanas W.

Pero no se observa efecto alguno cuando movemos el interruptor S alternativamente de derecha a izquierda, conectando el conjunto de cascarones a la batería o a tierra. Como Plimpton y Lawton conocían la sensibilidad de su electrómetro, calcularon que δ en la ecuación 27-19 no es cero por menos de 2×10^{-9}, un valor efectivamente muy pequeño. Pero desde su experimento los límites en δ han sido mejorados no más de siete órdenes de magnitud por investigadores que utilizaron versiones más detalladas y precisas de este aparato básico.

TABLA 27-1 Pruebas de la ley de cuadrados inversos de Coulomb

Experimentadores	*Fecha*	*δ (Ec. 27-19)*
Franklin	1755	
Priestley	1767	. . . según los cuadrados . . .
Robson	1769	< 0.06
Cavendish	1773	< 0.02
Coulomb	1785	. . . un pequeño porcentaje a lo máximo
Maxwell	1873	$< 5 \times 10^{-5}$
Plimpton y Lawton	1936	$< 2 \times 10^{-9}$
Bartlett, Goldhagen y Phillips	1970	$< 1.3 \times 10^{-13}$
Williams, Faller y Hill	1971	$< 1.0 \times 10^{-16}$

OPCIÓN MÚLTIPLE

27-1 ¿A qué se refiere la ley de Gauss?

27-2 El flujo de un campo vectorial

1. Un campo de velocidad $\vec{v}$ existe en una región del espacio. Una superficie cerrada S se divide en cuatro secciones, S_1, S_2, S_3 y S_4. Una fuente se encuentra fuera de ella y cerca de S_1; pueden haber otras fuentes o sumideros cerca de las superficies S_n, pero ninguna dentro de S.

   a) ¿Qué puede concluirse respecto a Φ_1, el flujo que atraviesa S_1.

   A) $\Phi_1 > 0$ B) $\Phi_1 = 0$ C) $\Phi_1 < 0$

   D) Nada puede concluirse respecto a Φ_1 sin información adicional.

   b) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta en relación con el flujo que atraviesa las cuatro superficies?

   A) Por lo menos uno de los flujos Φ_n ha de ser negativo.
   B) Por lo menos uno de los flujos Φ_n ha de ser positivo.
   C) Por lo menos uno de los flujos Φ_n ha de ser cero.
   D) Si A es correcto también lo es B
   E) Puede ser correcto A o B, pero no ambos.

   c) Las mediciones indican que $\Phi_1 + \Phi_2 > 0$. A partir de esta información se concluye que

   A) $\Phi_3 = \Phi_4$. B) $\Phi_3 = -\Phi_4$. C) $\Phi_3 > \Phi_4$.
   D) $\Phi_3 < -\Phi_4$.

27-3 El flujo del campo eléctrico

2. El flujo a través de una superficie de área A en un campo uniforme $\vec{E}$ alcanza su máximo cuando
   A) la superficie es paralela a $\vec{E}$.
   B) la superficie es perpendicular a $\vec{E}$.
   C) la superficie tiene forma de rectángulo.
   D) la superficie tiene forma de cuadrado.
3. Una superficie esférica cerrada de radio a se halla en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. ¿Qué flujo eléctrico Φ_E atraviesa la superficie?

   A) $\Phi_E = 4\pi a^2 E$ B) $\Phi_E = \pi a^2 E$
   C) $\Phi_E = 0$
   D) $\Phi_E =$ no puede determinarse sin conocimientos adicionales.

27-4 Ley de Gauss

4. Considere dos superficies esféricas concéntricas, S_1 con radio a y S_2 con radio $2a$, ambas centradas en el origen. Hay una carga $+ q$ en el origen y ninguna otra. Compare el flujo Φ_1 que atraviesa S_1 con el flujo Φ_2 que atraviesa S_2.

   A) $\Phi_1 = 4\Phi_2$. B) $\Phi_1 = 2\Phi_2$.
   C) $\Phi_1 = \Phi_2$. D) $\Phi_1 = \Phi_2/2$.

5. Una superficie esférica cerrada S imaginaria de radio R se centra en el origen. Una carga positiva se halla inicialmente en el origen y el flujo por la superficie es Φ_E. La carga positiva se mueve con lentitud desde el origen hasta el punto $R/2$ del origen. Al hacer el flujo en S

   A) aumenta a $4\Phi_E$. B) aumenta a $2\Phi_E$.
   C) no se altera. D) disminuye a $\Phi_E/2$.
   E) disminuye a $\Phi_E/4$.

6. ¿En qué condiciones puede el flujo eléctrico Φ_E obtenerse en una superficie cerrada?

   A) Si la magnitud de $\vec{E}$ se conoce en todas las partes de la superficie.
   B) Si se especifica la carga total dentro de la superficie.
   C) Si se especifica la carga total fuera de la superficie.
   D) Sólo si se especifica la ubicación de las cargas puntuales dentro de la superficie.

7. Una superficie esférica cerrada imaginaria S de radio R se centra en el origen. Una carga positiva $+ q$ se halla inicialmente en el origen y el flujo por la superficie es Φ_E. Se agregan tres cargas más en el eje x: $-3q$ en $x = -R/2$, $+5q$ en $x = R/2$ y $+4q$ en $x = 3R/2$. Ahora el flujo que pasa por S es

   A) $2\Phi_E$. B) $3\Phi_E$. C) $6\Phi_E$. D) $7\Phi_E$.
   E) Φ_E no puede determinarse por no ser ya simétrico el problema.

27-5 Aplicaciones de la ley de Gauss

8. Un dipolo se encuentra en el eje x, con la carga positiva $+ q$ en $x = + d/2$ y la carga negativa en $- d/2$. El flujo eléctrico Φ_E que cruza el plano yz en la mitad de la separación de las cargas

   A) es cero. B) depende de d.
   C) depende de q. D) depende de ambos, de q y de d.

9. Acercamos la carga positiva a la superficie de la pregunta 8 de opción múltiple. A medida que la superficie se mueve, el flujo Φ_E a través de ella

   A) aumenta. B) disminuye.
   C) no se altera.

10. Se hace *girar* la superficie de la pregunta 8 de opción múltiple, de manera que la normal a ella ya no es paralela al eje x. Conforme se mueve la superficie, el flujo Φ_E a través de la superficie

    A) aumenta. B) disminuye.
    C) no se altera.

11. ¿En cuál de los siguientes problemas es útil la ley de Gauss?

    A) Calcular el campo eléctrico en varios puntos de la superficie de un cilindro uniformemente cargado de longitud finita.
    B) Calcular el flujo eléctrico que pasa por la superficie terminal de un cilindro de carga uniforme.
    C) Calcular el campo eléctrico en varios puntos de la superficie de un cilindro de carga uniforme.
    D) Calcular el flujo eléctrico que pasa por un lado de un cubo de carga uniforme.

27-6 Ley de Gauss y los conductores

12. Una bola conductora hueca lleva una carga positiva $+q$ fija en el centro. La bola no tiene carga neta.

    a) La carga en la superficie interna de la bola es

    A) $+2q$. B) $+q$. C) $-q$. D) 0.

    b) La carga en la superficie externa de la bola es

    A) $+2q$. B) $+q$. C) $-q$. D) 0.

13. Supóngase que una carga neta $+ q$ se coloca en la bola de la pregunta de opción múltiple 12; la carga puntual permanece en su centro.

    a) La carga en la superficie interna de la bola es

    A) $+2q$. B) $+q$. C) $-q$. D) 0.

    b) La carga en la superficie externa de la bola es

    A) $+2q$. B) $+q$. C) $-q$. D) 0.

14. La carga positiva en el centro de la bola de la pregunta de opción múltiple 13 es sacada del centro y acercada a la superficie interna, pero sin que la toque.
   a) La carga total de la superficie interna de la bola
      A) aumenta. B) disminuye.
      C) no se altera.
      D) cambia según cuánto se acerque la bola a la superficie interna.
   b) La carga total en la superficie externa de la bola
      A) aumenta. B) disminuye.
      C) no se altera.
      D) cambia según cuánto se acerque la bola a la superficie interna.

27-7 Pruebas experimentales de la ley de Gauss y de la de Coulomb

PREGUNTAS

1. ¿En qué se basa la afirmación de que las líneas de fuerza eléctrica comienzan y terminan sólo en cargas eléctricas?
2. A las cargas positivas se les llama, en ocasiones, "fuentes" y a las negativas, "sumideros" del campo eléctrico. ¿Cómo justificaría esta terminología? ¿Tiene fuentes o sumideros el campo gravitacional?
3. Por analogía con Φ_E, ¿cómo definiría el flujo Φ_g de un campo gravitacional? ¿Cuál es el flujo gravitacional a través de las fronteras de un cuarto, suponiendo que no contenga materia? ¿En la superficie esférica que rodea de cerca a la Tierra? ¿Y cuál sería en una superficie esférica del tamaño de la órbita lunar?
4. Considere la superficie gaussiana que rodea parte de la distribución de carga que aparece en la figura 27-21. *a*) ¿Cuál de las cargas contribuye al campo eléctrico en el punto *P*? *b*) ¿El valor obtenido del flujo que pasa por la superficie, que se calculó usando solo el campo producido por q_1 y q_2, será mayor, igual o menor que el conseguido empleando el campo total?

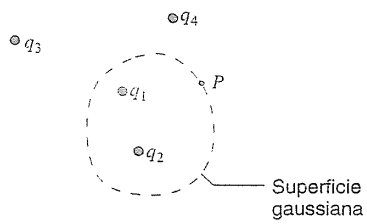


FIGURA 27-21. Pregunta 4.

5. Suponga que en alguna región se descubre que el campo eléctrico tiene una dirección constante, pero cuya fuerza se reduce en esa dirección. ¿Qué concluirá respecto a la carga en la región? Dibuje las líneas de fuerza.
6. ¿Es rigurosamente cierto que la ley de Gauss establece lo siguiente: el número total de líneas de fuerza que cruzan una superficie cerrada hacia fuera es proporcional a la carga positiva neta delimitada por la superficie?
7. Se pone una carga puntual en el centro de una superficie esférica gaussiana. ¿Cambia Φ_E *a*) si la superficie es sustituida por un cubo del mismo volumen; *b*) si la esfera es reemplazada por un cubo de una décima del volumen; *c*) si se mueve la carga fuera del centro en la esfera original, permaneciendo todavía en el interior; *d*) si se mueve la carga fuera de la esfera original; *e*) si una segunda carga se coloca cerca y fuera de la esfera original; y *f*) si una segunda carga se pone dentro de la superficie gaussiana?
8. En la ley de Gauss $\epsilon_0 \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q$, ¿es $\vec{\mathbf{E}}$ necesariamente el campo eléctrico atribuible a la carga q?
9. Una superficie encierra un dipolo eléctrico. ¿Qué puede decirse sobre Φ_E en esta superficie?
10. Suponga que una superficie gaussiana no encierra carga neta alguna. ¿Exige la ley de Gauss que $\vec{\mathbf{E}}$ sea cero en todos los puntos de la superficie? ¿Es verdad la afirmación contraria? Es decir, si $\vec{\mathbf{E}}$ es cero en todas las partes de la superficie, ¿requiere la ley de Gauss que no haya carga neta en el interior?
11. ¿Es útil la ley de Gauss para calcular el campo originado por tres cargas situadas en los ángulos de un triángulo equilátero? Explique su respuesta afirmativa o negativa.
12. Una carga total Q está distribuida uniformemente en un cubo con una longitud de lado a. ¿Está dado por $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ el campo eléctrico resultante en un punto externo P, a una distancia r del centro C del cubo? (Fig. 27-22). De no ser así, ¿puede E obtenerse construyendo una superficie cúbica concéntrica gaussiana? En caso contrario, explique por qué no. ¿Puede decir algo acerca de E si $r \gg a$?

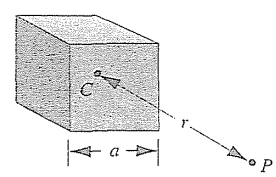


FIGURA 27-22 Pregunta 12.

13. ¿Es $\vec{\mathbf{E}}$ necesariamente cero dentro de un globo de goma con carga eléctrica, si es *a*) esférico o *b*) tiene forma de salchicha? En cada forma suponga que la carga se distribuye uniformemente sobre la superficie. ¿Cómo cambiaría la situación si es que cambia, en caso de que el globo tuviera una capa delgada de pintura conductora en su superficie externa?
14. Un globo esférico de goma tiene una carga que se distribuye uniformemente en su superficie. A medida que se infla el globo ¿cómo varía E en los puntos *a*) dentro del globo, *b*) en su superficie y *c*) fuera de él?

15. En la sección 27-4 hemos visto que la ley de Coulomb puede obtenerse de la de Gauss. ¿Significa eso necesariamente que ésta puede deducirse de aquélla?
16. ¿Se aplicará la ley de Gauss si el exponente de la de Coulomb no es exactamente 2?
17. Un gran conductor aislado y hueco tiene una carga positiva. Una pequeña bola metálica que lleva una carga negativa de la misma magnitud es bajada por un hilo a través de un orificio pequeño en la parte superior del conductor; se le permite tocar la superficie interna y luego se lo retira. ¿Cuál será entonces la carga en *a*) el conductor y en *b*) la bola?
18. ¿Podemos deducir del argumento de la sección 27-6 que los electrones de los alambres de la instalación eléctrica de una casa se desplazan por las superficies de ellos? Si su respuesta es negativa, explíquela.
19. En la sección 27-6 supusimos que $\vec{E}$ es cero en todo el interior de un conductor aislado. Pero hay campos eléctricos muy grandes dentro del conductor en puntos cercanos a los electrones o a los núcleos. ¿Invalidó eso la prueba de la sección 27-4? Explique su respuesta.
20. ¿Requiere la ley de Gauss, tal como se aplicó en la sección 27-6, que todos los electrones de conducción en un conductor aislado estén en la superficie?
21. Una carga positiva q se halla en el centro de una esfera metálica hueca. ¿Qué carga aparecé en *a*) su superficie interna y *b*) en su superficie externa? *c*) Si acercamos a ella un objeto metálico (sin carga), ¿cambiará esto sus respuestas a *a*) y *b*)? ¿Modificará la forma en que la carga se distribuye en la esfera?
22. Si una carga $-q$ se distribuye uniformemente en la superficie de un delgado cascarón metálico esférico aislado de radio a, no habrá campo eléctrico en su interior. Si ahora ponemos una carga puntual $+q$ en el centro de él tampoco habrá campo externo. Podemos desplazar esta carga una distancia $d < a$ del centro, pero entonces el sistema adquiere un momento dipolar y crea un campo externo. ¿Cómo explica la energía que aparece en este campo?
23. ¿Cómo se elimina por completo el exceso de carga en un pequeño cuerpo conductor?
24. Explique por qué la simetría esférica de la figura 27-7 nos obliga a suponer que $\vec{E}$ sólo tiene un componente radial en cualquier punto. (Sugerencia: imagine otros componentes, quizá a lo largo del equivalente de las líneas de longitud o latitud en la superficie terrestre. La simetría esférica exige que las líneas ofrezcan el mismo aspecto desde cualquier perspectiva. ¿Puede inventar algunas simetrías que cumplan con este criterio?
25. Explique por qué la simetría de la figura 27-8 nos obliga a suponer que $\vec{E}$ tiene sólo un componente radial en cualquier punto. Recuerde que en este caso el campo no sólo ha de presentar el mismo aspecto, sino que debe presentarlo aunque la figura se gire de un extremo a otro.
26. La carga total en una varilla cargada infinita es infinita. ¿Por qué no lo es también E? Después de todo, según la ley de Coulomb si q es infinita, también lo es E.
27. Explique por qué la simetría de la figura 27-9 nos obliga a considerar que $\vec{E}$ tiene un solo componente que se aleja de la hoja. ¿Por qué, por ejemplo, podría $\vec{E}$ no tener un componente paralelo a la hoja? Recuerde que en este caso el campo no sólo ha de parecer el mismo desde cualquier punto de la hoja en cualquier dirección, sino que también debe parecerlo si la giramos alrededor de una línea perpendicular a ella.
28. El campo debido a una hoja infinita de carga es uniforme: tiene la misma fuerza en todos los puntos sin que importe su distancia de la carga superficial. Explique por qué es así, dado que la ley de Coulomb sigue la ley de cuadrados inversos.
29. Al penetrar nosotros una esfera uniforme de carga, E debería disminuir porque hay menos carga dentro de una esfera dibujada a través del punto de observación. En cambio, E podría aumentar porque estamos más cerca de la carga. ¿Qué efecto predomina y por qué?
30. Dada una distribución de carga esféricamente simétrica (no de densidad radial uniforme), ¿alcanza E necesariamente un máximo en la superficie? Comente las posibilidades?
31. ¿Es válida la ecuación 27-15 en la figura 27-11*a*, si *a*) hay una cavidad esférica concéntrica en el cuerpo, *b*) una carga puntual Q está en el centro de la cavidad y *c*) la carga Q se halla en su interior pero no en su centro?

EJERCICIOS

27-1 ¿A qué se refiere la ley de Gauss?

27-2 El flujo de un campo vectorial

27-3 El flujo de un campo eléctrico

1. La superficie cuadrada de la figura 27-3 mide 3.2 mm por lado. Está inmersa en un campo eléctrico uniforme con $E = 1800$ N/C. Las líneas del campo forman un ángulo de 65° con la normal "que apunta hacia afuera", como se muestra en la figura. Calcule el flujo que atraviesa la superficie.

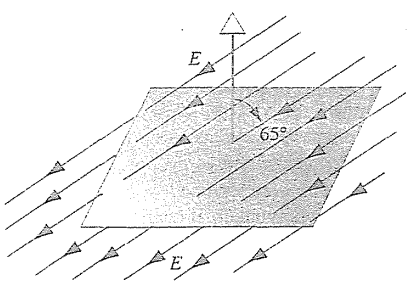


FIGURA 27-23. Ejercicio 1.

2. Un cubo con bordes de 1.4 m presenta la orientación que se indica en la figura 27-4, dentro de una región de un campo eléctrico uniforme. Calcule el flujo eléctrico que pasa por la cara derecha si el campo eléctrico está dado por *a*) $(6\ \text{N/C})\hat{\mathbf{i}}$, *b*) $(-2\ \text{N/C})\hat{\mathbf{j}}$ y *c*) $(-3\ \text{N/C})\hat{\mathbf{i}} + (4\ \text{N/})\hat{\mathbf{k}}$. *d*) Calcule el flujo total a través del cubo para esos campos.

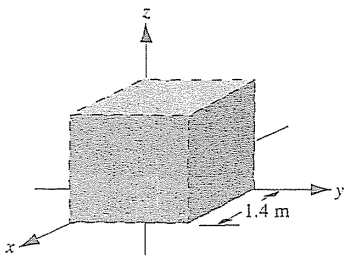


FIGURA 27-24. Ejercicio 2.

3. Calcule Φ_E en *a*) la base plana y en *b*) la superficie curva de un hemisferio de radio *R*. El campo $\vec{\mathbf{E}}$ es uniforme y paralelo al eje del hemisferio; las líneas de $\vec{\mathbf{E}}$ entran por la base plana. (Utilice la normal que apunta hacia afuera.)

27-4 Ley de Gauss

4. Separamos la carga de un conductor aislado originalmente sin carga sosteniendo muy cerca una varilla de carga positiva, como se indica en la figura 27-25. Calcule el flujo que pasa por las cinco superficies gaussianas mostradas. Suponga que la carga negativa inducida en el conductor es igual a la carga positiva q de la varilla.

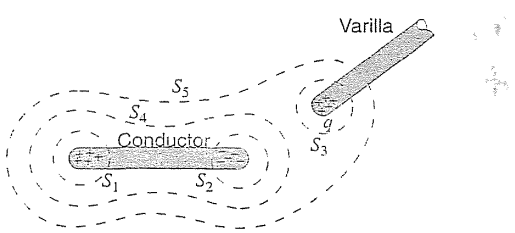


FIGURA 27-25. Ejercicio 4.

5. Una carga puntual de 1.84 μC está en el centro de una superficie cúbica gaussiana, a 55 cm de un lado. Calcule Φ_E a través de la superficie.
6. El flujo eléctrico neto que atraviesa las caras de un dado (un miembro de un par de dados) tiene una magnitud en unidades de $10^3\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ igual al número N de puntos de la cara (1 a 6). El flujo se realiza hacia adentro con número N impares y hacia afuera con los números N pares. ¿Cuál es la carga neta dentro del dado?
7. Una carga puntual + q se halla a una distancia $d/2$ de la superficie cuadrada de lado d y está arriba del centro del cuadrado como se indica en la figura 27-26. Determine el flujo eléctrico que atraviesa el cuadrado. (Sugerencia: imagine el cuadrado como la cara de un cubo con lado d.)

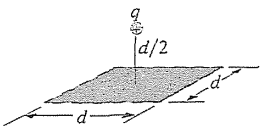


FIGURA 27-26. Ejercicio 7.

8. Una red para cazar mariposas se encuentra en un campo eléctrico uniforme como se ve en la figura 27-27. El borde, un círculo de radio a, está alineado de manera perpendicular al campo. Determine el campo eléctrico que cruza la red en relación con la normal hacia afuera.

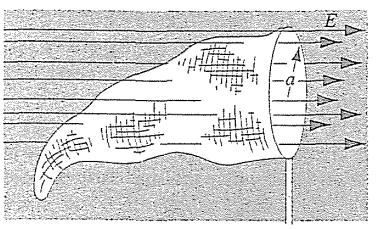


FIGURA 27-27. Ejercicio 8.

9. Con experimentos se descubre que el campo eléctrico en cierta región de la atmósfera terrestre se dirige verticalmente hacia abajo. En una altitud de 300 m el campo es de 58 N/C y a una altitud de 200 m es de 110 N/C. Calcule la magnitud neta de la carga contenida en un cubo de 100 m de lado que se encuentra a una altitud entre 200 y 300 m. No tenga en cuenta la curvatura de la Tierra.
10. Determine el flujo neto que atraviesa el cubo del ejercicio 2 y la figura 27-14 si el campo eléctrico está dado por *a*) $\vec{\mathbf{E}} = (3\ \text{N/C} \cdot \text{m})y\hat{\mathbf{j}}$ y *b*) $(-4\ \text{N/C})\hat{\mathbf{i}} + [6\ \text{N/C} + (3\ \text{N/C} \cdot \text{m})y]\hat{\mathbf{j}}$. *c*) En cada caso, ¿cuánta carga contiene el cubo?
11. Una carga puntual q se coloca en un ángulo de un cubo de lado a. ¿Cuál es el flujo que pasa por las caras del cubo?) (Sugerencia: aplique la ley de Gauss y los argumentos de simetría.)

27-5 Aplicaciones de la ley de Gauss

12. Una línea infinita de carga produce un campo de 4.52×10^4 N/C a una distancia de 1.96 m. Calcule la densidad de carga lineal.
13. *a*) El tambor de una fotocopiadora en el problema resuelto 27-4 tiene una longitud de 42 cm y un diámetro de 12 cm. ¿Cuál es su carga total? *b*) El fabricante desea producir una versión de escritorio de la máquina. Para ello hay que reducir el tamaño del tambor a una longitud de 28 cm y un diámetro de 8.0 cm. El campo eléctrico en la superficie del tambor debe permanecer inalterado. ¿Qué carga debe contener el nuevo tambor?
14. Dos hojas no conductoras grandes y delgadas de carga positiva están una frente a otra como se aprecia en la figura 27-28. ¿Qué magnitud tiene $\vec{\mathbf{E}}$ en los puntos *a*) a la izquierda de las hojas, *b*) entre ellas y *c*) a la derecha de las hojas? Suponga la misma densidad de carga superficial σ en las hojas. Considere sólo los puntos no cercanos a los bordes cuya distancia de ellas es pe-

queña comparada con las dimensiones de las hojas. (Sugerencia: consulte el Prob. res. 27-3.)

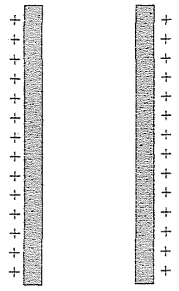


FIGURA 27-28. Ejercicio 14.

15. Dos grandes placas metálicas se encuentran una frente a otra como en la figura 27-29 y transportan en su superficie interna cargas con una densidad de carga superficial $+\sigma$ y $-\sigma$, respectivamente. Calcule E en los puntos *a*) a la izquierda de las placas, *b*) entre ellas y *c*) a la derecha de ellas. Considere sólo los puntos no cercanos a los bordes cuya distancia de las placas es pequeña comparada con las dimensiones de ellas. (Sugerencia: consulte el problema 27-3.)

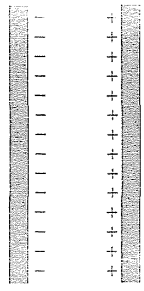


FIGURA 27-29. Ejercicio 15.

16. Un electrón permanece estacionario en un campo eléctrico dirigido hacia abajo en el campo gravitacional de la Tierra. Si el campo se debe a la carga en dos grandes placas conductoras paralelas, con carga opuesta y separadas por una distancia de 2.3 cm, ¿cuál es la densidad de carga superficial, supuestamente uniforme, en las placas?
17. Un alambre recto, delgado y muy largo transporta -3.60 nC/m de carga negativa fija. Debe quedar rodeado por un cilindro uniforme de carga positiva, de radio 1.50 cm y coaxial con el alambre. La densidad de carga volumétrica ρ del cilindro debe escogerse de modo que el campo eléctrico neto fuera de él sea cero. Calcule la densidad de carga positiva que se requiere ρ.
18. En la figura 27-30 se muestra una carga puntual $q = 126$ nC en el centro de una cavidad esférica de radio 3.66 cm en un trozo de metal. Con la ley de Gauss determine el campo eléctrico *a*) en el punto P_1, a la mitad de distancia del centro de la superficie y *b*) en el punto P_2.

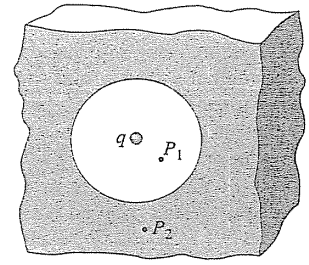


FIGURA 27-30. Ejercicio 18.

19. Un protón gira con una velocidad $v = 294$ km/s fuera de una esfera cargada de radio $r = 1.13$ cm. Determine la carga de la esfera.
20. Dos cascarones esféricos y concéntricos con carga eléctrica tienen un radio de 10.0 y de 15.0 cm. La carga en el cascarón interno es de 40.6 nC y la del cascarón externo es de 19.3 nC. Calcule el campo eléctrico *a*) en $r = 12.0$ cm, *b*) en $r = 22.0$ cm y *c*) en $r = 8.18$ cm del centro de los cascarones.
21. Dos grandes cilindros esféricos concéntricos cargados tienen un radio de 3.22 y de 6.18 cm. La densidad de carga superficial en el cilindro interno es de 24.1 μC/m^2 y la del cilindro externo es de -18.0 μC/m^2. Determine el campo eléctrico en *a*) $r = 4.10$ cm y *b*) $r = 8.20$ cm.
22. Una carga positiva se distribuye uniformemente a través de un cascarón cilíndrico largo no conductor de radio interno R y de radio externo $2R$. ¿A qué profundidad radial debajo de la superficie externa de la distribución de carga será la fuerza del campo eléctrico la mitad del valor superficial?
23. Un electrón de 115 keV se dispara hacia una gran hoja plana de plástico cuya densidad de carga superficial es de -2.08 μC/m^2. ¿De qué distancia debemos dispararlo, para que no golpee la hoja? (Prescinda de los efectos relativistas.)
24. Construya una superficie esférica gaussiana centrada en una línea infinita de carga, calcule el flujo en la esfera y pruebe con ello que se cumple la ley de Gauss.
25. Una carga se distribuye uniformemente a través de un cilindro infinitamente largo de radio R. *a*) Demuestre que E a una distancia r del eje del cilindro ($r < R$) está dado por

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0},$$

donde ρ es la densidad de carga volumétrica. *b*) ¿Qué resultados obtiene usted con $r > R$?

27-6 Ley de Gauss y los conductores

26. Una esfera conductora cargada uniformemente de 1.22 m de radio tiene una densidad de carga superficial de 8.13 μC/m^2. *a*) Calcule su carga. *b*) ¿Cuál es el flujo eléctrico total que sale de su superficie? *c*) Calcule el campo eléctrico en la superficie de la esfera.
27. Unos vehículos espaciales que viajan por los cinturones de radiación terrestre chocan con los electrones atrapados. Puesto

que en el espacio no hay tierra, la acumulación resultante de la carga puede ser considerable y dañar los componentes electrónicos, ocasionando perturbaciones en los circuitos de control y anomalías en la operación. Un satélite esférico metálico de 1.3 m de diámetro acumula 2.4 μC de carga en una revolución orbital. *a*) Calcule la densidad de carga superficial. *b*) Calcule el campo eléctrico resultante afuera de la superficie del satélite.

28. La ecuación 27-18 ($E = \sigma/\epsilon_0$) nos da el campo eléctrico en puntos cercanos a una superficie conductora cargada. Aplíquela a una esfera conductora de radio r que tiene una carga q en su superficie; demuestre después que el campo eléctrico fuera de ella es el mismo que el de una carga puntual en el centro de la esfera.

29. Una placa metálica de 8.0 cm de lado tiene una carga total de 6.0 μC. *a*) Usando la aproximación de placa infinita, calcule el campo eléctrico situado 0.50 mm arriba de la superficie de la placa cerca de su centro. *b*) Estime el campo a una distancia de 30 m.

27-7 Pruebas experimentales de la ley de Gauss y de la de Coulomb

PROBLEMAS

1. La ley de Gauss para la gravitación es

$$\frac{1}{4\pi G}\Phi_g = \frac{1}{4\pi G}\oint \vec{\mathbf{g}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} = -m,$$

donde m es la masa encerrada y G es la constante de gravitación universal. Obtenga de la ecuación anterior la ley de gravitación de Newton. ¿Qué importancia tiene el signo negativo?

2. Los componentes del campo eléctrico, en la figura 27-31, son $E_y = by^{1/2}$, $E_x = E_z = 0$, donde $b = 8830\ \text{N/C}\cdot\text{m}^{1/2}$. Calcule *a*) el flujo Φ_E a través del cubo y *b*) la carga dentro de él. Suponga que $a = 13.0$ cm.

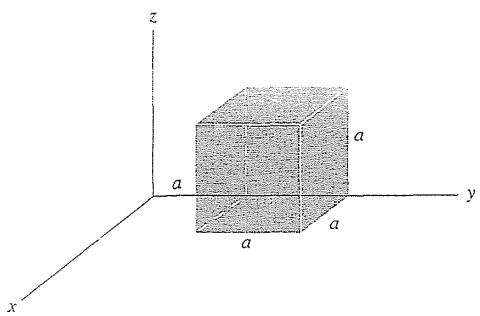


FIGURA 27-31. Problema 2.

3. Una esfera pequeña, cuya masa m es de 1.12 mg, tiene una carga $q = 19.7$ nC. En el campo gravitacional de la Tierra pende de un hilo de seda que forma un ángulo $\theta = 27.4°$ con una gran hoja no conductora uniformemente cargada, como se observa en la figura 27-32. Calcule la densidad uniforme de carga σ.

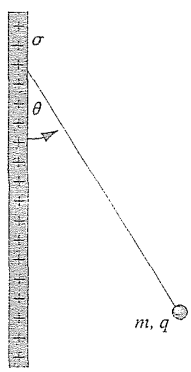


FIGURA 27-32. Problema 3.

4. La figura 27-33 muestra una carga + q formando en una esfera conductora uniforme de radio a y colocada en el centro de un cascarón conductor esférico de radio interno b y de radio externo c. El cascarón externo tiene una carga de − q. Determine $E(r)$ en los sitios *a*) dentro de la esfera ($r < a$), *b*) entre la esfera y el cascarón ($a < r < b$), *c*) dentro del cascarón ($b < r < c$) y *d*) fuera del cascarón ($r > c$). *e*) ¿Qué cargas aparecen en las superficies interna y externa del cascarón?

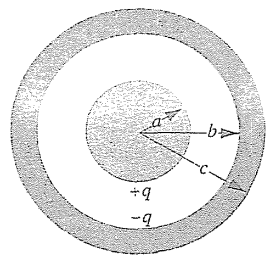


FIGURA 27-33. Problema 4.

5. Un cilindro conductor muy grande (longitud L) que tiene una carga total + q está rodeado por un cascarón cilíndrico conductor (también de longitud L), con una carga total − $2q$, como se muestra en la sección transversal de la figura 27-34. Use la ley de Gauss para determinar *a*) el campo eléctrico en los puntos fuera del cascarón conductor, *b*) la distribución de carga en él y *c*) el campo eléctrico en la región situada entre los cilindros.

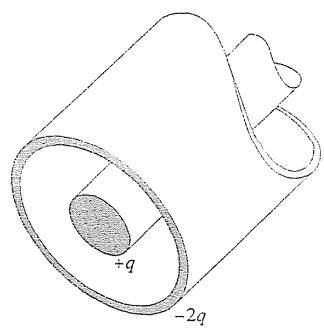


FIGURA 27-34. Problema 5.

6. Una gran superficie conductora plana tiene una densidad de carga uniforme σ. Un pequeño hoyo circular de radio R se cortó en la mitad de la hoja, como se aprecia en la figura 27-35. No tenga en cuenta la fragmentación de las líneas de campo alrededor de todos los bordes y calcule el campo eléctrico en el punto P, a una distancia z del centro del orificio en el eje. (Sugerencia: consulte la Ec. 26-19 y aplique el principio de superposición.)

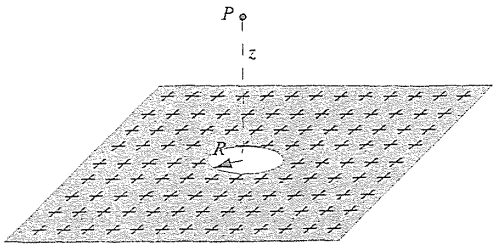


FIGURA 27-35. Problema 6.

7. La figura 27-36 muestra una sección a través de un tubo metálico largo de paredes delgadas y de radio R, el cual tiene una carga por unidad de longitud λ en su superficie. Obtenga la expresión de E para varias distancias r respecto al eje del tubo, considerando tanto *a*) $r > R$ como *b*) $r <$ R. *c*) Grafique sus resultados en el intervalo de $r = 0$ a $r = 5.0$ cm. Suponiendo que $\lambda = 2.0 \times 10^{-8}$ C/m y $R = 3.0$ cm. (Sugerencia: utilice superficies gaussianas, coaxiales con el tubo metálico.)

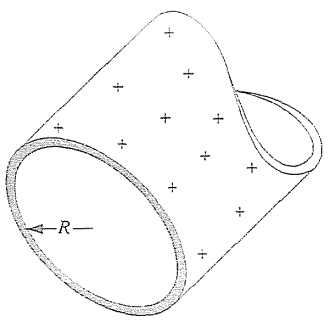


FIGURA 27-36. Problema 7.

8. La figura 27-37 muestra una sección a través de dos largos cilindros concéntricos delgados de radios a y b. Transportan cargas iguales y opuestas por unidad de longitud λ. Por medio de la ley de Gauss pruebe que *a*) $E = 0$ cuando $r < a$ y que *b*) entre los cilindros E está dada por

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}.$$

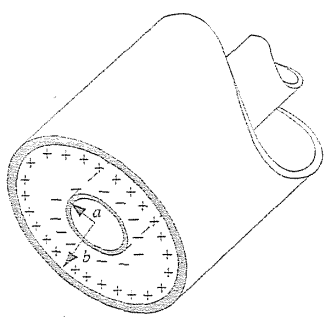


FIGURA 27-37. Problema 8.

9. En la geometría del problema 8 un positrón gira en una trayectoria circular entre los cilindros y concéntrica con ellos. Determine su energía cinética en electron-volts. Suponga que $\lambda = 30$ nC/m. (¿Por qué no necesita conocer el radio de los cilindros?)
10. La figura 27-38 muestra un contador Geiger, que sirve para detectar la radiación por ionización. El contador consta de un delgado alambre central, que tiene una carga positiva; está rodeado por un cilindro circular concéntrico que lleva una carga negativa igual. Por tanto, se crea un fuerte campo eléctrico radial dentro del cilindro. Éste contiene un gas inerte de baja presión. Cuando una partícula de radiación entra en el tubo por las paredes del cilindro, ioniza unos cuantos átomos del gas. Los electrones libres resultantes son atraídos al alambre positivo. Sin embargo, el campo eléctrico es tan intenso que entre las colisiones con los átomos de gas, los electrones obtuvieron suficiente energía para ionizar también estos átomos. Por tanto se crean más electrones libres y el proceso se repite hasta que llegan al alambre. El alambre recoge la "avalancha" de electrones generando una señal que registra el paso de la partícula incidente de radiación. Supóngase que el radio del alambre central mide 25 μm, que el radio del cilindro mide 1.4 cm y el tubo tiene una longitud de 16 cm. El campo eléctrico en la pared del cilindro es de 2.9×10^4 N/C. Calcule la carga positiva en el alambre central. (Sugerencia: consulte el Prob. 8.)

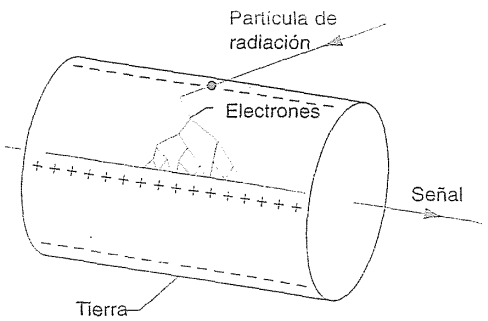


FIGURA 27-38. Problema 10.

11. Un cascarón esférico delgado metálico sin carga tiene una carga puntual q en su centro. Por medio de la ley de Gauss, obtenga las expresiones del campo eléctrico *a*) dentro del cascarón y *b*) fuera de él. *c*) ¿Tiene el cascarón algún efecto en el campo debido a q? *d*) ¿Produce la presencia de q algún efecto en el cascarón? *e*) Si mantenemos una segunda carga puntual fuera del cascarón, ¿experimenta una fuerza? *f*) ¿Experimenta una fuerza la carga interna? *g*) Contradice esto a la tercera ley de Newton? Explique su respuesta afirmativa o negativa.
12. En el espacio interestelar unas partículas de polvo cargadas, que transportan un electrón en exceso y que tienen la misma masa, forman una nube esférica estable y uniforme. Calcule la masa de cada una.
13. La región esférica $a < r < b$ tiene una carga por unidad de volumen de $\rho = A/r$, donde A es una constante. En el centro ($r = 0$) de la cavidad encerrada hay carga puntual q. ¿Cuál debería ser

el valor de A para que el campo eléctrico en la región $a < r < b$ tenga una magnitud constante?

14. Una región esférica tiene una carga uniforme por unidad de volumen ρ. Sea $\vec{r}$ el vector que del centro de la esfera se dirige a un punto general P dentro de ella. *a*) Demuestre que el campo eléctrico en P está dado por $\vec{E} = \rho\vec{r}/3\epsilon_0$. *b*) Una cavidad esférica se crea en ella, como se aprecia en la figura 27-39. Mediante el concepto de superposición demuestre que en todos los puntos de la cavidad el campo eléctrico es $\vec{E} = \rho\vec{a}/3\epsilon_0$ (campo uniforme), donde $\vec{a}$ es el vector que conecta el centro de la esfera al de la cavidad. Nótese que ambos resultados no dependen del radio de la esfera ni del de la cavidad.

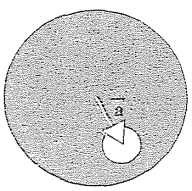


FIGURA 27-39. Problema 14.

15. Demuestre que el equilibrio estable bajo la acción exclusiva de las fuerzas electrostáticas es imposible. (Sugerencia: suponga que en cierto punto P del campo eléctrico $\vec{E}$, una carga $+ q$ presentaría equilibrio estable si la colocásemos allí. Dibuje una superficie esférica gaussiana alrededor del punto P, imagine cómo debe ser $\vec{E}$ en esta superficie y aplique la ley de Gauss para demostrar que la suposición da origen a una contradicción.) A este resultado se le conoce como teorema de Earnshaw.

16. Una losa plana de espesor d tiene una densidad uniforme de carga volumétrica ρ. Calcule la magnitud del campo eléctrico en todos los puntos del espacio tanto *a*) dentro de la losa como *b*) fuera de ella, en términos de x, la distancia medida desde el plano medio de la losa.

17. Una esfera conductora sólida de radio R tiene una distribución de carga uniforme, con una densidad $\rho = \rho_S r/R$ donde ρ_S es una constante, y r la distancia del centro de la esfera. Demuestre que *a*) la carga total en la esfera es $Q = \pi\rho_S R^3$ y *b*) el campo eléctrico dentro de la esfera está dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^4}r^2.$$

18. Un conductor aislado de forma arbitraria tiene una carga neta de $+ 10\ \mu$C. En su interior hay una cavidad hueca donde se halla una carga puntual $q = + 3.0\ \mu$C. ¿Qué carga existe en la pared de la cavidad y *b*) en la superficie externa del conductor?

19. Una esfera conductora que lleva una carga Q está rodeada por un cascarón esférico conductor. *a*) ¿Cuál es la carga neta en la superficie interna del cascarón? *b*) Se coloca otra carga q fuera del cascarón. ¿Cuál es ahora la carga neta en su superficie interna? *c*) Si devolvemos q a su posición entre el cascarón y la esfera, ¿cuál será la carga neta en la superficie interna del cascarón? *d*) ¿Son sus respuestas válidas si la esfera y el cascarón no son concéntricos?

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Verifique la ley de Gauss con un cálculo numérico. Una carga puntual $q = 1$ nC se halla a 0.5 m fuera de la superficie de una esfera de radio $r = 1.0$ m. Calcule el flujo eléctrico que pasa por ella.

2. Verifique la ley de Gauss con un cálculo numérico. Una carga puntual $q = 1$ nC se encuentra en la mitad entre el centro y la superficie de una esfera de radio $r = 1.0$ m. Calcule el flujo eléctrico a través de ella.

3. Una carga puntual de $q = 1.0\ \mu$C está en el eje de una superficie cilíndrica de radio $r = 0.5$ m y de longitud $L = 3.0$ m. La carga puntual está a 1.0 m de un extremo y a 2.0 m del otro. *a*) Obtenga con cálculo numérico el flujo eléctrico que atraviesa la parte curva del cilindro. *b*) Verifique analíticamente su respuesta. (Nota: no se requiere integración en este caso.)

CAPÍTULO 28

LA ENERGÍA ELÉCTRICA Y EL POTENCIAL ELÉCTRICO

En los capítulos 11 a 13 vimos que los métodos basados en los conceptos de energía ofrecen nuevas ideas para entender la mecánica y a menudo permiten simplificar la solución de problemas en esa área. En el capítulo 14 utilizamos los métodos que se basan en la energía potencial en situaciones relativas a la fuerza gravitacional, con el fin de determinar propiedades como el movimiento de satélites y planetas.

En este capítulo abordamos el método de energía para estudiar la electrostática. Comenzamos con la energía potencial eléctrica, que, según veremos, puede caracterizar una fuerza electrostática del mismo modo que la energía gravitacional potencial puede caracterizar la fuerza gravitacional. Después definimos en forma general el concepto de potencial eléctrico y explicamos cómo calcularlo en varias distribuciones de carga discreta y continua.

28-1 ENERGÍA POTENCIAL

Muchos fenómenos eléctricos se relacionan con la transferencia de grandes cantidades de energía. Por ejemplo, cuando un relámpago proveniente de una nube choca contra la Tierra, se libera una energía de 10^8 J en forma de luz, sonido, calor y onda de choque. ¿De dónde procede esta energía y cómo se almacena en las nubes? Para entender esta pregunta hay que considerar la energía relacionada con las fuerzas eléctricas.

La ley de la fuerza electrostática se parece mucho a la de la fuerza gravitacional:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \qquad \text{electrostática,} \qquad (28\text{-}1a)$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{gravitacional,} \qquad (28\text{-}1b)$$

Ambas fuerzas dependen del cuadrado inverso de la distancia que separa los dos objetos. Cuando un objeto se desplaza de un lugar a otro bajo la fuerza gravitacional de otro objeto (que suponemos que permanece en reposo), el trabajo realizado por la fuerza gravitacional en el primero dependerá sólo de los puntos inicial y final, no de la trayectoria seguida entre ellos. En la sección 12-1 describimos una fuerza que tiene esta propiedad especial como una *fuerza de conservación*, y en la sección 12-2 concluimos que a partir de esta fuerza podríamos determinar la *energía potencial*. La diferencia de la energía potencial ΔU del sistema al pasar el objeto de su posición inicial a la final será igual al negativo del trabajo que ejecute la fuerza:

$$\Delta U = U_f - U_i = -W_{if} = -\int_i^f \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}, \qquad (28\text{-}2)$$

donde W_{if} es el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ cuando el objeto se mueve de i a f. En el caso de la fuerza gravitacional, en la sección 14-16 demostramos que, cuando un objeto con masa m_2 se desplaza desde una posición r_i respecto de la masa m_1 hasta una posición r_f de m_1, la diferencia de energía potencial es

$$\Delta U = -Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right). \qquad (28\text{-}3)$$

Esta diferencia de energía potencial se relaciona con el sistema entero constituido por m_1 y m_2, no con ninguno de los objetos solos.

Dada la semejanza entre las leyes de fuerza electrostática y gravitacional, podemos llegar a la misma conclusión respecto a la fuerza electrostática que respecto a la gravitacional: *la fuerza electrostática es conservativa y, por tanto, una energía potencial se relaciona con la configuración (la posición rela-*

tiva de los objetos) de un sistema donde operan fuerzas electrostáticas.

¿Por qué este método es útil con las fuerzas electrostáticas? En mecánica aprendimos que existen dos formas de analizar un problema. Una se basa en la fuerza (un vector) y nos permite determinar la posición y la velocidad de un objeto en cualquier punto de su movimiento. La otra se basa en la energía (un escalar) y nos permite determinar cómo cambia un sistema al pasar de cierto estado inicial a cierto estado final. En forma similar descubriremos que los dos procedimientos son útiles al estudiar las interacciones entre objetos cargados.

Existe una propiedad importante que diferencia la fuerza electrostática de la gravitacional: ésta siempre es de atracción, en tanto que aquélla puede ser de atracción o de repulsión (según los signos relativos del cambio). Tal diferencia influye en el signo de la energía potencial, pero de ninguna manera modifica nuestro argumento basado en la semejanza de ambas fuerzas.

28-2 ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

En la presente sección vamos a servirnos de la fuerza electrostática explicada en el capítulo 25 para obtener la energía generada por la interacción entre dos cargas eléctricas; vamos asimismo a ampliar el cálculo para incluir el caso de una colección de más de dos cargas.

Si aceptamos la conclusión de la sección anterior de que la fuerza electrostática es conservativa, podremos calcular el cambio de energía potencial cuando una carga q_2 pasa del punto a al punto b, sometida a la fuerza proveniente de otra carga q_1 en reposo. Supongamos, por ahora, que ambas cargas son positivas. En la figura 28-1 se muestra la geometría del proceso. Hemos simplificado un poco el problema, suponiendo que el movimiento de a a b se realiza en la línea que conecta q_1 y q_2. (Más adelante generalizaremos a otras clases de desplazamiento.) Suponemos que el origen está en la posición de q_1 y con r representamos la posición de q_2 en relación con este origen. En la ecuación 28-2, el vector $d\vec{s}$ representa un desplazamiento infinitesimal en dirección del movimiento de a a b. La fuerza $\vec{F}$ y el desplazamiento $d\vec{s}$ siempre son paralelos en este movimiento, así que $\vec{F} \cdot d\vec{s} = F\,ds$. En el movimiento indicado en la figura 28-1, $ds = dr$, porque el desplazamiento invariablemente sigue la dirección de r. Con estas sustituciones la ecuación 28-2 queda así

$$\Delta U = -\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_a^b F\,dr = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,dr. \tag{28-4}$$

Al realizar la integral obtenemos

$$\Delta U = U_b - U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right). \tag{28-5}$$

La ecuación 28-5 es válida sin importar si q_2 se acerca o se aleja de q_1. Cuando q_2 se dirige a q_1, entonces $r_b < r_a$ y $\Delta U > 0$, es decir, la energía potencial aumenta si las cargas se aproximan más entre sí. Cuando q_2 se aleja de q_1, entonces $r_b > r_a$ y $\Delta U < 0$, es decir, la energía potencial disminuye si las cargas se alejan más una de otra.

La ecuación 28-5 sigue siendo válida, sean positivos o negativos los signos de las cargas. Si ambas cargas son negativas, sin duda obtendremos el mismo resultado. Si tienen signo opuesto (una positivo y la otra negativo), la fuerza entre ellas será de atracción. Con el vector de fuerza en la figura 28-1 en dirección contraria, tenemos

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = -F\,ds = -F\,dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,dr, \tag{28-6}$$

donde el último paso se puede llevar a cabo porque $q_1 q_2 = -|q_1||q_2|$ cuando una de las cargas es negativa y la otra positiva. Esto da exactamente el mismo integrando como el de la ecuación 28-4, y así la integral da el mismo resultado.

Cuando las cargas tienen signo opuesto de modo que $q_1 q_2$ es negativo en la ecuación 28-5, $\Delta U < 0$ si las cargas se aproximan una a otra y si $\Delta U > 0$ cuando se alejan.

Supóngase que movemos q_2 en una dirección que *no* sigue la línea que conecta q_1 y q_2. En la figura 28-2 vemos que q_2 se desplaza de a a b en un arco de un círculo de radio r centrado en q_1. A lo largo de esta trayectoria $\vec{F}$ siempre es perpendicular a $d\vec{s}$, y así $\vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ en toda ella. La fuerza electrostática no opera en esta trayectoria, así que $\Delta U = 0$.

Para desplazar q_2 entre los puntos arbitrarios a y b como en la figura 28-3, podemos escoger varias trayectorias posi-

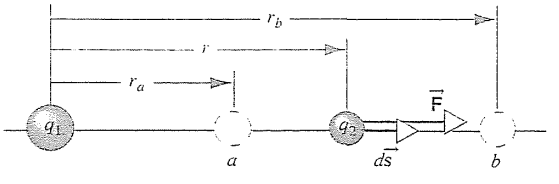


FIGURA 28-1. Una partícula cargada q_2 se desplaza de a a b bajo la acción de la fuerza electrostática $\vec{F}$ ejercida por q_1. Los puntos a y b se hallan en la línea que conecta q_1 y q_2.

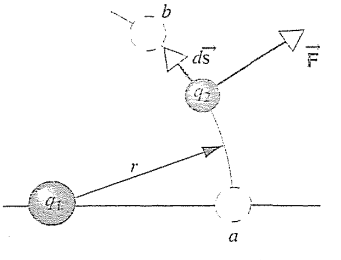


FIGURA 28-2. El movimiento de q_2 desde a a b es ahora a lo largo de la trayectoria de radio constante r

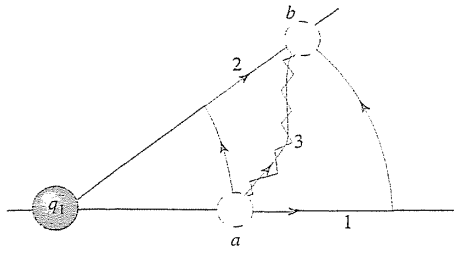


FIGURA 28-3. q_2 se mueve entre puntos arbitrarios a y b en varias trayectorias posibles.

bles. En las trayectorias 1 y 2, ΔU está dada por la ecuación 28-5 para las partes radiales (rectas) de ellas, y por $\Delta U = 0$ para sus partes tangenciales (curvas). La trayectoria arbitraria 3 puede dividirse en una serie de cortos pasos radiales y tangenciales. En cada paso tangencial $\Delta U = 0$, mientras que la ΔU total en los pasos radiales está dada por la ecuación 28-5. Concluimos que esta ecuación da ΔU con cualquier trayectoria entre el punto a, que está a una distancia r_a de q_1, y el punto b, que está a una distancia r_b de q_1, sin importar dónde se encuentren. Esto coincide con la afirmación de que la fuerza electrostática es conservativa, lo cual significa que el trabajo y, por lo mismo, el cambio de energía potencial al pasar de a a b, no dependen de la trayectoria.

Hasta ahora nos hemos ocupado de la *diferencia* de energía potencial entre dos puntos $\Delta U = U_b - U_a$. Podemos ampliar la exposición para definir la energía potencial en un solo punto b, con sólo seleccionar un punto de referencia a de la energía potencial y asignarle un valor de referencia a la energía potencial U_a en ese punto. En ese punto a menudo conviene escoger un punto de referencia que corresponda a una separación infinita entre las cargas, y generalmente optamos por el valor de referencia $U_a = 0$. Después, representando con b cualquier punto donde la posición sea r, la ecuación 28-5 se convierte en

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}. \qquad (28\text{-}7)$$

En esta expresión, U es positiva siempre que q_1 y q_2 tengan el mismo signo, correspondiente a una fuerza de repulsión, y U es negativa siempre que q_1 y q_2 tengan signo contrario, correspondiente a una fuerza de atracción. Si comparamos la ecuación 28-7 con la ecuación 14-17 para la energía gravitacional potencial, $U(r) = -Gm_1m_2/r$, nos daremos cuenta de que ésta invariablemente es negativa, porque la fuerza gravitacional siempre es de atracción. Esto concuerda con el valor negativo de la energía electrostática potencial cuando las cargas tienen signo contrario y la fuerza es de atracción.

Conservación de la energía en electrostática

En un sistema aislado de dos cargas se conserva la energía mecánica total $E = K + U$. Supongamos que sostenemos q_1 en una posición fija y que liberamos q_2 del reposo a cierta distancia de q_1. Si las dos cargas tienen el mismo signo, entonces $\Delta U < 0$ como q_2 es empujada de q_1 por la fuerza de repulsión. Esto es la conservación de la energía mecánica total exige que $\Delta K > 0$, por lo cual la rapidez de q_2 debe aumentar. En cambio, si impulsamos q_2 en dirección de q_1 con cierta energía cinética inicial, $\Delta U > 0$ al ir disminuyendo la separación; entonces la conservación de la energía requiere que $\Delta K < 0$ y, por lo mismo, disminuye la rapidez de q_2. Las conclusiones anteriores se invierten si las cargas tienen signo opuesto, de modo que la fuerza es de atracción.

He aquí otra forma de ver la conservación de energía en un sistema de dos cargas. Supongamos que las dos cargas tienen el mismo signo. Comenzamos con ellas en reposo y separadas por una gran distancia; después movemos q_2 y la ponemos en reposo a cierta distancia de q_1. Para realizar esto, el agente externo que desplaza a q_2 ha de ejercer una fuerza que se oponga a la repulsión electrostática entre q_1 y q_2. Al hacerlo, el agente realiza trabajo externo positivo sobre el sistema, de manera que aumenta la energía del sistema. El incremento de ésta es de ΔU a consecuencia del trabajo efectuado por el agente externo. Dicho de otra manera, ha guardado energía en el sistema de la misma forma cuando un agente externo comprime un resorte. Al liberar las cargas, recuperaremos la energía almacenada como energía cinética de las cargas en movimiento.

En cambio, si las cargas tienen signo opuesto y, por lo mismo, la fuerza electrostática es de atracción, el agente realiza trabajo externo negativo sobre el sistema para mover q_2 de una larga separación y colocarla en reposo en un lugar que presenta menor separación con q_1. Con este trabajo disminuye la energía almacenada en el sistema y, en consecuencia, no es recuperable. (Sin el agente externo q_2 aceleraría por su cuenta en dirección de q_1, el agente debe gastar energía al restringir a q_2 para ponerla en reposo en un lugar especificado.)

Si q_1 y q_2 tienen signos opuestos y están separados una distancia corta, el agente externo debe realizar trabajo positivo igual a ΔU a fin de separar las cargas una gran distancia. Cuando el concepto anterior se aplica a átomos y moléculas, esta energía puede llamarse *energía de enlace, energía de ionización* o *energía de disociación*. Esta magnitud representa la energía externa que hay que suministrar para, por ejemplo, extraer un electrón de un átomo o para dividir una molécula como KCl en iones K^+ y Cl^-.

PROBLEMA RESUELTO 28-1. Dos protones en el núcleo de un átomo ^{238}U están separados por una distancia de 6.0 fm. ¿Cuál es la energía potencial relacionada con la fuerza eléctrica que opera entre las dos partículas?

Solución A partir de la ecuación 28-5, con $q_1 = q_2 = +1.60 \times 10^{-19}$ C, obtenemos

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} = \frac{(8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{6.0 \times 10^{-15}\ \text{m}}$$

$$= 3.8 \times 10^{-14}\ \text{J} = 2.4 \times 10^5\ \text{eV} = 240\ \text{keV},$$

donde suponemos que $U = 0$ en la configuración donde los protones están muy separados. Los dos protones no se separan porque los mantiene juntos una *fuerza fuerte* de atracción que los une al núcleo.

A diferencia de la fuerza electrostática, no hay una función simple de energía potencial que represente la fuerza fuerte.

PROBLEMA RESUELTO 28-2. Dos objetos, uno con masa $m_1 = 0.0022$ kg y carga $q_1 = +32\ \mu$C y el otro con masa $m_2 = 0.0039$ kg y carga $q_2 = -18\ \mu$C, se hallan inicialmente separados por una distancia de 4.6 cm. Cuando mantenemos el objeto 1 en una posición fija, liberamos el otro del reposo. ¿Qué rapidez alcanza el objeto 2 cuando la separación entre ellos es 2.3 cm? Suponga que los objetos se comportan como cargas puntuales.

Solución A medida que las cargas se acercan entre sí y sólo opera la fuerza electrostática, la reducción de la energía potencial ha de ser equilibrada por un aumento correspondiente de la energía cinética. Supongamos que la condición inicial es el instante en que se libera al objeto 2 (con $K_i = 0$) y que la condición final es el instante en que su separación es de 2.3 cm. Entonces la conservación de la energía nos da $U_i + K_i = U_f + K_f$ o (con $K_i = 0$)

$$K_f = U_i - U_f = -\Delta U = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

$$= -(8.99 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(32 \times 10^{-6}\ \mu\text{C})$$

$$\times (-18 \times 10^{-6}\ \mu\text{C})\left(\frac{1}{0.023\ \text{m}} - \frac{1}{0.046\ \text{m}}\right)$$

$$= 113\ \text{J},$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2Kf}{m_2}} = \sqrt{\frac{2(113\ \text{J})}{0.0039\ \text{kg}}} = 240\ \text{m/s}.$$

En cambio, si sostenemos fijo el objeto 2 y liberamos el objeto 1, cuando la separación alcance 2.3 cm, la energía cinética tendrá el mismo valor de 113 J, por ser una propiedad del sistema entero. Si liberamos ambas partículas del reposo y permitimos que caigan juntas, hasta una separación de 2.3 cm, su energía cinética total será de 113 J. Podremos calcular la velocidad de cada una recurriendo a la conservación del momento.

La energía potencial de un sistema de cargas

Supóngase que tenemos tres cargas (q_1, q_2, q_3) separadas por una distancia infinita. En esta configuración $U = 0$. Queremos obtener la energía potencial de la configuración después de acercar las tres cargas entre sí.

Traemos del infinito la primera carga q_1 y la ponemos en reposo en el sitio que indica la figura 28-4*a*. Como esta carga no interactúa con ninguna otra en el proceso, la energía potencial no cambia; seguimos teniendo $U = 0$ en el sistema, pues sigue habiendo distancias infinitas entre las cargas. En seguida introducimos la carga q_2 y la fijamos a una distancia r_{12} de q_1 (Fig. 28-4*b*). La energía potencial de esta configuración de q_1 y q_2 (en relación con $U = 0$ en una separación infinita) es $q_1 q_2/4\ \pi\epsilon_0 r_{12}$. Por último, introducimos q_3 y la ponemos a una distancia r_{13} de q_1 y r_{23} de q_2 (Fig. 28-4*c*). Dado que q_3 interactúa con q_1 y q_2, la energía potencial de esta configuración final recibe dos contribuciones más: $q_1 q_3/4\ \pi\epsilon_0 r_{13}$ (interacción de q_1 y q_3) y $q_2 q_3/4\ \pi\epsilon_0 r_{23}$ (interacción de q_2 y q_3). La energía potencial eléctrica total de todo el sistema es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}} \quad (28\text{-}8)$$

Como se aprecia claramente en la ecuación 28-8, la energía potencial es una propiedad del sistema y no de una carga individual.

Podríamos continuar el proceso y reunir cualquier distribución arbitraria de cargas. La energía potencial total resultante de ese sistema no dependerá del orden en que juntemos las cargas.

En el ejemplo anterior se advierte la ventaja de utilizar el método de energía para analizar este sistema: la suma en la ecuación 28-8 es una suma *algebraica* de escalares. Si intentásemos calcular el campo eléctrico asociado con el grupo de tres cargas, tendríamos que evaluar una suma *vectorial* más complicada.

En este proceso está implícita la suposición de que el principio de superposición es válido. En páginas anteriores, al analizar sumas vectoriales, aplicamos este principio, según el cual la interacción de dos cargas no depende de la presencia de otras. Aquí vemos que un resultado similar se obtiene con términos escalares; por ejemplo, el término de la energía potencial que describe la interacción de q_1 y q_3 no está subordinado a la presencia de q_2.

Como señalamos con anterioridad, si el agente externo efectúa trabajo positivo al desplazar las cargas desde una separación infinita (oponiéndose a una fuerza de repulsión al hacerlo), la energía potencial total calculada mediante la ecuación 28-8 es positiva. El agente no influye en la energía almacenada en el sistema de cargas. Si se las libera de su posición, tenderán a apartarse una de otra y la energía potencial disminuirá al incrementarse la energía cinética. Cuando la energía potencial es negativa, el agente habrá realizado trabajo al conjuntar el sistema de cargas. En este caso, el agente ha de suministrar más energía por medio del trabajo para desmembrar el sistema de cargas y colocarlas en una separación infinita.

Esta concepción de la energía potencial puede sintetizarse en los siguientes términos:

La energía potencial eléctrica de un sistema de cargas puntuales fijas en reposo es igual al trabajo que debe ejecutar un agente externo para ensamblar el sistema, trayendo las cargas desde una distancia infinita donde se encuentran en reposo.

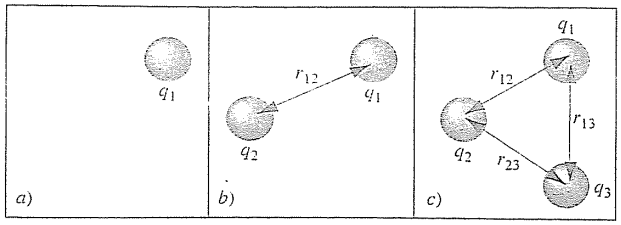


FIGURA 28-4. Se forma un sistema de tres cargas a partir de separaciones inicialmente infinitas.

En esta concepción está implícita la definición del punto de referencia de la energía potencial como la separación infinita de las cargas, donde suponemos que el valor de referencia de ella es cero.

PROBLEMA RESUELTO 28-3. En el sistema de la figura 28-4 suponga que $r_{12} = r_{13} = r_{23} = d = 12$ cm, y que

$$q_1 = +q, \quad q_2 = -4q \quad \text{y} \quad q_3 = +2q,$$

donde $q = 150$ nC. ¿Cuál es la energía potencial del sistema? Suponga que $U = 0$ cuando una distancia infinita separa las cargas.

Solución Con el uso de la ecuación 28-8 obtenemos

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d}\right)$$

$$= -\frac{10q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$= -\frac{(8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10)(150 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{0.12\ \text{m}}$$

$$= -1.7 \times 10^{-2}\ \text{J} = -17\ \text{mJ}.$$

La energía potencial negativa significa, en este caso, que un agente externo ha de efectuar trabajo negativo para realizar la estructura, comenzando con tres cargas separadas por una distancia infinita y en reposo. Dicho de otra manera, un agente tendrá que realizar + 17 mJ de trabajo para desmantelar la estructura por completo.

28-3 EL POTENCIAL ELÉCTRICO

Imagine una carga q fija en el origen de un sistema coordenado. Tomamos otra carga q_0, que denominamos "carga de prueba" y la pasamos de r_a a r_b bajo la influencia de la fuerza debida a q. El cambio de la energía potencial ΔU de este sistema de dos cargas está dado por la ecuación 28-5.

Si quisiéramos aplicar una carga de prueba dos veces más grande, obtendríamos el doble del cambio de la energía potencial; una carga de prueba tres veces mayor nos daría el triple del cambio de la energía potencial.

La variación de la energía potencial es directamente proporcional a la magnitud de la carga de prueba. Dicho con otras palabras, la magnitud $\Delta U/q_0$ no depende de la cantidad de la carga de prueba y caracteriza exclusivamente a la carga central q. Esta magnitud resulta ser de gran utilidad al analizar una extensa gama de problemas electrostáticos, inclusive los que contienen grupos más complicados de cargas. Definimos la *diferencia de potencial eléctrico*, ΔV, como *la diferencia de la energía potencial eléctrica por unidad de carga de prueba:*

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} \tag{28-9}$$

o bien

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0}. \tag{28-10}$$

A semejanza de la energía potencial, el potencial eléctrico es un escalar. Por lo regular nos referiremos a él simplemente como "potencial".

Con el uso de la relación entre trabajo y energía potencial dada en la ecuación 28-2, podemos escribir la definición de la diferencia de potencial así

$$\Delta V = -\frac{W_{ab}}{q_0}, \tag{28-11}$$

donde W_{ab} es el trabajo efectuado por la fuerza electrostática que q ejerce sobre q_0 cuando la carga de prueba pasa de a a b.

Definimos una elección apropiada del punto de referencia de la energía potencial (digamos $U_a = 0$) con una separación inicial infinita entre las cargas); de ese modo obtuvimos en la sección previa una expresión (Ec. 28-7) para la energía potencial de una configuración en particular y no el cambio de la energía potencial para el cambio de una configuración. Lo mismo podemos hacer en el caso del potencial eléctrico. Sólo sus diferencias tienen importancia física, por lo cual podemos escoger a discreción el punto cero y su valor de referencia. Cuando se supone que el potencial es cero en los puntos separados de q por una distancia infinita, el potencial eléctrico es

$$V = \frac{U}{q_0}. \tag{28-12}$$

En un complicado sistema de muchas cargas, el potencial V puede ser positivo, negativo o cero. El potencial que se halla en un punto cercano a una carga positiva aislada es también positivo. Si quisiéramos pasar una carga positiva de prueba del infinito a ese punto, se desplazaría de un lugar donde $V = 0$ a otro donde $V > 0$. Por tanto, $\Delta V > 0$ y (conforme a la Ec. 28-9) $\Delta V > 0$, lo cual indica que la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga de prueba efectuó trabajo negativo. De modo parecido, el potencial en un punto cercano a una carga negativa aislada es negativo; la fuerza eléctrica efectúa trabajo positivo cuando trasladamos una carga positiva de prueba desde el infinito hasta ese punto.

Si el potencial es cero en un punto, la fuerza eléctrica no realiza trabajo neto alguno al pasar la carga de prueba del infinito a ese punto; ello a pesar de que puede atravesar regiones donde experimenta fuerzas eléctricas de atracción o de repulsión. *Un potencial cero en un punto no significa necesariamente que la fuerza eléctrica es cero allí.*

La unidad del SI para el potencial, que se deduce de la ecuación 28-9, es el joule por coulomb. A esta combinación se le da el nombre de *volt* (V).

$$1\ \text{volt} = 1\ \text{joule/coulomb}. \tag{28-13}$$

"Voltaje" es el nombre con que a menudo se designa el potencial en un punto, y a veces hablamos de "diferencia de voltaje" en vez de diferencia de potencial. Cuando ponemos en contacto las dos puntas de prueba de un voltímetro con dos puntos de un circuito eléctrico, estamos midiendo la diferencia de voltaje o de potencial (en volts) entre ellos.

Ya hemos dicho que la fuerza eléctrica es conservativa, de modo de la diferencia de energía potencial al mover una carga entre dos puntos dependerá exclusivamente de la ubica-

ción de los puntos, y no de la trayectoria seguida para pasar de un punto a otro. En consecuencia, la ecuación 28-9 indica que la diferencia de potencial tampoco depende de la trayectoria: la que existe entre dos puntos en un campo eléctrico es independiente de la trayectoria por donde se desplaza la carga de prueba al ir de un punto a otro.

En cualquier diferencia arbitraria de potencial ΔV, y sin importar el arreglo de las cargas que la produce, podemos escribir la ecuación 28-9 así

$$\Delta U = q\,\Delta V. \tag{28-14}$$

La ecuación anterior indica que, cuando una carga *cualquiera* q, se mueve entre dos puntos cuya diferencia de potencial es ΔV la energía potencial ΔU del sistema experimenta un cambio dado por la ecuación 28-14. Esa diferencia ΔV la crean otras cargas que están fijas en reposo; así que el movimiento de q no altera ΔV. Al utilizar la ecuación 28-14, vemos en la ecuación 28-13 que si ΔV se expresa en volts y q en coulombs ΔU se da en joules.

De la ecuación 28-14 se observa que el *electrón-volt*, unidad de energía a la que nos referimos con anterioridad, se deduce de la definición de potencial o diferencia de potencial. Si ΔV se expresa en volts y q en unidades de la carga elemental e, ΔU se escribirá en electrón-volts (eV). Consideremos, por ejemplo, un sistema donde un átomo de carbono al cual se le extraen sus seis electrones ($q = +6e$) se desplaza por un cambio de potencial de $\Delta V = +20$ kV. La variación de la energía potencial es

$$\Delta U = q\,\Delta V = (+6e)(+20\text{ kV}) = +120\text{ keV}.$$

Conviene realizar estos cálculos en unidades de eV, cuando se trata de átomos o de núcleos cuya carga se expresa fácilmente en función de e.

No olvide que las *diferencias de potencial* son de gran importancia y que la ecuación 28-12 se basa en la asignación arbitraria del valor cero al potencial en la posición de referencia (el infinito); pudimos haber elegido sin problemas este potencial en cualquier otro valor, digamos -100V. Asimismo, cualquier otro punto aceptado podría seleccionarse como posición de referencia. En muchos problemas, la Tierra se toma como referencia de potencial y se le asigna el valor cero. El sitio del punto de referencia y el valor del potencial se escogen para facilitar los cálculos; otras opciones alterarían el potencial en cualquier lugar en la misma cantidad, pero no modificarían la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera.

PROBLEMA RESUELTO 28-4. Una partícula alfa ($q = +2e$) en un acelerador nuclear pasa de una terminal con un potencial de $V_a = +6.5 \times 10^6$V a otra con un potencial de $V_b = 0$. *a)* ¿Cuál es el cambio correspondiente en la energía potencial del sistema? *b)* Suponiendo que las terminales y sus cargas no se mueven y que tampoco fuerzas externas operan sobre el sistema, ¿qué cambio de energía cinética presenta la partícula?

Solución *a)* Con base en la ecuación 28-14 tenemos

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_b - U_a = q(V_b - V_a)\\ &= (+2)(1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(0 - 6.5 \times 10^6\text{ V})\\ &= -2.1 \times 10^{-12}\text{ J}.\end{aligned}$$

b) Si ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema, su energía mecánica $E = U + K$ deberá permanecer constante. En otras palabras, $\Delta E = \Delta U + \Delta K = 0$ y, por tanto,

$$\Delta K = -\Delta U = +2.1 \times 10^{-12}\text{ J}.$$

La partícula alfa adquiere energía cinética de 2.1×10^{-12} J, de la misma manera que la obtiene una partícula que cae en el campo gravitacional de la Tierra.

Si quiere visualizar las simplificaciones que se logran, intente resolver este problema otra vez expresando las energías en unidades de eV.

28-4 CÁLCULO DEL POTENCIAL A PARTIR DEL CAMPO

Hasta ahora hemos caracterizado las cargas eléctricas y sus interacciones empleando cuatro propiedades: fuerza eléctrica, campo eléctrico, energía potencial eléctrica y potencial eléctrico. En la tabla 28-1 se incluyen las cuatro. Dos de ellas son vectores (fuerza y campo) y las otras dos son escalares (energía potencial y potencial eléctrico). Dos caracterizan la interacción de dos partículas (fuerza y energía potencial) y dos representan el efecto en un punto del espacio debido a una carga simple o a un grupo de cargas (campo y potencial). Las flechas dobles de la tabla indican que las cantidades en las casillas vecinas pueden calcularse una a partir de la otra; por ejemplo, $\vec{\mathbf{E}}$ a partir de $\vec{\mathbf{F}}$ (Ec. 26-3), U a partir de $\vec{\mathbf{F}}$ (Ec. 28-4) y V a partir de U (Ec. 28-12). A continuación vamos a examinar la cuarta conexión, a saber, la que existe entre V y $\vec{\mathbf{E}}$.

La conexión entre V y $\vec{\mathbf{E}}$ se deduce directamente de la definición de potencial dada en la ecuación 28-11: $\Delta V = -W_{ab}/q_0$. Supóngase que pasamos una carga de prueba q_0 de a a b en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$. Al calcular el trabajo ejecutado por la fuerza eléctrica $\vec{\mathbf{F}} = q_0\vec{\mathbf{E}}$ obtenemos

$$\Delta V = \frac{-W_{ab}}{q_0} = \frac{-\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}}{q_0} = \frac{-\int_a^b q_0\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}}{q_0}$$

o bien

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}. \tag{28-15}$$

Si el campo eléctrico sigue la dirección de $d\vec{\mathbf{s}}$, la integral de la ecuación 28-15 será positiva, y negativa la diferencia de potencial, esto es, $V_b > V_a$. El campo eléctrico moverá la par-

TABLA 28-1 Propiedades de las cargas eléctricas

	Descripción vectorial	*Descripción escalar*
Interacción entre dos cargas	Fuerza $\vec{\mathbf{F}}$	Energía potencial U
Efecto que una carga o grupo de cargas tienen en un punto del espacio	Campo $\vec{\mathbf{E}}$	Potencial V

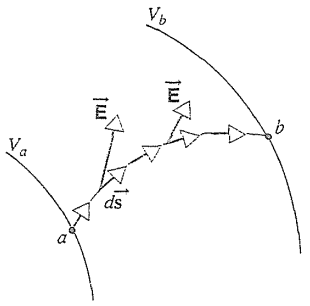


FIGURA 28-5. La diferencia de potencial entre a y b puede obtenerse calculando la integral de línea $\vec{E}$ a lo largo de la trayectoria ab.

tícula con carga positiva de una región de mayor potencial a otra de menor potencial o una partícula de carga negativa en dirección contraria.

Una integral como la de la ecuación 28-15 recibe el nombre de *integral de línea*. La figura 28-5 muestra el cálculo de una integral de línea. Integramos de a a b en una trayectoria adecuada; sabemos que la diferencia de potencial es una magnitud independiente de la trayectoria; así que obtenemos el mismo resultado con la ecuación 28-15 prescindiendo de la trayectoria que escojamos. En términos generales, la magnitud y la dirección de $\vec{E}$ pueden cambiar de un punto a otro a lo largo de la trayectoria. En cada paso de ella encontramos el producto punto entre $\vec{E}$ y la diferencial de la trayectoria $d\vec{s}$ (que esencialmente nos da el componente de $\vec{E}$ a lo largo de la trayectoria); y sumamos estos productos en toda la trayectoria.

Como lo hicimos en la sección 28-3, tal vez queramos calcular el potencial en un punto en relación con el potencial de referencia escogido y no la diferencia de potencial de la ecuación 28-15. Si decidimos que el punto de referencia se encuentra en el infinito y si definimos $V = 0$ como referencia, la ecuación 28-15 nos dará el potencial en el punto P

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \qquad (28\text{-}16)$$

PROBLEMA RESUELTO 28-5. En la figura 28-6, una carga de prueba q_0 se desplaza por un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$, desde a hasta b en la trayectoria acb. Determine la diferencia de potencial entre a y b.

Solución De acuerdo con la ecuación 28-15, en la trayectoria ac tenemos

$$V_c - V_a = -\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_a^c E\, ds \cos(\pi - \theta)$$
$$= E \cos\theta \int_a^c ds.$$

La integral es la longitud de la línea ac, que es $L/\cos\theta$. Por tanto,

$$V_c - V_a = E \cos\theta \frac{L}{\cos\theta} = EL.$$

Los puntos b y c tienen el mismo potencial, porque no se efectúa trabajo al hacer pasar la carga entre ellos; $\vec{E}$ y $d\vec{s}$ forman ángulo recto en todos los puntos de la línea cb. Por consiguiente.

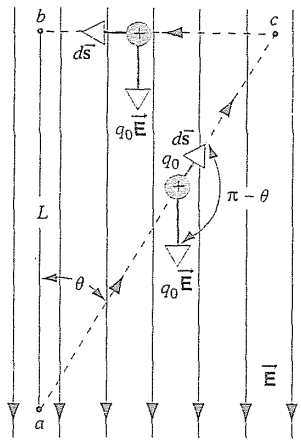


FIGURA 28-6. Problema resuelto 28-5. Una carga de prueba q_0 se desplaza por la trayectoria acb en el campo eléctrico uniforme $\vec{E}$.

$$V_b - V_a = (V_b - V_c) + (V_c - V_a) = 0 + EL = EL.$$

El valor anterior es el mismo que se obtuvo para una trayectoria directa que conecta a con b, resultado previsto, ya que la diferencia de potencial entre los dos puntos no depende de la trayectoria.

28-5 POTENCIAL GENERADO POR CARGAS PUNTUALES

En la presente sección utilizamos resultados de la sección anterior para obtener el potencial en varios arreglos de cargas puntuales. En la siguiente sección nos ocuparemos del potencial debido a distribuciones de carga continua.

Ante todo vamos a estudiar el potencial proveniente de una carga puntual positiva q. Supongamos que una carga de prueba q_0 pasa del punto a al punto b cerca de q. Queremos emplearla para calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b debida a q. Podemos utilizar la geometría de la figura 28-1, donde q_1 es reemplazada por q y q_2 por q_0.

Ya hemos obtenido la diferencia de energía potencial ΔU en esta situación, que ofrece la ecuación 28-5 en el caso de dos cargas puntuales. Si la escribimos para las cargas q y q_0 y si con la ecuación 28-9 determinamos la diferencia de potencial, obtendremos

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right). \qquad (28\text{-}17)$$

Según se mencionó en la sección 28-2, la ecuación 28-5 es válida aun cuando los puntos a y b no se encuentren en la misma línea. La ecuación 28-17 se aplica a la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera a y b.

En vez de la diferencia de potencial entre dos puntos, podemos determinar el potencial en un solo punto cerca de q. La ecuación 28-7 nos da la energía potencial U generada por la interacción de dos cargas puntuales. El punto de referencia en

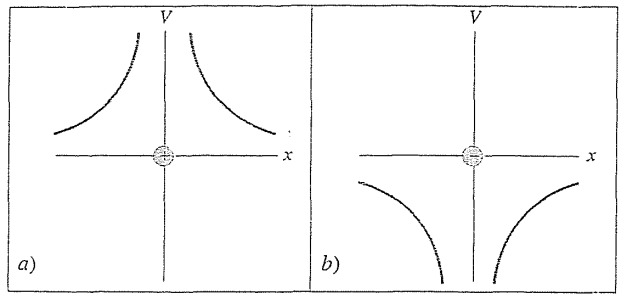


FIGURA 28-7. Potencial en una dimensión (que se escoge como el eje x) para *a)* una carga puntual positiva y *b)* en una carga puntual negativa. Su magnitud aumenta a infinito al convertirse en cero la distancia respecto a la carga. El potencial de una carga positiva simple es positivo en todas partes, y negativo en una carga negativa simple.

esta expresión se toma en el infinito, donde se define $U = 0$. Podemos emplear la ecuación 28-7, escrita para las cargas q y q_0 para encontrar el potencial en un punto usando la ecuación 28-12 para el potencial

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}, \qquad (28\text{-}18)$$

en cualquier punto a una distancia r de q. Nótese que la ecuación 28-18, podría haberse conseguido directamente de la ecuación 28-17, con sólo imponer la condición de referencia con $V_a = 0$ en $r_a = \infty$.

La ecuación 28-18 muestra que el potencial de una carga puntual positiva es cero a grandes distancias y que crece hasta alcanzar grandes valores positivos conforme nos acercamos a la carga ($r \to 0$). Si q es negativa, el potencial aumenta alcanzando altos valores negativos al aproximarnos a la carga. Adviértase que los resultados anteriores no dependen en absoluto del signo de la carga de prueba q_0 empleada en el cálculo. La figura 28-7 contiene el potencial en función desde la distancia de la carga para una carga puntual positiva y una negativa.

PROBLEMA RESUELTO 28-6. ¿Cuál debe ser la magnitud de una carga puntual positiva aislada para que el potencial eléctrico a 15 cm de distancia de la carga sea de + 120 V? Supongamos que $V = 0$ en el infinito.

Solución Resolviendo la ecuación 28-18 para q obtenemos

$$q = 4\pi\epsilon_0 rV = (4\pi)(8.9 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.15\ \text{m})(120\ \text{V})$$
$$= 2.0 \times 10^{-9}\ \text{C} = 2.0\ \text{nC}.$$

Esta carga se asemeja a las cargas que pueden producirse por fricción, como cuando se frota un globo.

PROBLEMA RESUELTO 28-7. ¿Cuál es el potencial eléctrico en la superficie de un núcleo de oro? Su radio es 7.0×10^{-15} m, y su número atómico Z es 79.

Solución El núcleo, supuestamente de simetría esférica, se comporta eléctricamente en los puntos externos como si fuese una carga puntual. Así pues, podemos utilizar la ecuación 28-18 que con $q = +79e$, nos da

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(79)(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})}{7.0 \times 10^{-15}\ \text{m}}$$
$$= 1.6 \times 10^7\ \text{V}.$$

Este gran potencial positivo no tiene efecto alguno fuera del *átomo* de oro, porque se compensa con un potencial negativo igualmente grande proveniente de los 79 electrones atómicos del oro.

Potencial generado por una serie de cargas puntuales

Supóngase que tenemos un conjunto de cargas puntuales N $q_1, q_2, \ldots, q_N$, situadas en varios puntos fijos (Fig. 28-8). Queremos determinar el potencial en un punto arbitrario P debido a ellas. El procedimiento consiste en calcular el potencial en P producido por cada carga, como si no hubiera otras, y en sumar luego los potenciales resultantes para obtener el potencial total. Es decir,

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_N$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2} + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_N}{r_N}, \qquad (28\text{-}19)$$

que puede escribirse en la forma compacta así

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{r_n}. \qquad (28\text{-}20)$$

En estas expresiones, q_n es el valor (magnitud y signo) de la *enésima* carga y r_n es la distancia de ella respecto al punto P donde queremos obtener el potencial.

Podríamos emplear la ecuación 28-20 para, por ejemplo, determinar el trabajo hecho cuando colocamos en el punto P de la figura 28-8 una carga de prueba q_0 originada en el infinito. En este cálculo vemos la ventaja de empelar el potencial (un escalar) en vez de la fuerza (un vector). Si queremos obtener la fuerza neta de una carga de prueba en P, habría que realizar una suma vectorial. El cálculo escalar del potencial es mucho más simple.

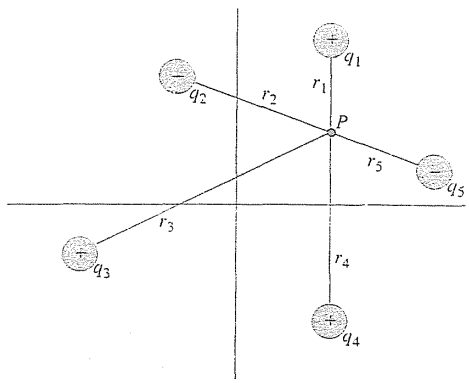


FIGURA 28-8. Conjunto de cargas puntuales.

En este cálculo descubrimos que la contribución que al potencial hace una carga es como si no hubiera otras. El anterior es un ejemplo más de la aplicación del principio de superposición, que se explicó al tratar las fuerzas eléctricas en el capítulo 25.

PROBLEMA RESUELTO 28-8. Calcule el potencial en el punto P, situado en el centro del cuadrado de cargas puntuales que aparece en la figura 28-9*a*. Suponga que $d = 1.3$ m y que las cargas son

$$q_1 = +12 \text{ nC}, \quad q_3 = +31 \text{ nC},$$
$$q_2 = -24 \text{ nC}, \quad q_4 = +17 \text{ nC}.$$

Solución De acuerdo con la ecuación 28-20 tenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{R}.$$

La distancia R de las cargas respecto al centro del cuadrado es $d/\sqrt{2}$, o sea 0.919 m; así que

$$V = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12 - 24 + 31 + 17) \times 10^{-9} \text{ C}}{0.919 \text{ m}}$$
$$= 3.5 \times 10^2 \text{ V}.$$

Cerca a cualquiera de las tres cargas positivas de la figura 28-9*a*, el potencial puede tener valores positivos muy grandes. Cerca a la carga negativa individual de la figura, el potencial puede tener grandes valores negativos. Debe haber entonces otros puntos dentro de los límites del cuadrado que posean el mismo potencial que en el punto P. La línea punteada de la figura 28-9*b* conecta otros puntos en el plano que presentan este mismo valor del potencial. Según veremos más adelante en la sección 28-8, tales *superficies equipotenciales* ofrecen un medio útil de visualizar los potenciales de varias distribuciones de carga.

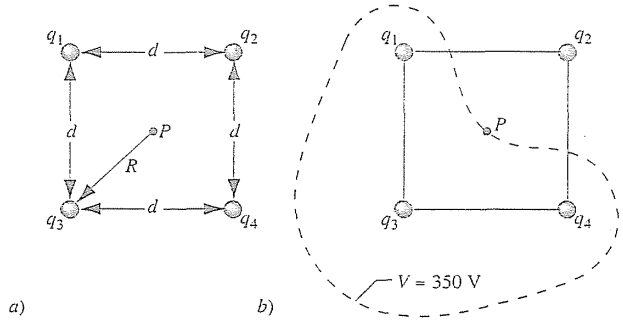


FIGURA 28-9. Problema resuelto 28-8. *a*) Se mantienen cuatro cargas en los vértices de un cuadrado. *b*) La curva conecta los puntos que poseen el mismo potencial (350 V) como el punto P en el centro del cuadrado.

Potencial generado por un dipolo eléctrico

Este potencial puede calcularse en forma simple por medio de la ecuación 28-20. La figura 28-10 contiene la geometría del cálculo. Ponemos el origen del sistema coordenado en el centro del dipolo y luego buscamos el potencial eléctrico en el punto P, situado a una distancia r del centro del dipolo y en un ángulo θ del eje del mismo (el eje z). Las distancias de las cargas positiva y negativa con P son, respectivamente, r_+ y r_-. Si empleamos la ecuación 28-20 descubrimos que el potencial es

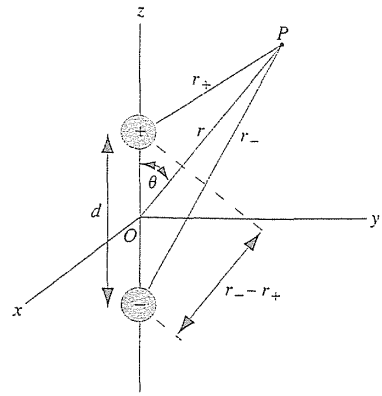


FIGURA 28-10. Geometría para calcular el potencial en el punto P producido por un dipolo eléctrico.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right). \qquad (28\text{-}21)$$

La ecuación 28-21 es la expresión exacta del potencial debido al dipolo. No obstante, en muchas aplicaciones (como la de los dipolos atómicos o moleculares) se consigue una relación más útil reconociendo que el punto de observación P está muy lejos del dipolo en comparación con la distancia d entre las cargas, es decir, $r >> d$. En este caso

$$r_- - r_+ \approx d\cos\theta \quad \text{y} \quad r_- r_+ \approx r^2,$$

y al sustituir los resultados anteriores en la ecuación 28-21 queda

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}, \qquad (28\text{-}22)$$

donde hemos usado la ecuación 26-8 ($p = qd$) para el momento del dipolo. Con la ecuación 28-22 se obtiene el potencial debido a un dipolo en un punto cualquiera del espacio. El dipolo presenta simetría cilíndrica en las rotaciones alrededor del eje z, de manera que la ecuación 28-22 es válida en los puntos que no se hallen en el plano del diagrama de la figura 28-10.

Adviértase que el potencial generado por el dipolo varía como $1/r^2$. Ello contrasta con el potencial de una carga individual, el cual varía (Ec. 28-18) como $1/r$.

En la ecuación 28-22 se muestra que $V = 0$ cuando $\theta = 90°$, lo cual corresponde a los puntos en el plano xy de la figura 28-10. Eso significa que, si llevamos una carga de prueba del infinito a un punto en el plano xy, el dipolo no realiza trabajo neto sobre la carga de prueba. Con una r determinada, el potencial fluctúa entre valores positivos en el eje positivo z ($\theta = 0$), cero en el plano xy ($\theta = 90°$) y valores negativos en el eje negativo z ($\theta = 180°$).

Nótese que, aunque $V = 0$ en el plano xy, *no* es verdad que $\vec{E} = 0$ en ese plano. En términos generales, *no* es posible suponer que $V = 0$ signifique que $\vec{E} = 0$ ni que $\vec{E} = 0$ signifique que $V = 0$.

PROBLEMA RESUELTO 28-9. Una *cuadrupolo eléctrico* consta de dos dipolos dispuesto, de modo que casi se cancelan sus efectos eléctricos en puntos lejanos (Fig. 28-11). Calcule $V(r)$ en los puntos de su eje.

Solución Al aplicar la ecuación 28-20 a la figura 28-11 se obtiene

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r-d} + \frac{-2q}{r} + \frac{q}{r+d}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qd^2}{r(r^2-d^2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qd^2}{r^3(1-d^2/r^2)}.$$

Puesto que $d << r$, podemos prescindir de d^2/r^2 en comparación con 1, y entonces el potencial se convierte en

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^3}, \qquad (28\text{-}23)$$

donde Q ($= 2qd^2$) es el *momento cuadrupolar eléctrico* del conjunto de cargas de la figura 28-11. Nótese que V varía 1) como $1/r$ para una carga puntual (Ec. 28-11), 2) como $1/r^2$ en un dipolo (Ec. 28-22) y 3) como $1/r^3$ en un cuadrupolo (Ec. 28-23).

Nótese asimismo que 1) un dipolo son dos cargas iguales y opuestas que no coinciden totalmente en el espacio; de ahí que sus efectos eléctricos en puntos distantes no se cancelen por completo y 2) que un cuadrupolo es dos dipolos iguales y opuestos que no coinciden en el espacio, de modo que sus efectos eléctricos en puntos distantes no se cancelan totalmente. Podemos seguir construyendo conjuntos más complejos de cargas eléctricas. Es un proceso de gran utilidad, ya que el potencial eléctrico de *cualquier* distribución de carga puede representarse como una serie de términos en potencias crecientes de $1/r$. La parte $1/r$, denominada término *monopolo*, depende de la carga neta de distribución; los términos subsecuentes $1/r^2$, el término *dipolo*; $1/r^3$, el término *cuadrupolo*, etc., indican cómo se distribuye la carga. A este tipo de análisis se le conoce como *expansión en multipolos*.

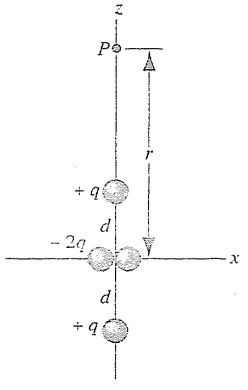


FIGURA 28-11. Problema resuelto 28-9. Cuadrupolo eléctrico constituido por dos dipolos que tienen dirección contraria.

28-6 EL POTENCIAL ELÉCTRICO DE LAS DISTRIBUCIONES DE CARGA CONTINUA

En la sección 25-5 se explicó un procedimiento para calcular la fuerza que una distribución de carga continua ejerce sobre una carga puntual. En forma similar obtenemos la energía potencial de la interacción entre una distribución continua y una carga puntual, para lo cual se determina el potencial de las tres distribuciones de carga mencionadas en la sección 25-5.

El procedimiento con que se calcula el potencial de una distribución de carga continua se asemeja al que se utilizó para encontrar la fuerza (o el campo eléctrico en la Sec. 26-4), con una importante excepción: el potencial es un escalar, y por lo mismo no nos tropezamos con las dificultadas de la sección 25-5 debido a las diversas direcciones de los elementos de fuerza $d\vec{F}$ o a los elementos del campo $d\vec{E}$ procedentes de diferentes elementos de carga dq.

El procedimiento con que se calcula el potencial comienza dividiendo el objeto en elementos de carga dq. Puede escribirse el potencial dV generado por un elemento de carga dq suponiendo que se comporta como una carga puntual:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}, \qquad (28\text{-}24)$$

donde r es la distancia entre dq y el punto de observación P. El potencial total se obtiene sumando las contribuciones de todos los elementos de carga del objeto:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \qquad (28\text{-}25)$$

donde la integral se resuelve sobre la distribución entera de carga.

Una línea uniforme con carga

Nos servimos de la geometría de la figura 28-12 para encontrar el potencial producido por una línea uniforme con carga positiva en el punto P, a una distancia y de la varilla en su bisector perpendicular. Aplicamos la ecuación 28-24, usando los elementos de carga $dq = \lambda\, dz$ (donde λ es la densidad de carga lineal), y así obtenemos

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dz}{\sqrt{z^2+y^2}}. \qquad (28\text{-}26)$$

Al resolver la integración sobre la longitud L, como en la ecuación 28-25, y al observar que y es constante, obtenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{\lambda\, dz}{\sqrt{z^2+y^2}}$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln\left(z+\sqrt{z^2+y^2}\right)\right]_{-L/2}^{+L/2}$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{L/2+\sqrt{L^2/4+y^2}}{-L/2+\sqrt{L^2/4+y^2}}\right], \qquad (28\text{-}27)$$

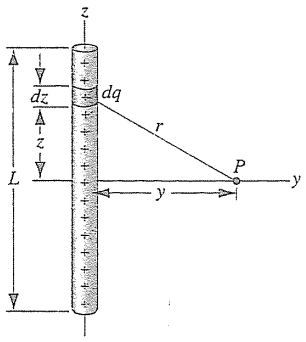


FIGURA 28-12. Varilla con carga uniforme. Para obtener el potencial en el punto P, suponemos que la varilla está compuesta por muchos elementos individuales de carga dq.

donde nos hemos servido de la relación $\ln A - \ln B = \ln (A/B)$ para conseguir el último resultado.

Es importante revisar el resultado anterior para comprobar si tiene el valor límite correcto. A medida que nos alejamos de la varilla, esperamos que el potencial se aproxime a 0, y la ecuación 28-27 tiene esta propiedad como $y \to \infty$. Más aún, puede demostrarse que cuando y es grande, la ecuación 28-27 queda así

$$V \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L}{y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y}, \qquad (28\text{-}28)$$

que es simplemente la expresión del potencial situado a una distancia y de una carga puntual. Cuando estamos muy lejos de la varilla, da la impresión de ser una carga puntual.

Un anillo con carga

La figura 28-13 muestra un anillo uniforme con carga positiva. La contribución al potencial en el punto P en su eje debido al elemento de carga $dq = \lambda\, ds = \lambda R\, d\phi$ es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R\, d\phi}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \qquad (28\text{-}29)$$

Al integrar alrededor del eje como se hizo en la sección 25-5, observamos que R y z permanecen constantes. La variable de integración es ϕ, que varía de 0 a 2π.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \qquad (28\text{-}30)$$

Nótese que, a medida que $z \to \infty$, el potencial se reduce a cero y con z grande tiene el valor aproximado $q/4\,\pi\epsilon_0 z$ (donde $q = 2\pi\lambda R$), según lo previsto para un lugar a una distancia z de una carga puntual.

Un disco con carga eléctrica

Con la geometría de la figura 28-14 podemos utilizar la ecuación 28-30 para calcular el potencial dV en el punto P, debido al anillo de radio w y de carga $dq = \sigma\, dA$ con el elemento de área $dA = 2\pi w\, dw$:

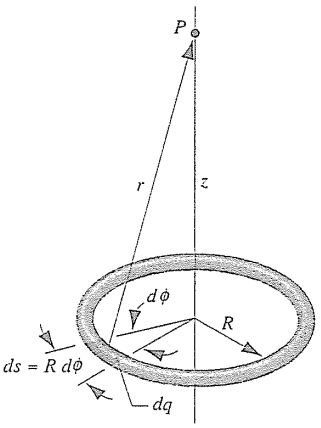


FIGURA 28-13. Anillo cargado uniformemente. Para obtener el potencial en P se calcula el efecto total de los elementos de carga dq.

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{w^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi\sigma w\, dw}{\sqrt{w^2 + z^2}}. \qquad (28\text{-}31)$$

Si queremos sumar las contribuciones de todos los anillos del disco, integramos w en su variación entre 0 y R:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{w\, dw}{\sqrt{w^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right). \qquad (28\text{-}32)$$

El último término de la ecuación 28-32 se consiguió al evaluar $\sqrt{z^2}$ y se escribe como $|z|$, de modo que la ecuación 28-32 es válida en los puntos del eje z arriba del disco ($z > 0$), lo mismo que debajo de él ($z < 0$). El potencial tiene su valor máximo en la superficie del disco (donde $z = 0$) y disminuye al movernos a lo largo del eje z en una u otra dirección.

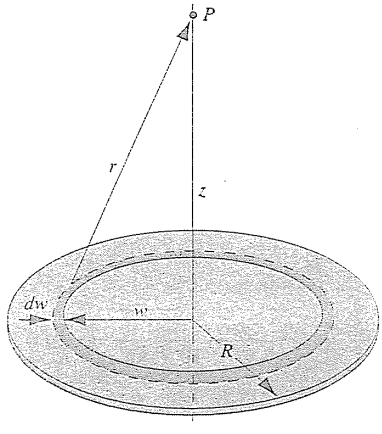


FIGURA 28-14. El disco de radio R contiene una densidad de carga uniforme σ. El elemento de carga dq es un anillo con carga uniforme.

Cuando z es grande, podemos valernos del teorema binomial para desarrollar la raíz cuadrada en la ecuación 28-32:

$$\sqrt{R^2 + z^2} = |z|\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} \approx |z|\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right) \quad (28\text{-}33)$$

y, al insertar el resultado anterior en la ecuación 28-32, encontramos una vez más la expresión del potencial de una carga puntual.

Con valores muy pequeños de z el potencial es

$$V = \sigma R/2\epsilon_0 - \sigma|z|/2\epsilon_0. \quad (28\text{-}34)$$

El potencial se aproxima al valor constante $\sigma R/2\epsilon_0$ a medida que $z \to 0$ y disminuye linealmente al incrementarse z en ambas direcciones. La rapidez con que se reduce al desplazarnos por el eje (dada por el segundo término de la Ec. 28-34) no depende del tamaño del disco, con una densidad de carga determinada. De hecho, este término resulta ser el mismo en grandes placas planas de carga uniforme, sin importar su tamaño ni su forma (redonda, cuadrada, etc.) Con tal que estén cerca de su centro y, por lo mismo, lejos de todo borde. Este hecho nos servirá para dibujar un "mapa" del potencial en la siguiente sección.

PROBLEMA RESUELTO 28-10. Un disco de radio $R = 4.8$ cm tiene una carga total $q = +2.5$ nC que se distribuye uniformemente en su superficie y se sostiene en sitios fijos (imagine que la superficie se comporta como un aislante). Un electrón se halla inicialmente en reposo a una distancia de $d = 3.0$ cm del disco sobre su eje. Cuando lo liberamos, es atraído hacia el disco. ¿Cuál es su velocidad cuando choca contra el centro del disco?

Solución La densidad de carga del disco es

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{2.5 \times 10^{-9}\ \text{C}}{\pi(0.048\ \text{m})^2} = 3.45 \times 10^{-7}\ \text{C/m}^2.$$

La diferencia de potencial entre los sitios con $z = d$ y con $z = 0$ se obtiene a partir de la ecuación 28-32:

$$\Delta V = V(0) - V(d) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2 + d^2} - d)$$

$$= \frac{3.45 \times 10^{-7}\ \text{C/m}^2}{2(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)}[0.048\ \text{m}$$

$$- (\sqrt{(0.048\ \text{m})^2 + (0.030\ \text{m})^2} - 0.030\ \text{m})]$$

$$= 417\ \text{V}.$$

Usando la ecuación 28-14 el cambio de la energía potencial del electrón es

$$\Delta U = q\,\Delta V = (-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(417\ \text{V}) = -6.67 \times 10^{-17}\ \text{J}.$$

La conservación de la energía nos da $\Delta U + \Delta K = 0$, o $\Delta K = -\Delta U = +6.67 \times 10^{-17}$ J, así que

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-17}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1.21 \times 10^7\ \text{m/s}.$$

PROBLEMA RESUELTO 28-11. Con la expresión del campo eléctrico generado por un anillo uniforme de carga positiva en un punto de su eje (el eje z) encuentre la expresión del potencial producido por el anillo en un punto del eje a una distancia z' del anillo.

Solución La ecuación 28-16 contiene la relación entre V y $\vec{E}$. El campo eléctrico del anillo cargado se dio en la ecuación 26-18. Tiene sólo un componente z y, por ello, el integrando de la ecuación 28-16 se reduce a $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_z\,dz$. Integramos en ella del infinito al punto P (el punto de observación):

$$V_P = -\int_\infty^{z'} E_z\,dz = -\int_\infty^{z'} \frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{Rz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\,dz.$$

Al resolver la integral se obtiene

$$V_P = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{z'^2 + R^2}},$$

expresión idéntica a la ecuación 28-30, conseguida al integrar en la distribución de carga del anillo.

28-7 CÁLCULO DEL CAMPO A PARTIR DEL POTENCIAL

En la sección 28-4 describimos un método para obtener la diferencia de potencial partiendo de un campo eléctrico. Ahora vamos a explicar la manera de efectuar ese cálculo en sentido inverso: si conocemos el potencial es posible determinar el campo eléctrico. Es decir, la flecha doble que conecta las dos cajas en la tabla 28-1 puede seguir una u otra dirección.

La figura 28-15*a* muestra una carga de prueba positiva q_0, conforme se desplaza del punto a (donde el potencial es V) al punto b (donde el potencial es $V + \Delta V$). Al hacerlo, la energía potencial eléctrica de q_0 cambia en una cantidad $\Delta U = q_0\,\Delta V$. En la terminología de fuerzas, diríamos que existe un campo eléctrico $\vec{E}$ que ejerce una fuerza $\vec{F} = q_0\vec{E}$ sobre la partícula. El trabajo efectuado por ella al pasar la partícula de a a b es $W = F_s\,\Delta s = q_0\,E_s\,\Delta s$, donde E_s y F_s son los componentes de $\vec{E}$ y $\vec{F}$ a lo largo de Δs que representa el desplazamiento de la partícula al hacer el recorrido entre a y b. (Suponemos que Δs es pequeña y, en consecuencia, podemos considerar la fuerza y el campo como aproximadamente constantes tanto en la magnitud como en la dirección a lo largo de ab.) La conexión matemática entre las dos descripciones equivalentes $W = -\Delta U$ que nos da

$$q_0 E_s\,\Delta s = -q_0\,\Delta V \quad (28\text{-}35)$$

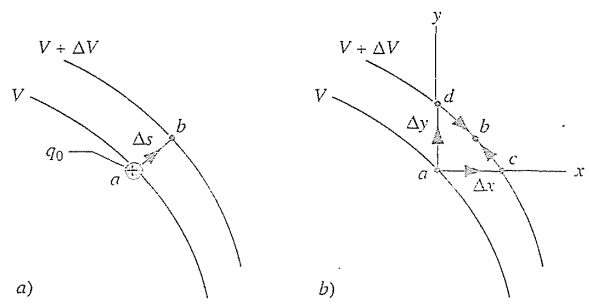


FIGURA 28-15. *a)* Una partícula cargada q_0 se mueve en la trayectoria ab entre dos equipotenciales. *b)* La partícula pasa de a a b a través de las trayectorias acb o adb.

o bien

$$E_s = -\frac{\Delta V}{\Delta s}. \qquad (28\text{-}36)$$

Esta ecuación es la conexión fundamental entre el campo y el potencial eléctricos: el primero es el negativo del cambio del segundo con la distancia. Si ΔV es positivo, el campo eléctrico produce una fuerza que se opone al movimiento de la partícula de prueba con carga positiva entre a y b; si ΔV es negativo, el campo produce una fuerza en dirección del movimiento. En el límite de desplazamientos infinitesimales, la ecuación 28-36 se convierte en la derivada:

$$E_s = -\frac{dV}{ds}. \qquad (28\text{-}37)$$

El componente del campo eléctrico en una dirección cualquiera es el negativo de la derivada del potencial respecto a un desplazamiento en esa dirección.

Seleccionemos otra geometría para este proceso. En la figura 28-15*b* se muestra el mismo proceso, sólo que en vez de mover la carga de prueba directamente de a a b, la desplazamos a lo largo de dos trayectorias. La trayectoria *acb* toma la carga en el eje x desde a hasta c y luego a lo largo de la trayectoria desde c hasta b, que se escogió de modo que el potencial tiene el mismo valor $V + \Delta V$ en todas los puntos entre c y b. El trabajo realizado por el campo eléctrico a lo largo de *cb* es cero, porque el potencial no varía (Ec. 28-11). El realizado a lo largo de *ac* es $F_x \Delta x = q_0 E_x \Delta x$. Como el cambio de energía potencial no depende de la trayectoria, una vez más a partir de $W = -\Delta U$ tenemos

$$q_0 E_x \Delta x = -q_0 \Delta V \quad \text{o} \quad E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}.$$

Si movemos la partícula en la trayectoria *adb*, el trabajo es $F_y \Delta y = q_0 E_y \Delta y$ a lo largo de *ad*, y cero a lo largo de *db* (seleccionada una vez más de modo que el potencial tenga el mismo valor $V + \Delta V$ en todas partes entre d y b). Dado que el cambio neto de la energía potencial a lo largo de *adb* es también ΔV, obtenemos

$$q_0 E_y \Delta y = -q_0 \Delta V \quad \text{o} \quad E_y = -\frac{\Delta V}{\Delta y}.$$

Un resultado similar hubiéramos conseguido para E_z en un cálculo tridimensional.

Si tomamos el límite a medida que la longitud de las trayectorias se vuelve muy pequeño, las diferencias se transforman en derivadas y es posible escribir la relación más general entre $\vec{\mathbf{E}}$ y V como:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \qquad (28\text{-}38)$$

Si se conoce $V(x, y, z)$ en todos los puntos del espacio para una distribución de carga, pueden encontrarse los componentes de $\vec{\mathbf{E}}$ con sólo tomar las derivadas parciales de V respecto a cada una de las coordenadas.*

* El símbolo $\partial V/\partial x$ denota una de derivada parcial. Al considerar esta derivada de la función $V(x, y, z)$ la cantidad x debe verse como variable y y z se deben considerar constantes. Las mismas consideraciones deben hacerse para $\partial V/\partial y$ y $\partial V/\partial z$.

Tenemos, pues, dos métodos para calcular el campo eléctrico en las distribuciones de carga continua: uno se basa en integrar la ley de Coulomb (Ecs. 26-13 a 26-15) y el otro se basa en derivar el potencial (Ec. 28-38). En la práctica, el segundo resulta ser menos difícil.

PROBLEMA RESUELTO 28-12. Use la ecuación 28-32 para el potencial en el eje de un disco cargado uniformemente, para obtener una expresión aplicable al campo eléctrico en los puntos axiales.

Solución Con base en la simetría, $\vec{\mathbf{E}}$ debe encontrarse en el eje del disco (el eje z). Por medio de la ecuación 28-38 tenemos (suponiendo que $z > 0$)

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{d}{dz}\left[(z^2 + R^2)^{1/2} - z\right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right),$$

en concordancia con el resultado obtenido por integración directa (Ec. 26-19).

PROBLEMA RESUELTO 28-13. La figura 28-16 muestra un punto P distante en el campo de un dipolo situado en el origen de un sistema coordenado xz. Calcule $\vec{\mathbf{E}}$ en función de la posición.

Solución De acuerdo con la simetría, en los puntos del plano de la figura 28-16, $\vec{\mathbf{E}}$ se halla en él y puede expresarse a partir de sus componentes E_x y E_z, donde E_y es cero. Expresemos primero el potencial en coordenadas rectangulares, en vez de polares por medio de

$$r = (x^2 + z^2)^{1/2} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{z}{(x^2 + z^2)^{1/2}}.$$

La ecuación 28-22 nos da V:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}.$$

Al hacer las sustituciones relativas a r^2 y $\cos\theta$ obtenemos

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Encontramos E_z a partir de la ecuación 28-38, recordando que x debe tratarse como una constante en este cálculo.

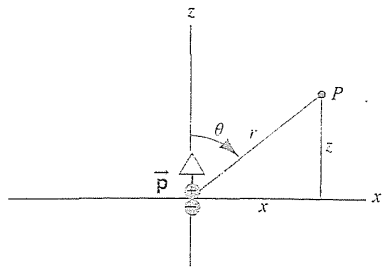


FIGURA 28-16. Problema resuelto 28-13. Un dipolo se localiza en el origen del sistema xz.

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x^2+z^2)^{3/2} - z[\frac{3}{2}(x^2+z^2)^{1/2}](2z)}{(x^2+z^2)^3}$$

$$= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{x^2-2z^2}{(x^2+z^2)^{5/2}}. \qquad (28\text{-}39)$$

Al hacer $x = 0$ se describen puntos lejanos a lo largo del eje del dipolo (o sea el eje z) y la expresión anterior de E_z se reduce a

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{z^3}.$$

Este resultado coincide exactamente con el del capítulo 26, problema 1, relativo al campo en el eje del dipolo. Nótese que en el eje z $E_x = 0$ conforme a la simetría.

Al hacer $z = 0$ en la ecuación 28-39 da E_z tratándose de puntos distantes en el plano medio del dipolo:

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3},$$

resultado que coincide exactamente con la ecuación 26-12, porque una vez más, según la simetría, E_x es igual a cero en el plano mediano. El signo negativo de la ecuación indica que $\vec{E}$ apunta en la dirección negativa z. Puede aplicarse un procedimiento similar para encontrar E_x; deberá conseguirse un resultado que concuerde con el del problema 2 del capítulo 26.

28-8 SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Considere una carga puntual $q = 1.11$ nC. Por medio de la ecuación 28-18 puede determinarse que el potencial que produce es 100 V a una distancia de 0.1 m de ella. Su valor es 100 V en esa distancia en cualquier dirección, pues ninguna direccionalidad se relaciona con el potencial. Esto se indica en la figura 28-17. El potencial es 100 V en cualquier punto de la esfera de radio 0.1 m que rodea a q. En una segunda esfera de radio 0.2 m, el potencial en todas partes tiene un valor de 50 V.

Se llama *superficie equipotencial* a aquella en que el potencial tiene el mismo valor en todas partes, como el de las esferas de la figura 28-17. Las fuerzas eléctricas no realizan trabajo alguno cuando pasamos una carga de prueba de un punto cualquiera en una superficie equipotencial a otro punto de la misma superficie, ya que $\Delta V = 0$. Aun cuando la trayectoria se aleje de la superficie, no se efectúa trabajo, siempre y cuando la trayectoria comience y termine en la misma superficie equipotencial. El trabajo efectuado por las fuerzas eléctricas cuando una carga de prueba pasa de una superficie equipotencial a otra depende exclusivamente de la diferencia de potencial entre ellas; el trabajo no depende del punto de partida ni de terminación: se hace el mismo trabajo cuando la carga se dirige de un punto *cualquiera* en la primera superficie a *otro* de la segunda.

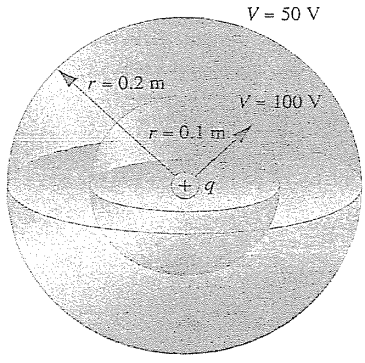


FIGURA 28-17. El potencial posee el mismo valor en todos los puntos de una esfera que rodea a la carga q. Se muestran dos esferas, una con $V = 100$ V y la otra con $V = 50$ V.

La figura 28-18 muestra partes de una *familia* de superficies equipotenciales que pudieran relacionarse con cierta distribución de carga. El trabajo que llevan a cabo las fuerzas eléctricas cuando una partícula cargada se desplaza por la trayectoria 1 es cero, porque esta trayectoria empieza y termina en la misma superficie equipotencial. El trabajo realizado en la trayectoria 2 también es cero por la misma razón. No lo es en las trayectorias 3 y 4, pero posee el mismo valor en ambas, puesto que conecta el mismo par de superficies equipotenciales. Es decir, las trayectorias 3 y 4 conectan puntos con la misma diferencia de potencial ($V_B - V_A$). Si pasamos una carga q de *cualquier* punto de la superficie A a *otro cualquiera* en la superficie B, el trabajo efectuado por la fuerza electrostática es, conforme a la ecuación 28-11, $W_{AB} = -q\,(V_B - V_A)$.

Líneas del campo y superficies equipotenciales

En la sección 26-5 explicamos otro método gráfico con que se describe una distribución de carga y que se basa en las líneas del campo eléctrico. La relación matemática entre $\vec{E}$ y V, que se obtuvo en la sección 28-7, sugiere una relación también entre las representaciones gráficas.

Supóngase que en la figura 28-15 liberamos una carga positiva del reposo en el punto b del equipotencial $V + \Delta V$. En la terminología del potencial, decimos que la partícula "caerá" por la diferencia de potencial ΔV hacia el equipotencial V. Podemos suponer que la acelera un campo eléctrico presente en la región situada entre las superficies equipotenciales. El campo deberá ser perpendicular a la superficie equipotencial en el punto b. De no ser así, el campo eléctrico tendría un componente a lo largo de la superficie equipoten-

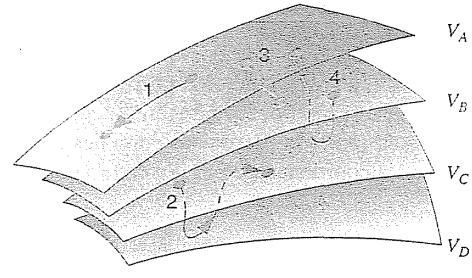


FIGURA 28-18. Porciones de cuatro superficies equipotenciales. Se muestran cuatro trayectorias para mover una partícula de prueba.

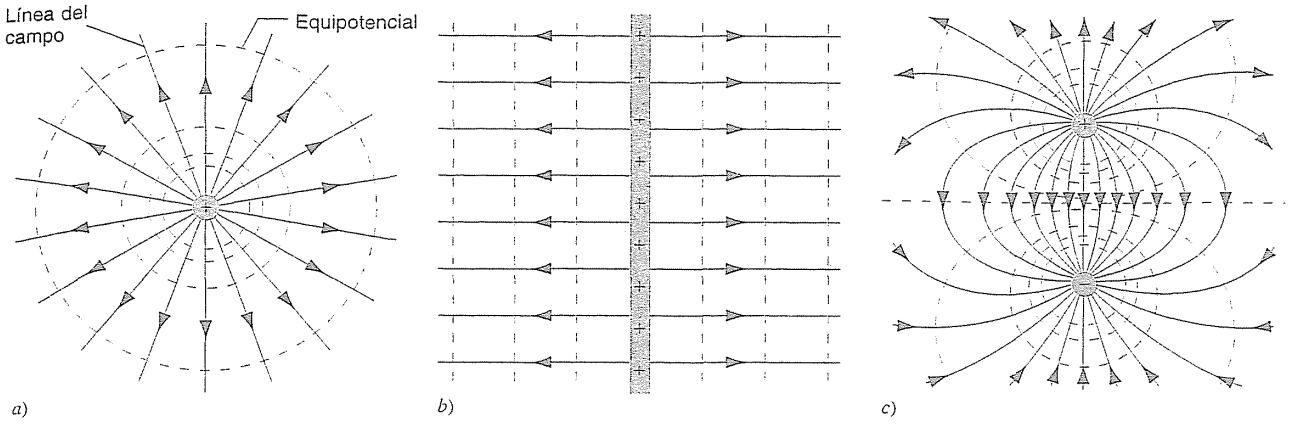


FIGURA 28-19. Líneas del campo eléctrico (líneas gruesas) y secciones transversales de superficies equipotenciales (líneas punteadas) en *a*) una carga puntual positiva, *b*) una hoja infinita de carga positiva, vista a lo largo de su borde, y *c*) un dipolo eléctrico.

cial, la cual podría realizar trabajo sobre una partícula que se desplazó por su superficie. Sin embargo, eso violaría la definición de equipotencial como superficie de potencial constante por donde podemos mover libremente una partícula cargada sin realizar trabajo. Concluimos que *las líneas del campo eléctrico en todas partes deben ser perpendiculares a las superficies equipotenciales.*

Es posible llegar a la misma conclusión de la ecuación 28-37, $E_s = -dV/ds$. Habrá una dirección de ds en la figura 28-15 donde el valor de la cantidad $-dV/ds$ alcance su valor máximo, lo cual significa que E_s también es un máximo en esa dirección. Ese valor máximo es E, la magnitud del campo eléctrico en dicho punto; la dirección en que E_s alcanza su valor máximo es la del campo eléctrico. Asimismo podemos trazar un punto b en un círculo de radio ds. Un punto en él estará más cerca del siguiente equipotencial y, por tanto, representará el mayor valor de $-dV$. La dirección de b hacia él es perpendicular a la superficie equipotencial en b y representa la dirección del campo eléctrico en b.

Si conocemos el patrón de las superficies equipotenciales en una distribución particular de carga, es posible encontrar las líneas del campo trazando perpendiculares a los equipotenciales. En la figura 28-19 se muestra la combinación de equipotenciales y de líneas de campo en tres casos que ya hemos visto: la carga puntual, la hoja infinita de carga y el dipolo. Los dibujos representan las líneas del campo eléctrico de las figuras 26-10, 26-11 y 26-12 con superficies equipotenciales sobrepuestas. Obsérvese que las líneas del campo son perpendiculares a los equipotenciales, siempre que se cruzan.

28-9 EL POTENCIAL DE UN CONDUCTOR CARGADO

En la sección 27-6 dedujimos dos propiedades de un conductor cargados aislado: 1) el campo eléctrico es cero en su interior y 2) la carga se halla en su superficie externa. Una tercera e importante propiedad se consigue al considerar su potencial eléctrico.

Supóngase que tenemos un conductor de forma arbitraria, al que se transfiere una carga neta. Las cargas se desplazan libremente y pronto se distribuyen en la superficie externa del conductor hasta que alcanzan el equilibrio. En efecto, las cargas del mismo signo se repelen hasta lograr una distribución donde la distancia promedio entre ellas es lo más grande posible, de modo que la energía potencial de su arreglo obtiene un valor mínimo.

Si las cargas guardan equilibrio en la superficie del conductor, su superficie ha de ser un equipotencial. En caso contrario, algunas partes de la superficie tendrían un potencial mayor o menor que otras. Entonces las cargas positivas emigrarían hacia las regiones de potencial más bajo y las negativas a las de potencial más alto. Pero ello contradice la afirmación de que las cargas están en equilibrio. Por tanto, la superficie deberá ser un equipotencial.

Cuando el campo eléctrico es cero en el interior del conductor, movemos una carga de prueba en cualquier trayectoria del interior o de la superficie al interior y el trabajo neto efectuado en la carga de prueba por las de la superficie será cero. Ello significa que la diferencia de potencial entre dos puntos es cero; en consecuencia, el potencial posee el mismo valor en todos los puntos del conductor. Obtenemos, pues, una tercera propiedad de los conductores: *el conductor entero se encuentra al mismo potencial.* Esta conclusión se aplica únicamente en el caso electrostático; cuando hablamos de corrientes que fluyen a través de conductores, existe una diferencia de potencial entre diferentes puntos en el conductor.

Nótese que no hemos hecho suposición alguna respecto a la forma del conductor. Si es esférico, la carga se distribuirá uniformemente por la superficie. En aquellos conductores cuya forma no es esférica, la densidad de carga no es uniforme en la superficie, pero la superficie es todavía equipotencial. Inclusive en un conductor con cavidades internas, con carga

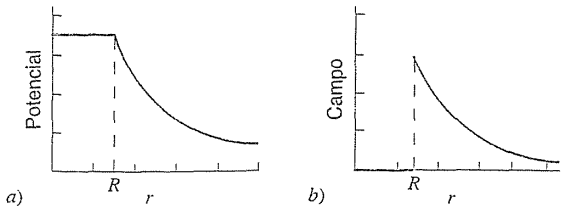


FIGURA 28-20. *a*) El potencial de un conductor esférico cargado. *b*) el campo eléctrico del conductor.

o sin ella, todos los puntos (de la superficie y del interior) se encuentran al mismo potencial.

La conclusión de que la superficie del conductor es una equipotencial concuerda con la de la sección 28-8, donde afirmamos que las líneas del campo eléctrico siempre son perpendiculares a las superficies equipotenciales. En la sección 27-6 recurrimos a la ley de Gauss para determinar que el campo eléctrico que se halla fuera de las superficie del conductor es perpendicular a la superficie, lo cual ha de ser verdadero si la superficie del conductor es una equipotencial.

Podemos obtener los resultados explícitos en el caso de un conductor esférico sólido que tiene en su superficie una carga total q distribuida uniformemente. En la sección 25-5 comentamos una propiedad del cascarón esférico con carga uniforme: la fuerza en una carga externa es la misma que si el cascarón fuera reemplazado con una carga puntual en su centro. Esta propiedad nos permite utilizar las expresiones de carga puntual con el potencial eléctrico (Ec. 28-18) y el campo eléctrico (Ec. 26-6) en sitios donde $r > R$.

Dentro del cascarón la fuerza en una carga puntual es cero, lo cual significa que el potencial ha de poseer el mismo valor en todo el conductor, incluyendo su superficie. El valor en ella se obtiene de la ecuación 28-18 evaluado en el caso de $r = R$; así que el potencial en el interior es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}, \qquad r < R. \tag{28-40}$$

La figura 28-20 muestra el campo y el potencial en un conductor esférico cargado y aislado. El campo es cero con $r < R$ y disminuye como $1/r_2$ para $r > R$. El potencial es constante cuando $r < R$ y disminuye como $1/r$ si $r > R$.

Descarga en corona (opcional)

La carga superficial se distribuye uniformemente a través de un conductor esférico, pero *no* lo hará tratándose de conductores de forma arbitraria.* Cerca de los puntos afilados o bordes, la densidad de carga superficial —y, por tanto, el campo eléctrico fuera de la superficie— puede alcanzar valores muy elevados.

Para ver desde el punto de vista cualitativo cómo ocurre eso, consideremos dos esferas conductoras de radios diferentes conectadas mediante un alambre delgado (Fig. 28-21). Supóngase que elevamos el arreglo entero hasta un potencial arbitrario V. Al utilizar la ecuación 28-40, los potenciales (iguales) de las dos esferas son

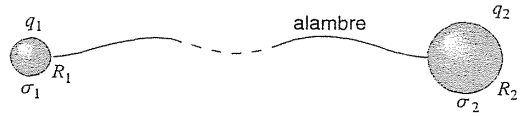


FIGURA 28-21. Dos esferas conductoras conectadas por un alambre largo y delgado.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{R_2},$$

que nos da

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{28-41}$$

Suponemos que las esferas se encuentran tan lejos que la carga en una no afecta a la distribución de la carga en la otra.

La razón de las densidades de carga superficial en ambas es

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1/4\pi R_1^2}{q_2/4\pi R_2^2} = \frac{q_1 R_2^2}{q_2 R_1^2}.$$

La combinación del resultado anterior con la ecuación 28-41 nos da

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}. \tag{28-42}$$

La ecuación 28-42 indica que la esfera más pequeña tiene mayor densidad de carga superficial. Al recordar que para una carga externa el campo es el mismo que si reemplazáramos la esfera por una carga puntual en su centro, el campo fuera de la superficie de la esfera puede expresarse así

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{28-43}$$

De acuerdo con la ecuación 28-42, la densidad de carga superficial es más grande en la esfera de radio menor y, en consecuencia, el campo también lo es fuera de la superficie de radio más pequeño. *Cuanto más pequeño es el radio de la esfera, más grande será el campo eléctrico fuera de la superficie.*

Cerca de un conductor afilado (es decir, de radio muy pequeño) el campo eléctrico puede ser lo bastante grande para ionizar las moléculas en el aire circundante; por eso, el aire normalmente no conductor puede conducir la carga y alejarla de él. A ese efecto se le llama *descarga en corona*. La utilizan los rociadores electrostáticos para transferir la carga a las gotas de pintura, que luego acelera un campo eléctrico. Las fotocopiadoras que se basan en el proceso xerográfico usan un alambre para producir una descarga en corona que transfiere una carga a una superficie cubierta de selenio; se neutraliza a la carga en regiones donde la luz choca contra la superficie y las áreas cargadas restantes atraen un fino polvo negro que forma la imagen. ■

* Véase "The Lightning-rod Fallacy", por Richard H. Price y Ronald J. Crowley, *American Journal of Physics*, septiembre de 1985, p. 843, para una minuciosa discusión de este fenómeno.

28-10 EL ACELERADOR ELECTROSTÁTICO (opcional)

Muchos estudios relativos al núcleo se involucran en las reacciones nucleares, que tienen lugar cuando un haz de partículas incide en un blanco. Un método con que se aceleran se basa en una técnica electrostática. Una partícula con carga positiva q "cae" a través de una cambio negativo, en el potencial ΔV y, por eso, experimenta un cambio negativo en su energía potencial, $\Delta U = q\,\Delta V$, de acuerdo con la ecuación 28-14. El incremento correspondiente a la energía cinética de la partícula es $\Delta K = -\Delta U$; y suponiendo que la partícula parte del reposo, su energía cinética es

$$K = -q\,\Delta V. \qquad (28\text{-}44)$$

En los átomos ionizados, q normalmente es positiva. Para obtener la mayor energía posible del haz, nos gustaría tener la máxima diferencia de potencial. En las aplicaciones de interés para la física nuclear, hacen falta las partículas con energía cinética de millones de electrón-volts (MeV) para superar la fuerza de repulsión de Coulomb entre las partículas incidentes y blanco. Las energías cinética de Mev exigen diferencias de potencial de millones de volts.

En la figura 28-22 se muestra un aparato electrostático que produce ese tipo de diferencias de potencial. Una pequeña esfera conductora de radio a y que tiene una carga q se halla dentro de un cascarón grande de radio b que lleva la carga Q. Una trayectoria conductora se establece momentáneamente entre los dos conductores; la carga q se mueve por completo hacia el conductor externo, sin importar la cantidad de Q que ya esté allí (porque la carga de un conductor siempre se dirige a la superficie externa). Si se cuenta con un mecanismo apropiado para reponer la carga q en la esfera interna partiendo del suministro externo, en teoría la carga Q en la esfera exterior y su potencial pueden aumentar sin límite. En la práctica, el potencial terminal se ve limitado por las chispas que se producen en el aire (Fig. 28-23).

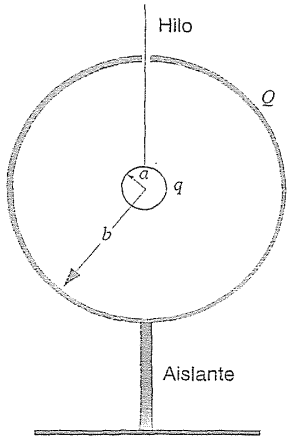


FIGURA 28-22. Una esfera pequeña con carga se suspende dentro de un cascarón esférico cargado y más grande.

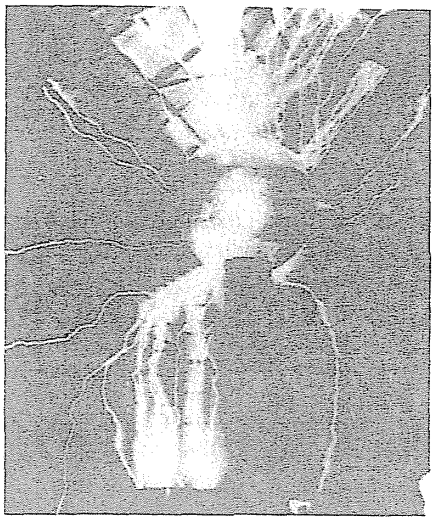


FIGURA 28-23. Generador electrostático, con un potencial de 2.7 millones de volts, que causa chispas debido a la conducción a través del aire.

A principios de la década de 1930, Robert J. Van de Graaff fue el primero en aplicar este principio tan conocido de la electrostática para acelerar las partículas nucleares; se le conoce como *acelerador de Van de Graaff*. Se conseguían potenciales de varios millones de volts; el potencial límite provenía de la fuga de carga a través de los soportes aislantes o la ruptura del aire (o del gas aislante a alta presión) que rodea a la terminal de alto voltaje.

La figura 28-24 muestra el diseño básico del acelerador de Van de Graaff. La carga es difundida desde una punta afilada

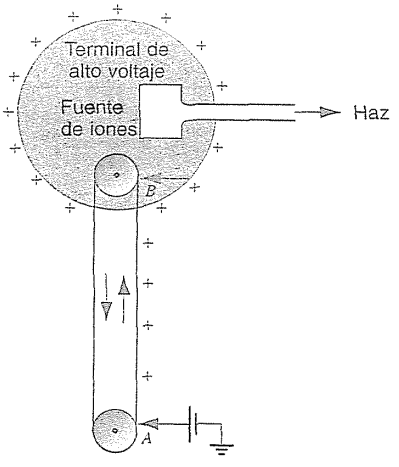


FIGURA 28-24. Diagrama del acelerador de Van de Graaff. La carga positiva se distribuye sobre el cinturón móvil en A y se extrae del cinturón en B donde fluye hacia la terminal que se carga con un potencial V. Los iones de carga positiva son repelidos de la terminal y forman el haz del acelerador.

(denominada punto de corona) en *A* hasta un cinturón móvil hecho de material aislante (a menudo hule). El cinturón conduce la carga a la terminal de alto voltaje, donde la recoge otro punto de corona *B* y se dirige al conductor externo. Dentro de la terminal está una fuente de iones positivos; por ejemplo, núcleos de hidrógeno (protones) o de helio (partículas alfa). Los iones "caen" del potencial alto y al hacerlo adquieren una energía cinética de varios MeV. La terminal se encuentra confinada en un tanque que contiene gas aislante para evitar chispas.

Una ingeniosa variación de este diseño básico aprovecha el mismo voltaje alto para acelerar los iones dos veces, con lo cual se obtiene un incremento adicional de la energía cinética. Una fuente de iones *negativos*, que se logra al agregar un electrón a un átomo neutro, se halla fuera de la terminal. Estos iones negativos "caen hacia" el potencial positivo de la terminal. En el interior de la terminal de alto voltaje, el haz atraviesa una cámara compuesta por un gas o un papel de aluminio, diseñada para eliminar o extraer varios electrones de los iones negativos, convirtiéndolos en iones positivos que después se "caen del" potencial positivo. Estos aceleradores dobles de Van de Graaff utilizan hoy un voltaje terminal de 25 millones de volts para acelerar los iones, entre ellos el carbono o el oxígeno, hasta que alcanzan energías cinéticas superiores a los 100 MeV.

PROBLEMA RESUELTO 28-14. Calcule la diferencia de potencial entre las dos esferas de la figura 28-22.

Solución La diferencia de potencial $V(b) - V(a)$ tiene dos contribuciones: una procedente de la esfera pequeña y la otra del cascarón esférico grande. Éstas pueden calcularse en forma independiente y sumarse algebraicamente. Consideremos primero el cascarón grande. En la figura 28-20*a*, se indica que el potencial en todos los puntos internos posee el mismo valor que el de la superficie. Así pues, la contribución del cascarón grande a la diferencia $V(b) - V(a)$ es 0.

En consecuencia, lo único que falta es evaluar la diferencia considerando sólo la esfera pequeña. En todos los puntos externos a ella, podemos tratarla como una carga puntual y la diferencia de potencial puede obtenerse con la ecuación 28-17:

$$V(b) - V(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$$

La expresión anterior ofrece la diferencia de potencial entre la esfera interna y el cascarón externo. Nótese que esto *no depende de la carga Q en la capa externa.* Si q es positiva, la diferencia siempre será negativa, indicando que el cascarón externo siempre estará al potencial más bajo. Si se permite que la carga positiva fluya entre las esferas, invariablemente lo hará del potencial más alto al más bajo —es decir, de la esfera interna a la externa—, sin que importe la cantidad de carga que ya se encuentra en el cascarón esférico externo.

OPCIÓN MÚLTIPLE

28-1 Energía potencial

28-2 Energía potencial eléctrica

28-3 El potencial eléctrico

1. Movemos una carga puntual negativa desde *a* hasta varios puntos finales posibles *b* en la figura 28-25. ¿Cuál trayectoria requiere la máxima cantidad de trabajo externo para mover una partícula?

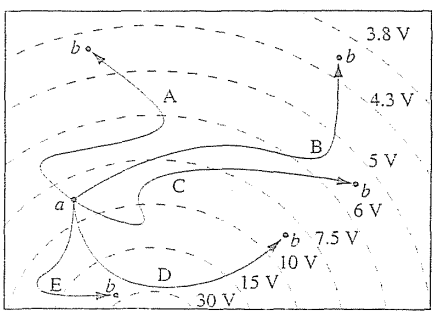


FIGURA 28-25. Pregunta de opción múltiple 1.

2. Se libera un electrón del reposo en una región del espacio con un campo eléctrico no cero. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?
   A) El electrón empezará a moverse hacia una región de potencial más alto.
   B) El electrón empezará a moverse hacia una región de potencial más bajo.
   C) El electrón empezará a moverse en una línea de potencial constante.
   D) No se puede llegar a una conclusión, al menos que se conozca la dirección del campo eléctrico.

28-4 Cálculo del potencial a partir del campo

3. En condiciones electrostáticas, dentro de un conductor cargado,
   A) $V = 0$. B) $\partial V/\partial x = 0$. C) $\partial^2 V/\partial x^2 = 0$.
   D) Dos de A), B) o C) deben ser verdaderos.
   E) Los tres deben ser verdaderos.
4. Las líneas del campo eléctrico están más juntas cerca del objeto *A* que del objeto *B*. Podemos concluir que
   A) el potencial cercano a *A* es mayor que el potencial cercano a *B*.
   B) el potencial cercano a *A* es menor que el potencial cercano a *B*.
   C) el potencial cercano a *A* es igual al potencial cercano cercano a *B*.
   D) nada sobre los potenciales relativos cercanos a *A* o a *B*.
5. La figura 28-26 muestra las líneas del campo eléctrico alrededor de tres cargas puntuales, *A*, *B* y *C*.
   a) ¿Qué punto corresponde al potencial más alto?
   A) *P* B) *Q* C) *R*
   D) Los tres puntos tienen el mismo potencial.
   b) ¿Qué punto corresponde al potencial más bajo?
   A) *P* B) *Q* C) *R*
   D) Los tres puntos tienen el mismo potencial.

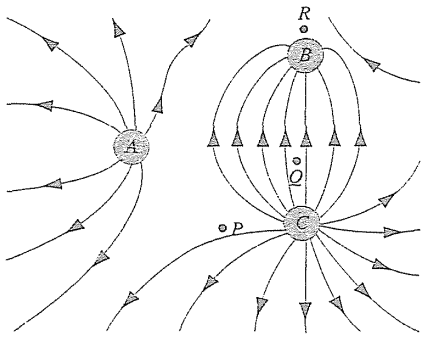


FIGURA 28-26. Pregunta de opción múltiple 5.

28-5 Potencial generado por cargas puntuales

6. Una carga positiva q se halla situada como se muestra en la figura 28-27*a* y el potencial en el punto P es V_0 (con $V = 0$ en el infinito).

a) Una segunda carga $q' = +q$ equidista del punto P como se ve en al figura 28-27*b*. Ahora el potencial en P es

A) $4V_0$. B) $2V_0$. C) $\sqrt{2}V_0$.
D) $V_0/2$. E) 0.

b) En vez de una carga positiva, una carga negativa $q' = -q$ está situada como se ve en la figura 28-27*b*. Ahora el potencial en P es

A) $4V_0$. B) $2V_0$. C) $\sqrt{2}V_0$.
D) $V_0/2$. E) 0.

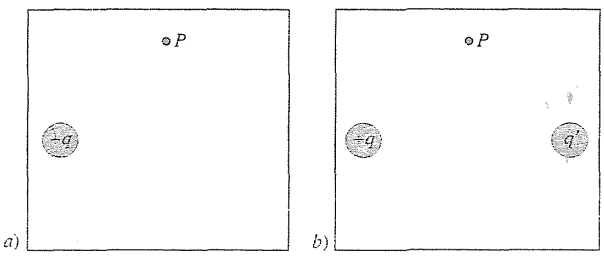


FIGURA 28-27. Pregunta de opción múltiple 6.

7. Se requiere 1 mJ de trabajo para mover del infinito dos cargas positivas idénticas $+q$ para que las separe una distancia a.

a) ¿Cuánto trabajo se requiere para mover desde el infinito tres cargas idénticas $+q$ de modo que estén en los vértices de un triángulo equilátero con una longitud de lado a?

A) 2 mJ B) 3 mJ C) 4 mJ D) 9 mJ

b) ¿Cuánto trabajo se necesita para mover desde el infinito cuatro cargas positivas idénticas $+q$, de modo estén dispuestas en los vértices de un tetraedro con longitud de lado a?

A) 3 mJ B) 4 mJ C) 6 mJ D) 16 mJ

8. Una carga puntual $+q$ se halla en el origen y otra carga puntual $+2q$ se encuentra en $x = a$, donde a es positiva; aquí $V(\infty) = 0$.

a) ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

A) Cerca de las cargas el potencial eléctrico puede ser cero fuera del eje x.
B) La magnitud del potencial eléctrico será máxima en el eje x.
C) El potencial eléctrico puede ser cero en la región entre las cargas.
D) El potencial eléctrico puede ser cero sólo en el eje x.

b) ¿En cuál de las siguientes regiones sobre el eje x pudiera existir un punto donde el campo eléctrico sea cero?

A) $-\infty < x < 0$ B) $0 < x < a$
C) $a < x < \infty$
D) V no se cancela en la región $-\infty < x < \infty$

9. Una carga puntual $+q$ se encuentra en el origen y otra carga puntual $-2q$ se halla en $x = a$, donde a es positiva; aquí $V(\infty) = 0$.

a) ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

A) Cerca de las cargas, el potencial eléctrico puede ser cero fuera del eje x.
B) Cerca de las cargas, la magnitud del potencial eléctrico puede alcanzar un máximo fuera del eje x.
C) El potencial eléctrico puede ser cero sólo entre las cargas.
D) El potencial eléctrico puede ser cero sólo en el eje x.

b) ¿En cuál región o regiones siguientes pudiera existir un punto donde el potencial eléctrico sea cero?

A) $-\infty < x < 0$ B) $0 < x < a$.
C) $a < x < \infty$
D) V no se cancela en la región $-\infty < x < \infty$

28-6 El potencial eléctrico de las distribuciones de carga continua

10. Considere el potencial eléctrico $V(z)$ en el eje de un anillo de carga positiva; aquí $V(\infty) = 0$.

a) $V(z)$ tendrá su valor más grande cuando

A) $z = 0$. B) $0 < |z| < \infty$.
C) $|z| = \infty$. D) A) y C) son correctas.

b) $|V(z)|$, puede ser cero donde

A) $z = 0$. B) $0 < |z| < \infty$.
C) $|z| = \infty$. D) A) y C) son correctas.

11. Considere el potencial eléctrico $V(z)$ en el eje de un disco uniforme; aquí $V(\infty) = 0$.

a) $V(z)$ tendrá su valor más grande cuando

A) $z = 0$. B) $0 < |z| < \infty$.
C) $|z| = \infty$. D) A) y C) son correctas.

b) $V(z)$ puede ser cero cuando

A) $z = 0$. B) $0 < |z| < \infty$.
C) $|z| = \infty$. D) A) y C) son correctas.

28-7 Cálculo del campo a partir del potencial

12. Una pequeña carga situada en el origen experimenta una fuerza electrostática dirigida a lo largo del eje x. Podemos concluir que en el origen

A) $V \neq 0$. B) $\partial V/\partial x \neq 0$. C) $\partial^2 V/\partial x^2 \neq 0$.
D) Dos de A), B) o C) deben ser verdaderos.
E) Los tres deben ser verdaderos.

13. Un dipolo eléctrico paralelo al eje x y situado en el origen experimenta una fuerza electrostática dirigida a lo largo del eje x. Podemos concluir que en el origen

A) $V \neq 0$. B) $\partial V/\partial x \neq 0$. C) $\partial^2 V/\partial x^2 \neq 0$.
D) Dos de A), B) o C) deben ser verdaderos.
E) Los tres deben ser verdaderos.

28-8 Superficies equipotenciales

14. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es verdadera para el flujo Φ_E a través de una superficie equipotencial cerrada?
    A) $\Phi_E = 0$ B) $\Phi_E > 0$ C) $\Phi_E < 0$
    D) Φ_E es proporcional a la carga neta dentro de la superficie.

28-9 El potencial de un conductor cargado

15. Una pequeña esfera originalmente tiene una carga $+ q$. La bajamos y la introducimos en una lata conductora. *a*) ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece fija a medida que descendemos la esfera, pero antes que toque la lata? (Puede haber más de una respuesta correcta.)
    A) El potencial de la lata.
    B) El potencial de la esfera.
    C) La carga de la esfera.
    D) La carga neta en la esfera y en la lata.
    b) La bola toca la lata. ¿Cuál de las siguientes magnitudes son iguales antes y después que la bola toca la lata? (Puede haber más de una respuesta correcta.)
    A) El potencial de la lata.
    B) El potencial de la esfera.
    C) La carga en la esfera.
    D) La carga neta en la esfera y en la lata.
16. Dos pequeñas esferas conductoras ($r = 1$ cm), separadas por una distancia de 1 m, tienen cargas positivas idénticas. El potencial eléctrico de una esfera es V_0 (con $V = 0$ en el infinito). *a*) El potencial de la otra esfera
    A) es mayor que V_0.
    B) es menor que V_0.
    C) es igual a V_0.
    D) no puede determinarse sin información adicional.
    b) Acercamos las esferas hasta que se toquen. Su potencial eléctrico es ahora V, donde
    A) $V = V_0$. B) $V_0 < V < 2V_0$.
    C) $V = 2V_0$ D) $2V_0 < V$.

28-10 El acelerador electrostático

PREGUNTAS

1. ¿Podemos designar el potencial de la Tierra + 100 V en vez de cero? ¿Qué efecto tendría semejante suposición en los valores medidos de *a*) los potenciales y de *b*) las diferencias de potencial?
2. ¿Qué sucedería si nos encontrásemos en una plataforma aislada y nuestro potencial aumentara 10 kV respecto a la Tierra?
3. ¿Por qué el electrón-volt es a menudo una unidad más útil de energía que el joule?
4. ¿Cómo se compara un protón-volt con el electrón-volt? La masa del protón es 1840 veces mayor que la del electrón.
5. ¿Depende de la carga transferida la cantidad de trabajo por unidad de carga requerida para transferir una carga eléctrica de un punto a otro en un campo electrostático.
6. Distinga entre la diferencia de potencial y la diferencia de energía potencial. Dé ejemplos de afirmaciones en que estos términos se empleen correctamente.
7. Estime la energía combinada de todos los electrones que chocan contra la pantalla de un osciloscopio de rayos catódicos en 1 segundo.
8. ¿Por qué es posible proteger un cuarto contra las fuerzas eléctricas, pero no contra las de gravitación?
9. Suponga que la Tierra tiene una carga neta que no es cero. ¿Por qué aun así es posible adoptarla como punto estándar de referencia del potencial y asignarle el potencial $V = 0$?
10. ¿Puede haber una diferencia de potencial entre dos conductores que tengan cargas iguales de la misma magnitud?
11. Dé ejemplos de situaciones donde el potencial de un cuerpo cargado tiene signo opuesto al de su carga.
12. ¿Pueden intersectarse dos superficies equipotenciales diferentes?
13. Un trabajador se electrocutó accidentalmente y un periódico dio la noticia en los siguientes términos: "El trabajador tocó accidentalmente un cable de alto voltaje y sufrió una descarga de 20,000 V". Critique la noticia.
14. Recomendación a los alpinistas que queden atrapados en una tormenta de rayos y de truenos: *a*) alejarse rápidamente de picos y de cordilleras; *b*) juntar ambos pies y acurrucarse a cielo raso, de modo que sólo toquen el suelo con los pies. ¿En qué se basa este consejo?
15. Si $\vec{E}$ es cero en un punto determinado, ¿deberá serlo también V allí? Dé algunos ejemplos para comprobar su respuesta.
16. Si conoce $\vec{E}$ sólo en un punto particular, ¿podrá calcular V en él? De no ser así, ¿qué información adicional necesita?
17. En la figura 28-18, ¿es el campo eléctrico E mayor en la izquierda o en la derecha de la figura?
18. ¿Es una superficie de potencial constante el disco no conductor de carga uniforme del problema resuelto 28-12? Explique su respuesta.
19. Hemos visto que, dentro de un conductor hueco, nos protegemos en contra de los campos de cargas externas. Si estamos afuera de uno que contenga cargas, ¿estamos protegidos contra los campos de ellas? Explique por qué sí o por qué no.
20. Si la superficie de un conductor cargado es una equipotencial, ¿significa eso que la carga presenta distribución uniforme en la superficie? Si el campo eléctrico tiene magnitud constante en la superficie de un conductor cargado, ¿significa eso que la carga se distribuye uniformemente?
21. En la sección 28-9 se nos recordó que la carga suministrada al interior de un conductor aislado se transfiere íntegramente a la superficie externa del conductor, sin importar si la carga ya se halla allí. ¿Puede mantener ese estado para siempre? De no ser así, ¿qué se lo impide?
22. ¿Cómo puede un átomo aislado no tener un momento permanente de dipolo eléctrico?
23. Los iones y los electrones funcionan como centro de condensación; se forman gotas de agua alrededor de ellos en el aire. Explique por qué.
24. Si V es una constante en determinada región del espacio, ¿qué puede decir acerca de $\vec{E}$ en ella?
25. En el capítulo 14 vimos que la fuerza del campo gravitacional es cero dentro de un cascarón esférico de materia. La fuerza del campo eléctrico es cero no sólo dentro de un conductor esférico aislado y cargado, sino también en el interior de un conductor aislado de cualquier forma. ¿Es cero la fuerza del campo gravitacional dentro de, digamos, un cascarón cúbico de materia? Si la respuesta es negativa, ¿en qué aspecto la analogía no es completa?

26. ¿Cómo es posible cerciorarse de que el potencial eléctrico en una región determinada tiene un valor constante?
27. Diseñe un arreglo de tres cargas puntuales, separadas por una distancia finita, que tenga cero energía potencial eléctrica.
28. Se pone una carga en un conductor aislado que tiene la forma de un cubo perfecto. ¿Cuál será la densidad relativa de carga en varios puntos del cubo (superficies, bordes ángulos)? ¿Qué sucederá con la carga si el cubo está en el aire?
29. Hemos visto (Sec. 28-9) que el potencial dentro de un conductor es igual al de su superficie. *a*) ¿Qué sucede si el conductor tiene forma irregular y una cavidad interna también irregular? *b*) ¿Qué sucede si la cavidad tiene un pequeño "hoyo de gusano" que la conecta al exterior? *c*) ¿Qué sucede si la cavidad está cerrada, pero tiene una carga puntual suspendida en su interior? Explique el potencial dentro del material conductor y en varios puntos de las cavidades.
30. Una cascarón esférico conductor y aislante tiene una carga negativa. ¿Qué ocurrirá si ponemos en contacto con el cascarón interno un objeto metálico de carga positiva? Explique los tres casos en que la carga positiva *a*) es menor que, *b*) igual y *c*) mayor que la carga negativa.
31. Una esfera metálica sin carga, suspendida de un hilo de seda se coloca en un campo eléctrico externo uniforme. ¿Qué magnitud tiene el campo eléctrico en los puntos del interior de la esfera? ¿Cambia su respuesta si la esfera está cargada?

EJERCICIOS

28-1 Energía potencial

28-2 Energía potencial eléctrica

1. En el modelo de quark de las partículas elementales, un protón se compone de tres quark: dos quark "arriba", cada uno con una carga $+\frac{2}{3}e$ y un quark "abajo", con una carga $-\frac{1}{3}e$. Supóngase que los tres quarks equidistan entre sí. Suponga que la distancia es 1.32×10^{-15} m y calcule *a*) la energía potencial de la interacción entre los dos quarks "arriba" y *b*) la energía eléctrica potencial total del sistema.
2. Obtenga una expresión del trabajo requerido por un agente externo para colocar juntas las cuatro cargas como se indica en la figura 28-28. Los lados del cuadrado tienen una longitud a.

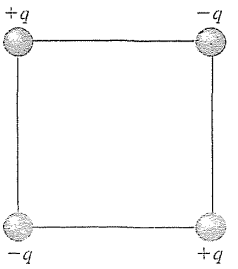


FIGURA 28-28. Ejercicio 2.

3. Una década antes de que Einstein publicara su teoría de la relatividad, J. J. Thomson propuso que el electrón podría estar constituido por pequeñas partes y que su masa provenía de la interacción eléctrica de ellas. Más aún, sostuvo que la energía es igual a mc^2. Haga una estimación aproximada de la masa de los electrones en la siguiente forma: suponga que el electrón se compone de tres partes idénticas reunidas del infinito y colocadas en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados son iguales al radio clásico del electrón, 2.82×10^{-15} m. *a*) Determine la energía eléctrica potencial de este arreglo. *b*) Divida entre c^2 y compare su resultado con la masa aceptada del electrón (9.11×10^{-31} kg). El resultado mejora si se suponen más partes (Prob. 2). Hoy se piensa que el electrón es una partícula simple e indivisible.
4. Las cargas mostradas en la figura 28-29 están fijas en el espacio. Calcule el valor de la distancia x, de modo que la energía potencial eléctrica del sistema sea cero.

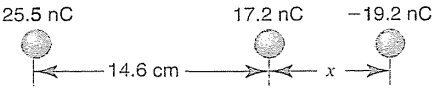


FIGURA 28-29. Ejercicio 4.

5. La figura 28-30 contiene una representación idealizada de un núcleo de ^{238}U ($Z = 92$) a punto de experimentar una fisión. Calcule *a*) la fuerza de repulsión que opera en cada fragmento y *b*) la energía potencial eléctrica mutua de los dos fragmentos. Suponga que tienen el mismo tamaño y carga, que son esféricos y que apenas si se tocan. El radio del núcleo inicialmente esférico ^{238}U es 8.0 fm. Suponga que el material que sale de los núcleos presenta una densidad constante.

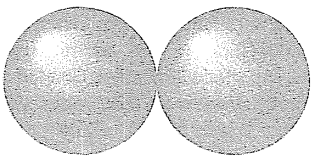


FIGURA 28-30. Ejercicio 5.

28-3 El potencial eléctrico

6. Dos superficies conductoras paralelas y planas de espaciado $d = 1.0$ cm tienen una diferencia de potencial ΔV de 10.3 kV. Se proyecta un electrón de una placa hacia la segunda. ¿Cuál es la velocidad inicial del electrón si se detiene exactamente en la superficie de esta última? No tenga en cuenta los efectos relativistas.
7. En un relámpago típico, la diferencia de potencial entre los puntos de descarga es de unos 1.0×10^9 V y la carga transferida es de 30 C aproximadamente. *a*) ¿Cuánta energía se libera? *b*) Si toda la que se libera pudiera usarse para acelerar un automóvil de 1200 kg a partir del reposo, ¿cuál sería su velocidad final? *c*) Si pudiera usarse para derretir hielo, ¿cuánto se derritiría a 0°C?
8. La diferencia de potencial entre cargas puntuales durante una tormenta es 1.23×10^9 V. ¿De qué magnitud es el cambio en la energía potencial eléctrica de un electrón que se desplaza entre ellos? Exprese su respuesta en *a*) joules y *b*) en volts.

9. Mantenemos una partícula de carga q en posición fija en el punto P y una segunda de masa m, que tiene la misma carga, la mantenemos en reposo a una distancia r_1 de P. Esta última se libera entonces y se repele de la primera. Determine su velocidad en el instante en que se halla a una distancia r_2 de P. Suponga que $q = 3.1\ \mu C$, $m = 18$ mg, $r_1 = 0.90$ mm y $r_2 = 2.5$ mm.
10. Proyectamos un electrón con una velocidad inicial de 3.44×10^5 m/s hacia un protón esencialmente en reposo. Si al principio éste está muy lejos del protón, ¿a qué distancia de él su velocidad será instantáneamente el doble de su valor original?
11. Calcule *a*) el potencial eléctrico creado por el núcleo de un átomo de hidrógeno en la distancia promedio del electrón circulante ($r = 5.29 \times 10^{-11}$ m); *b*) la energía potencial eléctrica del átomo cuando el electrón está en este radio; *c*) la energía cinética del electrón, suponiendo que describe una órbita circular de este radio centrado en el núcleo. *d*) ¿Cuánta energía se necesita para ionizar el átomo de hidrógeno? Exprese todas las energías en electrón-volts y suponga que $V = 0$ en el infinito.
12. En el rectángulo de la figura 28-31, los lados tienen las longitudes de 5.0 cm y 15 cm, $q_1 = -5.0\ \mu C$ y $q_2 = +2.0\ \mu C$. *a*) ¿Cuáles son los potenciales eléctricos en los vértices B y A? (Suponga que $V = 0$ en el infinito.) *b*) ¿Cuánto trabajo externo se requiere para mover una tercera carga $q_3 = +30\ \mu C$ de B a A a lo largo de una diagonal del rectángulo? *c*) En este proceso, ¿se convierte el trabajo externo en energía electrostática potencial o a la inversa? Explique su respuesta.

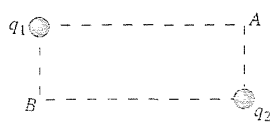


FIGURA 28-31. Ejercicio 12.

28-4 Cálculo del potencial a partir del campo

13. Dos grandes placas conductoras paralelas están separadas por una distancia de 12.0 cm y transportan cargas iguales pero opuestas en sus superficies frontales. Un electrón colocado en la mitad entre ellas experimenta una fuerza de 3.90×10^{-15} N. *a*) Calcule el campo eléctrico en la posición del electrón. *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas?
14. Una hoja infinita tiene una densidad de carga $\sigma = 0.12\ \mu C/m^2$. ¿Qué distancia hay entre las superficies equipotenciales cuyos potenciales difieren en 48 V?
15. Un contador Geiger tiene un cilindro metálico de 2.10 cm de diámetro a lo largo de cuyo eje se extiende un alambre de 1.34×10^{-4} cm de diámetro. Si entre ellos se aplican 1855 V, determine el campo eléctrico en la superficie de *a*) el alambre y *b*) el cilindro. (Sugerencia: utilice el resultado del Prob. 10, Cap. 27.)
16. En el experimento de la gota de aceite de Millikan (Sec. 26-6), un campo eléctrico 1.92×10^5 N/C es mantenido en equilibrio entre dos placas separadas por 1.50 cm. Obtenga la diferencia de potencial entre ellas.

28-5 Potencial generado por cargas puntuales

17. Un núcleo de oro contiene una carga positiva igual a la de 79 protones y tiene un radio de 7.0 fm (Prob. res. (28-7). Una partícula alfa (constituida por dos protones y dos neutrones) tiene una energía cinética K en puntos lejanos del núcleo y se dirige directamente a él. La partícula alfa apenas si toca la superficie del núcleo donde se invierte la dirección de su velocidad. *a*) Calcule K. *b*) Tenía una energía de 5.0 MeV la segunda partícula alfa que Rutherford y sus colegas usaron en su experimento y que condujo al descubrimiento del concepto del núcleo atómico. ¿Qué conclusión obtiene usted de eso?
18. Calcule la velocidad de escape de un electrón en la superficie de una esfera uniformemente cargada, de radio 1.22 cm y con una carga total 1.76×10^{-15} C. Prescinda de las fuerzas gravitacionales.
19. Una carga puntual tiene $q = +1.16\ \mu C$. Considere el punto A, que está a 2.06 m de distancia y el punto B que se halla a 1.17 m de distancia en una dirección diametralmente opuesta, como se ve en la figura 28-32*a*. *a*) Calcule la diferencia de potencial $V_A - V_B$. *b*) Repita el ejercicio si los puntos A y B están situados de igual manera que en la figura 28-32*b*.

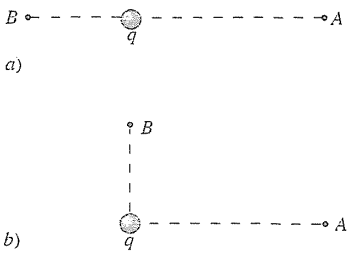


FIGURA 28-32. Ejercicio 19.

20. Gran parte del material presente en los anillos de Saturno (Fig. 28-33) son diminutos granos de polvo, cuyo radio es del orden de 1.0 μm. Los granos se encuentran en una región que contiene un gas ionizado diluido; recogen el exceso de electrones. Si el potencial eléctrico en la superficie de uno de ellos es -400 V (en relación con $V = 0$ en el infinito), ¿cuántos electrones en exceso ha recogido?

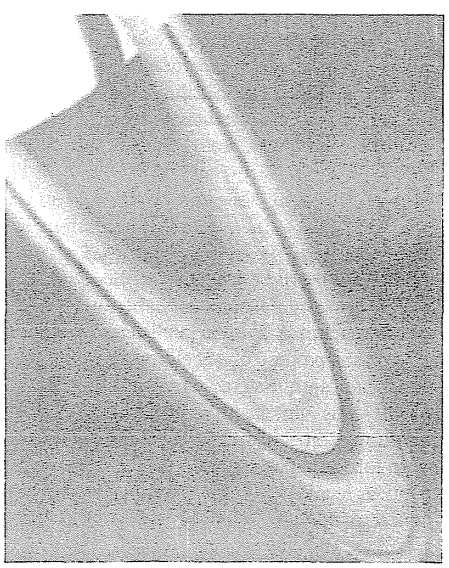


FIGURA 28-33. Ejercicio 20.

21. Al pasar una nave espacial por el gas ionizado y diluido de la ionosfera de la Tierra, su potencial suele cambiar en -1.0 V antes que complete una revolución. Suponga que la nave es una esfera de radio 10 m, estime la carga que recoge.

22. Suponga que la carga negativa en una moneda de centavo de cobre se lleva muy lejos de la Tierra —quizá a una galaxia distante— y que se distribuye uniformemente la carga positiva en la superficie terrestre. ¿Cuánto cambiará el potencial eléctrico en ella? (Prob. 25-1).
23. Un campo eléctrico de 100 V/m aproximadamente se observa a menudo cerca de la Tierra. Si este campo fuera igual en toda la superficie, ¿cuál sería el potencial eléctrico de un punto en ella? Suponga que $V = 0$ en el infinito.
24. La molécula de amoníaco NH_3 tiene un momento permanente de dipolo eléctrico de 1.47 D, donde D es la unidad debye con un valor de 3.34×10^{-30} C · m. Calcule el potencial eléctrico generado por una molécula en un punto a 52.0 nm de distancia a lo largo del eje del dipolo. Suponga que $V = 0$ en el infinito.
25. *a*) En la figura 28-34 obtenga una expresión para $V_A - V_B$. *b*) ¿Se reduce el resultado a la respuesta expresada cuando $d = 0$? ¿cuando $a = 0$? ¿cuando $q = 0$?

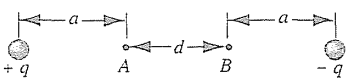


FIGURA 28-34. Ejercicio 25.

26. En la figura 28-35, localice los puntos, si los hay, *a*) donde $V = 0$ y *b*) donde $E = 0$. Considere sólo puntos en el eje y suponga que $V = 0$ en el infinito.

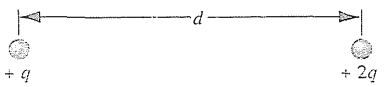


FIGURA 28-35. Ejercicio 26.

27. Dos cargas $q = +2.13\ \mu$C están fijas en el espacio y separadas por una distancia $d = 1.96$ cm, como se aprecia en la figura 28-36. *a*) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto *C*? Suponga que $V = 0$ en el infinito. *b*) Se trae una tercera carga $Q = +1.91\ \mu$C lentamente desde el infinito hasta *C*. ¿Cuánto trabajo se debe realizar? *c*) ¿Cuál es la energía potencial *U* de la configuración cuando interviene la tercera carga?

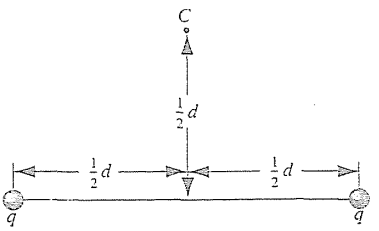


FIGURA 28-36. Ejercicio 27.

28-6 El potencial eléctrico de las distribuciones de carga continua

28. ¿A qué distancia en el eje de un disco uniformemente cargado de radio *R* es el potencial eléctrico igual a la mitad de su valor en la superficie del disco en el centro?
29. Una carga eléctrica de -9.12 nC se distribuye uniformemente alrededor de un anillo de 1.48 m de radio, el cual se encuentra en el plano *yz* con su centro en el origen. Una partícula que transporta una carga de -5.93 pC se halla en el eje *x* con $x = 3.07$ m. Calcule el trabajo efectuado por un agente externo al mover la carga puntual hacia el origen.

28-7 Cálculo del campo a partir del potencial

30. Suponga que el potencial eléctrico varía en el eje *x* como se indica en la gráfica de la figura 28-37. De los intervalos mostrados en ella (no tenga en cuenta el comportamiento en los puntos finales de los intervalos), determine aquellos en que E_x tiene *a*) su máximo valor absoluto y *b*) su mínimo valor. *c*) Grafique E_x en función de *x*.

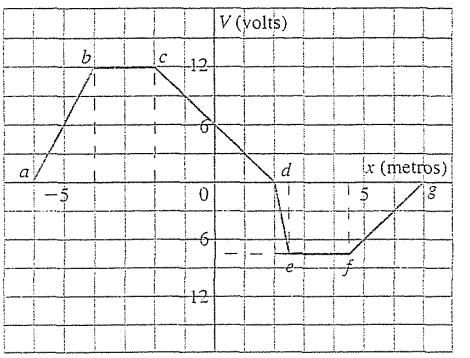


FIGURA 28-37. Ejercicio 30.

31. Dos grandes placas metálicas paralelas están separadas por una distancia de 1.48 cm y tienen cargas iguales pero opuestas en sus superficies frontales. La placa negativa está aterrizada y se supone que su potencial es cero. Si el potencial a la mitad entre las placas es + 5.52 V, ¿cuál es el campo eléctrico en esta región?
32. A partir de la ecuación 28-30 obtenga una expresión para *E* en los puntos axiales de un anillo con carga uniforme.
33. Calcule el gradiente radial de potencial, $\partial V/\partial r$, en la superficie de un núcleo de oro (Prob. res. 28-7).
34. El ejercicio 39 del capítulo 26 se refiere al cálculo que Rutherford hizo del campo eléctrico a una distancia *r* del centro de un átomo. También obtuvo el potencial eléctrico como

$$V = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right).$$

a) Demuestre en qué forma la expresión del campo eléctrico dada en el ejercicio 39 del capítulo 26 se deduce de esta expresión de *V*. *b*) ¿Por qué esta expresión no se convierte en cero a medida que $r \longrightarrow \infty$?
35. El potencial eléctrico *V* en el espacio situado entre las placas de un tubo al vacío, ahora obsoleto, está dado por $V = (1530\ \text{V/m}^2)x^2$, donde *x* es la distancia de una de las placas. Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico cuando $x = 1.28$ cm.

28-8 Superficies equipotenciales

36. Dos cargas lineales son paralelas al eje *z*. Una, la de carga por unidad de longitud $+\lambda$, está a una distancia *a* a la derecha del eje. La otra, la de carga por unidad de longitud de carga $-\lambda$ se halla a una distancia *a* hacia la izquierda del eje (las líneas y el eje *z* se encuentran en el mismo plano). Dibuje algunas de las superficies equipotenciales.
37. Al pasar de *A* a *B* en una línea de campo eléctrico, éste realiza 3.94×10^{-19} J de trabajo en un electrón del campo descrito grá-

ficamente en la figura 28-38. ¿Cuáles son las diferencias de potencial eléctrico *a*) $V_B - V_A$, *b*) $V_C - V_A$ y *c*) $V_C - V_B$?

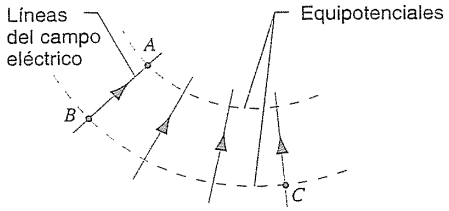


FIGURA 28-38. Ejercicio 37.

38. Considere una carga puntual con $q = 1.5 \times 10^{-8}$ C. *a*) ¿Cuál es el radio de una superficie equipotencial que tiene un potencial de 30 V? Suponga que $V = 0$ en el infinito. *b*) ¿Están espaciadas uniformemente las superficies cuyo potencial difiere en una cantidad constante (digamos 1.0 V)?
39. En la figura 28-39 dibuje cualitativamente *a*) las líneas del campo eléctrico y *b*) las intersecciones de las superficies equipotenciales con el plano de la figura. (Sugerencia: considere el comportamiento cercano a las cargas puntuales y a gran distancia del par de cargas.)

FIGURA 28-39. Ejercicio 39.

40. Tres grandes líneas paralelas de carga presentan las densidades lineales relativas que aparecen en la figura 28-40. Dibuje algunas líneas del campo eléctrico y las intersecciones de algunas superficies equipotenciales con el plano de esta figura.

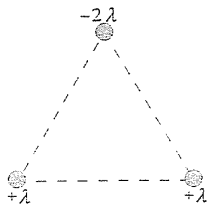


FIGURA 28-39. Ejercicio 40

28-9 El potencial de un conductor cargado

41. Un cascarón esférico delgado conductor de 20 cm de radio externo tiene una carga de + 3.0 μC. Dibuje *a*) la magnitud del campo eléctrico $\vec{E}$ y *b*) el potencial V en función de la distancia r respecto al centro del cascarón. (Haga $V = 0$ en el infinito.)
42. Considere dos esferas conductoras muy separadas, 1 y 2; la segunda con una distancia dos veces mayor que el diámetro de la primera. La esfera más pequeña lleva inicialmente una carga positiva q y la más grande no tiene carga inicialmente. En seguida, las conectamos con un alambre largo y delgado. *a*) ¿Cómo se relacionan los potenciales finales V_1 y V_2 de las esferas? *b*) Calcule las cargas finales q_1 y q_2 en las esferas a partir de q.
43. *a*) Si la Tierra tuviera una carga neta equivalente a un electrón/m^2 del área superficial (suposición muy artificial), ¿cual sería el potencial de la Tierra? (Haga $V = 0$ en el infinito. *b*) ¿Cuál sería el campo eléctrico generado por la Tierra afuera de su superficie?
44. Una carga de 15 nC puede ser generada mediante simple frotamiento. ¿A qué potencial (en relación con $V = 0$ en el infinito) elevará una esfera conductora aislada de 16 cm de radio?
45. Determine *a*) la carga y *b*) la densidad de carga en la superficie de una esfera conductora de 15.2 cm de radio, cuyo potencial es 215 V. Suponga que $V = 0$ en el infinito.
46. El objeto metálico de la figura 28-41 es una figura de revolución alrededor del eje horizontal. Si lleva carga negativa, dibuje unas cuantas equipotenciales y líneas del campo eléctrico. Utilice el razonamiento físico en vez del análisis matemático.

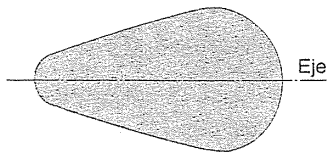


FIGURA 28-41. Ejercicio 46.

47. Dos esferas conductoras, una de 5.88 cm y la otra de 12.2 cm de radio, tienen cada una carga de 28.6 nC y están muy separadas. Si después las conectamos mediante un alambre, calcule *a*) la carga final en ellas y *b*) el potencial de cada una, suponiendo que $V = 0$ en el infinito.
48. Una esfera metálica cargada de 16.2 cm de radio tiene una carga neta de 31.5 nC. *a*) Determine el potencial eléctrico en la superficie de la esfera si $V = 0$ en el infinito. *b*) ¿A qué distancia de la superficie de la esfera el potencial disminuyó 550 V?

28-10 El acelerador electrostático

49. *a*) ¿Cuánta carga se requiere para aumentar una esfera metálica aislada de 1.0 m de radio a un potencial de 1.0 MV? Suponga que $V = 0$ en el infinito. Repita el ejercicio con una esfera de 1.0 cm de radio. *b*) ¿Por qué utilizar una gran esfera en un acelerador electrostático cuando el mismo potencial puede conseguirse usando una carga más pequeña y una esfera pequeña? (Sugerencia: calcule las densidades de las cargas.)
50. Supóngase que tiene un valor de 3.41 MV la diferencia de potencial entre la capa interna de alto potencial de un acelerador de Van de Graaff y el punto donde las cargas se esparcen hacia el cinturón en movimiento. Si el cinturón transfiere carga al cascarón con una velocidad de 2.83 mC/s, ¿qué potencia mínima hay que suministrar para impulsarlo?

PROBLEMAS

1. *a*) ¿A través de que diferencias de potenciales debe caer un electrón para adquirir, según la teoría de Newton, una velocidad v igual a la de velocidad c de la luz? *b*) La mecánica newtoniana fracasa conforme $v \rightarrow c$. Por tanto, empleando la expresión relativista correcta con la energía cinética (Ec. 20-27).

$$K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right]$$

en vez de la expresión newtoniania $K = \frac{1}{2}mv^2$, determine la velocidad real del electrón, adquirida al caer por la diferencia de

potencial calculada en *a*). Exprese esta velocidad como una fracción apropiada de la velocidad de la luz.

2. Repita el ejercicio 3, suponiendo que el electrón es un cascarón hueco de radio 2.82×10^{-15} m, con una carga e distribuida uniformemente a través de la superficie.
3. Se supone que una partícula de carga (positiva) Q ocupa una posición fija en P. Una segunda partícula de masa m y de carga negativa $-q$ se desplaza con velocidad constante en un círculo de radio r_1 centrado en P. Deduzca una expresión para el trabajo W que debe efectuar un agente externo sobre la segunda partícula, a fin de aumentar a r_2 el radio del círculo de movimiento, centrado en P.
4. El campo eléctrico dentro de una esfera no conductora de radio R, que contiene una densidad de carga uniforme, sigue una dirección radial y tiene la magnitud

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

donde q es la carga total de la esfera, y r la distancia respecto al centro de la esfera. *a*) Determine el potencial V dentro de la esfera, suponiendo que $V = 0$ en $r = 0$. *b*) ¿Cuál es la diferencia del potencial eléctrico entre un punto en la superficie y el centro de la esfera? Si q es positiva, ¿qué punto se halla en el potencial más alto? *c*) Demuestre que el potencial a una distancia r del centro, donde $r < R$, está dado por

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3},$$

donde el cero del potencial se toma con $r = \infty$. ¿Por qué este resultado no es igual al de la parte *a*)?

5. Tres cargas de + 122 mC se colocan en los ángulos de un triángulo equilátero, de 1.72 m de lado. Si se les suministra energía con una rapidez de 831 W, ¿cuántos días se requerirán para trasladar una de las cargas al punto medio de la línea que une las dos restantes?
6. Proyectamos una partícula de masa m, carga $q > 0$ y de energía cinética K (desde una separación infinita) hacia un núcleo pesado de carga Q, que, supuestamente, ocupa una posición fija en nuestro marco de referencia. *a*) Si la mira es "perfecta", ¿a qué distancia del centro del núcleo se encuentra la partícula cuando se detiene instantáneamente? *b*) Con una mira imperfecta, su acercamiento más próximo al núcleo es el doble de la distancia determinada en la parte *a*). Calcule la rapidez de la partícula en distancia tan cercana de acercamiento. Suponga que la partícula no llega a la superficie del núcleo.
7. Una gota esférica de agua que transporta una carga de 32.0 pC tiene un potencial de 512 V en su superficie. *a*) ¿Cuál es el radio de la gota? *b*) Si dos gotas de la misma carga y radio se combinan para formar una sola gota esférica, ¿cuál es el potencial en la superficie de la gota nueva? Haga $V = 0$ en el infinito.
8. La figura 28-42 muestra el borde una hoja "infinita" de densidad de carga positiva σ. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza el campo de la hoja a medida que una pequeña carga positiva de prueba q_0 es desplazada de una posición inicial en la hoja a una posición final situada a una distancia perpendicular z con ella? *b*) Utilice el resultado de *a*) para demostrar que el potencial eléctrico de una hoja infinita de carga puede escribirse

$$V = V_0 - (\sigma/2\epsilon_0)z,$$

donde V_0 es el potencial en la superficie de la hoja.

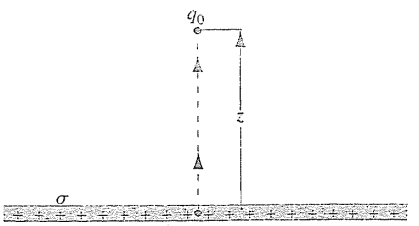


FIGURA 28-42. Problema 8.

9. Una carga puntual $q_1 = +6e$ está fija en el origen de un sistema coordenado rectangular, y una segunda carga puntual $q_2 = -10e$ está fija en $x = 9.60$ nm, $y = 0$. Con $V = 0$ en el infinito, el sitio de todos los puntos en el plano xy con $V = 0$ es un círculo centrado en el eje x, como se indica en la figura 28-43. Determine *a*) la posición de x_c el centro del círculo y *b*) el radio R del círculo. *c*) ¿Es también un círculo el equipotencial $V = 5$ V?

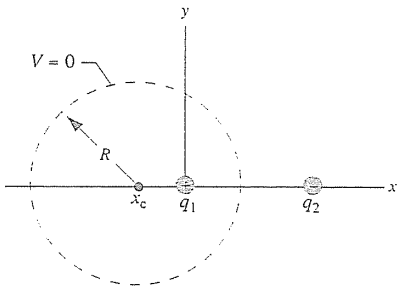


FIGURA 28-43. Problema 9.

10. Una cantidad total de carga positiva Q se esparce sobre un anillo no conductor circular y plano de radio interno a y de radio externo b. La carga se distribuye de modo que la densidad de carga (carga por unidad de superficie) está dada por $\sigma = k/r^3$, donde r es la distancia del centro del anillo a un punto cualquiera de él. Demuestre que (con $V = 0$ en el infinito) el potencial en el centro está dado por

$$V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{a+b}{ab}\right).$$

11. En la configuración de carga de la figura 28-44 demuestre que, suponiendo que $r >> d$, $V(r)$ en los puntos del eje vertical está dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\left(1 + \frac{2d}{r}\right).$$

(Sugerencia: la configuración de la carga puede concebirse como la suma de una carga aislada y de un dipolo.) Haga $V = 0$ en el infinito.

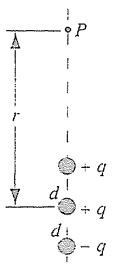


FIGURA 28-44. Problema 11.

12. Una carga por unidad de longitud λ se distribuye uniformemente en una delgada varilla de longitud L. *a*) Determine el potencial (que se decide que sea cero en el infinito) en el punto P a una distancia y de un extremo de la varilla y en línea con ella (Fig. 28-45). *b*) Con el resultado de *a*) obtenga el componente del campo eléctrico en P en la dirección y (a lo largo de la varilla). *c*) Determine el componente del campo eléctrico en P en dirección perpendicular a la varilla.

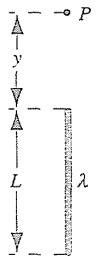


FIGURA 28-45. Problema 12.

13. En una delgada varilla de longitud L sobre el eje x, con un extremo en el origen $x = 0$ como en la figura 28-46, está distribuida una carga por unidad de longitud dada por $\lambda = kr$, donde k es una constante, y r la distancia desde el origen. *a*) Suponiendo que el potencial electrostático en el infinito es cero, calcule V en el punto P sobre el eje y. *b*) Determine el componente vertical, E_y, del campo eléctrico en el punto P partiendo del resultado de la parte *a*) y también por cálculo directo. *c*) ¿Por qué E_x, el componente horizontal del campo eléctrico en P, no puede obtenerse mediante el resultado de la parte *a*)? *d*) ¿A qué distancia de la varilla en el eje y el potencial es igual a una mitad del valor en el extremo izquierdo de ella?

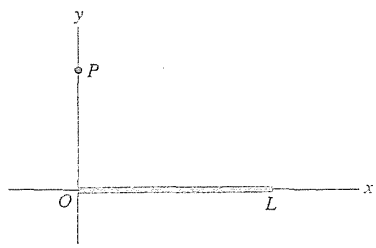


FIGURA 28-46. Problema 13.

14. Dos esferas conductoras idénticas de radio 15.0 cm están separadas por una distancia de 10.0 m. ¿Qué carga tiene cada una si el potencial de una es +1500 V, y el de la otra −1500 V? ¿Qué suposiciones hizo usted? Suponga que $V = 0$ en el infinito.
15. Suponga que la Tierra es un conductor esférico de 6370 km de radio y que inicialmente no contiene carga. Una esfera metálica de 13 cm de radio, que tiene una carga de − 6.2 nC está aterrizada, es decir, en contacto eléctrico con la Tierra. Demuestre que este proceso efectivamente descarga la esfera, al calcular la fracción del exceso de electrones originalmente presentes en la esfera que quedan después de aterrizarla.
16. Una esfera de cobre, cuyo radio mide 1.08 cm, tiene un revestimiento superficial muy delgado de níquel. Algunos de los átomos de níquel son radiactivos; cada una emite un electrón al decaer. La mitad de estos átomos penetran en la esfera y cada uno deposita allí 100 keV de energía. La mitad restante de electrones se escapa, llevando cada uno afuera una carga de $-e$. El revestimiento de níquel realiza una actividad de 10.0 mCi (10.0 milicuries = 3.70×10^8 decaimientos por segundo). La esfera está suspendida de una larga cuerda no conductora y está aislada del ambiente. ¿Cuánto tardará el potencial de la esfera en aumentar 1000 V?
17. Considere un cascarón conductor, delgado y aislado, que tiene una carga uniforme con una densidad de carga constante σ. ¿Cuánto trabajo se necesita para pasar una pequeña carga positiva de prueba q_0. *a*) de la superficie del cascarón a su interior, a través de un orificio pequeño; *b*) de un punto de la superficie a otro sin importar la trayectoria; *c*) de punto a punto dentro del cascarón; *d*) de un punto cualquiera P fuera del cascarón en cualquier trayectoria, atraviese o no el cascarón, y de regreso a P? *e*) En las condiciones anteriores, ¿importa si el cascarón conduce o no?
18. El electrodo de alto voltaje de un acelerador electrostático es un cascarón metálico esférico con carga cuyo potencial es $V = +9.15$ MV (en relación con $V = 0$ en el infinito). *a*) Se da una ruptura eléctrica en el gas de esta máquina en un campo $E = 100$ MV/m. ¿Qué restricciones hay que hacer en el radio r del cascarón para evitarla? *b*) Un cinturón de hule, largo y en movimiento, transfiere carga al cascarón a 320 μC/S; el potencial de éste permanece constante a causa de la fuga. ¿Qué potencia mínima se requiere para transferir la carga *b*) El cinturón mide $w = 48.5$ cm de ancho y se desplaza a una velocidad $v = 33.0$ m/s. ¿Cuál es la densidad de carga superficial en el cinturón?

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. La densidad de carga en una varilla de longitud L centrada en el eje x está dada por $\lambda = (1.0\ \mu\text{C/m})\text{sen}^2\ (\pi x/L)$. *a*) Con operaciones numéricas realice una grafica del potencial en el plano xy y luego utilice su gráfica para generar líneas equipotenciales. *b*) Basándose en ella dibuje las líneas de campo eléctrico y compare el resultado con el problema para resolver por computadora el problema 2 del capítulo 26.
2. Mediante operaciones numéricas verifique que en dos dimensiones las líneas equipotenciales alrededor de dos cargas iguales, pero opuestas, son círculos. ¿Son círculos concéntricos?

CAPÍTULO 29

LAS PROPIEDADES ELÉCTRICAS DE LOS MATERIALES

Aunque la materia ordinaria es neutra, pues contiene igual número de cargas positivas y negativas, los materiales presentan muchos comportamientos diferentes al ser colocados en campos eléctricos. Algunos materiales pueden conducir la electricidad inclusive en campos sumamente pequeños, mientras que otros mantienen su estado no conductor en campos enormes. En algunos materiales que no permiten el movimiento de la carga, las propiedades eléctricas provienen de la rotación de los dipolos en un campo aplicado, pero en otros éste puede crear dipolos donde no existían antes.

En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento básico de dos tipos de materiales: conductores y aislantes. Explicaremos cómo entender su comportamiento en los campos aplicados basados en modelos simples de fuerzas y del movimiento de cargas. Aunque para comprender a fondo las propiedades eléctricas de los materiales, se necesitan los métodos de la mecánica cuántica, puede aprenderse mucho acerca de los materiales a partir de los modelos clásicos que no requieren del comportamiento cuántico.

29-1 TIPOS DE MATERIALES

Los materiales naturales y artificiales reúnen una amplia gama de propiedades eléctricas. Éstas dependen, en parte, del comportamiento de los átomos o moléculas individuales y, en parte, de las interacciones de los átomos o moléculas en el material. La capacidad de un material para conducir electricidad también se basa en sus condiciones, como temperatura y presión.

Los *conductores* (la mayoría de los metales, por ejemplo) son materiales por donde la carga eléctrica fluye fácilmente. En muchos metales cada átomo cede uno o varios de sus electrones externos o de valencia al material entero, y a menudo pensamos que los electrones forman un "gas" en el interior del material, en vez de pertenecer a uno de los átomos. Los electrones se mueven libremente cuando se aplica un campo eléctrico a un material. En condiciones estáticas el campo dentro de un conductor es cero, aun cuando lleve una carga neta. (De no ser así, los electrones libres acelerarían, lo cual violaría la suposición de la distribución estática de la carga.) En la sección 29-2, explicaremos el efecto de un campo externo aplicado a un conductor en condiciones estáticas.

Por el contrario, en un *aislante* los electrones están ligados firmemente a los átomos y no se mueven libremente bajo los campos eléctricos que podrían aplicarse en circunstancias ordinarias. Un aislante puede transportar cualquier distribución de carga en su superficie o en su interior, y (a diferencia de un conductor) el campo eléctrico en su interior puede tener valores diferentes a cero.

A menudo al material aislante puede considerársele como un conjunto de moléculas que no se ionizan con facilidad. En este caso, las propiedades eléctricas pueden depender del momento dipolar eléctrico de las moléculas. Los materiales cuyas moléculas tienen momentos dipolares permanentes reciben el nombre de *polares;* los campos eléctricos pueden alinear los momentos dipolares de las moléculas, como se mencionó en la sección 26-7. En algunos materiales la alineación de los dipolos se conserva, aun cuando eliminemos el campo aplicado; se les conoce como *ferroeléctricos* (en analogía con los materiales ferromagnéticos, en que los momen-

tos dipolares *magnéticos* siguen alineados a pesar de suprimir el campo *magnético* externo.) Estos efectos pueden mostrarlos hasta los materiales no polares, porque el campo eléctrico aplicado puede dar origen a un momento dipolar en las moléculas. Se explican a fondo en la sección 29-5.

La materia común suele ser neutra. Cuando no hay un campo eléctrico externo, los átomos individuales y también todo el material son neutros. Al aplicar un campo eléctrico pueden desprenderse uno o más electrones de los átomos de un material. A este proceso se le llama *ionización* y se da el nombre de *iones* a los átomos resultantes de carga positiva con un déficit de electrones. En un aislante, un campo eléctrico lo bastante grande puede ionizar los átomos, de modo que se dispone de electrones que puedan desplazarse por el material. En tales circunstancias un aislante se comporta a veces como conductor. A esta situación se le conoce como *ruptura* y requiere campos normales en el intervalo de 10^6 V/m, en el aire, a 10^7 V/m en plásticos y cerámicos.

Los *semiconductores* ocupan un lugar intermedio entre los aislantes y los conductores. En un semiconductor, quizás un átomo en 10^{10} a 10^{12} podría aportar un electrón al flujo de electricidad en el material (a diferencia de un conductor donde *todos* los átomos aportan un electrón). Entre los semiconductores de uso común cabe mencionar el silicio y el germanio, junto con muchos compuestos.

Incluso, los mejores conductores (cobre, plata y oro) muestran una resistencia pequeña, pero absolutamente no cero, ante el flujo de la electricidad. En ciertas condiciones, donde a menudo se observa enfriamiento a temperaturas muy bajas, la carga eléctrica puede fluir por algunos materiales sin resistencia alguna. A esta propiedad se le denomina *superconductividad,* y *superconductores* a los materiales en esas condiciones. Algunos son conductores pobres a temperatura ambiente, pero pueden ser superconductores a temperaturas bajas.

En el presente capítulo vamos a estudiar cómo los conductores y los semiconductores reaccionan ante los campos eléctricos aplicados. Para entender su comportamiento se necesitan los métodos de la mecánica cuántica, que se explicarán en el capítulo 49.

29-2 UN CONDUCTOR EN UN CAMPO ELÉCTRICO: CONDICIONES ESTÁTICAS

Supóngase que ponemos en un campo eléctrico una gran placa rectangular de un conductor como el cobre, según se indica en la figura 29-1*a*. Podemos considerar el cobre como un "gas" de electrones que se mueven libremente por una red de iones de cobre en sitios fijos. El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}_0$ ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = -e\vec{\mathbf{E}}_0$ sobre los electrones, la cual los hace moverse en dirección opuesta al campo. Se dirigen rápidamente hacia la superficie superior del cobre, dejando un déficit de electrones (una carga positiva) en la superficie del fondo. Cuando colocamos un conductor en un campo externo, las cargas se redistribuyen casi de inmediato después que se aplican las condiciones electrostáticas.

Las dos superficies del conductor pueden considerarse hojas con carga, que crean un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}'$ como se aprecia en la figura 29-1*b*. Dentro del cobre el campo eléctrico neto $\vec{\mathbf{E}}$ es la suma vectorial de los dos campos: $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 + \vec{\mathbf{E}}'$. En función de las magnitudes, la suma se convierte en diferencia porque los dos siguen dirección contraria: $E = E_0 - E'$. Dentro del cobre, en condiciones estáticas el campo eléctrico neto E ha de ser cero, como se comentó en la sección 27-6. (Allí no tuvimos en cuenta la presencia de un campo eléctrico aplicado externamente; sin embargo, la conclusión no cambia: el campo eléctrico en el interior del conductor debe ser cero, pues de lo contrario los electrones en él acelerarían y esto violaría la suposición de una situación estática.) El campo eléctrico aplicado E_0 ha de mover suficientes electrones hacia la superficie para generar un campo eléctrico E' que tenga la misma magnitud que E_0, creando así un campo neto de cero dentro del cobre (Fig. 29-1*c*). Fuera de la plancha las hojas con carga en las dos superficies producen campos eléctricos que se cancelan, dejando inalterado allí el campo neto.

La figura 29-2 muestra un conductor sin carga y de forma irregular en un campo eléctrico inicialmente uniforme. Una vez más, los electrones libres avanzan rápidamente hacia la superficie, originando una distribución de cargas positiva y

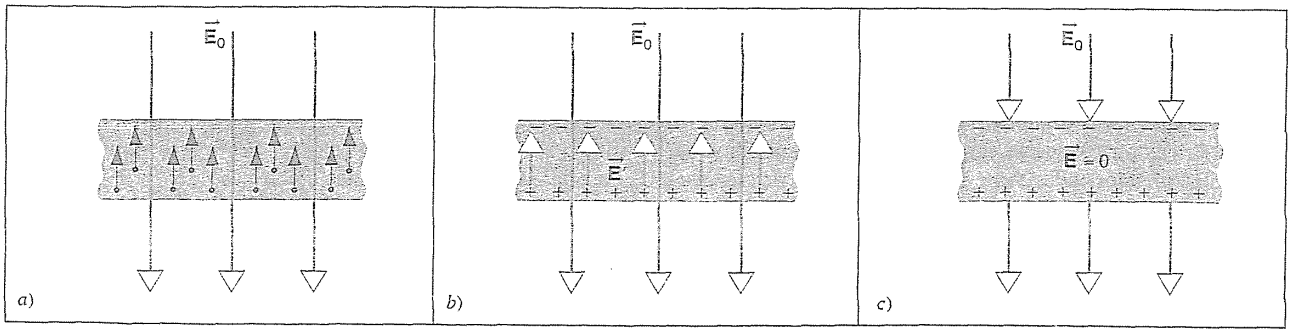


FIGURA 29-1. *a)* Una plancha grande de conductor se pone en un campo eléctrico uniforme. Los electrones se desplazan hacia arriba en respuesta al campo. *b)* Los electrones se acumulan en la superficie superior, dejando iones positivos en el fondo. Estas cargas crean un campo $\vec{\mathbf{E}}'$. *c)* Dentro de la plancha el campo neto es cero.

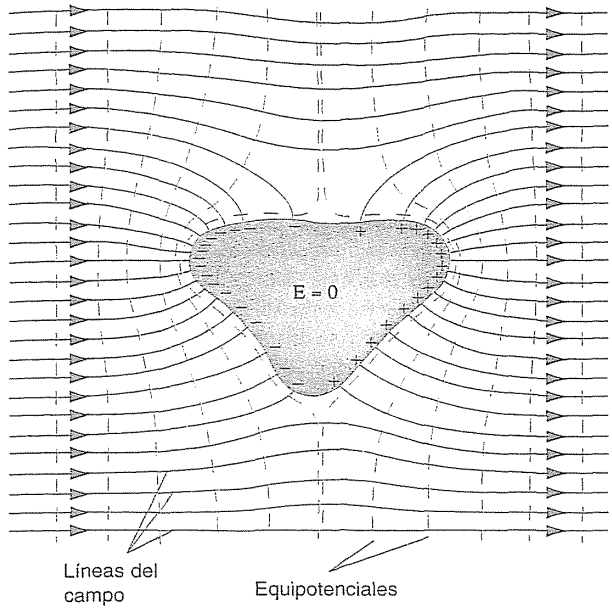


FIGURA 29-2. Se pone un conductor sin carga en un campo eléctrico externo. Los electrones de conducción se distribuyen en la superficie para producir una distribución de carga como se indica, reduciendo a cero el campo dentro del conductor. Nótese la distorsión de las líneas de fuerza (líneas llenas) y de las equipotenciales (líneas punteadas), cuando el conductor se coloca en el campo anteriormente uniforme. Nótese asimismo que las líneas del campo eléctrico se originan en las cargas positivas y que terminan en las cargas negativas.

negativa que produce un campo eléctrico, el cual cancela el campo aplicado en el interior del conductor. Fuera del conductor, el campo es la suma (vectorial) del campo uniforme original y el que proviene de las cargas en la superficie del conductor. Nótese que las líneas de campo se originan en las cargas positivas y terminan en las negativas. Nótese asimismo que la densidad de carga es grande en las partes de la superficie donde el radio de curvatura es pequeño, según señalamos en la sección 28-9 y que es grande (las líneas de campo están muy próximas) donde la densidad de carga es grande.

En la superficie del conductor de la figura 29-2, las líneas del campo eléctrico son perpendiculares a la superficie. De no ser así, el campo tendría un componente paralelo a la superficie, el cual haría mover a las cargas. Esto violaría la suposición de una situación estática; así que el componente del campo eléctrico no puede existir y éste debe ser perpendicular a la superficie.

La figura muestra además las equipotenciales en la situación anterior. Lejos del conductor, donde el campo es uniforme, las equipotenciales son planas. Al acercarnos al conductor se deforman las equipotenciales, hasta que en la superficie la equipotencial la sigue exactamente; según señalamos en la sección 28-9, la superficie de un conductor es una equipotencial.

PROBLEMA RESUELTO 29-1. Una gran placa delgada de cobre se coloca en un campo eléctrico uniforme de magnitud $E_0 = 450$ N/C que es perpendicular a dicha placa (como en la Fig. 29-1). Determine la densidad resultante de la carga superficial en el cobre.

Solución El campo eléctrico produce una densidad de carga positiva σ, en la superficie inferior de la placa y una densidad de carga negativa de igual magnitud en la superficie superior. El campo en el interior de la placa debe ser cero, lo cual significa que las dos distribuciones de carga han de combinarse para crear un campo eléctrico dentro de la placa de magnitud E_0 y de dirección contraria al campo aplicado. Si consideramos que la placa tiene dimensiones muy grandes, el campo generado por la distribución de carga positiva es $E_+ = \sigma/2\epsilon_0$, según la ecuación 26-20, y la magnitud del campo debido a la carga negativa es $E_- = \sigma/2\epsilon_0$. Ambos campos siguen la misma dirección y debemos sumarlos para obtener un campo total de E_0:

$$E_0 = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$$

y la densidad de carga en las superficies es

$$\sigma = \epsilon_0 E_0 = (8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(450\ \mathrm{N/C}) = 3.98 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}.$$

Nótese que afuera de la placa de cobre los campos generados por las dos hojas con carga se cancelan entre sí, de manera que el campo resultante sigue siendo E_0. Esto se da sólo en la geometría plana de este problema y en general no es válido (véase el ejemplo de la Fig. 29-2).

29-3 UN CONDUCTOR EN UN CAMPO ELÉCTRICO: CONDICIONES DINÁMICAS

En la figura 29-1*a*, los electrones se desplazan del fondo de la plancha de cobre a la parte superior bajo la acción del campo eléctrico aplicado, hasta que la concentración de electrones en la parte superior (y de iones positivos en la inferior) crea un campo que cancela el campo aplicado en el interior del cobre e impide que fluyan más electrones. Supóngase que se dispone de un mecanismo para eliminar los electrones en la parte superior de la plancha, para llevarlos alrededor de una trayectoria externa y reinyectarlos en la parte inferior de la plancha (que se muestra esquemáticamente en la Fig. 29-3). En este caso no se acumularía carga en la parte superior ni en la inferior; las condiciones electrostáticas de la sección precedente no son aplicables al cobre. En particular, la conclusión extraída en la sección anterior ya no es válida: en general el campo eléctrico dentro del cobre será no cero cuando fluyan las cargas.

El ciclo continuo de electrones que fluyen es una simple representación de un circuito eléctrico, y se da el nombre de *corriente eléctrica* al flujo de electrones (u otras partículas con carga).

Vamos a examinar el flujo de carga eléctrica en un punto particular en el interior del material (Fig. 29-4). Una cantidad de carga dq atraviesa una pequeña superficie del área A en el tiempo dt. Por ejemplo, el área A podría ser una superficie transversal de alambre por donde fluye la carga. La *corriente*

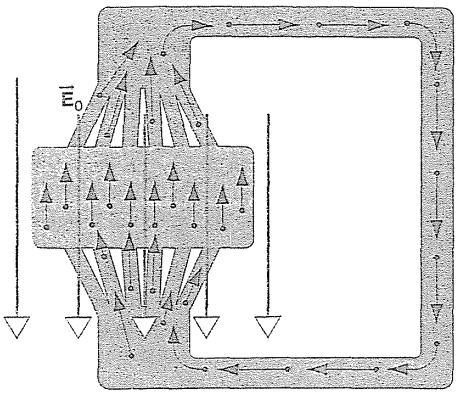


FIGURA 29-3. El campo eléctrico $\vec{E}_0$ mueve a los electrones por la plancha de cobre. Podemos reunirlos en la parte superior de la plancha y transportarlos a lo largo de una trayectoria externa hasta el fondo de ella.

eléctrica se define como la carga neta que pasa a través de la superficie por intervalo de unidad de tiempo:

$$i = dq/dt. \tag{29-1}$$

Para que exista corriente eléctrica debe haber un flujo neto de carga por la superficie. Si átomos neutros la cruzan, no fluirá corriente, aunque las cargas pasen por allí, porque la atraviesa un número igual de cargas positivas y negativas. Si los electrones se desplazan aleatoriamente por el material, y un número igual de ellos cruzan la superficie en una u otra dirección, tampoco fluirá corriente porque la carga neta que la atraviesa es cero.

La corriente eléctrica tiene una dirección, definida como la dirección del flujo de la carga positiva. Pese a ello, la corriente es un escalar y no un vector, pues no cumple con las leyes de la adición vectorial.

La unidad de corriente en el SI es el *ampere* (A), definido así

$$1 \text{ ampere} = 1 \text{ coulomb/segundo}.$$

Si la corriente es constante, la ecuación 29-1 se convierte en

$$i = q/t. \tag{29-2}$$

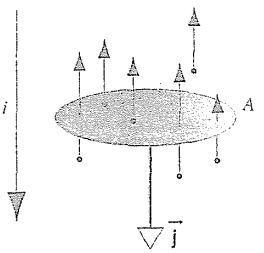


FIGURA 29-4. Los electrones cruzan la superficie A. La dirección de la corriente i y la de la densidad vectorial de corriente $\vec{j}$ es opuesta al movimiento de los electrones.

La carga neta que pasa por una superficie se calcula integrando la corriente:

$$q = \int i\, dt. \tag{29-3}$$

Una magnitud vectorial relacionada es la *densidad de corriente* $\vec{j}$ o corriente por unidad de área, cuya magnitud está definida así

$$j = i/A. \tag{29-4}$$

Por definición la dirección de $\vec{j}$ es la del flujo de una carga positiva. Dado que los electrones se dirigen hacia arriba en la figura 29-4, la dirección de $\vec{j}$ se dirige hacia abajo. Es decir, los electrones se mueven en dirección de $-\vec{j}$.

La corriente que atraviesa una superficie cualquiera puede determinarse integrando la densidad de corriente sobre la superficie:

$$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}, \tag{29-5}$$

donde $d\vec{A}$ es un elemento del área de la superficie, y la integral se resuelve en la superficie entera en que queremos encontrar la corriente. Suponemos que el vector $d\vec{A}$ es perpendicular al elemento de superficie tal que $\vec{j} \cdot d\vec{A}$ es positiva, correspondiente a una corriente positiva i.

Densidad de corriente y velocidad de desplazamiento

Conforme los electrones avanzan por el cobre, los acelera un campo eléctrico que ejerce una fuerza $-e\vec{E}$ sobre ellos. En la sección 29-2 estudiamos las condiciones estáticas, en que el campo eléctrico siempre es cero dentro de un conductor. Aquí vamos a examinar las cargas en movimiento, de manera que las condiciones estáticas no se aplican y $\vec{E}$ puede ser no cero en el interior de un conductor.

Los electrones chocan con los iones de la red y les transfieren energía. De ahí la irregularidad de su movimiento, que consiste en un breve intervalo de aceleración en dirección contraria al campo eléctrico y que se acompaña de una colisión con un ion capaz de poner en movimiento el electrón en una dirección cualquiera, seguida de otra aceleración y así sucesivamente. El efecto neto es un desplazamiento de electrones en dirección contraria al campo. No se produce aceleración neta de electrones, porque sin cesar pierden energía en las colisiones con la red de los iones del cobre. En realidad, se transfiere energía del campo aplicado a esta red (mediante energía interna del conductor, observada frecuentemente como aumento de la temperatura). En promedio, puede decirse que los electrones se mueven con una *velocidad de deriva constante* $\vec{v}_d$ en dirección opuesta a la del campo, según se indica en la figura 29-5.

Consideremos el movimiento de electrones en una porción del conductor de longitud L. Los electrones lo hacen con una velocidad de desplazamiento v_d, de manera que recorren la longitud L en el tiempo $t = L/v_d$. El conductor tiene una superficie transversal A; así que en el tiempo t todos los electrones del volumen AL atravesarán una superficie en el extremo derecho del

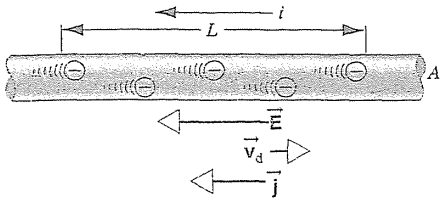


FIGURA 29-5. El campo eléctrico ocasiona que los electrones se desplacen a la derecha. La corriente convencional (la dirección hipotética del flujo de carga positiva) se dirige a la izquierda. También dibuja la densidad de corriente $\vec{j}$ como si los portadores de carga fuesen positivos, de modo que $\vec{j}$ y $\vec{E}$ se hallen en la misma dirección.

conductor. Si la densidad de los electrones (número por unidad de volumen) es n, la magnitud de la carga neta que atraviesa la superficie es $q = enAL$, y la densidad de corriente es

$$j = \frac{q}{At} = \frac{enAL}{AL/v_d} = env_d. \tag{29-6}$$

En notación vectorial, lo anterior se expresa así

$$\vec{j} = -en\vec{v}_d. \tag{29-7}$$

El signo negativo nos recuerda otra vez que la dirección de la densidad de corriente es contraria a la del movimiento de los electrones.

Como se verá en los siguientes problemas resueltos, la velocidad de deriva de los electrones en materiales comunes es mucho más pequeña que la de los movimientos térmicos aleatorios de los electrones (generalmente 10^5 m/s).

PROBLEMA RESUELTO 29-2. Un extremo de un alambre de aluminio, cuyo diámetro mide 2.5 mm, está soldado a un extremo de un alambre de cobre de 1.8 mm de diámetro. El alambre compuesto transporta una corriente estable i de 1.3 A. ¿Qué densidad de corriente tiene cada alambre?

Solución Podemos suponer que la densidad de corriente es una constante (diferente) dentro de cada alambre, con excepción de los puntos cercanos a la unión. La densidad de corriente está dada por la ecuación 29-4, $j = i/A$. La superficie transversal A del alambre de aluminio es

$$A_{Al} = \tfrac{1}{4}\pi d^2 = (\pi/4)(2.5 \times 10^{-3}\ \text{m})^2 = 4.91 \times 10^{-6}\ \text{m}^2,$$

de manera que

$$j_{Al} = \frac{1.3\ \text{A}}{4.91 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 2.6 \times 10^5\ \text{A/m}^2 = 26\ \text{A/cm}^2.$$

Como puede verificarse, la superficie transversal del alambre de cobre es 2.54×10^{-6} m^2 y, por tanto,

$$j_{Cu} = \frac{1.3\ \text{A}}{2.54 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 5.1 \times 10^5\ \text{A/m}^2 = 51\ \text{A/cm}^2.$$

Aquí, no importa el hecho de que los alambres están hechos de un material diferente.

PROBLEMA RESUELTO 29-3. ¿Cuál es la velocidad de deriva de los electrones de conducción en el alambre de cobre del problema resuelto 29-2?

Solución En el cobre, en promedio hay casi un electrón de conducción por átomo. El número n de electrones por unidad de volumen es, pues, igual que el de átomos por unidad de volumen y se determina a partir de

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\rho_m}{M} \quad \text{o} \quad \frac{\text{átomos/m}^3}{\text{átomos/mol}} = \frac{\text{masa/m}^3}{\text{masa/mol}}.$$

Aquí ρ_m es la densidad de (masa) del cobre; N_A, la constante de Avogadro, y M la masa molar del cobre*. En consecuencia,

$$n = \frac{N_A\rho_m}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23}\ \text{electrones/mol})(8.96 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)}{63.5 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}}$$

$$= 8.49 \times 10^{28}\ \text{electrones/m}^3.$$

Entonces, con el uso de la ecuación 29-6 ($v_d = j/ne$), tenemos

$$v_d = \frac{5.1 \times 10^5\ \text{A/m}^2}{(8.49 \times 10^{28}\ \text{electrones/m}^3)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C/electrón})}$$

$$= 3.8 \times 10^{-5}\ \text{m/s} = 14\ \text{cm/h}.$$

El lector debe ser capaz de demostrar que, en el alambre de aluminio, $v_d = 2.7 \times 10^{-5}$ m/s = 9.7 cm/h. ¿Puede explicar en términos físicos por qué en este ejemplo la velocidad de deriva es menor en el aluminio que en el cobre, a pesar de que los dos alambres transportan la misma corriente?

Si los electrones se desplazan a velocidad tan baja, ¿por qué los efectos eléctricos parecen ocurrir inmediatamente después de activar un interruptor, como cuando encendemos las luces de un cuarto? La confusión en este caso se debe a que no se distingue entre la velocidad de deriva de los electrones y la velocidad a que los *cambios* en la configuración del campo eléctrico se mueven por los alambres. La segunda se aproxima a la velocidad de la luz. De modo similar, cuando activamos la válvula de una manguera de jardín, llena de agua, la onda de presión se propaga por la manguera con la velocidad del sonido. La velocidad con que el agua se desplaza por la manguera —medida quizá con un marcador de tinte— es mucho menor.

PROBLEMA RESUELTO 29-4. Un trozo de silicio, con un ancho transversal de $w = 3.2$ mm y con un espesor de $d = 250\ \mu$m transporta una corriente i de 190 mA. El silicio es un *semiconductor de tipo n*, que ha sido "dopado" con una cantidad controlada de impurezas de fósforo. La impureza tiene el efecto de aumentar enormemente n, el número de portadores de carga (electrones en este caso) por unidad de volumen, en comparación con el valor del silicio puro. En este caso $n = 8.0 \times 10^{21}\ \text{m}^{-3}$. *a*) ¿Qué densidad de corriente tiene el trozo? *b*) ¿Cuál es la velocidad de deriva?

Solución *a*) Conforme a la ecuación 29-4,

$$j = \frac{i}{wd} = \frac{190 \times 10^{-3}\ \text{A}}{(3.2 \times 10^{-3}\ \text{m})(250 \times 10^{-6}\ \text{m})}$$

$$= 2.4 \times 10^5\ \text{A/m}^2.$$

b) Con base en la ecuación 29-6,

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{2.4 \times 10^5\ \text{A/m}^2}{(8.0 \times 10^{21}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})} = 190\ \text{m/s}.$$

La velocidad de deriva (190 m/s) de los electrones en este semiconductor de silicio es mucho mayor que la (3.8×10^{-5} m/s) de los electrones de conducción en el conductor metálico de cobre en el problema resuelto 29-3, a pesar de que se parecen las densidades de

* Utilizamos el subíndice m para aclarar que la densidad aquí mencionada es una densidad de masa (kg/m^3), no una densidad de carga (C/m^3).

corriente. La cantidad de portadores de carga en este semiconductor (8.0×10^{21} m^{-3}) es mucho menor que la de portadores de carga en el conductor de cobre (8.49×10^{28} m^{-3}). Los primeros deben desplazarse más rápidamente en el semiconductor para que produzcan la misma densidad de corriente que los segundos producen en el cobre.

29-4 MATERIALES ÓHMICOS

Entre las colisiones con los iones de la red, los electrones en un material conductor son acelerados por el campo eléctrico $\vec{E}$ y, por lo mismo, su velocidad de deriva es proporcional a $\vec{E}$. La densidad de corriente $\vec{j}$ también es proporcional a $\vec{v}_d$; es, pues, razonable que $\vec{j}$ deba ser proporcional a $\vec{E}$. De hecho, observamos este tipo de comportamiento en una amplia gama de materiales. La constante de proporcionalidad entre la densidad de corriente y el campo eléctrico es la *conductividad eléctrica* σ del material:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}. \tag{29-8}$$

Un valor grande de σ indica que el material es un buen conductor de corriente eléctrica. La conductividad es una propiedad de todo el material, no de alguna parte de él. La unidad de conductividad en el SI es el *siemens por metro* (S/m), donde el siemens se define como

$$1 \text{ siemens} = 1 \text{ ampere/volt}.$$

Es más común encontrar materiales caracterizados por su *resistividad*, que es el inverso de la conductividad:

$$\rho = 1/\sigma, \tag{29-9}$$

en este caso la ecuación 29-8 queda así

$$\vec{E} = \rho\vec{j}. \tag{29-10}$$

Las unidades de resistividad son *ohm · metro*, donde el ohm (cuyo símbolo es Ω) se define así

$$1 \text{ ohm} = 1 \text{ volt/ampere}.$$

Nótese que 1 ohm = (1 siemens)$^{-1}$.

Las ecuaciones 29-8 y 29-10 son válidas sólo en los materiales isotrópicos, cuyas propiedades eléctricas son iguales en todas direcciones. En ellos $\vec{j}$ siempre será igual en la misma dirección que $\vec{E}$.

La tabla 29-1 contiene algunos valores de la resistividad de varios materiales. Un aislante perfecto tendrá $\rho = \infty$ (o $\sigma = 0$). Nótese que hasta los buenos aislantes son conductores débiles.

Con la ecuación 29-10 se puede determinar la resistividad de un material con sólo aplicar el campo eléctrico y medir la densidad resultante de corriente. En algunos materiales, se comprueba que la resistividad no es constante, sino que depende de la intensidad del campo eléctrico. En otras palabras, si lo duplicamos no se duplicará la densidad de corriente. En otros materiales se comprueba que la resistividad no depende de la intensividad del campo aplicado en muchos de ellos. En esos materiales, una gráfica de E en función de j nos da una línea recta cuya pendiente es la resistividad ρ. Se les conoce como materiales óhmicos. También se dice que cumplen con la *ley de Ohm:*

> *La resistividad (o conductividad) de un material no depende de la magnitud ni de la dirección del campo eléctrico aplicado.*

Muchos materiales homogéneos, entre ellos los metales conductores como el cobre, siguen la ley de Ohm en cierto intervalo de valores del campo eléctrico aplicado. Si éste es lo bastante grande, el comportamiento de los materiales violará la ley de ohm.

Los valores de resistividad de la tabla 29-1 son propiedades de los materiales enlistados. Quizá queramos conocer la *resistencia* de un objeto en particular, digamos la de un bloque de cobre de ciertas dimensiones. En la figura 29-6 se describe el caso de un conductor homogéneo e isotrópico de longitud L y de superficie transversal uniforme A, al que se aplicó una diferencia de potencial ΔV. En su interior hay un campo eléctrico uniforme

TABLA 29-1 Resistividad de algunos materiales a temperatura ambiente (20°C)

Material	*Resistividad* $\rho(\Omega \cdot m)$	*Coeficiente la resistividad con la temperatura* α_{pro} (por C°)
Metales comunes		
Plata	1.62×10^{-8}	4.1×10^{-3}
Cobre	1.69×10^{-8}	4.3×10^{-3}
Aluminio	2.75×10^{-8}	4.4×10^{-3}
Tungsteno	5.25×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Hierro	9.68×10^{-8}	6.5×10^{-3}
Platino	10.6×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Magnanin[a]	48.2×10^{-8}	0.002×10^{-3}
Semiconductores comunes		
Silicio puro	2.5×10^{3}	-70×10^{-3}
Silicio tipo n[b]	8.7×10^{-4}	
Silicio tipo p[c]	2.8×10^{-3}	
Aislante comunes		
Agua pura	2.5×10^{5}	
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	
Poliestireno	$>10^{14}$	
Cuarzo fundido	$\approx 10^{16}$	

[a] Una aleación diseñada específicamente para que tenga un valor pequeño de α.
[b] Silicio puro "dopado" con impurezas de fósforo para una densidad de portadores de carga de 10^{23} m^{-3}.
[c] Silicio puro "dopado" con impurezas de aluminio para una densidad de portadores de carga de 10^{23} m^{-3}.

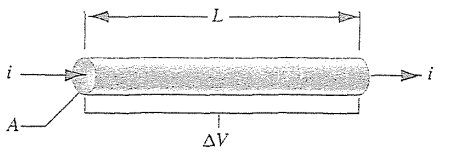


FIGURA 29-6. Una diferencia de potencial ΔV se aplica en un conductor cilíndrico de longitud L y en una superficie transversal A, creando una corriente i.

$E = \Delta V/L$. Si la densidad de corriente es también uniforme en la superficie A, $j = i/A$. Entonces la resistividad será

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{\Delta V/L}{i/A}. \qquad (29\text{-}11)$$

La magnitud $\Delta V/i$ que aparece en la ecuación anterior se define como la resistencia R:

$$R = \frac{\Delta V}{i}. \qquad (29\text{-}12)$$

Al combinar las ecuaciones 29-11 y 29-12, obtenemos una expresión de la resistencia R:

$$R = \rho \frac{L}{A}. \qquad (29\text{-}13)$$

La resistencia R es característica de un objeto particular y depende del material de que esté hecho, lo mismo que de su longitud y superficie transversal; la resistividad ρ caracteriza al material en general. La unidad de resistencia es el ohm (Ω).

La ecuación 29-12 nos brinda otra base para formular la ley de Ohm. En un objeto podemos medir la corriente i con varias diferencias de potencial aplicado y graficar i en función de ΔV. Si la gráfica produce una línea recta, el objeto es óhmico y se sujeta a la ley de Ohm. He aquí una formulación equivalente de ella:

La resistencia de un objeto no depende de la magnitud ni del signo de la diferencia de potencial aplicada.

Los resistores ordinarios que se encuentran en los circuitos eléctricos son óhmicos en el intervalo de las diferencias de potencial normalmente utilizadas en ellos. Los semiconductores, entre otros los diodos y los transistores, suelen ser no óhmicos. En la figura 29-7 se comparan las gráficas de corriente-voltaje en dispositivos óhmicos y no óhmicos.

No olvide que la relación $\Delta V = iR$ *no* es una formulación de la ley de Ohm. Es una ecuación que define la resistencia y se aplica tanto a objetos óhmicos como a no óhmicos. Inclusive en estos últimos puede encontrarse un valor de resistencia R para un valor determinado de ΔV; en otra ΔV se obtendrá un valor distinto de R. En los dispositivos óhmicos se consigue el mismo valor de R con cualquier valor de ΔV.

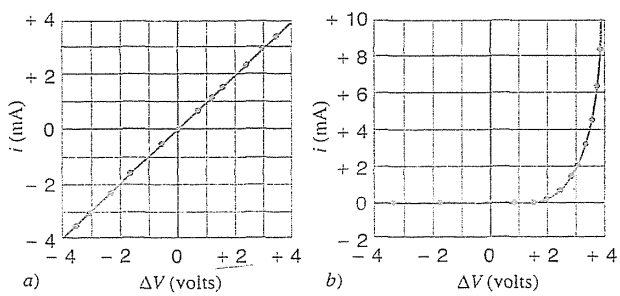


FIGURA 29-7. *a*) Diagrama de corriente-voltaje de un material que se sujeta a la ley de Ohm, en este caso un resistor de 1000-Ω. *b*) Diagrama de corriente-voltaje de un material que no se sujeta a la ley de Ohm, en este caso un diodo de unión *pn*.

ΔV, i y R son magnitudes *macroscópicas*, pues se aplican a un cuerpo o una región ampliada. Las magnitudes *microscópicas* correspondientes son $\vec{E}$, $\vec{j}$ y ρ (o σ); poseen valores en todos los puntos de un cuerpo. Las primeras se relacionan por medio de la ecuación 29-12 ($\Delta V = iR$), y las segundas por medio de la ecuación 29-10 ($\vec{E} = \rho\vec{j}$).

Las magnitudes macroscópicas ΔV, i y R son de gran utilidad cuando se efectúan mediciones eléctricas en objetos conductores reales. Son cantidades cuyos valores se dan en metros. Las magnitudes microscópicas $\vec{E}$, $\vec{j}$ y ρ son de gran importancia cuando se trata del comportamiento fundamental de la materia (y no de muestras de ella), como cuando nos ocupamos de la investigación en la física del *estado sólido* (o *materia condensada*). De ahí que el tema de la sección 29-5 es la concepción atómica de la *resistividad* de un metal, y no la *resistencia* de una muestra metálica.

PROBLEMA RESUELTO 29-5. Un bloque rectangular de hierro tiene las dimensiones 1.2 cm × 1.2 cm × 15 cm. *a*) ¿Cuál es su resistencia medida entre los dos extremos cuadrados? *b*) ¿Cuál es su resistencia entre dos caras rectangulares opuestas? La resistividad del hierro a temperatura ambiente es $9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$.

Solución *a*) La superficie de un extremo cuadrado es $(1.2 \times 10^{-2}\ \text{m})^2$ o $1.44 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$. De acuerdo con la ecuación 29-13,

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(0.15\ \text{m})}{1.44 \times 10^{-4}\ \text{m}^2}$$
$$= 1.0 \times 10^{-4}\ \Omega = 100\ \mu\Omega.$$

b) la superficie de una cara rectangular es $(1.2 \times 10^{-2}\ \text{m})(0.15\ \text{m})$ o $1.80 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$. Con base en la ecuación 29-13,

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(1.2 \times 10^{-2}\ \text{m})}{1.80 \times 10^{-3}\ \text{m}^2}$$
$$= 6.5 \times 10^{-7}\ \Omega = 0.65\ \mu\Omega.$$

En ambos casos suponemos que la diferencia de potencial se aplica al bloque de modo que las superficies entre las que se desea la resistencia sean equipotenciales. Entonces el campo eléctrico será uniforme entre ellas y, por tanto, también lo será la densidad de corriente. De lo contrario no se aplicaría la ecuación 29-13.

Analogía entre la corriente y el flujo de calor (opcional)

Existe una estrecha analogía entre el flujo de carga creado por una diferencia de potencial y el flujo de calor proveniente de una diferencia de temperatura. Consideremos una delgada plancha conductora de espesor Δx y de superficie A. Supóngase que mantenemos una diferencia de potencial ΔV entre las caras opuestas. La corriente i está dada por las ecuaciones 29-12 ($i = \Delta V/R$) y 29-13 ($R = \rho L/A$), esto es

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{\rho \Delta x/A} = \sigma A \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

con el uso de $\sigma = \rho^{-1}$. En el caso límite de una plancha de espesor dx, esto se expresa así

$$\frac{dq}{dt} = -\sigma A \frac{dV}{dx}. \tag{29-14}$$

El signo negativo de la ecuación anterior indica que la carga positiva fluye en dirección de V decreciente, es decir, dq/dt es positivo cuando dV/dx es negativo.

La ecuación análoga del flujo de calor (Sec. 23-2) es

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx}, \tag{29-15}$$

la cual muestra que k, la conductividad térmica, corresponde a σ y dT/dx, el gradiente de temperatura, corresponde a dV/dx, el gradiente de potencial. En los metales puros hay algo más que una analogía matemática formal entre las ecuaciones 29-14 y 29-15. En ellos la energía calorífica y la carga son transportados por electrones libres; desde el punto de vista empírico, un buen conductor eléctrico (plata por ejemplo) es además un buen conductor del calor, y la conductividad eléctrica σ guarda relación directa con la conductividad térmica k. ■

Variación de la resistividad con la temperatura (opcional)

La figura 29-8 contiene un resumen de algunas mediciones experimentales de la resistividad del cobre con varias temperaturas. Para utilizar esta información en la práctica, convendría expresarla en forma de ecuación. En una región limitada de temperatura, la relación que tiene ésta con la resistividad es casi lineal. Podemos ajustar una recta en cualquier región de la figura 29-8, empleando dos puntos para determinar la pendiente de la recta. Al seleccionar un punto de referencia, como el denotado como T_0, ρ_0 en la figura, se expresa la resistividad ρ a una temperatura arbitraria T partiendo de la ecuación empírica de la recta en la figura 29-8, la cual es

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha_{av}(T - T_0). \tag{29-16}$$

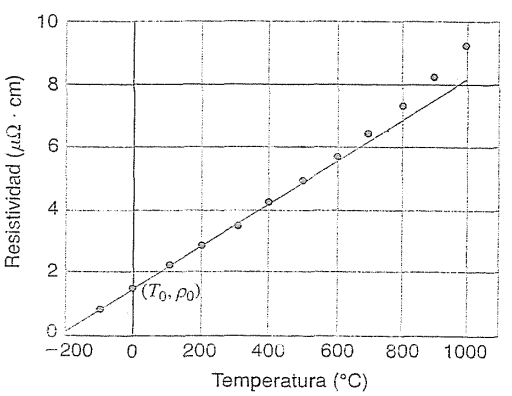


FIGURA 29-8. Los puntos muestran algunas mediciones de la resistividad del cobre en varias temperaturas. En un intervalo de temperatura, la variación de resistividad con T puede aproximarse mediante una recta; por ejemplo, la línea de la figura corresponde a los datos de unos −100°C a 400°C.

(La expresión anterior se parece mucho a la de la expansión térmica lineal, $\Delta L = \alpha L\, \Delta T$, que se mencionó en la Sec. 21-4). Hemos escrito la pendiente de esta línea como $\rho_0 \alpha_{pro}$. Si resolvemos la ecuación 29-16 para α_{pro}, obtendremos

$$\alpha_{pro} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho - \rho_0}{T - T_0}. \tag{29-17}$$

La cantidad α_{pro} es el *coeficiente de la resistividad con la temperatura media (o promedio)* en una región cuya temperatura se encuentra entre los dos puntos utilizados para determinar la pendiente. Podemos definir un coeficiente más general de la resistividad con la temperatura como

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}, \tag{29-18}$$

que es el cambio fraccional de la resistividad $d\rho/\rho$ por cambio de la temperatura dT. Es decir, α da la dependencia de la resistividad respecto a la temperatura *en relación con una temperatura en particular*, mientras que α_{pro} indica la dependencia promedio *en un intervalo determinado*. En términos generales el coeficiente α depende de la temperatura.

En las aplicaciones más prácticas, la ecuación 29-16 ofrece resultados que se hallan dentro del límite aceptable de exactitud. Los valores ordinarios de α_{pro} vienen en la tabla 29-1. La aproximación lineal no es suficiente en trabajos más precisos, como el uso de termómetro de resistencia de platino para medir la temperatura (Sec. 21-3). En este caso, para mejorar la precisión pueden agregarse términos en $(T - T_0)^2$ y $(T - T_0)^3$ en el lado derecho de la ecuación 29-16 para aumentar la precisión. Los coeficientes en estos términos adicionales han de determinarse empíricamente en analogía con el coeficiente α_{pro} de la ecuación 29-16. ■

29-5 LEY DE OHM: UNA PERSPECTIVA MICROSCÓPICA

Según señalamos con anterioridad, la ley de Ohm no es fundamental en el electromagnetismo, pues se basa en las propiedades del medio conductor. Su forma es muy simple, y resulta extraño que muchos materiales la cumplan con tanta exactitud, mientras que otros no se sujetan a ella en absoluto. Vamos a ver si podemos entender por qué los metales la siguen, es decir, por qué sus resistividades ρ son constantes (y no, por ejemplo, dependen del campo eléctrico aplicado).

En un metal, los electrones de valencia no se unen a los átomos individuales, sino que pueden moverse libremente dentro de la red y reciben el nombre de *electrones de conducción*. En el cobre hay uno de ellos por átomo; los 28 restantes permanecen ligados a los núcleos del cobre para formar núcleos iónicos.

A menudo, la teoría de la conducción eléctrica en metales se basa en el *modelo de electrones libres*, en el cual (como primera aproximación) se supone que los electrones de conducción se mueven por el material conductor, en forma parecida a las moléculas de gas en un contenedor. De hecho, a veces al conjunto de ellos se le llama *gas de electrones*. Pero como veremos luego, no debe olvidarse el efecto que los núcleos de iones tienen en este "gas".

En el caso del gas de electrones, la distribución maxwelliana clásica de velocidades (Sec. 22-4) indicaría que los electrones de conducción presentan una amplia distribución de velocidades de cero al infinito, con un promedio bien definido. No obstante, al considerar los electrones no es posible ignorar la mecánica cuántica, que ofrece una perspectiva muy distinta. En la distribución cuántica (Sec. 49-4), los electrones que favorecen la conducción eléctrica están concentrados en un intervalo muy breve de energías cinéticas y, por tanto, de velocidades. Con una excelente aproximación puede suponerse que se desplazan con una velocidad promedio uniforme. En el caso del cobre, es de unos $v_{pro} = 1.6 \times 10^6$ m/s. Más aún, en tanto que la velocidad maxwelliana promedio depende mucho de la temperatura, la velocidad efectiva que se alcanza con la distribución cuántica casi no depende de la temperatura.

Los electrones se mueven al azar cuando no existe un campo eléctrico, una vez más como las moléculas de gas dentro de un contenedor. En forma esporádica un electrón choca con un núcleo iónico de la red, experimentando un cambio abrupto de dirección. Como lo hicimos en el caso de colisiones de las moléculas de gas, podemos relacionar una trayectoria libre media λ y un tiempo libre medio τ con una distancia y tiempo promedio entre las colisiones. (Las colisiones que se producen entre los electrones son raras y no afectan a las propiedades eléctricas del conductor.)

En un cristal metálico ideal (que no contenga defectos ni impurezas) a 0 K no habría colisiones de electrones y la red, conforme a las predicciones de la física cuántica, esto es, $\lambda \to \infty$ como $T \to 0$ K en el caso de cristales ideales. Las colisiones tienen lugar en cristales reales porque 1) a cualquier temperatura los núcleos iónicos T vibran alrededor de su posición de equilibrio y lo hacen de modo aleatorio; 2) puede haber impurezas, es decir, átomos extraños; 3) el cristal puede contener imperfecciones de red, entre ellas átomos faltantes o desplazados. En consecuencia, la resistividad de un metal puede aumentar 1) elevando su temperatura, 2) agregándole pequeñas cantidades de impurezas y 3) sometiéndolo a gran presión como sería atravesándolo con un troquel para aumentar las imperfecciones de la red.

Cuando aplicamos un campo eléctrico a un metal, los electrones modifican su movimiento aleatorio de manera que se desplazan lentamente en dirección opuesta a la del campo, con una velocidad promedio de deriva v_d. Esta velocidad es mucho menor (en un factor aproximado de 10^{10}) (Prob. res. 29-3) que la velocidad efectiva promedio v_{pro}. La figura 29-9 indica la relación entre ambas velocidades. Las líneas gruesas denotan una trayectoria aleatoria que posiblemente sigue un electrón cuando no existe un campo aplicado; avanza de x a y, produciendo seis colisiones en su camino. Las líneas punteadas muestran cómo el mismo evento *podría* haber ocurrido si se hubiera aplicado un campo eléctrico $\vec{E}$. Nótese que el electrón se desplaza constantemente hacia la derecha, terminando en y' y no en y. Al preparar la figura 29-9 se ha supuesto que la velocidad de deriva v_d es $0.02v_{pro}$; en realidad, se asemeja más a $10^{-10}v_{pro}$, de modo que la "deriva" mostrada en la figura está muy exagerada.

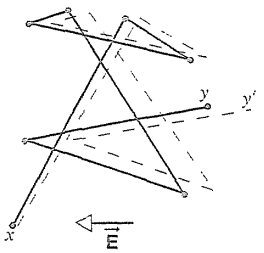


FIGURA 29-9. Los segmentos de línea llena muestran un electrón que se traslada de x a y, realizando seis colisiones en su camino. Las líneas punteadas indican lo que *podría* haber sido la trayectoria en presencia de un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$. Obsérvese el desplazamiento gradual pero constante en la dirección $-\vec{E}$. (En realidad, las líneas punteadas deberían ser un poco curvas para representar las trayectorias parabólicas descritas por los electrones entre colisiones.)

Podemos calcular la velocidad de deriva v_d partiendo del campo eléctrico E y de v_{pro} y λ. Cuando se aplica un campo a un electrón en el metal, experimenta una fuerza eE que le imparte una aceleración a dada por la segunda ley de Newton,

$$a = \frac{eE}{m}.$$

Considere un electrón que chocó con un núcleo de iones. Por lo regular, la colisión destruye momentáneamente la tendencia a la deriva, y tras la colisión el electrón tiene una dirección verdaderamente aleatoria. Durante el intervalo de tiempo con la siguiente colisión, la velocidad del electrón cambia en promedio en $a(\lambda/v_{pro})$ o $a\tau$, donde τ es el tiempo medio entre colisiones. Esto lo identificamos con la velocidad de deriva v_d, o sea*

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m}. \tag{29-19}$$

También podemos expresar v_d en función de la densidad de corriente (Ec. 29-6), que nos da

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{eE\tau}{m}.$$

Al combinar la expresión anterior con la ecuación 29-10 ($\rho = E/j$), finalmente obtenemos

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}. \tag{29-20}$$

* Tal vez resulte tentador escribir la ecuación 29-19 como $v_d = \frac{1}{2}a\tau$, razonando que $a\tau$ es la velocidad *final* del electrón; por tanto, su velocidad *promedio* es la mitad de ese valor. El factor extra de $\frac{1}{2}$ sería correcto si siguiéramos a un electrón típico suponiendo que su velocidad de deriva fuera el promedio de su velocidad durante el tiempo medio τ entre colisiones. Sin embargo, la velocidad de desplazamiento es proporcional a la densidad de corriente j y ha de calcularse partiendo de la velocidad promedio de *todos* los electrones tomados en un instante. En cada electrón, la velocidad en un tiempo cualquiera es at, donde t es el tiempo transcurrido desde la última colisión de ese electrón. Como la aceleración a es la misma en todos ellos, el valor promedio de at en determinado instante es $a\tau$, donde τ es el tiempo promedio transcurrido desde la última colisión, que es el mismo que el tiempo medio entre ellas. Una explicación de este punto viene en *Electricity and Magnetism*, 2a. ed., de Edward Purcell (McGraw-Hill, 1985), sección 4.4. Véase también "Drift Speed and Collision Time", de Donald E. Tilley, *American Journal of Physics*, junio de 1976, p. 597.

Nótese que m, n y e son constantes en esta ecuación. Por tanto, la ecuación 29-20 puede tomarse como una afirmación de que los metales siguen la ley de Ohm, si podemos demostrar que τ es una constante. En particular, hay que demostrar que τ no depende del campo eléctrico aplicado E. En este caso ρ no depende de E, que es el criterio de que un material se sujeta a la ley de Ohm. La magnitud τ depende de la distribución de velocidades en los electrones de conducción. Hemos visto que esta distribución se ve afectada muy poco inclusive por la aplicación de un campo relativamente grande, puesto que v_{pro} es del orden de 10^6 m/s y v_d (Prob. res. 29-3) es apenas del orden de 10^{-4} m/s, una razón de 10^{10}. Cualquiera que sea el valor de τ (digamos en el cobre a 20°C) cuando no existe un campo, permanecen esencialmente inalterados cuando se aplica el campo. En consecuencia, el lado derecho de la ecuación 29-20 no depende de E (lo cual significa que ρ no depende de E)); el material obedece a la ley de Ohm.

PROBLEMA RESUELTO 29-6. *a)* ¿Cuál es el tiempo medio libre τ entre colisiones tratándose de electrones de conducción en el cobre? *b)* ¿Cuál es la trayectoria media libre λ de ellas? Suponga una velocidad efectiva v_{pro} de 1.6×10^6 m/s.

Solución *a)* De acuerdo con la ecuación 29-20 tenemos

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$

$$= \frac{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{(8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.69 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$

$$= 2.48 \times 10^{-14}\ \text{s}.$$

El valor de n, número de electrones de conducción por unidad de volumen en el cobre, se obtuvo del problema resuelto 29-3; el valor de ρ proviene de la tabla 29-1.

b) Definimos la trayectoria media libre a partir de

$$\lambda = \tau v_{pro} = (2.48 \times 10^{-14}\ \text{s})(1.6 \times 10^6\ \text{m/s})$$
$$= 4.0 \times 10^{-8}\ \text{m} = 40\ \text{nm}.$$

El resultado anterior es 150 veces la distancia entre los iones más cercanos en una red de cobre. Un estudio completo basado en la física cuántica revela que no es posible ver la "colisión" como una interacción directa entre un electrón y un ion. Más bien, es una interacción entre un electrón y la vibraciones térmicas de la red, las imperfecciones de ésta o sus átomos de impureza. Un electrón puede pasar muy libremente a través de una red "ideal", es decir, una geométricamente perfecta cerca del cero absoluto de temperatura. En tales condiciones se han observado trayectorias medias libres hasta de 10 cm.

29-6 UN AISLANTE EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Hasta ahora hemos hablado exclusivamente del comportamiento de los materiales conductores en campos eléctricos. A continuación vamos a analizar lo que sucede cuando aplicamos un campo eléctrico externo a un material aislante. En otras palabras, vamos a repetir el experimento de la figura 29-1, sustituyendo el material conductor por uno aislante.

En un aislante las cargas eléctricas no pueden moverse. No se genera corriente alguna cuando lo ponemos en un campo eléctrico. Los electrones permanecen adheridos firmemente a sus átomos o moléculas. En vez de mover cargas a través del material, lo único que el campo eléctrico puede hacer en el aislante es producir un ligero reacomodo de las cargas eléctricas dentro de los átomos. No obstante, ese efecto pequeño puede influir profundamente en el campo eléctrico de un aislante.

Comenzaremos la exposición considerando un aislante como el agua pura. La molécula de agua tiene un momento dipolar eléctrico permanente, como se ve en la figura 26-20. Cuando una molécula de agua, con su momento dipolar eléctrico, se coloca en un campo eléctrico como en la figura 26-19, el campo ejerce un par de torsión sobre el dipolo que trata de alinearlo con el campo. La figura 29-10 contiene un conjunto de dipolos, que un campo externo ha alineado girándolos.

Para un observador externo, la serie de dipolos de la figura 29-10*b* parece tener cargas negativas en su superficie superior y positivas en su superficie inferior. En este aspecto el aislante nos recuerda el conductor de la figura 29-1, pero la explicación es muy diferente: los electrones no se mueven por el material aislante. En un aislante, un campo eléctrico externo ocasiona que las cargas se muevan sólo en distancias menores que un diámetro atómico.

En la figura 29-11*a* vemos una plancha de material aislante que fue puesta en un campo eléctrico aplicado externamente $\vec{E}_0$. A causa de la rotación de los momentos dipolares, existe una hoja de carga positiva en la superficie inferior del material y una hoja de carga negativa en la superficie superior. Estas dos hojas de *carga superficial inducida* generan un campo eléctrico $\vec{E}'$ en el aislante que se opone al campo aplicado, según se indica en la figura 29-11*b*. El efecto de alinear los dipolos en el aislante se conoce como *polarización,* y al campo $\vec{E}'$ se le conoce como campo de polarización.

El campo neto $\vec{E}$ dentro de aislante es la suma vectorial del campo aplicado $\vec{E}_0$ y el de polarización $\vec{E}'$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \qquad (29\text{-}21)$$

Puesto que $\vec{E}_0$ y $\vec{E}'$ siguen dirección opuesta, la suma vectorial puede escribirse como una diferencia de magnitudes:

$$E = E_0 - E'. \qquad (29\text{-}22)$$

La figura 29-11*c* muestra el campo neto dentro del aislante, el cual es menor que el campo aplicado. *Cuando ponemos un aislante en un campo eléctrico, las cargas inducidas superficiales parecen tender a debilitar el campo original en el interior del material.*

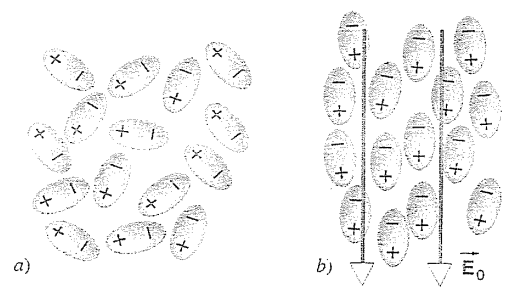


FIGURA 29-10. *a)* Grupo de dipolos con orientación aleatoria. *b)* Un campo eléctrico externo alinea los dipolos.

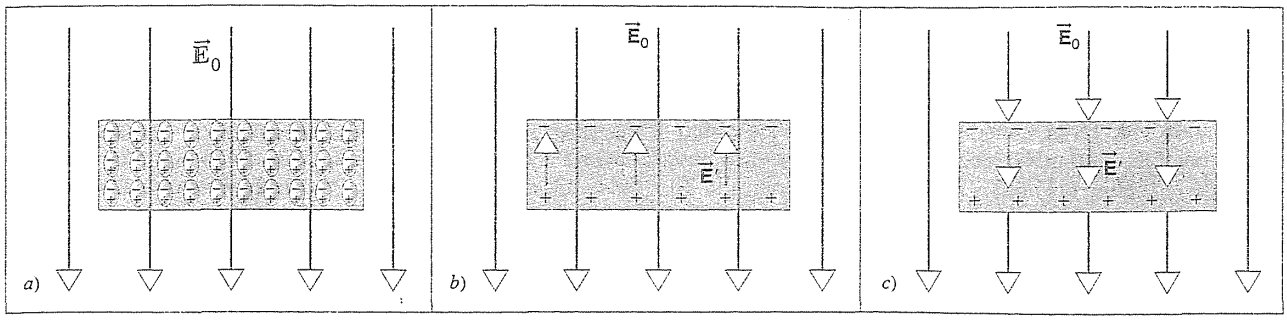


FIGURA 29-11. *a*) Cuando se pone un aislante en un campo externo, los dipolos se alinean. *b*) las cargas inducidas superficiales en el aislante crean un campo de polarización $\vec{E}'$ en su interior. *c*) El campo neto $\vec{E}$ en el aislante es la suma vectorial de $\vec{E}_0$ y $\vec{E}'$.

Al aumentar el campo aplicado $\vec{E}_0$, generalmente aumentará el campo de polarización. Los dipolos del aislante se encuentran en movimiento térmico aleatorio, el cual tiende a destruir su alineación. Cuando mayor sea el campo aplicado mayor será el par de torsión en los dipolos, más grande será su grado de alineación y también el campo de polarización. En muchos materiales, denominados *lineales,* este campo crece en proporción directa con el campo aplicado: $E' \propto E_0$. Con el uso de la ecuación 29-22 podemos escribir esta proporcionalidad como $E \propto E_0$ y, si introducimos una constante de proporcionalidad, tendremos

$$E = \frac{1}{\kappa_e} E_0, \qquad (29\text{-}23)$$

donde la constante adimensional κ_e recibe el nombre de *constante dieléctrica* del material. Es mayor que 1 y, por lo mismo, el campo neto E en el aislante es menor que el campo aplicado. A semejanza de la conductividad o de la resistividad, dicha constante caracteriza al tipo de material (y su temperatura) y no depende del tamaño ni de la forma del objeto hecho del material.

A los materiales aislantes también se les conoce como *materiales dieléctricos*; vamos a utilizar ambos términos como sinónimos. La tabla 29-2 contiene los valores de las constantes dieléctricas para varios materiales a temperatura ambiente. Aquellos cuyas constantes dialéctricas son grandes tienen grandes campos de polarización; por tanto, en su interior los campos son mucho más pequeños que el campo aplicado.

Si aplicamos un campo eléctrico lo bastante grande a un material aislante, podremos ionizar átomos o moléculas en él y crear así una condición para que la carga eléctrica fluya como en un conductor. Los campos necesarios para la *ruptura* de varios aislantes, denominados *intensidades dieléctricas,* se incluyen en la tabla 29-2.

El agua es un ejemplo de material *dielétrico polar*, porque sus moléculas tienen momentos dipolares eléctricos permanentes. Los efectos semejantes a los descritos en la presente sección ocurrirán también en los dieléctricos *no polares,* cuyas moléculas tienen ese tipo de momentos. En la figura 29-12 se aprecia el efecto que un campo dielétrico tiene en un átomo. Éste puede considerarse una nube esféricamente simétrica de car-

TABLA 29-2 Algunas propiedades de dieléctricos[a]

Material	*Constante dieléctrica* κ_e	*Fuerza dieléctrica* (kV/mm)
Vacío	1 (exact)	∞
Aire (1 atm)	1.00059	3
Poliestireno	2.6	24
Papel	3.5	16
Aceite para transformador	4.5	12
Pyrex	4.7	14
Mica	5.4	160
Porcelana	6.5	4
Silicio	12	
Agua (25°C)	78.5	
Agua (20°C)	80.4	
Cerámica de titania	130	
Titanato de estroncio	310	8

[a] Medidos a temperatura ambiente.

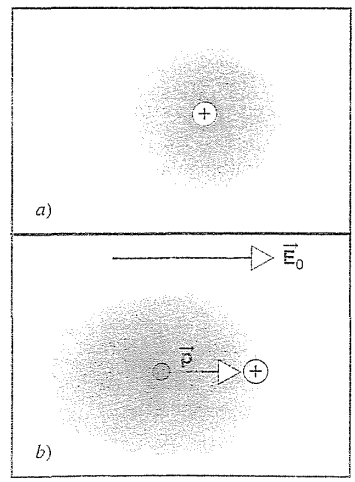


FIGURA 29-12. *a*) A un átomo lo representa su núcleo de carga positiva y su nube de electrones cargada negativamente. El centro de las cargas positivas coincide con el de las cargas negativas. *b*) Cuando se coloca el átomo en un campo eléctrico externo, las cargas positivas y negativas experimentan fuerzas en dirección opuesta, y ya no coincide el centro de las cargas positivas con el de las cargas negativas. El átomo adquiere un momento bipolar inducido.

ga negativa (los electrones) que rodea el núcleo de carga positiva. Cuando no hay un campo aplicado, coinciden los centros de las distribuciones de la carga positiva y negativa y el átomo no tiene un momento dipolar. El campo eléctrico causa una separación de carga, a medida que los electrones experimentan una fuerza en una dirección producida por el campo, y el núcleo experimenta una fuerza en dirección contraria. El átomo adquiere un *momento dipolar inducido* a causa de la acción del campo eléctrico. El momento dipolar inducido desaparece cuando se elimina el campo eléctrico. La magnitud de este momento dipolar es proporcional al campo aplicado; cuando se tiene en cuenta el efecto de todos los dipolos inducidos en el material, tendremos otra vez un campo de polarización E' proporcional al campo aplicado tratándose de intensidades de campo ordinarias. A menudo el momento dipolar inducido causa la atracción de un objeto cargado en un aislante no cargado, como el peine cargado y los trozos de papel que aparecen en la figura 25-5.

Como todas las expresiones de los campos eléctricos en un espacio vacío, debido a varias distribuciones de carga, incluyen un factor de $1/\epsilon_0$, la ecuación 29-23 indica que las expresiones de los campos eléctricos en la materia contendrán el factor $1/\kappa_e\epsilon_0$. Puesto que este factor se presenta con mucha frecuencia, se le designa con el símbolo ϵ:

$$\epsilon = \kappa_e\epsilon_0. \qquad (29\text{-}24)$$

A ϵ se le conoce como permitividad del material (recuérdese que a la constante eléctrica ϵ_0 se llama también permitividad del espacio vacío). A menudo podemos cambiar las ecuaciones para calcular la magnitud de los campos eléctricos en el espacio vacío para aplicarlas a los campos eléctricos en la materia, con sólo reemplazar ϵ_0 con ϵ.

PROBLEMA RESUELTO 29-7. Dos placas circulares conductoras de 4.2 cm de radio y con una separación de 0.65 entre ellas tienen una densidad de carga uniformemente distribuida de magnitud 2.88×10^{-7} C/m^2, con una placa con carga positiva y la otra con carga negativa. El espacio entre las placas está lleno con un disco de vidrio pyrex, cuya constante dieléctrica (Tabla 29-2) es 4.7. *a*) Determine el campo eléctrico en el vidrio. *b*) Determine la densidad inducida de carga en las superficies del vidrio. Considere ubicaciones cercanas al centro de los discos donde los campos son uniformes.

Solución *a*) Cuando no hay un dieléctrico, el campo eléctrico producido por cada placa circular será $\sigma/2\epsilon_0$, como se indica en la ecuación 26-20. Los campos debidos a las dos placas siguen la misma dirección, de modo que se suman para obtener un campo neto de

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2.88 \times 10^{-7}\ \text{C/m}^2}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2} = 3.25 \times 10^4\ \text{N/C}.$$

Cuando hay un dieléctrico, el campo neto es

$$E = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{3.25 \times 10^4\ \text{N/C}}{4.7} = 6.9 \times 10^3\ \text{N/C}.$$

b) El campo de polarización generado por la carga superficial inducida es

$$E' = E_0 - E = 3.25 \times 10^4\ \text{N/C} - 6.9 \times 10^3\ \text{N/C} = 2.56 \times 10^4\ \text{N/C}.$$

Las dos hojas de cargas inducidas crean el campo eléctrico E', del mismo modo que las dos hojas de cargas libres producen el campo E_0. Con $E' = \sigma_{\text{ind}}/\epsilon_0$ tenemos

$$\sigma_{\text{ind}} = \epsilon_0 E' = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.56 \times 10^4\ \text{N/C}) = 2.27 \times 10^{-7}\ \text{C/m}^2.$$

OPCIÓN MÚLTIPLE

29-1 Tipos de materiales

29-2 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones estáticas

1. Se pone un conductor triangular en un campo eléctrico originalmente uniforme. *a*) ¿Qué imagen en la figura 29-13 representa mejor las líneas del campo eléctrico estático del conductor? *b*) ¿Cuál imagen de la figura 29-13 representa mejor las líneas equipotenciales estáticas cerca del conductor?

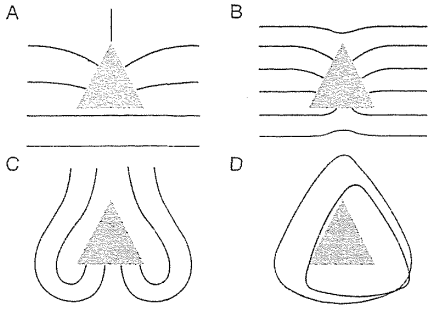


FIGURA 29-13. Pregunta de opción múltiple 1.

2. Se coloca una carga puntual dentro de un cascarón esférico conductor sin carga. ¿Cuál imagen de la figura 29-14 muestra mejor las líneas del campo eléctrico?

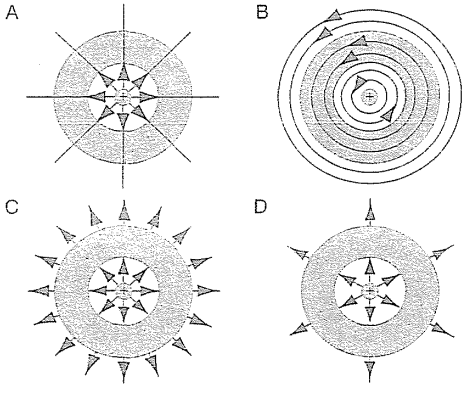


FIGURA 29-14. Pregunta de opción múltiple 2.

3. Se coloca una carga puntual dentro de un cascarón esférico conductor sin carga. ¿Cuál imagen de la figura 29-15 muestra mejor las líneas del campo eléctrico?

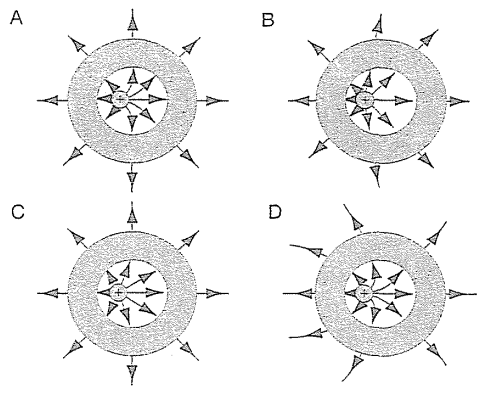


FIGURA 29-15. Pregunta de opción múltiple 3.

29-3 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones dinámicas

4. La corriente y la densidad de corriente tienen direcciones relacionadas con ellas. ¿Son vectores?
   A) Sólo la corriente es vector.
   B) Sólo la densidad de corriente es vector.
   C) Tanto la corriente como la densidad son vectores.
   D) Ni la corriente ni la densidad de corriente son vectores.
5. Una corriente constante fluye por un conductor cónico como se ve en la figura 29-16. Las superficies extremas S_1 y S_2 son dos superficies equipotenciales diferentes.
   a) ¿Por cuál plano fluye la corriente más grande?
   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
   E) La corriente es la misma en todos los planos.
   b) ¿Por cuál plano fluye el flujo eléctrico más grande?
   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
   E) El flujo eléctrico es el mismo a través de todos los planos.
   c) ¿Cómo varía la magnitud del campo eléctrico E a lo largo del eje central que se desplaza de S_1 a S_2?
   A) E es constante. B) E aumenta.
   C) E disminuye.

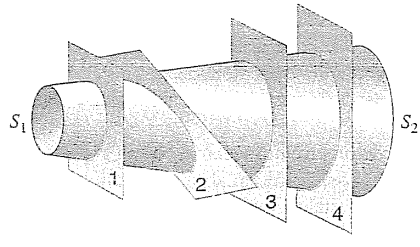


FIGURA 29-16. Pregunta de opción múltiple 5.

6. Una corriente fluye por un largo conductor cilíndrico. ¿Qué dirección sigue?
   A) Hacia el extremo con el mayor potencial.
   B) Hacia el extremo con el menor potencial.
   C) Ni hacia A) ni hacia B), pues la superficie del conductor no es un equipotencial.

29-4 Materiales óhmicos

7. Dos alambres de forma idéntica, A y B, transportan corrientes idénticas. Los alambres están hechos de diferentes sustancias que tienen distinta densidad de electrones, con $n_A > n_B$.
   a) ¿Cuál alambre tendrá la mayor densidad de corriente?
   A) A B) B C) Los alambres son iguales.
   b) ¿Cuál alambre tendrá la velocidad de deriva máxima para los electrones?
   A) A B) B C) Los alambres son iguales.
   c) ¿Cuál alambre tendrá la máxima velocidad de desplazamiento en los electrones?
   A) A B) B C) Los alambres son iguales.
8. En la figura 29-17 se muestra la relación de corriente-voltaje en cierta sustancia. Ésta es óhmica para
   A) todos los valores de ΔV. B) ΔV entre 0 y 3 V.
   C) ΔV mayor que 3 V. D) sin valores de ΔV.

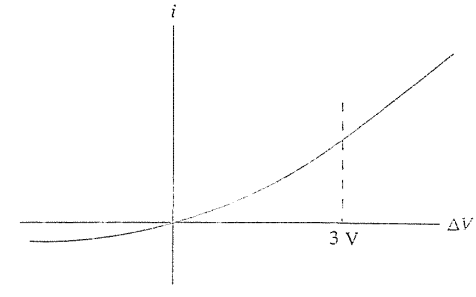


FIGURA 29-17. Pregunta de opción múltiple 8.

9. ¿De qué manera la resistencia R de una sustancia óhmica depende de la magnitud E del campo eléctrico aplicado?
   A) $R \propto E$ B) ER = una constante
   C) $E + R$ = una constante D) R es independiente de E
10. Una corriente estacionaria i_{entra} fluye por un alambre que entra en un resistor. Una corriente estacionaria i_{sale} fluye por un alambre que sale del extremo del resistor.
    a) ¿Qué diferencias hay entre i_{entra} e i_{sale}?
    A) $i_{entra} > t_{sale}$ B) $i_{entra} < i_{sale}$
    C) $i_{entra} = i_{sale}$ siempre D) $i_{entra} = t_{sale}$ sólo si $R = 0$
    b) ¿Qué puede concluirse respecto al potencial $V_{entrada}$ en el extremo del alambre donde entra la corriente y el potencial V_{salida} en el extremo del alambre donde la corriente sale?
    A) $V_{entra} > V_{sale}$ B) $V_{entra} < V_{sale}$
    C) $V_{entra} = V_{sale}$ siempre
    D) Nada, a menos que se proporcione más información.

29-5 Ley de Ohm: una perspectiva microscópica

11. ¿De qué manera cambia la velocidad de deriva de los electrones cuando pasan por un resistor?
    A) Aumenta. B) Disminuye.
    C) No se altera.

12. La resistividad de la mayoría de los conductores aumenta con la temperatura. Una causa verosímil es que, en un conductor,
    A) la densidad de electrones varía con la temperatura.
    B) la carga de cada electrón varía con la temperatura.
    C) el tiempo entre las colisiones varía con la temperatura.
    D) la masa del electrón varía con la temperatura.

29-6 Un aislante en un campo eléctrico

13. Se pone un aislante esférico en un campo eléctrico inicialmente uniforme.
    a) ¿Que imagen dentro de la figura 29-8 representa mejor las líneas del campo eléctrico estático cerca y dentro del aislante?
    b) ¿Qué imagen de la figura 29-18 representa mejor las líneas equipotenciales estáticas cerca y dentro del aislante?

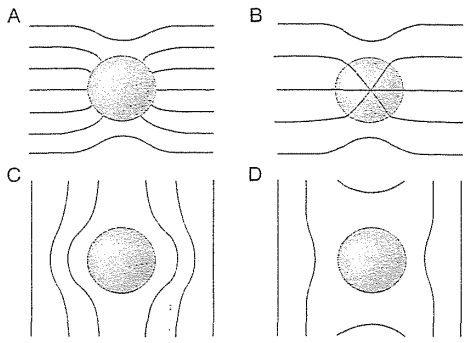


FIGURA 29-18. Pregunta de opción múltiple 13.

PREGUNTAS

1. Mencione otras magnitudes físicas que, como la corriente, son escalares, cuyo significado se representa mediante una flecha o un diagrama.
2. En nuestra convención referente a la dirección de las flechas de corriente *a*) ¿hubiera sido más adecuado o, incluso, posible haber supuesto que todos los portadores de carga son negativos? *b*) ¿hubiera sido más adecuado o, incluso, posible haber designado como positivo el electrón, como negativo el protón y así sucesivamente?
3. ¿Qué evidencia experimental puede aportar para demostrar que las cargas eléctricas en la electricidad de corriente y las de la electrostática son idénticas?
4. Con sus propias palabras explique por qué puede tener $\vec{E} \neq 0$ dentro de un conductor en este capítulo, mientras que supusimos $\vec{E} = 0$ en la sección 27-6.
5. Una corriente *i* entra en un vértice de una hoja cuadrada de cobre y sale por el opuesto. Dibuje flechas en varios puntos dentro del cuadrado que representen los valores relativos de la densidad de corriente $\vec{j}$. Aquí se requieren conjeturas intuitivas en vez de detallados análisis matemáticos.
6. ¿Advierte una razón lógica en la asignación de números de calibre a los cables de las casas? Consulte el ejercicio 6. Si no hay un motivo para ello, ¿por qué, entonces, se utiliza este sistema.
7. Una diferencia de potencial ΔV se aplica a un alambre de cobre de diámetro *d* y de longitud *L*. ¿Qué efecto tiene en la velocidad de deriva de los electrones a) duplicar ΔV, *b*) duplicar *L* y c) duplicar *d*?
8. ¿Por qué no es posible medir la velocidad de deriva de los electrones cronometrando su recorrido a través de un conductor?
9. Describa brevemente algunos diseños posibles de resistores variables.
10. Una diferencia de potencial ΔV se aplica a un cilindro circular de carbono, prensándolo entre electrodos circulares de cobre, como se observa en la figura 29-19. Explique la dificultad de calcular la resistencia del cilindro de carbono empleando la relación $R = \rho L/A$.

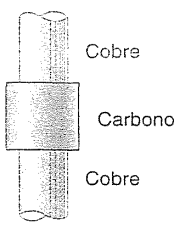


FIGURA 29-19. Pregunta 10.

11. Se le da un cubo de aluminio y acceso a dos terminales de batería. ¿Cómo las conectaría al cubo para cerciorarse de obtener *a*) una resistencia máxima y *b*) una resistencia mínima?
12. ¿Cómo mediría la resistencia de un bloque metálico en forma de moño? Incluya detalles concretos para aclarar el concepto.
13. Al deslizarse por el asiento de un automóvil pueden generarse potenciales de varios miles de volts. ¿Por qué no se electrocuta el que se desliza?
14. Explique las dificultades de probar si el filamento de una lámpara cumple o no la ley de Ohm.
15. ¿Cambiará la velocidad de deriva de los electrones en un conductor metálico transportador de corriente, cuando aumente la temperatura del conductor?
16. Explique por qué el momento que los electrones de conducción transfieren a los iones en un conductor metálico no originan una fuerza resultante en el conductor.
17. Enumere en forma tabular las semejanzas y las diferencias entre el flujo de carga a lo largo del conductor, el flujo de agua por un tubo horizontal y la conducción de calor a través de una plancha. Incluya ideas sobre lo que causa el flujo, sobre lo que se opone a él, sobre qué partículas (si las hay) participan y sobre las unidades en que puede medirse el flujo.
18. ¿Cómo se aplica la relación $\Delta V = iR$ a los resistores que no satisfacen la ley de Ohm?
19. Una vaca y un hombre están de pie en una pradera cuando un rayo cae cerca de ellos. ¿Por qué hay mayores probabilidades de que mate a la vaca que al hombre? Al fenómeno causante se le conoce como "voltaje escalonado".
20. Las líneas de la figura 29-9 deben curvearse ligeramente. ¿Por qué?
21. Un fusible de un circuito eléctrico es un alambre diseñado para que se derrita; de ese modo abre el circuito si la corriente rebasa un valor prestablecido. ¿Qué características debe reunir el alambre de un fusible ideal?
22. ¿Por qué con el uso de una lámpara incandescente pierde brillantez?
23. El carácter y la calidad de vida se ven influidos enormemente por los dispositivos que no siguen la ley de Ohm. ¿Qué puede decir en apoyo a tal aseveración?

24. Tomado del trabajo de un alumno: "La relación $R = \Delta V/i$ indica que la resistencia de un conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial que se le aplique". ¿Qué opina de semejante afirmación?
25. El carbono tiene un coeficiente negativo de resistividad con la temperatura, lo cual significa que disminuye conforme aumenta la temperatura. ¿Desaparecerá por completo su resistividad con una temperatura lo bastante alta?
26. ¿Puede un dieléctrico conducir electricidad? ¿Puede un conductor presentar propiedades dieléctricas?
27. ¿Esperaría usted que la constante dieléctrica de un material varíe con la temperatura? Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué forma cambiaría? ¿Tiene o no la materia momentos dipolares permanentes en este caso?
28. Demuestre que puede suponerse que la constante dieléctrica de un conductor es infinitamente grande.
29. Un campo eléctrico puede polarizar gases en varias formas: distorsionando las nubes de electrones de las moléculas, orientando estas últimas, doblando o estirando los enlaces de las moléculas polares. ¿En qué se distingue esto de la polarización de moléculas en líquidos y en sólidos?
30. Un objeto dieléctrico en un campo eléctrico no uniforme experimenta una fuerza neta. ¿Por qué no hay fuerza neta alguna si el campo es uniforme?
31. Podemos desviar una corriente de agua de grifo con sólo acercarle una varilla cargada. Explique en forma pormenorizada cómo sucede esto.

EJERCICIOS

29-1 Tipos de materiales

29-2 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones estáticas

29-3 Un conductor en un campo eléctrico: condiciones dinámicas

1. Un resistor 12.4 Ω transporta una corriente de 4.82 A por 4.60 min *a)* ¿cuánta corriente y *b)* cuántos electrones pasan por una sección transversal del resistor en este tiempo?
2. La corriente en el haz de electrones de una terminal común de una pantalla de video es 200 μA. ¿Cuántos electrones chocan contra ella cada minuto?
3. Supóngase que tenemos 2.10×10^8 iones con carga positiva doble por centímetro cúbico, todos los cuales se dirigen al norte con una velocidad de 1.40×10^5 m/s. *a)* Calcule la magnitud y la dirección de la densidad de corriente. *b)* ¿Puede determinar la corriente total en este haz de iones? Si no puede, ¿qué información adicional necesita?
4. Una corriente pequeña, pero medible de 123 pA, fluye por un alambre de cobre de 2.46 mm de diámetro. Calcule *a)* la densidad de corriente y *b)* la velocidad de deriva de los electrones. Consulte el problema resuelto 29-3.
5. Suponga que el material constitutivo de un fusible (Preg. 21) se derrite una vez que la densidad de corriente alcanza 440 A/cm^2. ¿Qué diámetro del alambre cilíndrico debe usarse para que el fusible limite a 0.552 A la corriente?
6. Se anexa una parte del National Electric Code (Estados Unidos), que establece las corrientes máximas de seguridad en los alambres de cobre de varios diámetros aislados con hule. Grafique la densidad de corriente segura en función del diámetro. ¿Qué calibre de alambre ofrece la mayor densidad de corriente segura?

Calibre[a]	4	6	8	10	12	14	16	18
Diámetro (mils)[b]	204	162	129	102	81	64	51	40
Corriente segura (A)	70	50	35	25	20	15	6	3

[a] Una forma de identificar el diámetro del alambre
[b] 1 mil = 10^{-3} in.

7. Se genera una corriente en un tubo de descarga de gas cuando en sus dos electrodos se aplica una diferencia de potencial lo bastante grande. El gas se ioniza; los electrones se dirigen a la terminal positiva y los iones positivos cargados individualmente hacia la terminal negativa.¿Cuáles son las magnitud y la dirección de la corriente en una descarga del tubo de hidrógeno donde cada segundo 3.1×10^{18} electrones y 1.1×10^{18} protones cruzan una superficie de sección transversal del tubo?
8. Una unión *pn* se crea con dos materiales semiconductores en la forma de cilindros idénticos con radio de 0.165 mm, como se muestra en la figura 29-20. En una aplicación, 3.50×10^{15} electrones por segundo fluyen a través de la unión del lado *n* al *p*, en tanto que 2.25×10^{15} hoyos por segundo fluyen del lado *p* al lado *n*. (Un hoyo actúa como una partícula con carga $+1.6 \times 10^{-19}$ C.) Encuentre *a)* la corriente total y *b)* la densidad de corriente.

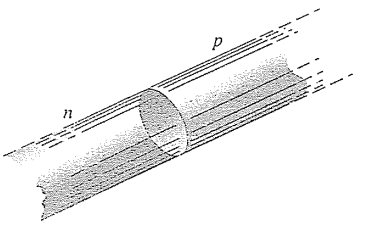


FIGURA 29-20. Ejercicio 8.

9. Cerca de la Tierra, la densidad de los protones en el viento solar es de 8.70 cm^{-3}, y su velocidad de 470 km/s. *a)* Determine la densidad de corriente de los protones. *b)* Chocarían contra la Tierra, si el campo magnético de la Tierra no los desviara. ¿Qué corriente total recibiría la Tierra?
10. La banda de un acelerador electrostático mide 52.0 cm de ancho y se desplaza a 28.0 m/s. Transporta carga y la introduce en la esfera a una rapiez correspondiente a 95.0 μA. Calcule la densidad de carga superficial de la banda (consulte la Sec. 28-10).
11. ¿Cuánto tardan los electrones en pasar del acumulador de un automóvil al motor que arranca? Suponga que la corriente es de 115 A y que los electrones pasan por el alambre de cobre porque tiene una superficie transversal de 31.2 mm^2 y una longitud de 85.5 cm (consulte el Prob. res. 29-3).

29-4 Materiales óhmicos

12. Un ser humano puede quedar electrocutado si una corriente apenas de 50 mA pasa cerca del corazón. Un electricista que traba-

ja con manos sudorosas hace buen contacto con dos conductores sostenidos en las manos. Si su resistencia es de 1800 Ω, ¿cuál pudiera ser la diferencia letal de voltaje? (A menudo los electricistas manejan alambres "vivos".)

13. La vía de acero de un trolebús tiene una superficie transversal de 56 cm^2. ¿Qué resistencia tiene 11 km de ella? La resistividad del acero es de $3.0 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot m$.
14. Con la pendiente de la recta en la figura 29-8 estime el coeficiente promedio de resistividad con la temperatura en el caso del cobre a temperatura ambiente; compare después el resultado con el de la tabla 29-1.
15. Un alambre de 4.0 m de largo y de 6.0 mm de diámetro tiene una resistencia de 15 mΩ. Una diferencia de potencial de 23 V se aplica entre los extremos. *a)* ¿Qué corriente fluye por el alambre? *b)* Calcule la densidad de corriente. *c)* Calcule la resistividad del material del alambre. ¿Puede identificarlo? (Consulte la Tabla 29-1).
16. Los devanados de cobre de un motor tienen una resistencia de 50 Ω a 20°C cuando está apagado. Tras funcionar el motor varias horas, la resistencia alcanza los 58 Ω. ¿Qué temperatura tienen los devanados? Desprecie el cambio en las dimensiones de los devanados (Tabla 29-1).
17. Demuestre que, si pueden ignorarse los cambios en las dimensiones de un conductor con las variaciones de temperatura, la resistencia variará con ella según $R - R_0 = \alpha_{pro} R_0 (T - T_0)$.
18. Una bobina se forma devanando 250 vueltas de un alambre aislado de cobre de calibre 8 (Ej. 6) en una sola capa, con una forma cilíndrica de 12.2 cm de radio. Calcule la resistencia de la bobina. No tenga en cuenta el espesor del aislamiento (Tabla 29-1).
19. Dos conductores están hechos del mismo material y tienen la misma longitud. El conductor *A* es un alambre sólido de diámetro *D*. El conductor *B* es un tubo hueco con diámetro externo 2*D* y con diámetro interno *D*. Obtenga la razón de resistencia, R_A/R_B, medida entre sus dos extremos.
20. ¿Qué diámetro ha de tener un alambre de hierro para que su resistencia sea igual al otro de cobre de 1.19 mm de diámetro, teniendo ambos la misma longitud?
21. Un cable eléctrico consta de 125 filamentos, cada uno con una resistencia de 2.65-μΩ. La misma diferencia de potencial se aplica entre los extremos de los filamentos y genera una corriente total de 750 mA. *a)* ¿Cuál es la corriente en cada filamento? *b)* ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicada? *c)* ¿Qué resistencia tiene el cable?
22. Un alambre de cobre y otro de hierro de la misma longitud tienen una diferencia de potencial aplicada a ellos. *a)* ¿Cuál debe ser la razón de sus radios para que la corriente sea idéntica? *b)* ¿Puede hacerse que la densidad de corriente sea la misma mediante una elección apropiada de los radios?
23. Cuando una diferencia de potencial de 115 V se aplica entre los extremos de un alambre de 9.66 m de largo, la densidad de corriente es 1.42 A/cm^2. Calcule la conductividad del material del alambre.
24. En la atmósfera inferior de la Tierra existen iones positivos y negativos, creados por los elementos radiactivos del suelo y por los rayos cósmicos del espacio. En cierta región la intensidad del campo eléctrico atmosférico es de 120 V/m, dirigida verticalmente hacia abajo. Debido a este campo, los iones cargados positivamente 620 por cm^3, se desplazan hacia abajo y los iones cargados negativamente 550 por cm^3, lo hacen hacia arriba (Fig. 29-21). La conductividad medida es $2.70 \times 10^{-14}/\Omega \cdot m$. Calcule *a)* la velocidad de deriva de los iones, suponiendo que es igual en unos y otros; y *b)* la densidad de corriente.

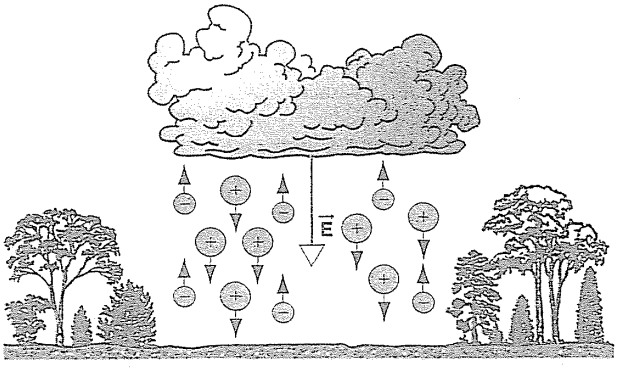


FIGURA 29-21. Ejercicio 24.

25. Se estudia la conveniencia de utilizar cobre y aluminio en una línea de transmisión de alto voltaje que debe transportar una corriente de 62.3 A. La resistencia por unidad de longitud debe ser 0.152 Ω/km. En ambos tipos de cable, calcule *a)* la densidad de corriente y *b)* la masa de 1.00 m del cable. La densidad del cobre y del aluminio es 8960 y 2700 kg/m^3, respectivamente.
26. Con los datos de la figura 29-7*b* grafique la resistencia del diodo de unión *pn* en función de la diferencia de potencial aplicada.
27. En un dispositivo electrónico hipotético, la diferencia de potencial ΔV, media en él, se relaciona con la corriente *i* mediante $\Delta V = (3.55 \times 10^6\ V/A^2) i^2$. *a)* Determine la resistencia cuando la corriente es de 2.40 mA. *b)* ¿Con qué valor de la corriente es la resistencia igual a 16.0 Ω?

29-5 Ley de Ohm: una perspectiva microscópica

28. Calcule el tiempo medio libre entre las colisiones de electrones de conducción en el aluminio a 20°C. Cada átomo de aluminio aporta tres electrones de conducción. Tome los datos necesarios de la tabla 29-1 y del apéndice D. Consulte además el problema resuelto 29-3.

29-6 Un aislante en un campo eléctrico

29. Una carga puntual de 1-μC está situada en el centro de una esfera sólida de pyrex de radio $R = 10$ cm *a)* Calcule la intensidad del campo eléctrico *E* por debajo de su superficie. *b)* Suponiendo que no haya otras cargas *libres,* calcule la intensidad del campo eléctrico afuera de la superficie de la esfera pirex *c)* ¿Cuál es la densidad superficial de carga inducida σ_{ind} en la esfera de Pyrex?
30. Dos cargas puntuales iguales pero opuestas $+q$ y $-q$, están separadas por una distancia de 10 cm en el aire. ¿Qué valor de *q* producirá una intensidad de campo eléctrico en la mitad de las cargas que superará la intensidad dieléctrica del aire?
31. Un conductor esférico de radio *R* se halla en un potencial *V*; suponga que $V = 0$ en el infinito. *a)* ¿Qué valor mínimo de *V* originará una intensidad de campo eléctrico por arriba de la superficie de la esfera que rebase la intensidad dieléctrica del aire? *b)* ¿Es más fácil obtener una "chispa" de una bola en cierto potencial con un radio más grande o más pequeño? *c)* Utilice la respuesta y explique por qué los pararrayos son puntiagudos.

PROBLEMAS

1. Se le entrega a una esfera conductora aislada de 13 cm de radio. Un alambre le introduce una corriente de 1.0000020 A. Otro extrae de ella una corriente de 1.0000000 A. ¿Cuánto tardará la esfera en aumentar su potencial en 980 V?
2. En una investigación hipotética sobre la fusión, se ioniza completamente el gas helio a altas temperaturas; se separa cada átomo en dos electrones libres y en el restante núcleo de carga positiva (partícula alfa). Un campo eléctrico aplicado hace que las partículas alfa se desplacen al este con una velocidad de 25 m/s, mientras los electrones lo hacen hacia el oeste, con una velocidad de 88 m/s. La densidad de las partículas alfa es de 2.8×10^{15} cm^{-3}. Calcule la densidad neta de la corriente, especificando la dirección de esta última.
3. Una oruga de 4.0 cm de largo se arrastra en dirección de electrones que se desplazan por un alambre desnudo de cobre de 5.2 mm de diámetro, el cual transporta una corriente de 12 A. *a*) Determine la diferencia de potencial entre los dos extremos de la oruga. *b*) ¿Es positiva o negativa su cola en relación con su cabeza? *c*) ¿Cuánto tiempo tardaría la oruga en arrastrarse 1.0 cm y mantener el paso de los electrones que se desplazan en el alambre?
4. Un haz estable de partículas alfa ($q = 2e$) que se desplaza con una energía cinética de 22.4 MeV transporta una corriente de 250 nA. *a*) Si se dirige perpendicularmente a una superficie plana, ¿cuántas partículas alfa chocan con ella en 2.90 s? *b*) En un instante, ¿cuántas partículas alfa hay en una longitud de 18.0 cm del haz? *c*) ¿En qué diferencia de potencial fue necesario acelerar cada partícula del reposo para que alcance una energía de 22.4 MeV?
5. En los dos intersectantes anillos de almacenamiento de 950 m de circunferencia en CERN, los protones de 28.0 GeV de energía cinética formaban haces de corriente de 30.0 A cada uno. *a*) Determine la carga total transportada por los protones en cada anillo. Suponga que se desplazan casi con la velocidad de la luz. *b*) Un haz se desvía de un anillo hacia un bloque de cobre de 43.5 kg. ¿Cuánto se eleva la temperatura del bloque?
6. *a*) La densidad de corriente en un conductor cilíndrico de radio R varía conforme a la ecuación

$$j = j_0(1 - r/R),$$

donde r es la distancia del eje. Por tanto, la densidad de corriente alcanza un máximo j_0 en el eje $r = 0$ y disminuye linealmente a cero en la superficie $r = R$. Calcule la corriente en función de j_0 y la superficie transversal del conductor $A = \pi R^2$. *b*) Suponga que ahora la densidad de corriente alcanza un máximo en la superficie y después disminuye linealmente a cero en el eje, de modo que

$$j = j_0 r/R.$$

Calcule la corriente. ¿Por qué es diferente de *a*)?
7. *a*) ¿A qué temperatura la resistencia de un conductor de cobre duplicará su resistencia a 20°C? (Utilice esta temperatura como punto de referencia en la ecuación 29-16; compare su respuesta con la Fig. 29-8.) *b*) ¿Se mantiene la misma temperatura en todos los conductores de cobre, sin que importen su forma o tamaño?
8. Un foco de flash común se clasifica en 310 mA y 2.90 V, los valores respectivos de la corriente y del voltaje en condiciones funcionales. Si la resistencia del filamento cuando está frío ($T_0 = 20$°C) es de 1.12 Ω, calcule su temperatura cuando la lámpara está encendida. El filamento está hecho de tungsteno. Suponga que la ecuación 29-16 se aplica en este intervalo de temperaturas.
9. Un alambre con una resistencia de 6.0 Ω se extrae de un troquel, de modo que su nueva longitud es el triple de la original. Calcule la resistencia del alambre más largo, suponiendo que la resistividad y la densidad del material no cambian durante el proceso de extracción.
10. Un bloque sólido de forma rectangular, tiene una superficie transversal de 3.50 cm^2, una longitud de 15.8 cm y una resistencia de 935 Ω. El material de que está hecho tiene 5.33×10^{22} electrones de conducción/m^3. Se mantiene una diferencia de potencial de 35.8 V entre sus extremos. *a*) Determine la corriente en él. *b*) Suponiendo que la densidad de corriente es uniforme, ¿qué valor tiene? Calcule *c*) la velocidad de deriva de los electrones de conducción y *d*) el campo eléctrico del bloque.
11. Una varilla de cierto metal mide 1.6 m de largo y tiene un diámetro de 5.5 mm. La resistencia entre sus extremos (a 20°C) es 1.09×10^{-3} Ω. Un disco redondo se construye con este mismo material, 2.14 cm de diámetro y 1.35 mm de espesor. *a*) ¿Cuál es ese material? *b*) ¿Cuál es la resistencia entre las caras opuestas redondas, suponiendo superficies equipotenciales?
12. Cuando se calienta una varilla metálica, no sólo se modifica su resistencia, sino también su longitud y su superficie transversal. La relación $R = \rho L/A$ indica que los tres factores han de tomarse en cuenta al medir ρ en varias temperaturas. *a*) Si la temperatura cambia en 1.0°C, ¿qué alteraciones fraccionales de R, L y A ocurren en el conductor de cobre? *b*) ¿Qué conclusión se extrae de ello? El coeficiente de expansión lineal es 1.7×10^{-5}/C°.
13. Se desea construir un conductor cilíndrico largo cuyo coeficiente de resistividad a una temperatura de 20°C se aproximará a cero. Si se construye ensamblando discos alternos de hierro y de carbono, obtenga la razón de espesor de un disco de carbono a la de un disco de hierro. (En el carbono, $\rho = 3500 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m y $\alpha = -0.50 \times 10^{-3}$/C°.)
14. Un resistor presenta la forma de un cono truncado circular recto (Fig. 29-22). Los radios terminales son a y b, y la longitud es L. Si la variación gradual es pequeña, cabe suponer que la densidad de corriente es uniforme en cualquier sección transversal. *a*) Calcule la resistencia de este objeto. *b*) Demuestre que su respuesta se reduce a $\rho L/A$ en el caso especial de una variación gradual cero ($a = b$).

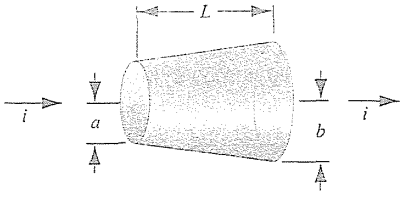


FIGURA 29-22. Problema 14.

15. Un resistor tiene la forma de un cascarón esférico, con una superficie interna de radio a, cubierta con un material conductor y una superficie externa de radio b, también cubierta con un material conductor. Suponiendo una resistividad uniforme ρ, calcule la resistencia entre las superficies conductoras.

16. Demuestre que, conforme al modelo de electrones libres de la conducción eléctrica en los metales y en la física clásica, la resistividad de los metales debería ser proporcional a $\sqrt{T}$, donde T es la temperatura absoluta. (Sugerencia: trate los electrones como gas ideal.)

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Suponga que una lámpara tiene un filamento de tungsteno que irradia energía a una rapidez proporcional a la diferencia de temperatura entre el filamento y la temperatura ambiente. Designe con C la constante de proporcionalidad. Calcule para una lámpara de 120 watts en un circuito de 120 volts, suponiendo que toda la energía transferida al filamento irradia como calor transferido al medio; suponga que la temperatura del filamento es de 2500°C. *a*) Con operaciones numéricas genere una gráfica que muestre la temperatura de equilibrio de la lámpara en función de la diferencia de potencial aplicada; no olvide que la resistividad del tungsteno cambia con la temperatura. *b*) ¿A qué voltaje aplicado debe "quemarse" la lámpara? (Sugerencia: el filamento se derretirá si se calienta demasiado.) *c*) Repita el procedimiento anterior, salvo que esta vez suponga que la energía irradia de la lámpara conforme a $k(T^4 - T_0^4)$, donde k es una constante que debe determinar, T_0 es la temperatura en kelvins y T es la temperatura del filamento, también en kelvins. Compare sus resultados.

CAPÍTULO 30

CAPACITANCIA

En muchas aplicaciones de los circuitos eléctricos, la meta es almacenar la carga o energía eléctrica en un campo electrostático. Se da el nombre de capacitor *al dispositivo que almacena carga, y el de capacitancia a la propiedad que determina cuánta energía puede guardar. Veremos que la capacitancia depende de las propiedades geométricas del dispositivo, y no del campo eléctrico ni del potencial.*

En este capítulo definimos la capacitancia y demostramos cómo se calcula la capacitancia de algunos dispositivos simples y de unas combinaciones de capacitores. Estudiamos la energía almacenada en ellos y veremos cómo se relaciona con la fuerza del campo eléctrico. Por último, investigamos la forma en que la presencia de un dieléctrico en un capacitor mejora su capacidad de almacenar carga eléctrica.

30-1 CAPACITORES

El *capacitor** es un dispositivo que almacena energía en un campo electrostático. Una lámpara, por ejemplo, requiere una breve ráfaga de energía eléctrica que supere la que generalmente puede obtenerse de una batería. Con relativa lentitud (en algunos segundos) un capacitor puede extraer energía de dicha batería y luego liberar la energía con mucha rapidez (en cuestión de milisegundos) a través de la lámpara. Se emplean capacitores mucho mayores para producir breves pulsos láser, con el propósito de inducir la fusión termonuclear en delgadas bolitas de hidrógeno. En este caso el nivel de potencia durante el pulso es de unos 10^{14} W, aproximadamente 200 veces la capacidad de generación eléctrica en Estados Unidos; sólo que el pulso suele durar apenas 10^{-19} s.

Los capacitores se emplean además para crear campos eléctricos, como el dispositivo de placas paralelas que produce el campo eléctrico casi uniforme que desvía los haces de electrones en un tubo de televisión o de un osciloscopio.

En los circuitos, se utilizan los capacitores para suavizar y eliminar las variaciones repentinas en la línea de voltaje que puedan dañar la memoria de las computadoras. En otra aplicación, la sintonización de un radio o receptor de televisión suele efectuarse variando la capacitancia de un circuito.

* Véase "Capacitors" de Donald M. Trotter, hijo, *Scientific American*, julio de 1988, p. 86.

30-2 CAPACITANCIA

La figura 30-1 muestra un capacitor generalizado constituido por dos conductores a y b de forma arbitraria. Se les llama *placas* cualquiera que sea su geometría. Suponemos que ellos están totalmente aislados del medio. Suponemos además que por ahora los conductores están en el vacío.

Se dice que un capacitor está *cargado* si sus placas llevan cargas iguales y opuestas $+q$ y $-q$. Nótese que q *no* es la carga neta del capacitor pues es cero. En la explicación de los capacitores dejemos que q represente el valor absoluto de la carga en cualquiera de las placas; esto es, representa una magnitud solamente y hay que especificar el signo de la carga en una placa.

Podemos "cargar" un capacitor conectando una de sus placas a la terminal positiva de una batería y la otra a la terminal negativa como se aprecia en la figura 30-2. Como veremos en el siguiente capítulo, el flujo de carga en un circuito eléctrico se asemeja al flujo de un fluido, y la batería sirve de "bomba" a la carga eléctrica. Cuando conectamos una batería al capacitor (cerrando el interruptor en el circuito), la batería

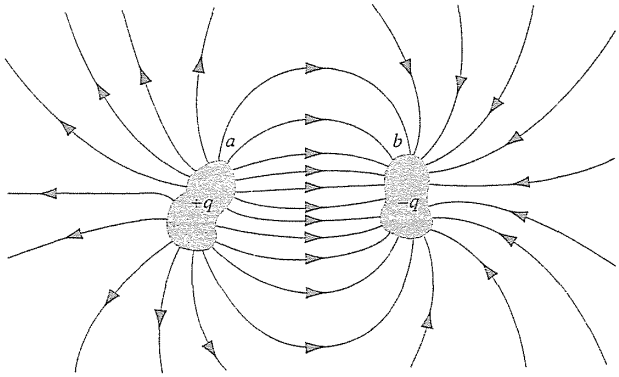


FIGURA 30-1. Dos conductores, aislados uno de otro y de su medio, forman un capacitor. Cuando está cargado, los conductores tienen cargas iguales, pero opuestas, de magnitud q. Se les da el nombre de *placas,* sin que importe su forma.

"bombea" electrones de la placa positiva (antes sin carga) del capacitor a la placa negativa. Una vez que la batería mueve una cantidad de carga de magnitud q, la de la placa positiva es $+q$ y la de la placa negativa, $-q$.

Una batería ideal mantiene entre sus terminales una diferencia constante de potencial. La placa positiva y el alambre que la conectan a la terminal positiva son conductores y, por ello (en condiciones electrostáticas), han de tener el mismo potencial V_+ que la terminal positiva de la batería. La placa negativa y el alambre que la conecta a la terminal negativa de la batería también son conductores; (cuando el interruptor está cerrado) deben, pues, tener el mismo potencial V_- que la terminal negativa. La diferencia de potencial $\Delta V = V_+ - V_-$ entre las terminales es la misma que aparece entre las placas del capacitor cuando el interruptor está cerrado. Por lo regular nos referimos a ella como la diferencia de potencial a través del capacitor, es decir la diferencia de potencial entre sus placas.

En la figura 30-3 se muestra el circuito con que se carga un capacitor por medio de una batería que mantiene una diferencia de potencial constante $\Delta V = V_+ - V_-$ entre sus terminales. En un circuito el capacitor se representa con el símbolo ⊣⊢, cuyas líneas paralelas indican las dos placas del capacitor.

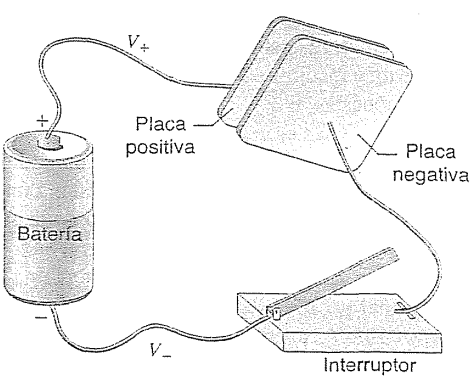


FIGURA 30-2. Cuando se cierra un interruptor, el capacitor se carga a medida que la batería mueve los electrones de la placa positiva a la negativa.

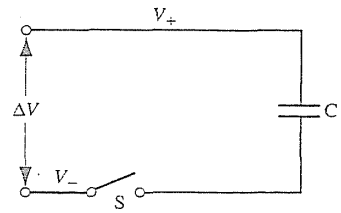


FIGURA 30-3. Diagrama esquemático de un circuito equivalente a la figura 30-2, que muestra el capacitor C, el interruptor S y la diferencia de potencial ΔV (suministrados por una batería que no se incluye en el diagrama).

Cuando cargamos un capacitor, observamos que la carga q que aparece en sus placas es siempre directamente proporcional a la diferencia de potencial ΔV entre ellas: $q \propto \Delta V$. La *capacitancia* C es la constante de proporcionalidad necesaria para convertir la relación en una ecuación

$$q = C\,\Delta V. \tag{30-1}$$

La capacitancia es un factor geométrico que depende del tamaño, la forma y la separación de las placas, lo mismo que del material que ocupa el espacio entre ellas (que por ahora supondremos que es un vacío). La capacitancia de un capacitor *no* depende de ΔV ni de q.

La unidad de capacitancia en el SI que se deduce de la ecuación 30-1 es el coulomb/volt y recibe el nombre de *farad* (su abreviatura es F):

$$1 \text{ farad} = \text{coulomb/volt}.$$

La unidad se llama así en honor de Michael Faraday quien, entre otras aportaciones, propuso el concepto de la capacitancia. Los submúltiplos del farad, el *microfarad* ($1\ \mu\text{F} = 10^{-6}$ F) y el *picofarad* ($1\ \text{pF} = 10^{-12}$ F), son unidades más útiles en la práctica. En la figura 30-4 vemos algunos capacitores en el orden de microfarads o picofarads que pueden encontrarse en un equipo electrónico o de cómputo.

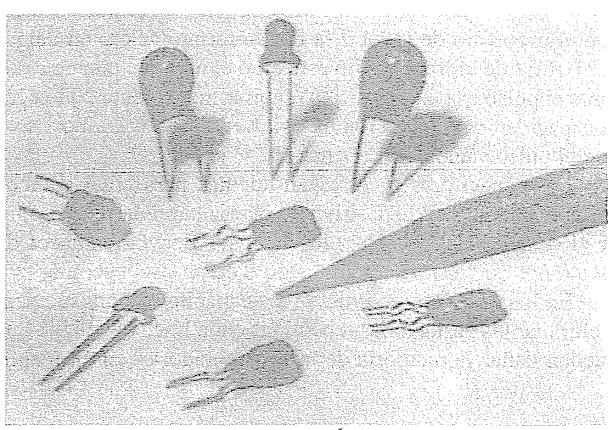


FIGURA 30-4. Capacitores que pueden encontrarse en los circuitos electrónicos.

PROBLEMA RESUELTO 30-1. Un capacitor de almacenamiento en un chip de memoria de acceso aleatorio (RAM) tiene una capacitancia de 0.055 pF. Si lo cargamos a 5.3 V, ¿cuántos electrones de exceso hay en su placa negativa?

Solución Si la placa negativa tiene N electrones de exceso, transporta una carga neta de magnitud $q = Ne$. Por medio de la ecuación 30-1 obtenemos

$$N = \frac{q}{e} = \frac{C\,\Delta V}{e} = \frac{(0.055 \times 10^{-12}\ \text{F})(5.3\ \text{V})}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$

$$= 1.8 \times 10^{6}\ \text{electrones}.$$

El anterior es un número muy pequeño en el caso de los electrones. Una mota de polvo de casa, tan diminuta que nunca se asienta, contiene unos 10^{17} electrones (y el mismo número de protones).

Analogía con el flujo de fluidos (opcional)

En situaciones donde intervienen circuitos eléctricos, a menudo conviene llevar a cabo analogías entre el movimiento de la carga eléctrica y el de partículas de materiales como sucede con el flujo de fluidos. En el caso de un capacitor, puede hacerse una analogía entre un capacitor que porta una carga q y un contenedor rígido de volumen v (usamos v en vez de V para no confundir el volumen con la diferencia de potencial) que contiene n moles de un gas ideal. Conforme a la ley de gases ideales (Ec. 21-13), la presión del gas p es directamente proporcional a n para una temperatura fija.

$$n = \left(\frac{v}{RT}\right)p.$$

En el capacitor (Ec. 30-31)

$$q = C\,\Delta V.$$

La comparación revela que la capacitancia C del capacitor es semejante al volumen v del contenedor, suponiendo una temperatura fija del gas. De hecho, el término "capacitor" nos trae a la mente la palabra "capacidad" en el mismo sentido que el término volumen nos trae a la mente un contenedor de gas que tiene cierta "capacidad".

Podemos introducir más gas en el contenedor produciendo una presión mayor, tal como podemos hacerlo con la carga en un capacitor produciendo un voltaje más elevado. Adviértase que la cantidad de carga tiene un límite que puede introducirse en un capacitor, lo mismo que la masa de gas que puede colocarse en un contenedor. Los límites corresponden a la ruptura eléctrica (intensidad dieléctrica) en el capacitor y al rompimiento de las paredes del contenedor. ■

30-3 CÁLCULO DE LA CAPACITANCIA

En esta sección nos proponemos calcular la capacitancia de un capacitor a partir de su geometría. Esto lo realizamos por medio del siguiente procedimiento: 1) primero obtenemos el campo eléctrico en la región entre las placas, aplicando métodos como los descritos en la sección 26-4. 2) Después nos servimos de la ecuación 28-15 para determinar la diferencia de potencial entre las placas positiva y negativa, integrando el campo eléctrico a lo largo de una trayectoria adecuada que las conecte:

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_+^- \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}. \qquad (30\text{-}2)$$

3) El resultado de la ecuación anterior incluirá la magnitud de la carga q en el lado derecho. Con la ecuación 30-1 podemos encontrar después $C = q/\Delta V$.

Tal como lo hemos definido, ΔV es un número positivo. La capacitancia C siempre será positiva, pues q es una magnitud absoluta.

A continuación explicamos este método con varios ejemplos.

Capacitor de placas paralelas

La figura 30-5 muestra un capacitor donde las dos placas planas son muy grandes y están muy cerca una de otra, es decir, la separación d es mucho menor que la longitud o el ancho de ellas. Podemos prescindir del efecto de los bordes del campo eléctrico que ocurren cerca de los bordes de las placas y suponer que este campo eléctrico tiene la misma magnitud y dirección en todo el volumen entre las placas.

En la sección 26-4 obtuvimos el campo eléctrico de un disco grande con carga uniforme en los puntos cercanos a su centro: $E = \sigma/2\epsilon_0$. Si las placas del capacitor son muy grandes, su forma carece de importancia y podemos suponer que el campo eléctrico generado por ellas presenta esta magnitud. El campo eléctrico neto es la suma de los campos generados por las dos placas $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_-$. Como se observa en la figura 30-5, los producidos por las placas positiva y negativa siguen la misma dirección; así que podemos escribir

$$E = E_+ + E_- = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0. \qquad (30\text{-}3)$$

Al emplear $\sigma = q/A$, donde A es el área superficial de cada placa, y al sustituir la ecuación 30-3 en la ecuación 30-2, obtenemos

$$\Delta V = \int_+^- E\,ds = \frac{q}{\epsilon_0 A}\int_+^- ds = \frac{qd}{\epsilon_0 A}, \qquad (30\text{-}4)$$

donde hemos escogido una trayectoria de integración a lo largo de una de las líneas del campo eléctrico, de modo que $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\mathbf{s}}$ son paralelos (Fig. 30-5).

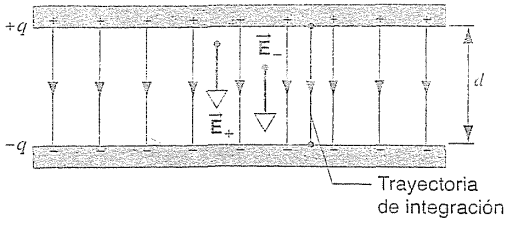


FIGURA 30-5. Capacitor de placas paralelas. Se muestra la trayectoria de integración con que se calcula la ecuación 30-4.

Entonces la capacitancia se obtiene de la figura 30-1: $C = q/\Delta V$, o sea

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{(capacitor de placas paralelas).} \qquad (30\text{-}5)$$

En la ecuación anterior entendemos por qué se dice que la capacitancia depende de factores geométricos, en este caso la separación d de las placas y la superficie A. La capacitancia no depende de la diferencia de voltaje entre ellas ni de la carga que transportan.

Nótese que el lado derecho de la ecuación 30-5 tiene la forma de ϵ_0 multiplicada por la dimensión de longitud (A/d). Nos damos cuenta de que todas las expresiones de capacitancia presentan esencialmente esa misma forma, lo cual significa que las unidades de ϵ_0 pueden expresarse como la capacitancia dividida entre la longitud:

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} = 8.85\ \text{pF/m}.$$

Estas unidades de ϵ_0 a menudo son más útiles en los cálculos que las unidades anteriores (y equivalentes) de $\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$.

Un capacitor esférico

En la figura 30-6 se muestra una sección transversal de un capacitor esférico, donde el conductor interno es una esfera sólida de radio a y el conductor externo un cascarón esférico hueco de radio interno b. Suponemos que la esfera interna transporta una carga $+ q$ y que la externa tiene una carga $- q$. El análisis de los conductores que cumplen la ley de Gauss (Sec. 27-6) indica que la carga en el conductor interno se halla en su superficie y que la del conductor externo está en su superficie interna. (Dibuja una superficie gaussiana de radio un poco mayor que b; la superficie se encuentra enteramente en el conductor externo, de modo que $E = 0$ en toda la superficie y que el flujo que pasa por esa es cero. En consecuencia, la superficie no encierra carga neta alguna, como se aprecia en la Fig. 30-6.)

En la región $a < r < b$, usamos la ley de Gauss para determinar que, en la región situada entre los conductores, el campo eléctrico depende exclusivamente de la carga de la esfera interna y que este campo es igual al de una carga puntual en su centro (recuérdese el teorema de la capa comentado en la Sec. 27-5). Así pues, tenemos

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad a < r < b. \qquad (30\text{-}6)$$

Al sustituir el campo eléctrico por esta expresión en la ecuación 30-2 y al integrar a lo largo de la trayectoria de la figura 30-6 de la placa positiva a la negativa, obtenemos

$$\Delta V = \int_+^- E\,ds = \int_a^b \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}. \qquad (30\text{-}7)$$

Puesto que la trayectoria de integración sigue la dirección radial, tenemos $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E\,ds$ y $ds = dr$.

Con el uso de $C = q/\Delta V$ encontramos ahora

$$C = 4\pi\epsilon_0\frac{ab}{b-a} \quad \text{(capacitor esférico).} \qquad (30\text{-}8)$$

Nótese que una vez más la capacitancia tiene la forma de ϵ_0 multiplicada por una cantidad con la dimensión de longitud.

Un capacitor cilíndrico

La figura 30-6 puede representar también la sección transversal de un capacitor cilíndrico donde el conductor interno es una varilla sólida de radio a que lleva una carga $+ q$ uniformemente distribuida en su superficie; el conductor externo es un cascarón cilíndrico coaxial de radio b que lleva una carga de $- q$ distribuida uniformemente a través de su superficie interna. El capacitor tiene una longitud L y suponemos que $L \gg b$, de modo que como en el caso del capacitor de placas paralelas, podemos prescindir del campo de bordes en los extremos del capacitor.

Del mismo modo que utilizamos la ley de Gauss con la geometría esférica para deducir los dos teoremas de cascarones, podemos conseguir dos resultados semejantes con la geometría esférica. Si sólo contásemos con el conductor externo cilíndrico de carga uniforme, podríamos construir una superficie gaussiana con la forma de un cilindro largo de radio $r < b$ que tenga el mismo eje que el cilindro externo. Esta superficie no encierra carga neta; así, concluimos que $E = 0$ en toda la superficie gaussiana. Como en el caso del cascarón esférico, un cascarón cilíndrico uniformemente cargado no produce campo eléctrico alguno en su interior. Si nos servimos de una superficie cilíndrica gaussiana con $r > a$, podemos inferir que el cilindro interno se comporta igual que una línea uniforme de carga, donde los puntos del campo irradian del eje y tiene una longitud que se calculó en la sección 26-4 (Ec. 26-17):

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{q}{Lr} \qquad a < r < b, \qquad (30\text{-}9)$$

donde hemos reemplazado la densidad de carga lineal λ por q/L y la distancia y por la coordenada radial r. Ahora la ecuación 30-2 nos da

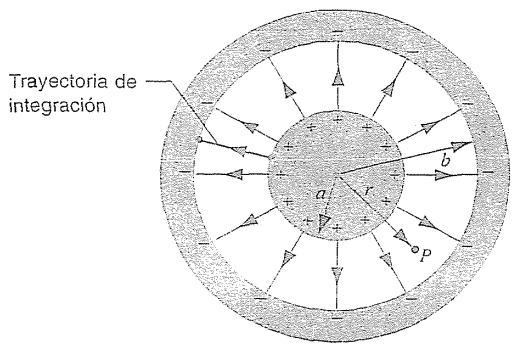


FIGURA 30-6. Sección transversal de un capacitor esférico o cilíndrico. El campo eléctrico en cualquier punto P de su interior se debe al conductor interno exclusivamente. Se muestra la trayectoria de integración con que se evalúa la ecuación 30-7 o la ecuación 30-10.

$$\Delta V = \int_+^- E\,ds = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (30\text{-}10)$$

Como lo hicimos con el capacitor esférico, hemos escogido una trayectoria de integración que va de la placa positiva a la negativa en dirección radial; así que $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s} = E\,ds$ y $ds = dr$.

Ahora la ecuación 30-1 nos da la capacitancia:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \quad \text{(capacitor cilíndrico)}. \qquad (30\text{-}11)$$

Nótese una vez más que sólo aparecen factores geométricos en esta ecuación y que la capacitancia tiene la forma de ϵ_0 multiplicada por una cantidad con la dimensión de longitud.

Problema Resuelto 30-2. Una distancia $d = 1.0$ mm separa las placas de un capacitor de placas paralelas. ¿Cuál debe ser la superficie de ellas para que el capacitor tenga capacitancia de 1.0F?

Solución Con base en la ecuación 30-5 tenemos

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\text{ F})(1.0\times10^{-3}\text{ m})}{8.85\times10^{-12}\text{ F/m}} = 1.1\times10^{8}\text{ m}^2.$$

Es la superficie de un cuadrado con más de 10 km de lado. El farad es efectivamente una unidad grande. No obstante, la tecnología moderna permite construir capacitores de 1-F de tamaño pequeño. Estos "supercapacitores" sirven de fuentes de voltaje de respaldo para las computadoras: pueden mantener la memoria hasta 30 días en caso de fallas eléctricas.

Problema Resuelto 30-3. El espacio entre los conductores de un largo cable coaxial, que sirve para transmitir señales de video, posee un radio interno $a = 0.15$ mm, y un radio externo $b = 2.1$ mm. ¿Cuál es su capacitancia por unidad de longitud?

Solución De acuerdo con la ecuación 30-11 tenemos

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} = \frac{(2\pi)(8.85\text{ pF/m})}{\ln(2.1\text{ mm}/0.15\text{ mm})} = 21\text{ pF/m}.$$

Problema Resuelto 30-4. ¿Cuál es la capacitancia de la Tierra, vista como una esfera conductora aislada de radio $R = 6370$ km?

Solución Podemos asignarle una capacitancia a un conductor esférico aislado suponiendo que la "placa faltante" es una esfera conductora de radio infinito.

Si suponemos que $b \to \infty$ en la ecuación 30-8 y si sustituimos a por R, encontraremos

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad \text{(esfera aislada)} \qquad (30\text{-}12)$$

Al efectuar la sustitución obtenemos

$$C = (4\pi)(8.85\times10^{-12}\text{ F/m})(6.37\times10^{6}\text{ m})$$
$$= 7.1\times10^{-4}\text{ F} = 710\ \mu\text{F}.$$

Un supercapacitor diminuto de 1 F tiene una capacitancia aproximadamente 1400 veces mayor que la de la Tierra.

30-4 CAPACITORES EN SERIE Y EN PARALELO

Al analizar los circuitos eléctricos, a menudo conviene conocer la *capacitancia equivalente* de dos o más capacitores que están conectados de cierta manera. Por "capacitancia equivalente" entendemos la de un capacitor individual que puede sustituir a la combinación, sin modificar el funcionamiento en el resto del circuito.

Capacitores conectados en paralelo

La figura 30-7*a*, muestra dos capacitores conectados *en paralelo*. Tres propiedades caracterizan a este tipo de conexión de los elementos de un circuito. 1) Al pasar de a a b, podemos tomar varias (dos en este caso) trayectorias *paralelas*, todas las cuales atraviesan *sólo uno* de los elementos paralelos. 2) Cuando una batería de diferencia de potencial ΔV está conectada en la combinación (es decir, una terminal de la batería se conecta a un punto a de la Fig. 30-7*a* y la otra al punto b), la misma diferencia de potencial ΔV aparece en todos los elementos de la conexión en paralelo. Los alambres y las placas del capacitor son conductores y, en consecuencia, equipotenciales en condiciones electrostáticas. El potencial en a aparece en los alambres conectados a a y en las dos placas de capacitores de la izquierda; asimismo el potencial en b aparece en todos los alambres conectados a b y en las dos placas de capacitores de la derecha. 3) Los elementos comparten la carga total que suministra la batería a la combinación; parte de ella "es bombeada" hacia arriba por los extremos de la batería hacia C_1 y parte hacia C_2.

Teniendo presentes los principios anteriores, ahora podemos encontrar la capacitancia equivalente C_{eq} que produce la capacitancia total entre los puntos a y b, como se ve en la figura 30-7*b*. Suponemos que una batería con una diferencia de potencial ΔV está conectada entre los puntos a y b. En cada capacitor podemos escribir (usando la Ec. 30-1)

$$q_1 = C_1\Delta V \quad \text{y} \quad q_2 = C_2\Delta V. \qquad (30\text{-}13)$$

Al escribir las ecuaciones anteriores nos hemos servido del mismo valor de la diferencia de potencial en los capacitores, atendiendo a la segunda característica antes mencionada respecto a la conexión en paralelo. La batería extrae la carga q de un lado del circuito y la lleva al otro. Esa carga se comparte entre los dos elementos en conformidad con la tercera ca-

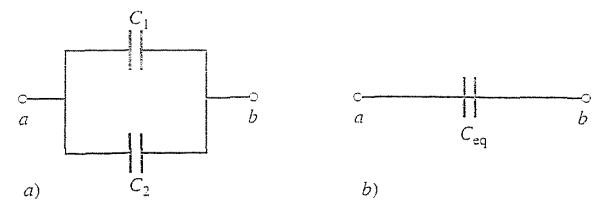


Figura 30-7. *a*) Dos capacitores en paralelo. *b*) Capacitancia equivalente que puede sustituir la combinación en paralelo.

racterística, de manera que la suma de las cargas en los dos capacitores es igual a la carga total:

$$q = q_1 + q_2. \tag{30-14}$$

Si la combinación en paralelo fuera reemplazada por un solo capacitor C_{eq} y conectado a la misma batería, el requisito de que el circuito opera en forma idéntica significa que la misma carga q ha de ser transferida por la batería. Dicho de otra manera, para el capacitor equivalente,

$$q = C_{eq}\Delta V. \tag{30-15}$$

Al sustituir la ecuación 30-14 en la ecuación 30-15 y luego al introducir 30-13 en el resultado, obtenemos

$$C_{eq}\Delta V = C_1\Delta V + C_2\Delta V$$

o bien

$$C_{eq} = C_1 + C_2. \tag{30-16}$$

Si tenemos más de dos capacitores en paralelo, podemos reemplazar primero C_1 y C_2 por su equivalente C_{12}, obtenido a partir de la ecuación 30-16. Después encontramos la capacitancia de C_{12} y el siguiente capacitor en paralelo C_3. Continuado el proceso ampliamos la ecuación 30-16 a cualquier número de capacitores conectados en paralelo:

$$C_{eq} = \sum_n C_n \quad \text{(combinación en paralelo)}. \tag{30-17}$$

En otras palabras, para obtener la capacitancia equivalente de una combinación en paralelo, basta sumar las capacitancias individuales. Adviértase que la capacitancia equivalente siempre es mayor que la más grande de la combinación en paralelo. Ésta puede almacenar más energía que cualquier capacitor individual de la combinación.

Capacitores conectados en serie

La figura 30-8 contiene dos capacitores conectados *en serie*. Tres propiedades caracterizan a una conexión en serie de los elementos de un circuito. 1) Si intentamos pasar de a a b, hay que cruzar *todos* los elementos del circuito *en sucesión*. 2) Cuando se conecta una batería a los extremos de la combinación, su diferencia de potencial ΔV es igual a la suma de las diferencias de potencia en todos los extremos de todos los elementos. 3) La carga q suministrada a cada elemento de la combinación en serie tiene el mismo valor.

Para entender esta última propiedad observe la región de la figura 30-8 delimitada por la línea punteada. Supongamos que la batería coloca una carga $-q$ en la placa izquierda de C_1. Como un capacitor tiene cargas iguales y opuestas en sus placas, una carga $+q$ aparece en la placa izquierda de C_1. Sin embargo, el conductor de forma H, delimitado por la línea punteada, está eléctricamente aislado del resto del circuito; al inicio no lleva carga neta alguna y tampoco se le transfiera carga. Si una carga $+q$ aparece en la placa derecha de C_1, una carga $-q$ ha de aparecer en la placa izquierda de C_2. Es decir, n $(= q/e)$ electrones pasan de la placa derecha de C_1 a la placa izquierda de C_2. En caso que hubiese más de dos capacitores en serie, podría hacerse un argumento semejante en la línea entera de capacitores; el resultado sería que la placa izquierda de *todos* los capacitores en la conexión en serie tendrían una carga q de un signo y la placa derecha de *todos* los capacitores en la conexión en serie tendría una carga de igual magnitud q y de signo opuesto.

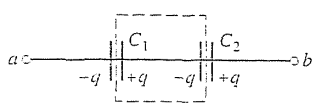


FIGURA 30-8. Combinación en serie de dos capacitores.

Con el uso de la ecuación 30-1, en el caso de los capacitores individuales podemos escribir

$$\Delta V_1 = \frac{q}{C_1} \quad \text{y} \quad \Delta V_2 = \frac{q}{C_2}, \tag{30-18}$$

con la misma carga q en cada capacitor, pero con diferentes diferencias de potencial en ellos. Conforme a la segunda propiedad de una conexión en serie, tenemos

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2. \tag{30-19}$$

Buscamos la capacitancia equivalente C_{eq} que reemplace la combinación, de manera que la batería proporcione la misma cantidad de carga:

$$\Delta V = \frac{q}{C_{eq}}. \tag{30-20}$$

Al sustituir la ecuación 30-19 en la ecuación 30-20 y al emplear luego las ecuaciones 30-18, obtenemos

$$\frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2},$$

o

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \tag{30-21}$$

Si hay varios capacitores en serie, podremos servirnos de la ecuación anterior para determinar la capacitancia equivalente de C_{12} los dos primeros. Después encontramos la de C_{12} y el siguiente capacitor en serie, C_3. Continuando de esta manera, encontraremos la capacitancia equivalente de cualquier número de capacitores en serie,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_n \frac{1}{C_n} \quad \text{(combinación en serie)}. \tag{30-22}$$

Es decir, si queremos obtener la capacitancia equivalente de una combinación en serie, tomaremos el recíproco de la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Nótese que en estos casos la capacitancia equivalente siempre es menor que la capacitancia más pequeña en la serie.

En ocasiones los capacitores están conectados de modo que no se identifican de inmediato como una combinación en serie o en paralelo. Como veremos en el problema resuelto 30-5, a menudo tales combinaciones (pero no siempre) pueden dividirse en unidades más pequeñas, susceptibles de analizarse como conexiones en serie o en paralelo.

PROBLEMA RESUELTO 30-5. *a)* Determine la capacitancia equivalente de la combinación de la figura 30-9*a*, con $C_1 = 12.0\ \mu$F, $C_2 = 5.3\ \mu$F y $C_3 = 4.5\ \mu$F. *b)* Una diferencia de potencial $\Delta V = 12.5$ V

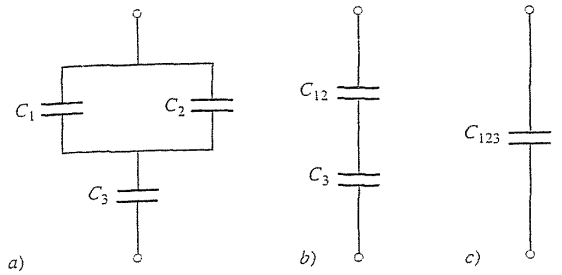


FIGURA 30-9. Problema resuelto 30-5. *a)* Combinación de tres capacitores. *b)* La combinación en paralelo de C_1 y C_2 ha sido sustituida por su equivalente, C_{12}. *c)* La combinación en serie de C_{12} y C_3 ha sido reemplazada por su equivalente C_{123}.

se aplica a las terminales en la figura 30-9*a*. ¿Qué carga se tendrá en C_1?

Solución *a)* Los capacitores C_1 y C_2 están en paralelo. Conforme a la ecuación 30-16 su capacitancia equivalente es

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12.0\ \mu\text{F} + 5.3\ \mu\text{F} = 17.3\ \mu\text{F}.$$

En la figura 30-9*b*, C_1 y C_2 han sido reemplazados con su combinación en paralelo, C_{12}. Como se aprecia en la figura C_{12} y C_3 están en serie. A partir de la ecuación 30-21, la combinación equivalente final (Fig. 30-9*c*) se obtiene de

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{17.3\ \mu\text{F}} + \frac{1}{4.5\ \mu\text{F}} = 0.280\ \mu\text{F}^{-1},$$

o bien de

$$C_{123} = \frac{1}{0.280\ \mu\text{F}^{-1}} = 3.57\ \mu\text{F}.$$

b) Tratamos los capacitores equivalentes C_{12} y C_{123} exactamente como si fueran capacitores reales que tuvieran esa capacitancia. La carga en C_{123} de la figura 30-9*c* será entonces

$$q_{123} = C_{123}\,\Delta V = (3.57\ \mu\text{F})(12.5\ \text{V}) = 44.6\ \mu\text{C}.$$

La misma carga existe en todos los capacitores de la combinación en serie de la figura 30-9*b*. Así pues, en ella la diferencia de potencial a través de C_{12} es

$$\Delta V_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44.6\ \mu\text{C}}{17.3\ \mu\text{F}} = 2.58\ V.$$

Esta misma diferencia de potencial aparece en C_1 de la figura 30-9*a*, de modo que

$$q_1 = C_1\,\Delta V_1 = (12\ \mu\text{F})(2.58\ \text{V}) = 31\ \mu\text{C}.$$

30-5 ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Un uso importante de los capacitores consiste en *almacenar* energía electrostática en aplicaciones que incluyen desde linternas hasta sistemas láser (Fig. 30-10); ambos se basan en la carga y descarga de los capacitores.

En la sección 28-2 demostramos que cualquier configuración de carga tiene cierta *energía potencial eléctrica U*, igual al trabajo *W* (que puede ser positivo o negativo) efectuado por un agente externo que produce la configuración de carga de sus componentes individuales; inicialmente se supone que se encuentran muy lejos y en reposo. Esta energía potencial se parece a la de los sistemas mecánicos; por ejemplo, un resorte comprimido o el sistema Tierra-Luna.

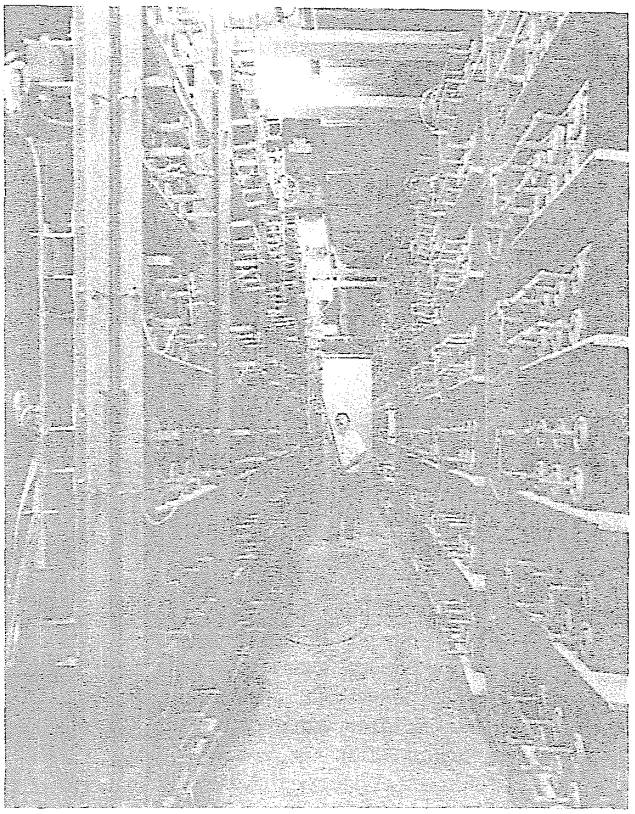


FIGURA 30-10. Este banco de 10,000 capacitores en el Lawrence Livermore National Laboratory almacena 60 MJ de energía eléctrica y la libera en 1 ms a lámparas de destello que activan un sistema de láseres. La instalación forma parte del proyecto Nova, que intenta producir reacciones sostenidas de fusión nuclear.

He aquí un ejemplo simple: se realiza trabajo cuando separamos dos cargas iguales y opuestas. La energía se almacena en forma de energía potencial eléctrica dentro del sistema; puede recobrarse como energía cinética si se permite que las cargas vuelvan a reunirse. De modo similar, un capacitor cargado tiene guardada una energía potencial eléctrica *U* igual al trabajo *W* efectuado por el agente externo al cargar al capacitor. Esa energía se recupera si se permite que el capacitor se descargue. Otra forma de visualizar el trabajo de cargar un capacitor consiste en imaginar que un agente externo extrae electrones de la placa positiva y los lleva a la placa negativa, produciendo con ello una separación de carga. Normalmente, el trabajo de cargar lo hace una batería a costa de su depósito de energía química.

Supóngase que en el tiempo *t* una carga q' ha sido transferida de una placa a otra. La diferencia de potencial $\Delta V'$ en-

tre las placas en ese momento es $\Delta V' = q'/C$. Si ahora se transfiere un elemento diferencial de carga dq', según la ecuación 28-9 ($\Delta V = \Delta U/q_0$), el correspondiente cambio resultante dU en la energía potencial eléctrica es

$$dU = \Delta V' dq' = \frac{q'}{C} dq'.$$

Si el proceso continúa hasta que se transfiere una carga total q, la energía potencial total es

$$U = \int dU = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' \qquad (30\text{-}23)$$

o bien

$$U = \frac{q^2}{2C}. \qquad (30\text{-}24)$$

Con base en la relación $q = C\,\Delta V$, la expresión anterior también puede escribirse así

$$U = \tfrac{1}{2}C(\Delta V)^2 \qquad (30\text{-}25)$$

¿Dónde se encuentra esta energía? Las ecuaciones 30-24 y 30-25 no nos dan una respuesta directa, pero podemos determinar el sitio de la energía almacenada razonando en los siguientes términos. Supóngase que tenemos un capacitor aislado de placas paralelas (es decir, no conectado a una batería) que tiene la carga q. Sin modificar q, separamos las placas hasta que su separación sea el doble de la que había al inicio. De acuerdo con la ecuación 30-5, si la separación d es del doble, la capacitancia alcanza apenas la mitad del tamaño. La ecuación 30-24 indica que se duplicará la energía almacenada, si C adquiere este tamaño. Al separar las placas no modificamos las placas del capacitor; por tanto, no sería razonable concluir que allí se guarda energía adicional. Lo que hicimos fue duplicar el volumen del espacio entre ellas; y como la energía también se duplica, parece razonable concluir que esta energía potencial eléctrica está en el volumen entre las placas. Más concretamente, *la energía se almacena en el campo eléctrico que está en esa región.*

En un capacitor de placas paralelas, despreciando el efecto de los bordes, el campo eléctrico posee el mismo valor en todos los puntos entre las placas. Basándonos en la conclusión de que la energía se halla en el campo, se deduce que la *densidad de energía* u —o sea la energía almacenada por unidad de volumen—, también debe ser la misma en todas las partes de las placas; u está dada por la energía almacenada U, dividida entre el volumen Ad, o sea

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\tfrac{1}{2}C(\Delta V)^2}{Ad}. \qquad (30\text{-}26)$$

Al sustituir la relación $C = \epsilon_0 A/d$ (Ec. 30-5), se obtiene

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\Delta V}{d}\right)^2. \qquad (30\text{-}27)$$

Sin embargo, $\Delta V/d$ es el campo eléctrico E; así que

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2. \qquad (30\text{-}28)$$

La ecuación anterior es, en general, verdadera aunque la obtuvimos en el caso especial de un capacitor de placas paralelas. *Si un campo eléctrico* $\vec{E}$ *existe en cualquier punto del espacio vacío (en un vacío), podemos considerar este último como el sitio donde está la energía almacenada en la cantidad por unidad de volumen de* $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$.

En términos generales, E varía con la posición y, por lo mismo, u es una función de las coordenadas. En el caso especial del capacitor de placas paralelas, E y u no varían con la posición en la región entre las placas.

PROBLEMA RESUELTO 30-6. Por medio de una batería, se carga un capacitor C_1 de 3.55-μF hasta que alcanza una diferencia de potencial $\Delta V_0 = 6.30$ V. Después se quita la batería y, como se indica en la figura 30-11, se conecta el capacitor a otro capacitor descargado C_2 de 8.95-μF. Una vez cerrado el interruptor S, una carga fluye de C_1 a C_2 hasta que se logra el equilibrio, con ambos capacitores a la misma diferencia de potencial ΔV. *a)* ¿Cuál es la diferencia de potencial común? *b)* ¿Cuál es la energía almacenada en el campo eléctrico antes y después de cerrar el interruptor en la figura 30-11?

Solución *a)* La carga eléctrica se conserva y los dos capacitores comparten la original q_0, o

$$q_0 = q_1 + q_2.$$

Se aplica la relación $q = C\,\Delta V$ en ambos términos y se obtiene

$$C_1\,\Delta V_0 = C_1\,\Delta V + C_2\,\Delta V,$$

o bien

$$\Delta V = \Delta V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{(6.30\text{ V})(3.55\ \mu\text{F})}{3.55\ \mu\text{F} + 8.95\ \mu\text{F}} = 1.79\text{ V}.$$

Si conocemos el voltaje de la batería ΔV_0 y el valor de C_1 es posible determinar una capacitancia desconocida C_2 midiendo el valor de ΔV en un arreglo semejante al de la figura 30-11.

b) La energía inicial almacenada es

$$U_i = \tfrac{1}{2}C_1(\Delta V_0)^2 = \tfrac{1}{2}(3.55 \times 10^{-6}\text{ F})(6.30\text{ V})^2$$
$$= 7.05 \times 10^{-5}\text{ J} = 70.5\ \mu\text{J}.$$

La energía final es

$$U_f = \tfrac{1}{2}C_1(\Delta V)^2 + \tfrac{1}{2}C_2(\Delta V)^2 = \tfrac{1}{2}(C_1 + C_2)(\Delta V)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(3.55 \times 10^{-6}\text{ F} + 8.95 \times 10^{-6}\text{ F})(1.79\text{ V})^2$$
$$= 2.00 \times 10^{-5}\text{ J} = 20.0\ \mu\text{J}.$$

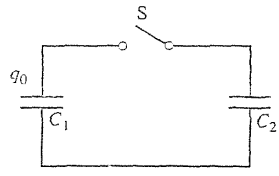


FIGURA 30-11. Problema resuelto 30-6. Previamente se cargó el capacitor C_1 hasta alcanzar la diferencia de potencial ΔV_0 mediante una batería que se eliminó. Cuando se cierra el interruptor S, la carga inicial q_0 en C_1 se comparte con C_2.

Concluimos que $U_f < U_i$ en 72% aproximadamente. Con esto no se viola la conservación de energía. La energía "faltante" aparece como energía térmica en los alambres conectores, según veremos en el siguiente capítulo.*

PROBLEMA RESUELTO 30-7. Una esfera conductora aislada cuyo radio R mide 6.85 cm, tiene una carga $q = 1.25$ nC. *a)* ¿Cuánta energía se almacena en su campo eléctrico? *b)* ¿Qué densidad de energía tiene la superficie de la esfera? *c)* ¿Cuál es el radio R_0 de una superficie esférica imaginaria tal que una mitad de la energía potencial almacenada esté en su interior?

Solución *a)* Con base en las ecuaciones 30-24 y 30-12 tenemos

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{(1.25 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{(8\pi)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(0.0685\ \text{m})}$$

$$= 1.03 \times 10^{-7}\ \text{J} = 103\ \text{nJ}.$$

b) Para calcular la densidad de energía hay que encontrar primero E en la superficie de la esfera. Esta cantidad está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}.$$

Entonces, empleando la ecuación 30-28, la densidad de energía será

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}$$

$$= \frac{(1.25 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{(32\pi^2)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.0685\ \text{m})^4}$$

$$= 2.54 \times 10^{-5}\ \text{J/m}^3 = 25.4\ \mu\text{J/m}^3.$$

c) La energía que se halla en un cascarón esférico entre los radios r y $r + dr$ es

$$dU = (u)(4\pi r^2)(dr),$$

donde $(4\pi r^2)(dr)$ es el volumen del cascarón esférico. Si usamos el resultado de la parte *b)* con la densidad de energía evaluada en el radio r, obtenemos

$$dU = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}4\pi r^2\,dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2}.$$

La condición dada en este problema es

$$\int_R^{R_0} dU = \frac{1}{2}\int_R^{\infty} dU$$

o, utilizando el resultado obtenido antes para dU y cancelando los factores constantes en ambos lados,

$$\int_R^{R_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\int_R^{\infty}\frac{dr}{r^2},$$

que se convierte en

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2R}.$$

Resolviendo para R_0 obtenemos

$$R_0 = 2R = (2)(6.85\ \text{cm}) = 13.7\ \text{cm}.$$

La mitad de la energía almacenada está contenida dentro de la superficie esférica cuyo radio es el doble del de la esfera conductora.

30-6 CAPACITOR CON DIELÉCTRICO

En la sección 29-6 hemos explicado el efecto de aplicar un campo eléctrico a un material aislante (un dieléctrico). Demostramos que consiste en reducir la intensidad del campo en su interior de su valor inicial E_0 en el vacío a $E = E_0/\kappa_e$ dentro del dieléctrico. El parámetro κ_e, la constante dieléctrica, posee valores mayores que 1 en todos los materiales; así que el campo eléctrico en el dieléctrico es menor que el del vacío.

En la presente sección vamos a examinar el efecto de llenar el interior de un capacitor con un material dieléctrico. Este efecto lo investigó por primera vez Michael Faraday en 1837. Construyó dos capacitores idénticos, llenando uno con un material dieléctrico y dejando el otro con aire entre las placas. Cuando los conectó a baterías con la *misma diferencia de potencial*, descubrió que la carga en un capacitor lleno con el dieléctrico era mayor que la del que tenía aire entre las placas. Es decir, la presencia del dieléctrico le permite guardar más carga. Como el almacenarla para descarga posterior es uno de los propósitos del uso de capacitores, su presencia mejora el desempeño del capacitor.

El efecto de llenar un capacitor con dieléctrico depende de que lo hagamos con la batería conectada (como en el experimento de Faraday) o desconectada. Consideremos primero la situación del experimento de Faraday (Fig. 30-12). Un capacitor con una capacitancia C está conectado a una batería de diferencia de potencial ΔV y se permite que se cargue por completo, de modo que las placas contengan una carga q, como se muestra en la figura 30-12*a*. Con la batería conectada, llenamos entonces el interior del capacitor con un material de constante dieléctrica κ_e, como se ve en la figura 30-12*b*. La batería conserva la misma diferencia de potencial ΔV en las placas.

En la ecuación 30-2 se muestra que, si las diferencias de potencial en las figuras 30-12*a* y 30-12*b* son iguales, los campos eléctricos dentro del capacitor han de ser idénticos. Sin embargo, cabría esperar la presencia del dieléctrico para reducir la intensidad del campo eléctrico. Como concluyó Faraday, la

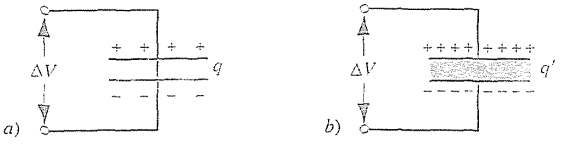


FIGURA 30-12. *a)* Se carga un capacitor vacío conectándolo a una batería que genere una diferencia de potencial ΔV. *b)* La batería permanece conectada mientras el capacitor se llena con un dieléctrico. En este caso, la diferencia ΔV permanece constante pero q aumenta.

* Una parte pequeña de la energía también se irradia y se pierde. Una exposición más rigurosa se da en "Two-Capacitor Problem: A More Realistic View", de R. A. Powell, *American Journal of Physics*, mayo de 1979, p. 460.

tendencia del dieléctrico a disminuir el campo se ve balanceada por la carga adicional que la batería suministra a las placas cuando se inserta el dieléctrico.

Supongamos que estamos utilizando un capacitor de placas paralelas. Con el capacitor vacío, el campo eléctrico está dado por la ecuación 30-3: $E = \sigma/\epsilon_0 = q/\epsilon_0 A$. Cuando el dieléctrico está presente, el factor $1/\kappa_e$ aminora al campo eléctrico debido a su presencia, pero también el campo cambia porque ahora las placas llevan la carga q', de modo que el campo es $E' = q'/\kappa_e\epsilon_0 A$. Puesto que los campos han de ser iguales, podemos hacer $E' = E$ y concluir que

$$q' = \kappa_e q. \tag{30-29}$$

La constante dieléctrica es mayor que 1 y, por ello, el capacitor puede almacenar más carga con el dieléctrico presente que cuando está vacío. A medida que el material dieléctrico se introduce en el capacitor ya cargado, la batería traslada más carga $q' - q = q(\kappa_e - 1)$ de la placa positiva a la negativa.

La capacitancia con el dieléctrico presente es $C' = q'/\Delta V'$. Empleamos $q' = \kappa_e q$ y $\Delta V' = \Delta V$ y así obtenemos

$$C' = \kappa_e C. \tag{30-30}$$

La presencia del dieléctrico aumenta la capacitancia en el factor κ_e. En un capacitor de placas paralelas con dieléctrico, la capacitancia puede obtenerse combinando las ecuaciones 30-5 y 30-30:

$$C' = \frac{\kappa_e \epsilon_0 A}{d}. \tag{30-31}$$

Se incrementa la capacitancia de un capacitor *cualquiera* en el mismo factor, cuando la sustancia dieléctrica llena el espacio entre las placas. Pueden modificarse en forma parecida las ecuaciones 30-8 y 30-11 para explicar la presencia de un dieléctrico que llena al capacitor.

Aunque el efecto en la capacitancia es el mismo, la demostración será muy diferente si introducimos el material dieléctrico con la batería *no* conectada. Primero conectamos el capacitor a ella, a fin de que las placas adquieran una diferencia de potencial ΔV y una carga q; después se desconecta la batería como se indica en la figura 30-13*a*. En seguida, llenamos el capacitor con el dieléctrico, según se muestra en la figura 30-13*b*. En este caso *la carga ha de permanecer constante* pues no hay una batería que lleve la carga de una placa a otra. Con la carga constante, el campo eléctrico se altera sólo por la presencia del dieléctrico; así que $E' = E/\kappa_e$. Sustituyendo este campo eléctrico en la ecuación 30-2 encontramos la diferencia de potencial, obtendremos $\Delta V' = \Delta V/\kappa_e$. Es decir, en este caso la diferencia de potencial disminuye en el factor $1/\kappa_e$. Con $\Delta V' = q'/C'$ y $q' = q$, una vez más obtendremos $C' = \kappa_e C$, como en la ecuación 30-30. La capacitancia no depende de *cómo* carguemos el capacitor, ni cómo insertemos el dieléctrico; depende exclusivamente de la geometría del capacitor y del material con que esté lleno.

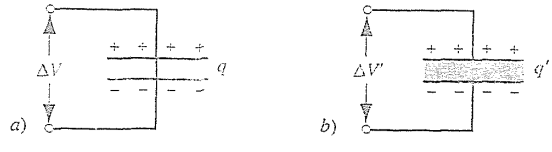


FIGURA 30-13. *a*) Se carga un capacitor vacío y luego se desconecta de la batería. *b*) En seguida se llena con un dieléctrico. La carga permanece constante, pero la diferencia de potencial disminuye de ΔV a $\Delta V'$.

PROBLEMA RESUELTO 30-8. Un capacitor de placas paralelas, cuya capacitancia C es 13.5 pF, presenta una diferencia de potencial $\Delta V = 12.5$ V en sus placas. La batería de carga se desconecta enseguida y una lámina gruesa de porcelana ($\kappa_e = 6.5$) se introduce entre las placas como se observa en la figura 30-13*b*. ¿Cuál es la energía almacenada de la unidad antes y después de introducirla?

Solución La energía inicial almacenada está dada por la ecuación 30-25 así

$$U_i = \tfrac{1}{2}C\,\Delta V^2 = \tfrac{1}{2}(13.5 \times 10^{-12}\ \text{F})(12.5\ \text{V})^2$$
$$= 1.055 \times 10^{-9}\ \text{J} = 1055\ \text{pJ}.$$

A partir de la ecuación 30-24 podemos escribir la energía final en la forma $U_f = q^2/2C'$ porque, según las condiciones del planteamiento del problema, q (pero no ΔV) permanece constante a medida que introducimos la lámina gruesa. Una vez colocada en su sitio, la capacitancia aumenta a $C' = \kappa_e C$ y, por lo mismo,

$$U_f = \frac{q^2}{2\kappa_e C} = \frac{U_i}{\kappa_e} = \frac{1055\ \text{pJ}}{6.5} = 162\ \text{pJ}.$$

Una vez introducida la lámina, la energía es menor por un factor de $1/\kappa_e$.

En teoría, la energía "faltante" sería evidente para quien introdujera la lámina. El capacitor ejercería una fuerza sobre ella y realizaría en ella el trabajo

$$W = U_i - U_f = 1055\ \text{pJ} - 162\ \text{pJ} = 893\ \text{pJ}.$$

Si introdujéramos la lámina sin ninguna restricción y si no hubiera fricción, oscilaría dentro y fuera de la región entre las placas. El sistema formado por capacitor + lámina tiene una energía constante de 1055 pJ; la energía fluctúa entre la energía cinética de la lámina en movimiento y la energía almacenada del campo eléctrico. En el instante en que la lámina oscilante llene el espacio entre las placas, su energía cinética será de 893 pJ.

Los dieléctricos y la ley de Gauss

Hasta ahora hemos empleado la ley de Gauss en situaciones donde no hay un dieléctrico. A continuación vamos a aplicarla a un capacitor de placas paralelas lleno con un material de constante dieléctrica κ_e.

En la figura 30-14 se muestra el capacitor con dieléctrico y sin él. Suponemos que la carga q en la placa es igual en todos los casos. Se trazaron las superficies gaussianas en parte a través de la placa superior y, en parte, a través de la región entre ellas.

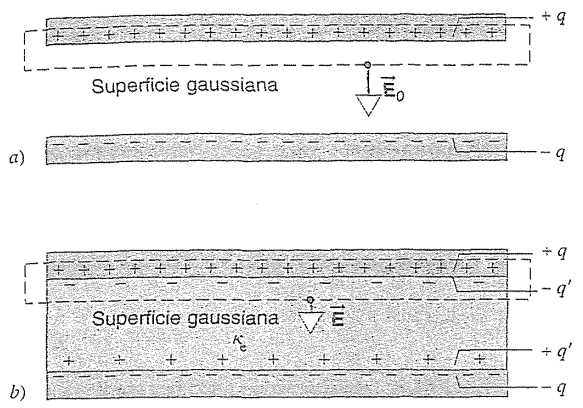


FIGURA 30-14. *a)* Capacitor de placas paralelas. *b)* Se inserta una lámina dieléctrica, mientras la carga q permanece constante. La carga inducida q' aparece en la superficie de la lámina.

Si no existe un dieléctrico (Fig. 30-14), la ley de Gauss nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 E_0 A = q,$$

porque el campo eléctrico existe sólo en la parte de la superficie gaussiana situada entre las placas. Por tanto,

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}. \tag{30-32}$$

Si existe el dieléctrico (Fig. 30-14*b*), la ley de Gauss nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 EA = q - q'$$

o bien

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}, \tag{30-33}$$

donde $-q'$, la *carga inducida superficial,* ha de distinguirse de q, la *carga libre* en las placas. Estas dos cargas $+q$ y $-q'$, que se encuentran en el interior de la superficie gaussiana, tienen signo opuesto; la carga *neta* dentro de ella es $q + (-q') = q - q'$.

El dieléctrico reduce el campo eléctrico en el factor κ_e y, por tanto,

$$E = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A}. \tag{30-34}$$

Insertando esto en la ecuación 30-33 obtenemos

$$\frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

o

$$q' = q\left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right). \tag{30-35}$$

La expresión anterior muestra que la carga superficial inducida q' siempre tiene menor magnitud que la carga libre q y que es igual a cero si no hay un dieléctrico, es decir, cuando $\kappa_e = 1$.

A continuación escribimos así la ley de Gauss en el caso de la figura 30-14*b*:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q - q', \tag{30-36}$$

una vez más $q - q'$ es la carga neta dentro de la superficie gaussiana. Al hacer en la ecuación 30-35 la sustitución de q', obtenemos después de un poco de rearreglo

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \vec{E} \cdot d\vec{A} = q. \tag{30-37}$$

En general, esta relación tan importante, aunque obtenida de un capacitor de placas paralelas, es verdadera, en general, y es la forma en que suele escribirse la ley de Gauss cuando hay dieléctricos. Nótese lo siguiente:

1. La integral de flujo se refiere ahora a $\kappa_e \vec{E}$ y no a $\vec{E}$. Esto concuerda con la *reducción* de E en un dieléctrico en el factor κ_e, porque $\kappa_e \vec{E}$ (con el dieléctrico presente) es igual a $\vec{E}_0$ (sin dieléctrico). Para generalizar admitimos la posibilidad de que el dieléctrico no sea uniforme y para ello colocamos κ_e dentro de la integral.

2. Se supone que la carga q contenida dentro de la superficie es la *carga libre exclusivamente.* La carga inducida superficial se omite deliberadamente en el lado derecho de la ecuación 30-37, teniendo en cuenta mediante la introducción de κ_e en la izquierda. Las ecuaciones 30-36 y 30-37 son formulaciones equivalentes por completo.

PROBLEMA RESUELTO 30-9. La figura 30-15 muestra un capacitor de placas paralelas con una superficie A y con una separación d entre las placas. En ellas se aplica una diferencia de potencial ΔV. Después se desconecta la batería y una lámina dieléctrica de espesor b y una constante dieléctrica κ_e se coloca entre las placas como se indica. Suponga que

$$A = 115\ \text{cm}^2, \quad d = 1.24\ \text{cm}, \quad b = 0.78\ \text{cm},$$
$$\kappa_e = 2.61, \quad \Delta V = 85.5\ \text{V}.$$

a) ¿Cuál es la capacitancia C antes de introducir la lámina? *b)* ¿Qué carga libre aparece en las placas? *c)* ¿Cuál es el campo eléctrico E_0

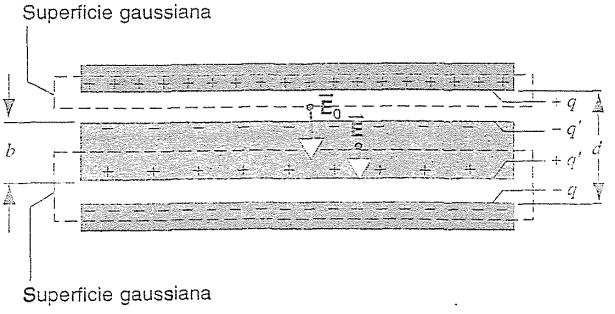


FIGURA 30-15. Problema resuelto 30-9. Un capacitor de placas paralelas contiene un dieléctrico que llena sólo en parte el espacio entre ellas.

en las zonas entre las placas y la lámina dieléctrica? *d*) Calcule el campo eléctrico E en ellas. *e*) ¿Cuál es la diferencia de potencial $\Delta V'$ entre las placas una vez introducida la lámina? *f*) ¿Cuál es la capacitancia C' después de colocar la lámina?

Solución *a*) A partir de la ecuación 30-5 tenemos

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{1.24 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 8.21 \times 10^{-12}\ \text{F} = 8.21\ \text{pF}.$$

b) La carga libre en las placas puede obtenerse de la ecuación 30-1,

$$q = C\Delta V = (8.21 \times 10^{-12}\ \text{F})(85.5\ \text{V})$$
$$= 7.02 \times 10^{-10}\ \text{C} = 702\ \text{pC}.$$

Como se desconectó la batería de carga antes de introducir la lámina, la carga libre permanece inalterada cuando se coloca la lámina.

c) Apliquemos la ley de Gauss, en la forma expresada en la ecuación 30-37, a la superficie superior gaussiana de la figura 30-15, que encierra sólo la carga libre en la placa superior del capacitor. Tenemos

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 (1) E_0 A = q$$

o

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{7.02 \times 10^{-10}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}$$
$$= 6900\ \text{V/m} = 6.90\ \text{kV/m}.$$

Nótese que hacemos $\kappa_e = 1$ en esta ecuación porque la superficie gaussiana en que se integró la ley de Gauss no atraviesa dieléctrico alguno. Nótese asimismo que el valor de E_0 no se altera al introducir la lámina. Depende sólo de la carga libre de las placas.

d) Volvemos a aplicar la ecuación 30-37, esta vez a la superficie inferior gaussiana en la figura 30-15 e incluyendo únicamente la carga libre $-q$. Obtenemos

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\epsilon_0 \kappa_e E A = -q$$

TABLA 30-1 Resumen de los resultados del problema resuelto 30-9

Cantidad	*Unidad*	*Sin lámina*	*Lámina parcial*	*Lámina completa*
C	pF	8.21	13.4	21.4
q	pC	702	702	702
q'	pC	—	433	433
ΔV	V	85.5	52.3	32.8
E_0	kV/m	6.90	6.90	6.90[a]
E	kV/m	—	2.64	2.64

[a] Supone que hay una zona muy estrecha.

o bien

$$E = \frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A} = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{6.90\ \text{kV/m}}{2.61} = 2.64\ \text{kV/m}.$$

El signo negativo aparece cuando evaluamos el producto punto $\vec{E} \cdot d\vec{A}$, porque $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ siguen dirección contraria. $d\vec{A}$ siempre está en dirección de la normal *hacia fuera* a la superficie cerrada gaussiana.

e) Para calcular la diferencia de potencial $\Delta V'$ utilizamos la ecuación 30-2:

$$\Delta V' = \int_+^- E\, ds = E_0(d - b) + Eb$$
$$= (6900\ \text{V/m})(0.0124\ \text{m} - 0.0078\ \text{m})$$
$$+ (2640\ \text{V/m})(0.0078\ \text{m})$$
$$= 52.3\ \text{V}.$$

Esto contrasta con la diferencia potencial original aplicada de 85.5 V.

f) Conforme a la ecuación 30-1, la capacitancia con la lámina en su sitio es

$$C' = \frac{q}{\Delta V'} = \frac{7.02 \times 10^{-10}\ \text{C}}{52.3\ \text{V}}$$
$$= 1.34 \times 10^{-11}\ \text{F} = 13.4\ \text{pF}.$$

En la tabla 30-1 se resumen los resultados de este problema y también los que se hubieran conseguido en caso de que la lámina dieléctrica hubiera llenado por completo el espacio entre las placas.

OPCIÓN MÚLTIPLE

30-1 Capacitores

1. Dos placas metálicas paralelas tienen cargas q_1 y q_2. ¿Es un ejemplo de capacitor?
   A) Sí.
   B) Sólo si $q_1 = -q_2$.
   C) Sólo si los signos q_1 y q_2 son distintos.
   D) No.

30-2 Capacitancia

2. Los centros de dos esferas conductoras idénticas de radio r están separados por una distancia $d > 2r$. Una carga $+q$ se encuentra en una esfera y una carga $-q$ en la otra. La capacitancia del sistema es C_0. La carga adicional se transfiere ahora de modo que se duplica en cada esfera.

   a) ¿Cuál es la nueva capacitancia C' ahora que las cargas han cambiado.

   A) $C' = 4C_0$ B) $C' = 2C_0$
   C) $C' = C_0$ D) $C' = C_0/2$
   E) No existe suficiente información para contestar la pregunta.

   b) ¿Cuál es la nueva diferencia de potencial ΔV entre las esferas?

   A) $\Delta V' = 4q/C_0$ B) $\Delta V' = 2q/C_0$
   C) $\Delta V' = q/C_0$ D) $\Delta V' = q/2C_0$
   E) No hay suficiente información para contestar la pregunta.

3. Los centros de dos esferas conductoras idénticas de radio r están separados por una distancia $d > 2r$.

   a) ¿Cómo cambia la capacitancia de este sistema si se disminuye la separación entre ellas?

A) C aumenta. B) C disminuye.
C) C no se altera.
D) No hay suficiente información para contestar la pregunta.

b) ¿Como cambia la capacitancia de este sistema si se disminuye r?

A) C aumenta. B) C disminuye.
C) C no se altera.
D) No hay suficiente información para contestar la pregunta.

30-3 Cálculo de la capacitancia

4. ¿Cuál de los siguientes cambios en un capacitor ideal de placas paralelas conectado a una batería también ideal incrementará la carga del capacitor?
   A) Reducción de la diferencia de potencial en las placas.
   B) Reducción de la superficie de las placas.
   C) Reducción de la separación de las placas.
   D) Ninguno de los anteriores.
5. La ecuación 30-5 no incluye los efectos de bordes cercanos al borde de las placas. ¿Hace esto que la ecuación 30-5 subestime o sobrestime la capacitancia de un capacitor real de placas paralelas?
   A) Sobrestimar B) Subestimar
   C) Ninguna de la dos, la expresión es correcta
6. ¿Cuál es la capacitancia de un conductor esférico *simple* de radio r?
   A) $4\pi\epsilon_0$ B) $4\pi\epsilon_0 r$ C) $4\pi\epsilon_0/r$
   D) La capacitancia no está definida para un solo objeto.

30-4 Capacitores en serie y en paralelo

7. Dos capacitores C_1 y C_2 están conectados en serie; suponga que $C_1 < C_2$. La capacitancia equivalente de este sistema es C, donde
   A) $C < C_1/2$. B) $C_1/2 < C < C_1$.
   C) $C_1 < C < C_2$. D) $C_2 < C < 2C_2$.
   E) $2C_2 < C$.
8. Dos capacitores C_1 y C_2 están conectados en paralelo; suponga que $C_1 < C_2$. La capacitancia equivalente de este sistema es C, donde
   A) $C < C_1/2$. B) $C_1/2 < C < C_1$.
   C) $C_1 < C < C_2$. D) $C_2 < C < 2C_2$.
   E) $2C_2 < C$.
9. Cuatro arreglos posibles de capacitores se incluyen en la figura 30-16 para tres capacitores idénticos.

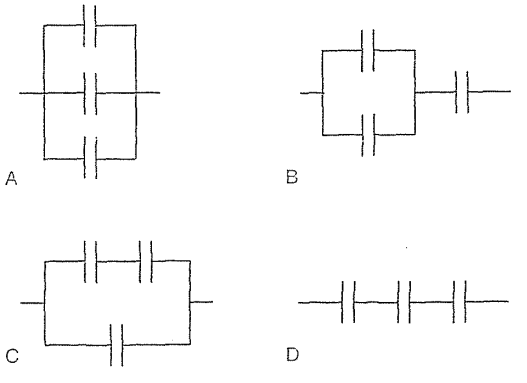


FIGURA 30-16. Pregunta de opción múltiple 9.

a) ¿Cuál arreglo tendrá la mayor capacitancia equivalente?
b) Si los arreglos estuvieran conectados a una diferencia de potencial de 12 V, de modo que se transfiriese la misma cantidad de carga. ¿Cuál requiere transferir la máxima carga?
c) Los arreglos están conectados a una diferencia de potencial de modo que se transfiera la misma cantidad de carga? ¿Cuál requiere la mayor diferencia de potencial?

30-5 Almacenamiento de energía en un campo eléctrico

10. Un capacitor de placas paralelas está conectado a una batería ideal que produce una diferencia de potencial fija. Originalmente la energía almacenada en el capacitor es U_0. Si la distancia entre las placas se duplica, la nueva energía almacenada en él será
    A) $4U_0$. B) $2U_0$. C) U_0.
    D) $U_0/2$. E) $U_0/4$.
11. Un capacitor de placas paralelas se carga conectándolo a una batería ideal; después se desconecta. Originalmente la energía almacenada en él es U_0. Si la distancia entre las placas se duplica, la nueva energía almacenada en él será
    A) $4U_0$. B) $2U_0$. C) U_0.
    D) $U_0/2$. E) $U_0/4$.
12. Un estudiante originalmente carga un capacitor fijo para que tenga una energía potencial de 1 J. Si quiere obtener una energía potencial de 4 J, debe
    A) cuadruplicar la diferencia de potencial en el capacitor pero sin alterar la carga.
    B) duplicar la diferencia de potencial en el capacitor, pero sin alterar la carga.
    C) duplicar la diferencia de potencial en el capacitor y también la carga.
    D) dejar intacta la diferencia de potencial en el capacitor, pero duplicando la carga.
13. Un globo inflado se cubre con una superficie conductora que lleva una carga q. El globo sufre una fuga y el radio empieza a disminuir, pero no se pierde carga en la superficie.
    a) ¿Cómo cambia la capacitancia del globo al empezar éste a sufrir fugas?
    A) C aumenta. B) C disminuye.
    C) C no se altera.
    D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.
    b) ¿Cómo cambia la energía eléctrica almacenada al empezar el globo a sufrir pérdidas?
    A) U aumenta. B) U disminuye.
    C) U no se altera.
    D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

30-6 Capacitor con dieléctrico

14. Considere un capacitor de placas paralelas inicialmente con una carga q_0, una capacitancia C_0 y una diferencia de potencial ΔV_0. Entre las placas hay una fuerza electrostática de magnitud F_0 y el capacitor tiene una energía almacenada U_0. Sus terminales *no* están conectadas a nada.
    a) Una lámina dieléctrica con $\kappa_e > 1$ se introduce entre las placas. ¿Cuáles cantidades crecen? (Seleccione todas las que se aplican.)
    A) q B) C C) ΔV D) F E) U

b) ¿Qué dirección sigue la fuerza electrostática en la lámina dieléctrica mientras está siendo introducida?
A) La fuerza empuja la lámina al interior del capacitor.
B) La fuerza empuja la lámina fuera del capacitor.
C) No hay fuerza electrostática sobre la lámina.
c) Más tarde se quita la lámina dieléctrica. ¿Qué dirección sigue la fuerza electrostática en ella mientras se quita?
A) La fuerza empuja la lámina al interior del capacitor.
B) La fuerza empuja la lámina fuera del capacitor.
C) No hay fuerza electrostática sobre la lámina.

15. Considere un capacitor de placas paralelas inicialmente con la carga q_0 y la capacitancia C_0. Entre las placas hay una fuerza electrostática de magnitud F_0 y el capacitor tiene una energía almacenada C_0. Las terminales de los capacitores están conectados a una batería ideal, que suministra una diferencia de potencial ΔV_0.

a) Una lámina dieléctrica con $\kappa_e > 1$ se introduce entre las placas. ¿Qué magnitudes aumentarán? (Seleccione todas las que se aplican.)
A) q B) C C) ΔV
D) F E) U

b) ¿Qué dirección sigue la fuerza electrostática en la lámina dieléctrica mientras es introducida?
A) La fuerza empuja la lámina al interior del capacitor.
B) La fuerza empuja la lámina afuera del capacitor.
C) No hay fuerza electrostática sobre la lámina.
c) Más tarde se quita la lámina dieléctrica. ¿Qué dirección sigue la fuerza electrostática en ella mientras se quita?
A) La fuerza empuja la lámina al interior del capacitor.
B) La fuerza empuja la lámina fuera del capacitor.
C) No hay fuerza electrostática en la lámina.

PREGUNTAS

1. Un capacitor está conectado a una batería. *a*) ¿Por qué las placas reciben una carga exactamente de la misma magnitud? *b*) ¿Es esto cierto aun cuando tengan distinto tamaño?

2. Recibe usted dos capacitores, C_1 y C_2 en los cuales $C_1 > C_2$. ¿Cómo dispondría las cosas de modo que C_2 pudiera contener más carga que C_1?

3. La relación $\sigma \propto 1/R$, donde es la densidad de carga superficial, y R el radio de curvatura (Ec. 28-42), indica que la carga situada en un conductor aislado se concentra en las puntas y evita las superficies planas, donde $R = \infty$. ¿Cómo concilia lo anterior con la figura 30-5, en la que la carga se halla en la superficie plana de ambas placas?

4. En relación con la ecuación ($q = C\,\Delta V$) dijimos que C es un constante. Sin embargo, señalamos (Ec. 30-5) que se basa en la geometría (y también en el medio como veremos luego). Si C es efectivamente una constante, ¿respecto a qué variables permanece constante?

5. En la figura 30-1 suponga que a y b son no conductores; la carga se distribuye arbitrariamente en sus superficies. *a*) ¿Será válida la ecuación ($q = C\,\Delta V$), con C independiente de los arreglos de carga? *b*) ¿Cómo definiría ΔV en este caso?

6. Recibe un capacitor de placas paralelas con placas cuadradas de superficie A y una separación d. ¿Qué efecto cualitativo causan las siguientes operaciones en su capacitancia? *a*) Reduzca d. *b*) Ponga una lámina de cobre entre las placas de manera que no toquen ninguna de las dos. *c*) Duplique la superficie de ambas placas. *d*) Duplique la superficie de una placa solamente. *e*) Deslice las placas paralelas entre sí, de modo que la superficies de sobreposición sea 50%. *f*) Duplique la diferencia de potencial entre las placas. *g*) Incline una placa en forma tal que la separación sea d en un extremo y $\frac{1}{2}d$ en el otro.

7. Tiene dos conductores aislados, cada uno con cierta capacitancia (Fig. 30-17). Si los une por medio de un alambre fino, ¿cómo calculará la capacitancia de la combinación? Al unirlos con el alambre, ¿los ha conectado en serie o en paralelo?

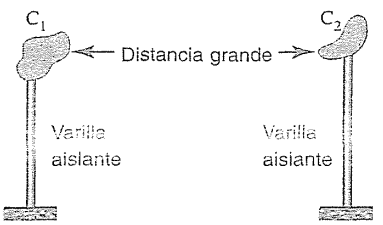


FIGURA 30-17. Pregunta 7.

8. La capacitancia de un conductor se ve afectada por la presencia de otro sin carga que esté aislado eléctricamente. ¿Por qué?

9. Una hoja de aluminio de espesor insignificante se pone entre las placas de un capacitor como se ve en la figura 30-18. ¿Qué efecto tiene en la capacitancia si *a*) la hoja está aislada eléctricamente y si *b*) está conectada a la placa superior?

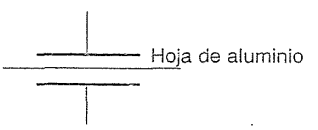


FIGURA 30-18. Pregunta 9.

10. A menudo los capacitores se guardan con un alambre conectado en sus terminales. ¿Por qué se hace eso?

11. Si no prescindiéramos de los bordes de las líneas eléctricas en un capacitor de placas paralelas, ¿calcularía una capacitancia mayor o menor?

12. Dos discos circulares de cobre están uno frente a otro a cierta distancia. ¿En qué formas podría reducir usted la capacitancia de esta combinación?

13. Explique las semejanzas y las diferencias cuando *a*) una lámina dieléctrica y *b*) una lámina conductor se introducen en las pla-

cas de un capacitor de placas paralelas. Suponga que el espesor de la lámina es la mitad de la separación entre ellas.

14. Un capacitor de placas paralelas lleno de aceite ha sido diseñado para que tenga una capacitancia C y que opere seguramente a cierta diferencia potencial máxima o por debajo de ella ΔV_m, sin doblarse. Pero el diseñador no hizo bien su trabajo y el capacitor a veces se dobla. ¿Qué puede hacerse para rediseñarlo, manteniendo invariables C y ΔV_m y utilizando el mismo dieléctrico?
15. En cierta diferencia de potencial, ¿almacena un capacitor mayor o menor cantidad de carga con un dieléctrico que sin él (vacío)? Explique su respuesta utilizando la imagen microscópica de la situación.
16. El agua tiene una gran constante dieléctrica (Tabla 29-2). ¿Por qué no se usa comúnmente como material dieléctrico en los capacitores?
17. La figura 30-19 muestra un capacitor real de 1 F, que se utiliza en laboratorios para estudiantes. Mide apenas unos pocos centímetros de diámetro. Considerando el resultado del problema resuelto 30-2, ¿cómo puede construirse este capacitor?

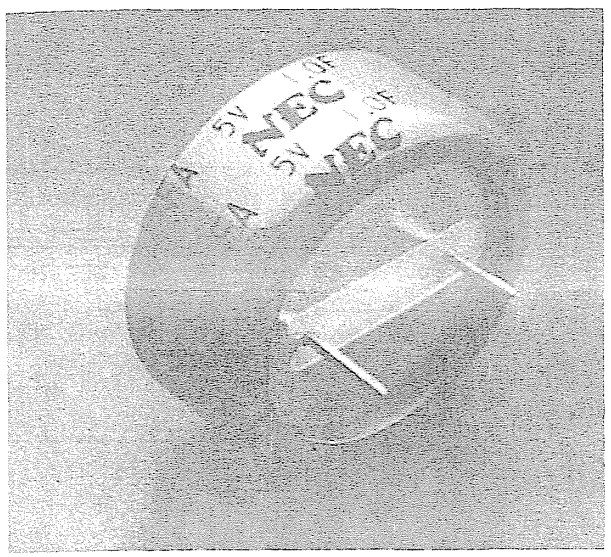


FIGURA 30-19. Pregunta 17.

18. Una lámina dieléctrica se introduce en un extremo de un capacitor de placas paralelas y cargado (las placas son horizontales y la batería de carga ha sido desconectada) y luego se libera. Describa lo que sucede. No tenga en cuenta la fricción.
19. Se carga un capacitor de placas paralelas utilizando una batería, que luego se desconecta. Después una lámina dieléctrica se introduce entre ellas. En términos cualitativos describa lo que sucede con la carga, con la capacitancia, con la diferencia de potencial, con el campo eléctrico y con la energía almacenada.
20. Mientras un capacitor de placas paralelas permanece conectado a un batería, se introduce una lámina dieléctrica entre ellas. Describa en términos cualitativos lo que sucede con la carga, con la capacitancia, con el campo eléctrico y la energía total almacenada.
21. Imagine una lámina dieléctrica igual a la separación de las placas, introducida sólo en la mitad entre un capacitor de placas paralelas que tiene una carga fija q. Dibuje cualitativamente su distribución en las placas y la carga inducida q' en la lámina.
22. Dos capacitores idénticos están conectados como se observa en la figura 30-20. Una lámina dieléctrica se introduce entre las placas de uno de ellos, manteniendo conectada la batería de modo que se conserva una diferencia de potencial ΔV constante. Describa lo que sucede con la carga, con la capacitancia, con la diferencia de portencial, con el campo eléctrico y la energía almacenada en cada capacitor.

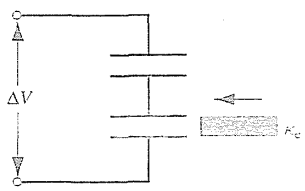


FIGURA 30-20. Pregunta 22.

23. En este capítulo hemos supuesto condiciones electrostáticas, es decir, permanece constante la diferencia de potencial ΔV entre las placas del capacitor. Sin embargo, suponga que como ocurre comúnmente en la práctica, ΔV varía senoidalmente con el tiempo en una frecuencia angular ω. ¿Esperaría usted que la constante dieléctrica κ_e variase con ω?

EJERCICIOS

30-1 Capacitores

30-2 Capacitancia

1. El electrómetro es un dispositivo con que se mide la carga estática. Se pone una carga desconocida en las placas de un capacitor y se mide la diferencia de potencial. ¿Qué carga mínima puede medirse mediante un electrómetro con una capacitancia de 50 pF y una sensibilidad de voltaje de 0.15 V?
2. Los dos objetos metálicos de la figura 30-21 tienen cargas netas de +73.0 pC y de −73.0 pC y esto produce una diferencia de potencial de 19.2 V entre ellos. *a)* ¿Qué capacitancia tiene el sistema. *b)* Si se modifican las cargas a + 210 pC y − 210 pC, ¿cuál será la capacitancia? *c)* ¿Cuál será entonces la diferencia potencial?

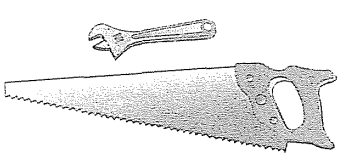


FIGURA 30-21. Ejercicio 2.

3. El capacitor de la figura 30-22 tiene una capacitancia de 26.0 μF y al inicio no está cargado. Una batería suministra una diferencia de potencial ΔV de 125 V. Luego de cerrar S durante largo tiempo, ¿cuánta carga se desplazará de la batería?

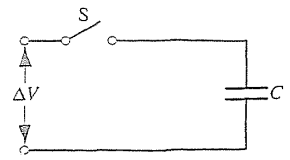


FIGURA 30-22. Ejercicio 3.

30-3 Cálculo de la capacitancia

4. Un capacitor de placas paralelas tiene placas circulares de 8.22 cm de radio y con una separación de 1.31 mm. *a*) Calcule la capacitancia. *b*) ¿Qué carga aparecerá en las placas si se aplica una diferencia de potencial de 116 V?
5. La placa y el cátodo de un diodo de tubo al vacío tienen la forma de dos cilindros concéntricos con el cátodo como cilindro central. El diámetro del cátodo mide 1.62 mm y el de la placa 18.3 mm; ambos elementos tienen una longitud de 2.38 cm. Calcule la capacitancia del diodo.
6. Dos hojas de aluminio tienen una separación de 1.20 mm, una capacitancia de 9.70 pF y una carga de 13.0 V. *a*) Calcule la superficie de la placa. *b*) Ahora se reduce la separación en 0.10 mm manteniendo constante la carga. Encuentre la nueva capacitancia. *c*) ¿Cuánto se altera la diferencia de potencial? Explique de qué manera podría construirse un micrófono aplicando este principio?
7. Las placas del capacitor esférico tienen un radio de 38.0 mm y de 40.0 mm. *a*) Calcule la capacitancia. *b*) ¿Cuál debe ser la superficie de placa de un capacitor de placas paralelas con la misma separación y capacitancia de ellas?
8. Suponga que los dos cascarones esféricos de un capacitor esférico tienen radios aproximadamente iguales. En tales condiciones, el dispositivo se aproxima a un capacitor de placas paralelas con $b - a = d$. Demuestre que la ecuación 30-8 en un capacitor esférico efectivamente se reduce a la ecuación 30-5 para un capacitor de placas paralelas en este caso.

30-4 Capacitores en serie y en paralelo

9. ¿Cuántos capacitores de 1.00-μF deben conectarse en paralelo para almacenar 1.00 C con una diferencia de potencial de 110 V en los capacitores?
10. En la figura 30-23 encuentre la capacitancia equivalente de la combinación. Suponga que $C_1 = 10.3\ \mu$F, $C_2 = 4.80\ \mu$F y $C_3 = 3.90\ \mu$F.

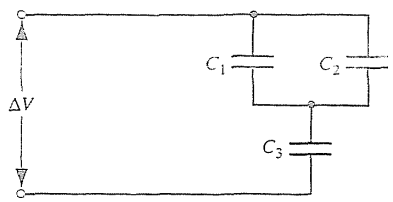


FIGURA 30-23. Ejercicios,10, 17 y 26.

11. En la figura 30-24 encuentre la capacitancia equivalente de la combinación. Suponga que $C_1 = 10.3\ \mu$F, $C_2 = 4.80\ \mu$F y $C_3 = 3.90\ \mu$F.

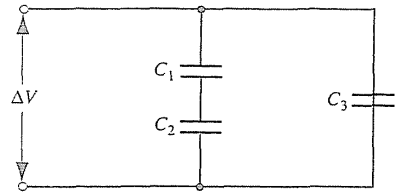


FIGURA 30-24. Ejercicio 11.

12. Los capacitores sin carga de la figura 30-25 tienen una capacitancia de 25.0 μF. Se produce una diferencia de potencial de 4200 V cuando se cierra el interruptor S. ¿Cuánta carga fluye entonces por el medidor A?

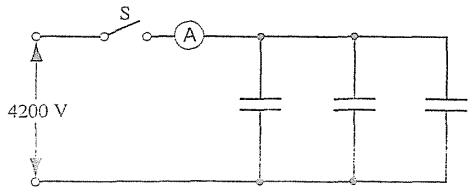


FIGURA 30-25. Ejercicio 12.

13. Un capacitor de 6.0-μF está conectado en serie a otro de 4.0-μF; al par se le aplica una diferencia de potencial de 200 V. *a*) Calcule la capacitancia equivalente. *b*) ¿Qué carga contiene cada uno? *c*) ¿Cuál es la diferencia de potencial en cada capacitor?
14. Resuelva el ejercicio 13 con los dos capacitores anteriores conectados en paralelo.
15. *a*) Tres capacitores están conectados en paralelo. Cada uno tiene una superficie de placa A y un espaciamiento d entre ellas. ¿Qué espaciamiento debe tener un capacitor con superficie de placa A, si su capacitancia es igual a la de la combinación en paralelo? *b*) ¿Cuál debe ser el espaciamiento si los tres capacitores están conectados en serie?
16. Tenemos varios capacitores de 2.0-μF cada uno capaz de soportar 200 V sin ruptura. ¿Cómo crearía una combinación que tenga una capacitancia equivalente de *a*) 0.40 μF o *b*) 1.2 μF, ambas capaces de soportar 1000 V?
17. En la figura 30-23 suponga que el capacitor C_3 se rompe eléctricamente, convirtiéndose en equivalente de una trayectoria de conducción. ¿Qué cambios presentará el capacitor C_1 en *a*) la carga y en *b*) la diferencia de potencial? Suponga que $\Delta V = 115$ V.
18. Un capacitor de 108-μF tiene una carga con una diferencia de potencial de 52.4 V; después se desconecta la batería de carga. Luego se conecta el capacitor en paralelo con otro (inicialmen-

te sin carga). La diferencia medida de potencial desciende a 35.8 V. Encuentre la capacitancia de este segundo capacitor.

19. Una porción de un arreglo infinito de capacitores idénticos de 1 μF se muestra en la figura 30-26. El inicial no lleva carga. Luego se conecta una batería en dos uniones lejanas. Demuestre que el potencial en cualquiera de ellas es el promedio que hay en las cuatro más cercanas. Utilizará el resultado para encontrar la respuesta del problema para resolver por computadora núm. 1, de este capítulo. (Sugerencia: ¿cuál es la carga neta en una unión cualquiera?)

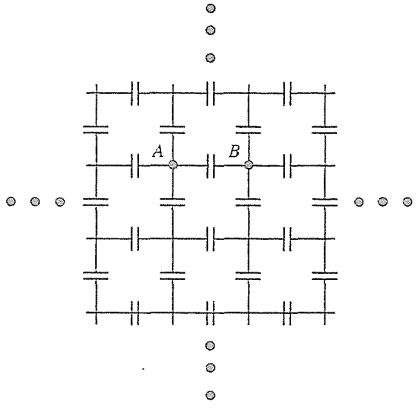


FIGURA 30-26. Ejercicio 19 y problema para resolver por computadora núm. 1.

30-5 Almacenamiento de energía en un campo eléctrico

20. ¿Cuánta energía se guarda en 2.0 m^3 de aire, debido a un campo eléctrico con una intensidad de 150 V/m en buenas condiciones meteorológicas?
21. Un banco de capacitores conectados en paralelo con 2100 5.0-μF se utiliza para almacenar energía eléctrica. ¿Cuánto cuesta cargarlo a 55 kV, suponiendo un costo de 3.0¢/kW · h?
22. Si los intentos de construir un reactor controlado de fusión termonuclear tienen éxito, podrían proporcionarle al mundo abundante energía a partir del hidrógeno pesado presente en el agua de mar; generalmente se usan en ellos enormes corrientes eléctricas durante breves periodos en devanados del campo magnético. A menudo las corrientes se consiguen descargando grandes bancos de capacitores. Uno de ellos genera 61.0 mF a 10.0 kV. Calcule *a)* en joules y *b)* en kW · h la energía almacenada.
23. Un capacitor de placas paralelas lleno de aire, que tiene una superficie 42.0 cm^2 y un espaciamiento de 1.30 mm, lleva una carga con una diferencia de potencial de 625 V. Calcule *a)* la capacitancia, *b)* la magnitud de la carga en ambas placas, *c)* la energía almacenada, *d)* el campo eléctrico entre las placas y *e)* la densidad de energía entre ellas.
24. Dos capacitores, 2.12 μF y 3.88 μF están conectados en serie con una diferencia de potencial de 328 V. Calcule la energía total almacenada en ellos.
25. Una esfera metálica aislada, cuyo diámetro mide 12.6 cm, tiene un potencial de 8150 V (donde $V = 0$ en el infinito). Calcule la densidad de energía en el campo eléctrico cerca de la superficie de la esfera.
26. En la figura 30-23 determine *a)* la carga, *b)* la diferencia de potencial y *c)* la energía almacenada en cada capacitor. Suponga los mismo valores numéricos que los del ejercicio 10, Con $\Delta V = 112$ V.
27. Un capacitor cilíndrico tiene radios a y b como se muestra en la figura 30-6. Demuestre que la mitad de la energía potencial eléctrica almacenada se halla dentro de un cilindro cuyo radio es $r = \sqrt{ab}$.

30-6 Capacitor con dieléctrico

28. Un capacitor de placas paralelas lleno de aire tiene una capacitancia de 51.3 pF. *a)* Si la superficie de sus placas mide 0.350 m^2, ¿cuál es su separación? *b)* Si la región entre las placas está ahora llena de un material que tiene una constante dieléctrica de 5.60, ¿cuál es la capacitancia?
29. Un capacitor de placas paralelas lleno de aire tiene una capacitancia de 1.32 pF. Se duplica su separación y se introduce cera entre ellas. La nueva capacitancia es 2.57 pF. Encuentre la constante dieléctrica de la cera.
30. Con un capacitor de 7.40 pF lleno de aire, se le pide diseñar uno que almacene hasta 6.61 μJ, con una diferencia máxima de potencial de 630 V. ¿Qué dieléctrico en la tabla 29-2 utilizará para llenar el volumen en el capacitor, en caso de que no deje margen de error?
31. Para construir un capacitor de placas paralelas dispone de dos placas de cobre, de una hoja de mica (espesor = 0.10 mm, κ_e = 5.4), una hoja de vidrio (espesor = 0.20 mm, κ_e = 7.0) y una lámina de parafina (espesor = 1.0 cm, κ_e = 2.0). Si quiere conseguir la mayor capacitancia, ¿cuál hoja debe colocar entre las placas de cobre?
32. Cierta sustancia tiene una constante dieléctrica de 2.80 y una intensidad dieléctrica de 18.2 MV/m. Si se emplea como material dieléctrico en un capacitor de placas paralelas, ¿qué superficie mínima deben tener a fin de que la capacitancia sea 68.4 nF y de que el capacitor logre soportar una diferencia de potencial de 4.13 kV?
33. Un cable coaxial que se utiliza en una línea de transmisión responde como capacitancia "distribuida" al circuito que lo alimenta. Calcule la capacitancia de 1.00 km de cable que tiene un radio interno de 0.110 mm y uno externo de 0.588 mm. Suponga que el espacio entre los conductores está lleno de poliestireno.
34. Le han dejado la tarea de diseñar un capacitor transportable que almacene 250 kJ de energía. Selecciona usted un tipo de placas paralelas con dieléctrico. *a)* ¿Cuál es el volumen mínimo del capacitor que puede alcanzarse empleando el dieléctrico escogido entre los de la tabla 29-2 que poseen valores de intensidad dieléctrica? *b)* Los modernos capacitores de alto desempeño, capaces de guardar 250 kJ, tienen volúmenes de 0.087 m^3. Suponiendo que el dieléctrico usado tenga la misma intensidad dieléctrica que en *a)*, ¿cuál debe ser su constante dieléctrica?
35. Se le pide construir un capacitor con una capacitancia cercana a 1000 pF y con un potencial de ruptura mayor de 10 kV. Piensa utilizar los lados de un vaso alto (pyrex), recubierto de aluminio en su interior y en su exterior (prescinda de los extremos). ¿Cuáles son *a)* la capacitancia y *b)* el potencial de ruptura? Use un vaso de 15 cm de altura, con 3.6 cm de radio interno y 3.8 de radio externo.
36. En el problema resuelto 30-8 suponga que la batería permanece conectada mientras se introduce la lámina dieléctrica. Calcule *a)* la capacitancia, *b)* la carga en las placas del capacitor, *c)* el campo eléctrico en la separación y *d)* el campo eléctrico en la lámina una vez introducida ésta.
37. Una lámina de cobre con espesor b se introduce en un capacitor de placas paralelas como se indica en la figura 30-27. *a)* ¿Cuál es la capacitancia tras de introducirla? *b)* Si se mantiene la car-

ga q en las placas, calcule la razón de la energía almacenada antes y después de introducir la lámina. *c*) ¿Cuánto trabajo se efectúa al momento de hacerlo? ¿Se introduce tirando de ella o hay que empujarla?

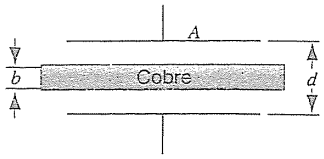


FIGURA 30-27. Ejercicio 37.

38. Reconsidere el ejercicio 37, suponiendo que se mantiene constante la diferencia de potencial ΔV en vez de la carga.
39. Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de 112 pF, una superficie de placa de 96.5 cm^2 y un diléctrico de mica ($\kappa_e = 5.40$). Con una diferencia de potencial de 55.0 V calcule la magnitud de *a*) el campo eléctrico de la mica, *b*) la carga libre en las placas y *c*) la carga inducida superficial.
40. Dos placas paralelas de superficie 110 cm^2 reciben cargas iguales pero opuestas de 890 nC. El campo eléctrico dentro del material dieléctrico que llena el espacio entre ellas es 1.40 MV/m. *a*) Calcule la constante dieléctrica del material. *b*) Determine la magnitud de la carga inducida en las superficies del dieléctrico.

PROBLEMAS

1. En la sección 30-2 se calculó la capacitancia de un capacitor cilíndrico. Mediante la aproximación (Ap. 1) de que $\ln(1 + x) \approx x$ cuando $x \ll 1$, demuestre que la capacitancia se acerca a la de un capacitor de placas paralelas cuando el espaciamiento entre los dos cilindros es pequeño.
2. Debe diseñarse un capacitor para que, con capacitancia constante, funcione en un ambiente de temperatura fluctuante. Como se indica en la figura 30-28, el capacitor es del tipo de placas paralelas como "espaciadores" de plástico que las conservan alineadas. *a*) Demuestre que la rapidez de cambio de la capacitancia C con la temperatura T está dada por

$$\frac{dC}{dT} = C\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dT}\right),$$

donde A es la superficie de placa y x es la separación entre ellas. *b*) Si las placas son de aluminio, ¿cuál es el coeficiente de expansión térmica de los espaciadores a fin de que la capacitancia no varíe con la temperatura? (No tenga en cuenta el efecto que los espaciadores tienen en la capacitancia.)

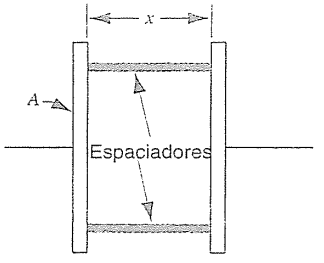


FIGURA 30-28. Problema 2.

3. La figura 30-29 muestra dos capacitores en serie; la sección central rígida de longitud b se mueve verticalmente. Demuestre que la capacitancia equivalente de la combinación en serie no depende de la posición de la sección central y que está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{a - b}.$$

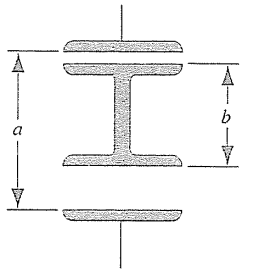


FIGURA 30-29. Problema 3.

4. En la figura 30-30 se muestra un capacitor variable y lleno de aire como los que sirven para sintonizar las radios. Se conectan placas alternas: un grupo está fijo en su sitio y el otro puede girar. Suponga un conjunto de n placas con polaridad alterna, cada una de ellas con una superficie A y separada de las placas contiguas por una distancia d. Demuestre que este capacitor tiene una capacitancia máxima de

$$C = \frac{(n - 1)\epsilon_0 A}{d}.$$

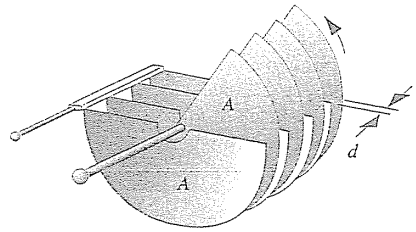


FIGURA 30-30. Problema 4.

5. En la figura 30-31 los capacitores $C_1 = 1.16\ \mu F$ y $C_2 = 3.22\ \mu F$ están cargados con una diferencia de potencial $\Delta V = 96.6$ V, pero con polaridad contraria, de manera que los puntos a y c se hallan en las placas positivas respectivas de C_1 y C_2, y que los puntos b y d están en las placas negativas respectivas. Los interruptores S_1 y S_2 se encuentran cerrados ahora. *a*) ¿Cuál es la di-

ferencia entre los puntos e y f? *b)* ¿Cuál es la carga en C_1? *c)* ¿Cuál es la carga en C_2?

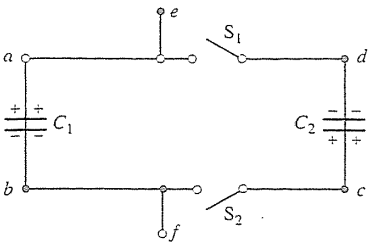


FIGURA 30-31. Problema 5.

6. Cuando se pone el interruptor S a la izquierda de la figura 30-32, las placas del capacitor C_1 adquieren una diferencia de potencial ΔV_0. C_2 y C_3 no llevan carga inicialmente. ¿Cuáles son las cargas finales q_1, q_2, q_3 en los capacitores correspondientes?

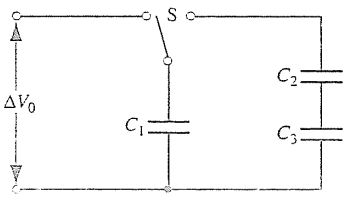


FIGURA 30-32. Problema 6.

7. La figura 30-33 contiene dos capacitores idénticos de capacitancia C en un circuito con dos diodos (ideales) D. Se conecta una batería de 100 V a las terminales de entrada: *a)* primero con la terminal positiva a y *b)* más tarde con la terminal positiva b. ¿Cuál es en ambos casos la diferencia de potencial entre las terminales de salida? (Un diodo ideal tiene la propiedad de que la carga positiva fluye por él exclusivamente en dirección de la flecha y que las cargas negativas lo hacen en dirección contraria.)

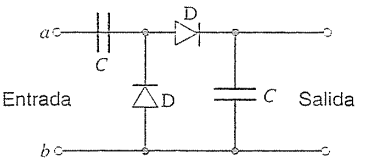


FIGURA 30-33. Problema 7.

8. Un capacitor tiene placas cuadradas, de lado a, que forman un ángulo θ como se muestra en la figura 30-34. Demuestre que con un ángulo θ, pequeño la capacitancia está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}\left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right).$$

(Sugerencia: el capacitor puede dividirse en franjas diferenciales que están realmente en paralelo.)

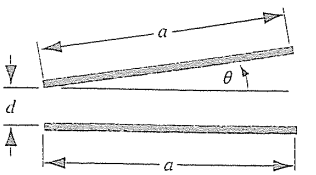


FIGURA 30-34. Problema 8.

9. En la figura 30-35 una batería produce una diferencia de potencial ΔV de 12 V. *a)* Determine la carga en cada capacitor cuando el interruptor S_1 está cerrado y *b)* cuando (más tarde) el interruptor S_2 también lo está. Suponga que $C_1 = 1.0\ \mu$F, $C_2 = 2.0\ \mu$F, $C_3 = 3.0\ \mu$F y $C_4 = 4.0\ \mu$F.

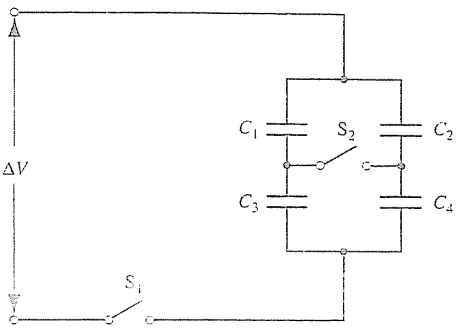


FIGURA 30-35. Problema 9.

10. Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos x y y de la figura 30-36. Suponga que $C_2 = 10\ \mu$F, y que el resto de los capacitores son de 4.0 μF, . (Sugerencia: aplique una diferencia de potencial ΔV entre x y y y anote todas las relaciones que contienen cargas y diferencias de potencial para los capacitores individuales.)

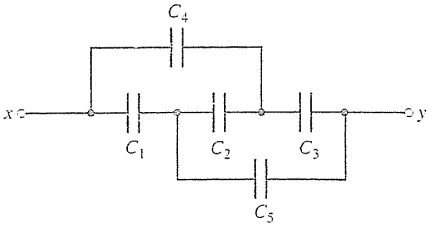


FIGURA 30-36. Problema 10.

11. Un capacitor está cargado hasta que su energía almacenada es 4.0 J y entonces se quita la batería de carga. Otro capacitor sin carga se conecta entonces a él en paralelo. *a)* Si la carga se distribuye uniformemente, ¿cuál será ahora la energía total guardada en los campos eléctricos? *b)* ¿A dónde fue el exceso de energía?

12. Un fluido con resistividad 9.40 $\Omega \cdot$ m penetra en el espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas lleno de aire de

110 pF. Cuando el espacio está completamente lleno de fluido, ¿qué resistencia hay entre ellas?

13. *a)* Calcule la densidad de energía del campo eléctrico a una distancia r de un electrón (supuestamente una partícula) en reposo. *b)* Ahora suponga que el electrón no es un punto sino una esfera de radio R en cuya superficie se distribuye uniformemente la carga del electrón. Calcule la energía asociada al campo eléctrico externo en el vacío de un electrón en función de R. *c)* Si ahora la relaciona con la masa del electrón, podrá calcular el valor de R por medio de $E_0 = mc^2$. Evalúe numéricamente este radio; a menudo se le conoce como radio del electrón.

14. Demuestre que las placas de un capacitor de placas paralelas se atraen entre sí con una fuerza dada por

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}.$$

Pruebe lo anterior calculando el trabajo necesario para acrecentar la separación de las placas de x a $x + dx$, permaneciendo constante la carga q.

15. Con el uso del resultado del problema 14, demuestre que la fuerza por unidad de superficie (el *esfuerzo electrostático)* que actúa sobre ambas placas del capacitor está dada por $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. En realidad, este resultado es generalmente verdadero en un conductor de cualquier forma, con un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en su superficie.

16. A una burbuja de jabón de radio R_0 se le administra lentamente una carga q. A causa de la repulsión mutua de las cargas superficiales, el radio aumenta un poco a R. Debido a la expansión la presión del aire dentro de la burbuja desciende a $p(V_0/V)$, donde p es la presión atmosférica, V_0 es el volumen inicial y V es el volumen final. Demuestre que

$$q^2 = 32\pi^2\epsilon_0 pR(R^3 - R_0^3).$$

[Sugerencia: considere las fuerzas que operan en un área pequeña de la burbuja cargada, prescindiendo de la tensión superficial. Las fuerzas se deben a i) la presión del gas, ii) la presión atmosférica y iii) el esfuerzo electrostático, Prob. 15.]

17. Una cámara cilíndrica de ionización está provista de un ánodo central de alambre de 0.180 mm de radio y de un cátodo coaxial cilíndrico de 11.0 mm de radio. Está llena de un gas cuya intensidad dieléctrica es de 2.20 MV/m. Determine la máxima diferencia de potencial que debe aplicarse entre el ánodo y el cátodo, para que el gas no experimente una ruptura eléctrica antes que la radiación penetre en la ventana de la cámara.

18. Un capacitor de placas paralelas está lleno con dos dieléctricos como se aprecia en la figura 30-37. Demuestre que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_{e1} + \kappa_{e2}}{2}\right).$$

Verifique la fórmula anterior en los casos límite que se le ocurran. (Sugerencia: ¿puede justificar este arreglo como dos capacitores en paralelo?)

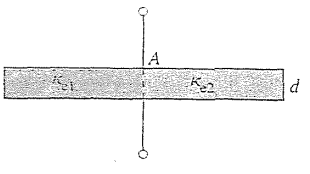


FIGURA 30-37. Problema 18.

19. Un capacitor de placas paralelas está lleno con dos dieléctricos como se ve en la figura 30-38. Demuestre que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_{e1}\kappa_{e2}}{\kappa_{e1} + \kappa_{e2}}\right).$$

Verifique la fórmula anterior en todos los casos límite que se le ocurran. (Sugerencia: ¿puede justificar este arreglo como dos capacitores en serie?)

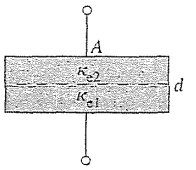


FIGURA 30-38. Problema 19.

20. ¿Cuál es la capacitancia del capacitor de la figura 30-39?

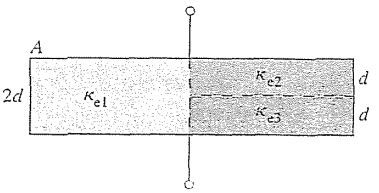


FIGURA 30-39. Problema 20.

21. Un capacitor de placas paralelas tiene placas de superficie A y una separación d, está cargado con una diferencia de potencial ΔV. Después se desconecta la batería de carga y las placas se separan hasta quedar a una distancia de $2d$ entre sí. Obtenga las expresiones en función de A, de d y de ΔV en el caso de *a)* la nueva diferencia de potencial, *b)* la energía inicial y final almacenada, *c)* el trabajo necesario para separar las placas.

22. En el capacitor del problema resuelto 30-9 (Fig. 30-15), *a)* ¿qué fracción de energía se almacena en las zonas de aire?, *b)* ¿qué fracción se almacena en la lámina?

23. Un capacitor de placas paralelas tiene placas de superficie 0.118 m^2 y una separación de 1.22 cm. Una batería las carga hasta alcanzar una diferencia de potencial de 120 V y luego se desconectan. Una lámina dieléctrica de 4.30 mm de espesor y de constante dieléctrica 4.80 se coloca entonces simétricamente entre ellas. *a)* Calcule la capacitancia antes de introducir la lámina. *b)* ¿Cuál es la capacitancia una vez colocada la lámina en su sitio? *c)* ¿Cuál es la carga libre q antes y después de insertarla? *d)* Determine el campo eléctrico en el espacio entre las placas y el dieléctrico. *e)* ¿Cuál es el campo eléctrico en el dieléctrico? *f)* Con la lámina en su sitio, ¿cuál es la diferencia de potencial entre ellas? *g)* ¿Cuánto trabajo externo se lleva a cabo en el proceso de insertar la lámina?

24. Una lámina dieléctrica de espesor b se introduce entre las placas de un capacitor de placas paralelas con una separación d entre ellas. Demuestre que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{\kappa_e \epsilon_0 A}{\kappa_e d - b(\kappa_e - 1)}.$$

(Sugerencia: Obtenga la fórmula siguiendo el patrón del Prob. 30-9.) ¿Predice esa fórmula el resultado numérico correcto del problema? Compruebe que dé resultados razonables en los casos especiales de $b = 0$, $\kappa_e = 1$ y $b = d$.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Con los resultados del ejercicio 19 encuentre la capacitancia equivalente entre dos puntos cualesquiera (A y B por ejemplo), separados por un capacitor en el arreglo infinito de ellos en la figura 30-26. Este problema se realiza muy fácilmente por iteración, pudiendo programarse y resolverse con una hoja de cálculo en menos de un minuto.

2. Repita el problema con un toroide en vez de hacerlo con una hoja infinita. Comience con una rejilla cuadrada de capacitores de 10×10. Una los dos bordes opuestos para construir un cilindro y después junte los dos extremos para formar un toroide (una forma de rosquilla). ¿Cuánto cambiaría la respuesta en caso de duplicar el tamaño de la rejilla original?

CAPÍTULO 31

CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA

En el capítulo 29 explicamos algunas propiedades generales de la corriente y de la resistencia. En éste vamos a empezar a estudiar el comportamiento de los circuitos eléctricos, que incluyen elementos resistivos; éstos pueden ser resistores individuales o las resistencias internas de los elementos de los circuitos, como baterías o alambres.

En el presente capítulo limitaremos nuestro estudio a los circuitos de corriente directa *(CD), donde la dirección de la corriente no cambia con el tiempo. En los circuitos que contienen sólo baterías y resistores, la magnitud de la corriente no cambia con el tiempo, mientras que en los circuitos que contienen capacitores la magnitud de la corriente puede depender del tiempo. En el capítulo 37 se estudian los circuitos de corriente alterna, donde la dirección de la corriente cambia periódicamente.*

31-1 CORRIENTE ELÉCTRICA

En la sección 29-3 examinamos el flujo de carga eléctrica a través de conductores. La corriente eléctrica i es la cantidad neta de carga por unidad de tiempo que pasa por un elemento del área superficial en algún lugar del conductor. Por lo regular nos interesa la corriente total que cruza un circuito; en tal caso, la superficie es la sección transversal entera de los alambres que conectan las partes del circuito.

La figura 31-1 explica gráficamente el problema general que analizamos en este capítulo. Una batería está conectada a un "dispositivo" que puede ser un elemento del circuito, digamos un resistor o un capacitor —o una combinación de elementos del circuito. La batería mantiene la terminal superior en un potencial V_+ y la terminal inferior en un potencial V_-. En una batería ideal, la diferencia de potencial $V_+ - V_-$ entre sus terminales no depende de la cantidad de corriente que suministra al circuito. Como veremos luego en el capítulo, en este tipo de baterías la diferencia de potencial *sí* depende de la corriente.

En el caso electrostático, en que los conductores son equipotenciales, el potencial V_+ en la terminal positiva de la batería caracterizará al alambre entero que conecta el extremo superior del dispositivo. En este caso, la diferencia de potencial $V_+ - V_-$ entre las terminales aparecerá también entre el extremo superior e inferior del dispositivo. Cuando las corrientes fluyen en los alambres, dejan de ser válidas las conclusiones de la electrostática; en particular, en la sección 29-4 (Ec. 29-12) vimos que, cuando una corriente i fluye en un conductor, hay una diferencia de potencial $\Delta V = iR$ en él. No obstante, la resistencia de los alambres suele ser muy pequeña comparada con la del dispositivo en el circuito. Por eso

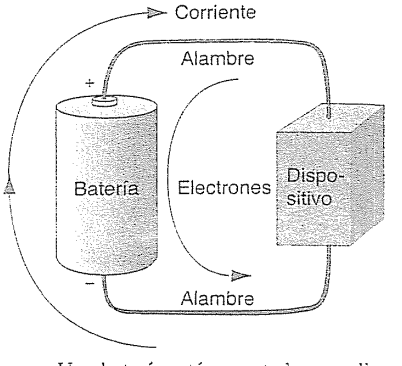


FIGURA 31-1. Una batería está conectada a un dispositivo eléctrico por medio de dos alambres. La corriente sigue una dirección contraria a la del movimiento de los electrones.

se justifica prescindir del efecto de los alambres, en especial, suponemos que no disminuye el potencial en ellos; en este caso, la diferencia entera de voltaje de las terminales de la batería aparece en las terminales del dispositivo.

Podemos pensar que la batería es una "bomba" de carga, como si estuviera llevando una carga positiva a través de la batería, desde la terminal negativa hasta la positiva. En realidad, el movimiento de los electrones, con carga negativa, suele ser el causante del flujo de corriente. Otra forma de interpretar el flujo de carga eléctrica en el circuito consiste en considerar la carga positiva como "si cayera" a través del dispositivo de una región de alto potencial (la parte conectada a la terminal positiva de la batería) a la región de potencial bajo (la parte conectada a la terminal negativa).

La función de la batería en el circuito es mantener la diferencia de potencial que permita el flujo de carga. La batería *no* es una fuente de electrones. Éstos pasan por ella y su energía crece cuando estos electrones entran en la batería de la terminal positiva a la negativa. Cuando decimos que una batería está "descargada", no significa que se haya consumido su suministro de electrones, sino que hemos agotado la fuente de energía (a menudo una reacción química) causante del aumento de la energía de los electrones. Nótese en la figura 31-1 que los electrones se desplazan por todo el circuito; no "provienen" de la batería.

En los metales los portadores de carga son los electrones, mientras que en los electrolitos o en los conductores gaseosos (plasma), los portadores pueden ser iones positivos, negativos o ambos. Se requiere una convención para indicar la dirección de la corriente, porque las cargas de signo opuesto siguen la dirección contraria en un campo determinado. Una carga positiva que se desplace en una dirección es equivalente en casi todos los efectos externos a una carga negativa que lo haga en dirección contraria. Así pues, por razones de simplicidad y para conservar la congruencia algebraica adoptamos la siguiente convención:

> *La dirección de la corriente es aquella que seguirían las cargas positivas, a pesar de que los portadores de carga sean negativos.*

Si los portadores son negativos, simplemente se mueven en la dirección contraria a la de la flecha de corriente (Fig. 31-1).

Por lo regular analizamos los circuitos eléctricos basándonos en una dirección supuesta de la corriente, sin tener en cuenta si los portadores reales de cargas son positivos o negativos. En casos raros (véase, por ejemplo, el efecto Hall en la Sec. 32-24), hay que considerar el signo de los portadores.

Conservación de la carga

Cuando por primera vez conectamos la batería al dispositivo, el circuito se comporta de un modo irregular. La situación nos recuerda lo que ocurre cuando abrimos una manguera de jardín conectada a un rociador. Al principio el agua sale a borbollones por ella, creando remolinos y contraflujos. Cuando el agua llega al rociador, al inicio puede brotar casualmente de algunos hoyos y no de otros. Transcurridos unos cuantos segundos se establece un flujo estable y el agua llega más allá de un punto cualquiera con una rapidez constante. En los circuitos eléctricos, se ignora este comportamiento inicial (denominado *comportamiento transitorio*) y se considera tan sólo la situación estacionaria, que se alcanza muy pronto (en cuestión de nanosegundos).

En condiciones estacionarias, suponemos que la carga no se acumula ni se fuga desde un punto cualquiera de nuestro alambre idealizado. En la terminología del flujo de fluidos no existen fuentes ni sumideros de carga en el alambre. Al hacer esta suposición en el estudio de los fluidos incompresibles, concluimos que la rapidez con que el fluido atraviesa cualquier sección transversal de un tubo es la misma aun cuando ésta varíe. El fluido se desplaza con mayor rapidez donde el tubo es pequeño y con menor rapidez donde es más grande, pero no se altera la rapidez volumétrica del fluido, medida quizá en litros/segundo. Asimismo, *la corriente eléctrica i es la misma en todas las secciones transversales de un conductor, aunque la superficie transversal puede ser distinta en varios puntos.* La densidad de corriente $\vec{j}$ (corriente por unidad de superficie) cambiará al modificarse la sección transversal, pero la corriente i permanecerá inalterada.

La figura 31-2*a* muestra el circuito de la figura 31-1 en una notación más simple. Una caja indica el dispositivo. Adviértase que la corriente que entra en el dispositivo es la misma que la que sale de él. Éste es un ejemplo de conservación de la carga; el dispositivo no conserva carga neta alguna: por cada electrón que entra en un extremo, otro sale por el otro extremo.

La figura 31-2*b* muestra otro circuito, donde la corriente atraviesa de manera sucesiva tres dispositivos, señalados como A, B y C. La corriente i_A en el dispositivo A es exactamente igual a la corriente i_B en el dispositivo B y también la corriente i_C en el dispositivo *C*, esto es $i_A = i_B = i_C$. No se consume corriente al pasar por un elemento cualquiera del circuito. La figura 31-2*b* constituye un ejemplo de elementos de un circuito conectados en *serie*, en los cuales la corriente debe atravesar sucesivamente cada elemento de él.

La figura 31-2*c* muestra la corriente en otra combinación de elementos de un circuito. Aquí la corriente debe dividirse cuando llegue al punto *a* del circuito, con una cantidad i_A que pasa por el dispositivo A y una cantidad i_B que pasa por el dispositivo B. (Las cantidades relativas en A y B, que no son importantes por ahora, dependen de las propiedades de A y de B.) Las corrientes han de recombinarse en el punto *b*. Como ninguna carga queda atrapada en el punto *a*, la corriente que entre en él debe ser exactamente igual a la que sale de él, o sea $i = i_A + i_B$. Asimismo, la corriente que entre en el punto *b* debe ser igual a la corriente que salga de allí, es decir, $i_A + i_B = i$. A esto se le conoce frecuentemente como *regla de unión (nodo)*, y sirve para analizar los circuitos:

> *En una unión (nodo) cualquiera de un circuito eléctrico, la corriente total que entra en dicha unión tiene que ser igual a la corriente que sale.*

En la regla anterior, el término "unión" denota un punto en un circuito donde se juntan varios segmentos, como los puntos *a* o *b* en la figura 31-2*c*. La regla de unión (algunas veces lla-

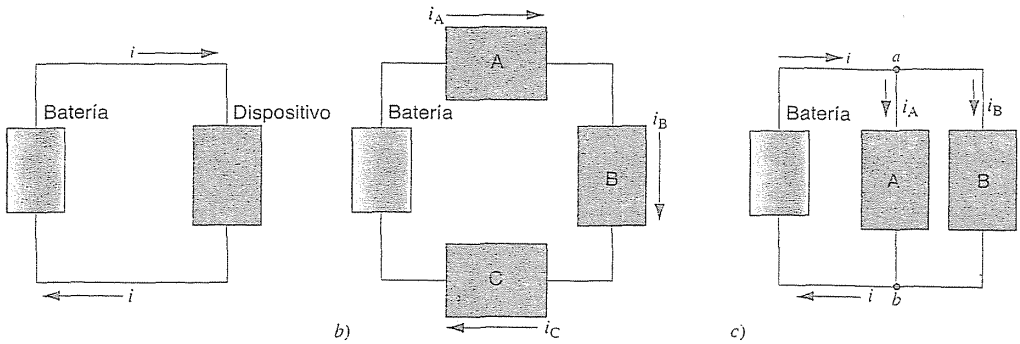


FIGURA 31-2. *a)* Circuito de la figura 31-1 en notación simbólica. *b)* La misma corriente fluye sucesivamente por los dispositivos A, B y C. *c)* La corriente se divide en la unión (nudo) *a* y se recombina en la unión (nudo) *b*.

mada *primera ley de Kirchhoff*) es en realidad una afirmación relativa a la conservación de la carga eléctrica.

La figura 31-2*c* constituye un ejemplo de conexión *en paralelo* de los elementos de un circuito. Una característica de este tipo de conexiones es que la corriente debe dividirse para cruzar por separado los elementos individuales y combinarlos después.

31-2 FUERZA ELECTROMOTRIZ

Casi todos los circuitos requieren una fuente externa de energía para mover una carga eléctrica a través de ellos. Por tanto, el circuito debe contener un dispositivo que mantenga la diferencia de potencial entre dos puntos, del mismo modo que el fluido circulante necesita un dispositivo análogo (una bomba) que mantenga una diferencia de *presión* entre dos puntos.

Al dispositivo que realiza esta función en un circuito eléctrico se le llama fuente (o sede) de la *fuerza electromotriz* (cuyo símbolo es $\mathscr{E}$ y se abrevia fem). Algunas veces conviene concebirla como un mecanismo que crea una "colina" de potencial y que mueve la carga hacia arriba, de donde la carga fluye hacia abajo atravesando el resto del circuito. Una fuente común de fuerza electromotriz es la batería ordinaria; otra es el generador eléctrico de las plantas de energía. Las celdas solares son fuentes que se emplean en naves espaciales y en calculadoras de bolsillo. Otras fuentes menos comunes son las celdas de combustible (con las cuales se suministra energía a los transbordadores espaciales) y las termopilas. Los sistemas biológicos, entre ellos el corazón, funcionan como fuentes de fuerza electromotriz.

En la figura 31-3*a* se muestra una fuente de fuerza electromotriz conectada a un dispositivo electrónico, que bien pudiera ser un resistor, un capacitor u otro elemento de un circuito. La fuerza está representada en el circuito por una flecha que está colocada al lado de la fuente y que apunta en la dirección en que la fuerza, si actuara sola, haría que un portador de carga positiva se desplazara en el circuito externo. Dibujamos un círculo pequeño en la cola de la flecha de la fuerza electromotriz, para que no se confunda con una flecha de corriente. En el circuito externo, dichos portadores serán impulsados en la dirección indicada por las flechas de corriente marcadas con la letra *i*. En otras palabras, la fuente produce una corriente en dirección de la manecillas del reloj dentro del circuito de la figura 31-3*a*.

La fuente más común de fuerza electromotriz que utilizaremos es la batería ordinaria. Como se aprecia en la figura 31-3*a*, la batería se representa en un circuito por dos líneas paralelas de distinta longitud. La línea más larga siempre indica la terminal positiva de dicha batería. La fuente de fuerza electromotriz (la batería) conserva su terminal superior en un alto potencial V_+ y su terminal inferior a un potencial bajo V_-. Las baterías comunes (tamaño AAA, AA, C o D) que se usan en las linternas o reproductores portátiles de discos compactos tienen una fuerza electromotriz de 1.5 volts. Como veremos en la siguiente sección, su fuerza electromotriz es igual a la diferencia de potencial de la terminal $V_+ - V_-$ *sólo* si no fluye corriente por el circuito o si la resistencia interna de la batería es insignificante.

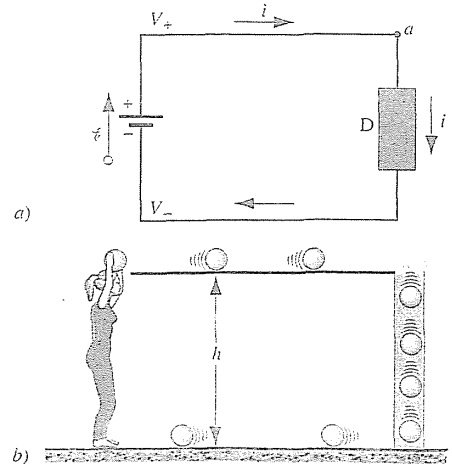


FIGURA 31-3. *a)* Un circuito eléctrico simple, donde la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ (una batería) realiza trabajo en los portadores de carga y conserva una corriente estacionaria en el dispositivo D. *b)* Una analogía gravitacional, donde el trabajo efectuado por la persona mantiene un flujo estable de las bolas de boliche a través del medio viscoso.

Una fuente de fuerza electromotriz ha de ser capaz de realizar trabajo en los portadores de carga que entran en ella. La fuente traslada por su interior las cargas positivas de un punto de bajo potencial (la terminal negativa) a otro de alto potencial (la terminal positiva). Después, las cargas se desplazan a través del circuito externo, y al hacerlo disipan la energía que les comunica la fuente. Con el tiempo, las cargas retornan a la terminal negativa, de donde la fuerza electromotriz las levanta otra vez a la terminal positiva y el ciclo se reanuda. (Nótese que, de acuerdo con la convención usual, analizamos el circuito como si fluyera carga positiva. El movimiento real de los electrones sigue la dirección contraria.)

Cuando una corriente estacionaria ha sido establecida en el circuito de la figura 31-3*a*, una carga dq cruza *cualquier* sección transversal de él en el tiempo dt. En particular, esta carga entra en la fuente de fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ por su extremo de bajo potencial y sale por su extremo de alto potencial. La fuente debe efectuar el trabajo dW en los portadores de carga (positiva) para obligarlos a ir al punto de potencial más alto. La fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ de la fuente se define como el trabajo por unidad de carga, o sea

$$\mathscr{E} = dW/dq. \qquad (31\text{-}1)$$

La unidad de fuerza electromotriz es el joule/columb, que es lo mismo que el volt. Nótese en la ecuación 31-1 que la fuerza electromotriz no es en realidad una fuerza, es decir, no la medimos en newtons. El nombre proviene de la historia tan antigua del tema.

La fuente de fuerza electromotriz suministra energía al circuito. Su energía puede obtenerse de varios procesos: químicos (como en una batería o en una celda de combustible, mecánicos (un generador), térmicos (una termopila) o radiante (una celda solar). La corriente del circuito en la figura 31-3*a*, transfiere la energía de la fuente de fuerza electromotriz al dispositivo D. Si éste es otra batería que está siendo cargada por la fuente, la energía transferida aparece como energía química recién almacenada en la batería. Si el dispositivo es un resistor, la energía transferida aparece como energía interna (observada tal vez como un incremento de temperatura) y entonces puede ser transferida al ambiente en forma de calor. Si el dispositivo es un capacitor, se guardará como energía potencial en su campo eléctrico. En todos los casos, la conservación de la energía exige que la energía que pierde la batería debe ser igual a la que se transfiere al dispositivo D, a la que éste disipa o almacena.

El circuito de la figura 31-3*a* muestra una analogía con la situación gravitacional de la figura 31-3*b*. En la figura inferior de ella la persona levanta del piso las bolas de boliche en el carril y al hacerlo realiza trabajo en ellas. Las bolas ruedan lenta y uniformemente por el carril, cayendo del extremo derecho en un cilindro lleno de aceite viscoso. Se hunden en el fondo con una velocidad esencialmente constante, son quitadas por un mecanismo que no aparece y vuelven a rodar por el piso hacia la izquierda. La energía comunicada al sistema por la persona se manifiesta finalmente como energía cinética en el líquido viscoso, lo que ocasiona un aumento de temperatura. La energía proviene del depósito de energía interna (química) de la persona. La circulación de las cargas en la figura 31-3*a* se detiene finalmente si a la fuente de fuerza electromotriz se le agota la energía; la circulación de las bolas de boliche en la figura 31-3*b* terminará deteniéndose si a la persona se le acaba la energía.

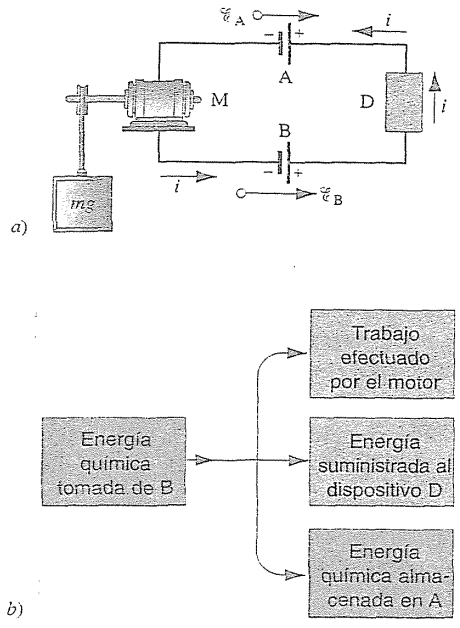


FIGURA 31-4. *a*) $\mathscr{E}_B > \mathscr{E}_A$, así que la batería B determinó la dirección de la corriente en este circuito de una sola malla. *b*) En él se transfiere energía.

La figura 31-4*a* muestra un circuito que contiene dos fuentes de fuerza electromotriz (baterías) A y B, un dispositivo D y un motor eléctrico ideal M que sirve para levantar un peso. Las baterías están conectadas de modo que tienden a enviar cargas alrededor del circuito en direcciones opuestas; la dirección real de la corriente está determinada por la batería B, la cual posee la fuerza electromotriz más grande. En la figura 31-4*b* se observan las transferencias de energía en el circuito. La energía química de la batería B se agota constantemente y aparece en las tres formas que se ven a la derecha. La batería A es cargada, mientras la batería B se descarga.

Nótese que el circuito puede transferir energía *de* una fuente de fuerza electromotriz *a* otra. En el caso ideal, el proceso relacionado con una fuente es *reversible* en el sentido termodinámico (Sec. 24-1). Puede *cargarse* una batería (una fuente externa le suministra energía, *no* que introduzcamos a la fuerza más carga en ella) o *descargarse* (le extraemos energía). En forma similar, puede activarse mecánicamente un generador para que produzca energía eléctrica o utilizarse ésta para obtener movimiento mecánico, como en un motor.

31-3 ANÁLISIS DE CIRCUITOS

El circuito eléctrico más simple se compone de una fuente de fuerza electromotriz (una batería por ejemplo) y un dispositi-

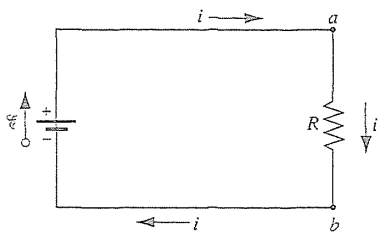


FIGURA 31-5. Circuito de una malla. La corriente es igual en todo él. El potencial *aumenta* de − a + a través la batería y *disminuye* de *a* a *b* (en dirección de la corriente) a través del resistor.

vo de circuito (digamos un resistor). Entre los ejemplos de esta clase de circuito se encuentran las linternas o los calentadores eléctricos. En la figura 31-5 vemos un circuito formado por una batería y un resistor R. La notación simbólica de los circuitos para un resistor es -vvv-.

A menudo cuando analizamos circuitos queremos determinar la magnitud y la dirección de la corriente, conociendo su fuerza electromotriz y sus resistores. Analizaremos el circuito anterior considerando las diferencias de potencial entre cada uno de los elementos. Más adelante vamos a explicar otro método que se basa en la energía que suministran o disipan los elementos.

El primer paso del análisis consiste en suponer la dirección de la corriente. Casi siempre intentamos hacer las mejores suposiciones posibles; si escogemos la dirección equivocada, la corriente resultará negativa, lo cual significa que nos equivocamos, aunque la magnitud calculada seguirá siendo correcta. En el circuito de la figura 31-5 esperamos que la corriente siga el sentido de las manecillas del reloj, determinada por la fuerza electromotriz de la batería. Ésta mantiene el punto a en un potencial más alto que el punto b; así que las cargas positivas "caerán" por el resistor de a a b antes de regresar a la batería para ser bombeada otra vez hasta un potencial más alto de a.

Cuando analizamos el circuito mediante el método de diferencias de potencial, lo recorremos una vez y llevamos un registro de las diferencias en cada uno de sus elementos. No importa hacia donde nos dirijamos por el ciruito al efectuar el análisis. Vamos a intentar seguir la dirección de las manecillas del reloj (en la misma dirección que la corriente), comenzando en el punto a.

Sea ΔV_R la diferencia de potencial en el resistor. Es decir, el potencial en a es mayor que el de b en una cantidad ΔV_R, que es igual a iR. ¿Cómo sabemos que V_a es más grande que V_b. Todavía no lo sabemos con seguridad, pero es compatible con la dirección que supusimos para la corriente que pasa por R. Si la corriente fluye de a a b, los portadores de carga positiva "caen" a través del resistor del potencial más alto en a al más bajo en b. Si nuestra suposición inicial respecto a la dirección de la corriente es incorrecta, la solución mostrará que i y ΔV_R son negativas.

Ahora estamos listos para analizar el circuito. Comenzaremos en un punto cualquiera, recorreremos una vez el circuito sumando todas las diferencias de potencial y luego retornaremos al punto de partida donde debemos encontrar el mismo potencial con que empezamos. El procedimiento puede sintetizarse en los siguientes términos:

> *La suma algebraica de las diferencias de potencial alrededor de una malla completa de circuito ha de ser cero.*

A la regla anterior se le conoce como *regla de la malla* (y en ocasiones se la designa como *segunda ley de Kirchhoff*). En última instancia es una afirmación concerniente a la conservación de la energía. Una analogía sería caminar por un terreno escarpado: uno puede subir o bajar mientras camina; pero si lleva un registro de todos los cambios de la energía potencial gravitacional, descubrirá que el cambio total es cero al retornar al punto de partida.

A continuación vamos a examinar los cambios del potencial al recorrer una vez el circuito de la figura 31-5, comenzando en el punto a donde el potencial es V_a. Avanzando en el sentido de las manecillas del reloj desde a pasando por el resistor, el potencial cae $\Delta V_R = iR$ y, por tanto, el potencial en b es $V_b = V_a - iR$. Continuando en la misma dirección alrededor del circuito, recorremos luego la batería de la terminal negativa a la positiva y así el potencial aumenta debido a la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ de ella. Esto nos devuelve al punto a y al potencial V_a. Como allí los potenciales inicial y final deben ser iguales (el potencial es una magnitud independiente de la trayectoria), tendremos entonces $V_a = V_a - iR + \mathscr{E}$. En forma equivalente, podemos conseguir este resultado aplicando la regla de la malla directamente, sumando las diferencias de potencial y haciendo la suma resultante igual a cero. Una vez más, comenzando en a y avanzando en el sentido de las manecillas del reloj, primero encontramos una diferencia negativa de potencial de $-iR$ y luego una diferencia positiva de $+\mathscr{E}$. Al hacer cero la suma de estas diferencias de potencial, se obtiene

$$-iR + \mathscr{E} = 0$$

o bien

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}. \qquad (31\text{-}2)$$

Hemos calculado la corriente del circuito, con lo cual termina nuestro análisis.

Veamos ahora un circuito ligeramente más complicado de una malla simple, que se muestra en la figura 31-6. Tiene una batería y dos resistores. Una vez más es posible deducir que la corriente sigue la dirección de las manecillas del reloj.

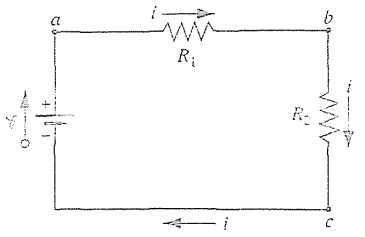


FIGURA 31-6. Circuito de una malla con dos resistores. La corriente es igual en todas partes: en dirección de la corriente el potencial disminuye de a a b y también de b a c.

Recorramos de nuevo el circuito, esta vez en dirección *contraria a las manecillas del reloj*. Partiendo del punto a, primero cruzamos la batería y encontramos una diferencia de potencial de $-\mathscr{E}$. A continuación pasamos por R_2 en dirección contraria a la corriente; así que el potencial *aumenta* y su diferencia es $+iR_2$. Asimismo, cuando atravesamos R_1 la diferencia de potencial es $+iR_1$, tras lo cual estamos de regreso en el punto de partida. En conformidad con la regla de la malla, el total de estas diferencias de potencial es cero:

$$-\mathscr{E} + iR_2 + iR_1 = 0$$

o

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2}. \tag{31-3}$$

Nótese que la ecuación 31-3 se reduce a la ecuación 31-2 si $R_1 = 0$ o $R_2 = 0$.

Diferencias de potencial en un circuito

A menudo queremos determinar la diferencia de potencial entre dos puntos en un circuito. Por ejemplo, en la figura 31-6 ¿cómo la diferencia ΔV_{ab} $(= V_a - V_b)$ entre dos puntos b y a depende de los elementos del circuito $\mathscr{E}$, R_1 y R_2? Para conocer su relación, comenzaremos en el punto b y luego nos dirigimos al punto a en el sentido de las manecillas del reloj, pasando por el resistor R_1. Si V_a y V_b son los potenciales en a y en b, respectivamente, tenemos

$$V_b + iR_1 = V_a,$$

porque experimentamos un incremento del potencial al recorrer un resistor en dirección contraria a la corriente. Esta relación la rescribimos así en función de ΔV_{ab}, la diferencia de potencial entre a y b:

$$\Delta V_{ab} = V_a - V_b = +iR_1,$$

expresión que nos indica que ΔV_{ab} tiene la magnitud R_1 y que el punto a se halla en un potencial más alto que b. Al combinar la ecuación anterior con la ecuación 31-3 se obtiene

$$\Delta V_{ab} = \mathscr{E}\frac{R_1}{R_1 + R_2}. \tag{31-4}$$

En resumen, para calcular la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito, se parte de un punto, se recorre el circuito hasta el otro y efectúa la suma algebraica de los cambios de potencial que se observen. La suma algebraica es la diferencia de potencial entre los puntos. Es un procedimiento parecido al de determinar la corriente en un circuito cerrado, salvo que en este caso las diferencias de potencial se suman en una parte del circuito y no en todo.

Podemos recorrer *cualquier* trayectoria por el circuito entre dos puntos y obtener el mismo valor de la diferencia de potencial, porque la *independencia de trayectoria* forma parte esencial del concepto de potencial. La diferencia de potencial entre dos puntos debe tener un solo valor; es necesario conseguir el mismo resultado en todas las trayectorias que los conecten. (En forma parecida, si consideramos dos puntos en la ladera de una colina, la diferencia medida del potencial gravitacional entre ellos es la misma, sin importar cuál trayectoria se siga al pasar de uno a otro.) En la figura 31-6 vamos a calcular otra vez ΔV_{ab} usando una trayectoria que comience en a y siguiendo la dirección contraria a las manecillas del reloj por la fuente de fuerza electromotriz hasta b. Tenemos entonces

$$V_a - \mathscr{E} + iR_2 = V_b$$

o bien

$$\Delta V_{ab} = V_a - V_b = +\mathscr{E} - iR_2.$$

La combinación del resultado anterior con la ecuación 31-3 nos da la ecuación 31-4.

Empleando un método similar podemos demostrar que

$$\Delta V_{bc} = \mathscr{E}\frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{31-5}$$

Nótese que, como cabría suponer, $\Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} = \mathscr{E}$. La combinación de resistores en el circuito de la figura 31-6 se conoce como *divisor de voltaje*. En efecto, divide en dos partes la diferencia de voltaje de la batería en proporción con el tamaño de los dos resistores.

En la figura 31-7 se indica otra manera de explicar las diferencias de potencial de este circuito. Para simplificar la situación hemos partido del punto c y recorrido el circuito en dirección de las manecillas del reloj. Aquí se ve claramente cómo la fuerza electromotriz de la batería "se divide" en diferencias de potencial entre los dos resistores.

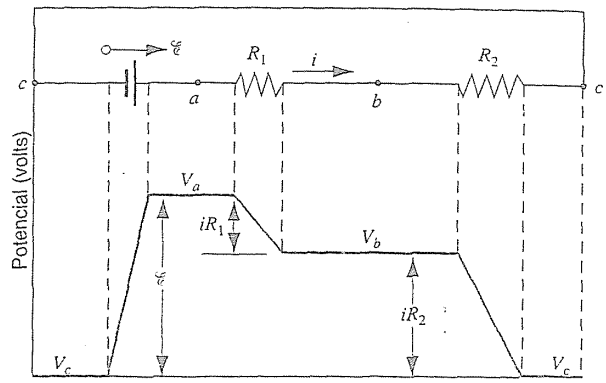


FIGURA 31-7. El circuito de la figura 31-6 se dibuja con sus componentes sobre una línea recta en la parte superior. Se muestra la diferencia de potencial entre los elementos.

Resistencia interna de una fuente de fuerza electromotriz

En contraste con las baterías ideales que hemos venido estudiando hasta ahora, las reales presentan resistencia interna. Ésta caracteriza a los materiales de que están hechas. No es posible eliminarla pues se trata de una parte intrínseca de ellas; casi siempre nos gustaría hacerlo, ya que la resistencia interna produce efectos indeseables como aminorar el voltaje terminal de la batería y limitar la corriente que puede fluir en el circuito.

La figura 31-8 muestra el circuito simple de malla de la figura 31-5, teniendo en cuenta la resistencia interna r de la ba-

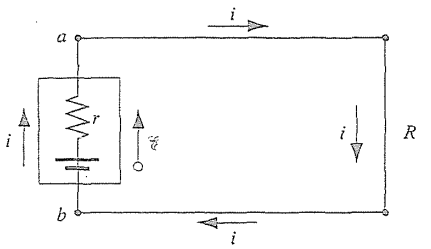


FIGURA 31-8. Se representa una batería como un dispositivo que contiene una fuente de fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ y una resistencia interna r.

tería. A pesar de que forman parte del mismo dispositivo, se muestran como elementos separados la fuente de fuerza electromotriz y la resistencia interna.

El circuito de la figura 31-8 es idéntico al de la figura 31-6, y es posible determinar la corriente con sólo adaptar la ecuación 31-3 a los elementos del circuito de la figura 31-8:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \tag{31-6}$$

La resistencia interna *reduce* la corriente que la fuerza electromotriz puede suministrarle al circuito externo.

La diferencia de potencial entre las terminales de la batería es $\Delta V_{ab} = V_a - V_b = \mathscr{E} - iR$; por medio de la ecuación 31-6 obtenemos

$$\Delta V_{ab} = \mathscr{E}\,\frac{R}{R + r}. \tag{31-7}$$

En la expresión anterior advertimos que la diferencia de potencial entre las terminales no es una constante, sino que ahora depende de la resistencia R del circuito externo. A medida que la hacemos más pequeña y con ello incrementamos la corriente, disminuye la diferencia de potencial entre las terminales de la batería. Una batería de 1.5 V tiene una diferencia de voltaje en las terminales de 1.5 V, sólo cuando no fluye corriente por ella. Cuando está conectada a un dispositivo de circuitos como una radio, la que existe entre las terminales será menor de 1.5 V.

En la figura 31-7 vemos que ΔV_{ab} es igual a $\mathscr{E}$, sólo si la batería no tiene resistencia interna ($r = 0$) o si el circuito externo está abierto ($R = \infty$).

PROBLEMA RESUELTO 31-1. ¿Cuál es la corriente en el circuito de la figura 31-9*a*? Las fuerzas electromotrices y los resistores poseen los siguientes valores $\mathscr{E}_1 = 2.1$ V, $\mathscr{E}_2 = 4.4$ V, $r_1 = 1.8\ \Omega$, $r_2 = 2.3\ \Omega$, $R = 5.5\ \Omega$.

Solución Las dos fuerzas electromotrices están conectadas de modo que se oponen entre sí, pero $\mathscr{E}_2$ por ser mayor que $\mathscr{E}_1$ controla la dirección de la corriente en el circuito, cuya dirección es contraria a la de las manecillas del reloj. La regla de la malla, aplicada en sentido de las manecillas del reloj partiendo del punto *a*, nos da

$$-\mathscr{E}_2 + ir_2 + iR + ir_1 + \mathscr{E}_1 = 0.$$

Compruebe que esta misma ecuación se consigue con un recorrido en dirección de las manecillas del reloj o comenzando en algún punto que no sea *a*. Compárela término por término con la figura 31-9*b*, que muestra gráficamente los cambios de potencial.

Al resolver para la corriente i obtenemos

$$i = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{R + r_1 + r_2} = \frac{4.4\text{ V} - 2.1\text{ V}}{5.5\ \Omega + 1.8\ \Omega + 2.3\ \Omega} = 0.24\text{ A}.$$

No es necesario conocer de antemano la dirección de la corriente. Para demostrarlo supongamos que la corriente de la figura 31-9*a*, sigue la dirección de las manecillas del reloj, es decir, una dirección opuesta a la flecha de corriente en esa figura. La regla de la espira produce entonces (partiendo de *a* en dirección de las manecillas del reloj)

$$-\mathscr{E}_2 - ir_2 - iR - ir_1 + \mathscr{E}_1 = 0$$

o bien

$$i = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{R + r_1 + r_2}.$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene $i = -0.24$ A para la corriente. El signo negativo indica que la corriente tiene dirección contraria a la que habíamos supuesto.

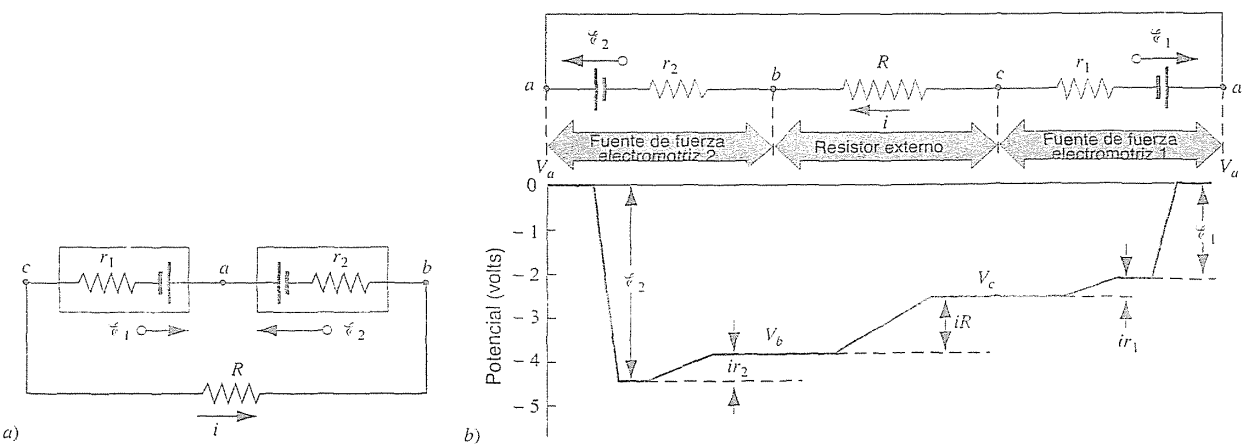


FIGURA 31-9. Problemas resueltos 31-1 y 31-2. *a*) Circuito de una espira que contiene dos fuentes de fuerza electromotriz. *b*) Cambios de potencial que se encuentran al recorrer el circuito en el sentido de las manecillas del reloj partiendo del punto *a*.

En circuitos más complejos que contienen muchas mallas y líneas, a menudo es imposible conocer por anticipado la dirección real de las corrientes en todas las partes de ellos. Pero sí es posible escoger arbitrariamente la dirección en cada línea. Si se logra una respuesta positiva con una corriente en particular, se habrá escogido la dirección correcta, si se obtiene un signo negativo, la corriente tendrá una dirección contraria a la seleccionada. El valor numérico es correcto en ambos casos.

PROBLEMA RESUELTO 31-2. *a)* ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* de la figura 31-9*a*? *b)* ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *c* en la figura 31-9*a*?

Solución *a)* Esta diferencia de potencial es la de la terminal de la batería 2, que incluye una fuerza electromotriz $\mathscr{E}_2$ y una resistencia interna r_2. Comencemos en el punto *b* y recorremos el circuito en dirección contraria a la de las manecillas del reloj al punto *a*, pasando directamente por la fuente de fuerza electromotriz. Obtenemos

$$V_b - ir_2 + \mathscr{E}_2 = V_a$$

o

$$V_a - V_b = -ir_2 + \mathscr{E}_2 = -(0.24\ \text{A})(2.3\ \Omega) + 4.4\ \text{V} = +3.8\ \text{V}.$$

Vemos que *a* es más positivo que *b* y que la diferencia de potencial entre ellos (3.8 V) es *menor* que la fuerza electromotriz (4.4 V) (Fig. 31-9*b*).

El resultado anterior podemos verificarlo comenzando en el punto *b* de la figura 31-9*a* y recorriendo el circuito en dirección de las manecillas del reloj hasta el punto *a*. En esta otra trayectoria encontramos

$$V_b + iR + ir_1 + \mathscr{E}_1 = V_a$$

o

$$V_a - V_b = iR + ir_1 + \mathscr{E}_1 = (0.24\ \text{A})(5.5\ \Omega + 1.8\ \Omega) + 2.1\ \text{V} = +3.8\ \text{V},$$

exactamente como antes. La diferencia de potencial entre dos puntos tiene el mismo valor en todas las trayectorias que los conectan. *b)* Nótese que la diferencia de potencial entre *a* y *c* es la de las terminales de la batería 1, constituida por la fuerza electromotriz $\mathscr{E}_1$ y la resistencia interna r_1. Comencemos en *c* y recorramos el circuito en dirección de las manecillas del reloj hasta el punto *a*. Obtenemos

$$V_c + ir_1 + \mathscr{E}_1 = V_a$$

o

$$V_a - V_c = ir_1 + \mathscr{E}_1 = (0.24\ \text{A})(1.8\ \Omega) + 2.1\ \text{V} = +2.5\ \text{V}.$$

La expresión anterior nos indica que *a* se encuentra en un potencial más alto que *c*. En este caso, la diferencia de potencial en las terminales (2.5 V) es *mayor* que la fuerza electromotriz (2.1 V) (Fig. 31-9*b*). Se impulsa carga a través de $\mathscr{E}_1$ en dirección contraria a la que la enviaría si actuará en forma aislada; si $\mathscr{E}_1$ fuera una batería de almacenamiento estaría cargando a costa de $\mathscr{E}_2$, que va a ser descargada.

PROBLEMA RESUELTO 31-3. La figura 31-10 contiene un circuito con dos mallas. Encuentre las corrientes del circuito. Los elementos poseen los siguientes valores: $\mathscr{E}_1 = 2.1$ V, $\mathscr{E}_2 = 6.3$ V, $R_1 = 1.7\ \Omega$, $R_2 = 3.5\ \Omega$.

Solución El primer paso al analizar este circuito consiste en definir las corrientes y sus direcciones en cada malla. Hemos dibujado las corrientes i_1, i_2 e i_3 en las tres líneas y seleccionado arbitrariamente su dirección. En el punto *a* la corriente i_3 fluye al interior y las corrientes i_1 e i_2 hacia el exterior. La aplicación de la regla de nudos (Sec. 31-1) nos da

$$i_3 = i_1 + i_2.$$

En seguida aplicamos la regla de malla a los dos mallas. Partiendo de *a* y recorriendo la espira de la izquierda en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, obtenemos $-i_1R_1 - \mathscr{E}_1 - i_1R_1 + \mathscr{E}_2 + i_2R_2 = 0$ o

$$2i_1R_1 - i_2R_2 = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1.$$

Si desde el punto *a* recorramos la malla de la derecha en dirección de las manecillas del reloj, encontramos $+i_3R_1 - \mathscr{E}_2 + i_3R_1 + \mathscr{E}_2 + i_2R_2 = 0$ o bien, tras sustituir $i_3 = i_1 + i_2$ conforme a la regla de nudos,

$$2i_1R_1 + (2R_1 + R_2)i_2 = 0.$$

Ahora tenemos dos ecuaciones relativas a las dos corrientes i_1 e i_2. Podemos resolverlas para esa variables y, después de un poco de álgebra, obtenemos

$$i_1 = \frac{(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)(2R_1 + R_2)}{4R_1(R_1 + R_2)} = \frac{(6.3\ \text{V} - 2.1\ \text{V})(2 \times 1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega)}{(4)(1.7\ \Omega)(1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega)} = 0.82\ \text{A},$$

$$i_2 = -\frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{2(R_1 + R_2)} = -\frac{6.3\ \text{V} - 2.1\ \text{V}}{(2)(1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega)} = -0.40\ \text{A}.$$

La tercera corriente se determina aplicando la regla de nudos:

$$i_3 = i_1 + i_2 = 0.82\ \text{A} + (-0.40\ \text{A}) = 0.42\ \text{A}.$$

Los signos de las corrientes nos indican que hemos supuesto correctamente la dirección de i_1 e i_3, pero nos equivocamos respecto a la dirección de i_2; debería apuntar hacia arriba, no hacia abajo, en la línea central del circuito de la figura 31-10.

Nótese que, tras descubrir que la corriente i_2 apunta en la dirección equivocada, no necesitamos modificarla en la figura 31-10. Podemos dejarla allí tal como está, a condición de que no olvidemos sustituir por i_2 un valor negativo numérico en todos los cálculos posteriores concernientes a esa corriente.

PROBLEMA RESUELTO 31-4. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* en el circuito de la figura 31-10?

Solución En la diferencia de potencial entre *a* y *b*, al desplazarnos por la línea *ab* en la figura 31-10 y al suponer las direcciones de corriente indicadas, tenemos

$$V_a - i_2R_2 - \mathscr{E}_2 = V_b,$$

o bien

$$V_a - V_b = \mathscr{E}_2 + i_2R_2 = 6.3\ \text{V} + (-0.40\ \text{A})(3.5\ \Omega) = +4.9\ \text{V}.$$

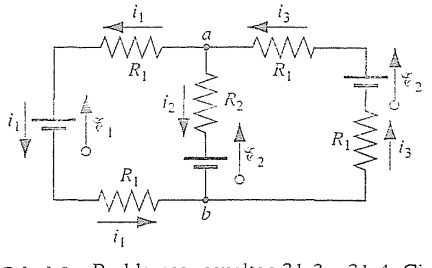


FIGURA 31-10. Problemas resueltos 31-3 y 31-4. Circuito de dos mallas.

El signo positivo significa que el potencial de a es más positivo que el de b. Este resultado debería deducirse al examinar atentamente el diagrama del circuito, pues las tres baterías tienen su terminal positiva en la parte superior de la figura.

31-4 CAMPOS ELÉCTRICOS EN LOS CIRCUITOS*

Hasta ahora hemos estudiado los circuitos en forma un poco misteriosa. En el capítulo 29 examinamos la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico en un conductor $\vec{E} = \rho\vec{j}$ (Ec. 29-10), donde ρ es la resistividad del material y $\vec{j}$ es la densidad de corriente (corriente por unidad de superficie transversal). Los alambres de los circuitos son conductores y de ahí que deba haber un campo eléctrico para generar y sostener la corriente. ¿De dónde procede este campo?

En este punto conviene retomar la analogía entre corriente y flujo de fluido en un tubo. En la figura 31-11 vemos un circuito cerrado similar al de la figura 31-5. La bomba se parece a la fuente de fuerza electromotriz y la constricción del tubo se parece al resistor. En el estado estacionario, la cantidad de fluido por unidad de tiempo que cruza un punto del circuito ha de ser igual a la que atraviesa otro punto cualquiera. Por tanto, en la constricción el fluido debe desplazarse con mayor rapidez (suponiendo que sea incompresible).

La batería suministra fuerza electromotriz al circuito; su función consiste en "bombear" cargas del potencial bajo al alto. La fuerza electromotriz se define como el trabajo por unidad de carga efectuado por ella. Con la definición ordinaria de trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ como $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$, el trabajo por unidad de carga W/q (la fuerza electromotriz) se relacionará entonces con la fuerza por unidad de carga $\vec{F}/q$:

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{F}/q) \cdot d\vec{s} \qquad (31\text{-}8)$$

Resulta tentador relacionar el campo eléctrico con la magnitud $\vec{F}/q$, pero, por lo regular, no es correcto. En este caso la fuerza es la que opera dentro de la fuente de fuerza electromotriz; podría tratarse de una fuerza de origen mecánico, químico, termodinámico o magnético, pero no se relaciona necesariamente con un campo eléctrico.

Hemos escrito la ecuación 31-8 como la integral alrededor de una trayectoria cerrada. De ese modo la fuerza electromotriz dependerá exclusivamente del efecto neto de la fuente en una carga que forma una malla completa alrededor del circuito. Los campos externos conservativos no pueden generar una fuerza electromotriz, porque la ecuación 31-8 desaparece en ellos.

Existe un campo eléctrico dentro de los alambres. Debe estar presente para que la carga fluya por ellos. (En el Cap. 27 se explicó que la regla de que $E = 0$ dentro de un conductor se cumple *sólo* en condiciones electrostáticas; no es válida cuando existen corrientes.) La figura 31-12 ofrece una representación de los campos eléctricos en un alambre conductor. ¿Qué tamaño necesitan para mantener una corriente ordinaria?

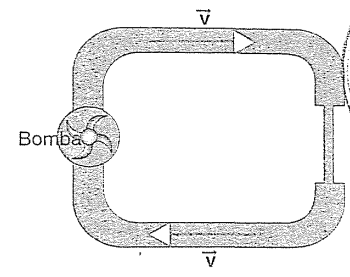


FIGURA 31-11. Analogía de la mecánica de fluidos con el circuito eléctrico de la figura 31-5. La constricción opone un poco de resistencia al flujo del fluido.

Conviene hacer algunas estimaciones numéricas. Supóngase que una corriente $i = 1$ A fluye en un alambre de radio $R = 1$ mm. Su densidad será entonces

$$j = \frac{i}{A} = \frac{1\text{ A}}{\pi(1 \times 10^{-3}\text{ m})^2} \approx 3 \times 10^5\text{ A/m}^2.$$

En los alambres de cobre, la resistividad ρ es $1.69 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m, así que el campo eléctrico relacionado con la corriente es

$$E = \rho j = (1.69 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(3 \times 10^5\text{ A/m}^2) \approx 5 \times 10^{-3}\text{ V/m}.$$

Éste es un campo eléctrico muy pequeño.

Cuando por primera vez se conecta la batería al circuito, se crean corrientes iniciales transitorias. Distribuyen cargas a lo largo de las superficies de los alambres en la forma exacta necesaria para generar el campo eléctrico que conserve la corriente estacionaria en ellos; el proceso se realiza enteramente en el orden de nanosegundos.

¿Cuánta carga en la superficie del alambre se necesita para producir un campo de 5×10^{-3} V/m en su interior? Si queremos conseguir una estimación aproximada del orden de magnitud, podemos emplear la ecuación 26-6 con el campo eléctrico de una carga puntual, $E = q/4\pi\epsilon_0 R^2$, para determi-

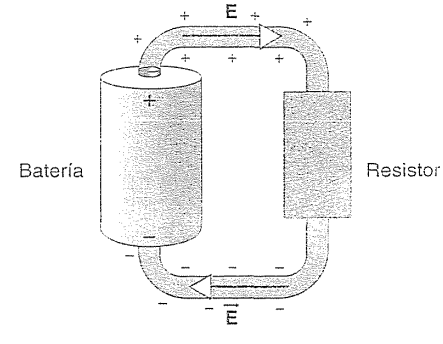


FIGURA 31-12. Campos eléctricos en alambres de conexión dentro de un circuito de una malla. Las cargas en la superficie de los alambres producen los campos de los alambres.

* Una exposición más amplia de este tema se da en *Electric and Magnetic interactions* de R. Chabay y B. Sherwood (Nueva York: Wiley, 1995), capítulo 6. Consúltese también a W. G. V. Rosser, *American Journal of Physics*, vol. 31, 1963, p. 884 y vol. 38, 1970, p. 265.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
BIBLIOTECA REGIONAL OBERA

nar la carga q en la superficie del alambre que nos dé un campo E en su centro:

$$q = 4\pi\epsilon_0 R^2 E = \frac{(10^{-3}\ \text{m})^2(5 \times 10^{-3}\ \text{V/m})}{9 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}$$

$$= 5.5 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

o sea 3.5 electrones aproximadamente. Tan sólo se requieren pequeñas cantidades de carga en la superficie para crear el campo eléctrico necesario para mantener una corriente tan grande como un ampere en un conductor.

En forma parecida, podemos preguntar cómo la corriente "sabe" cambiar de dirección al encontrarse con una curvatura del alambre. Una vez más, los transitorios iniciales deben producir suficiente carga en la superficie para guiarla. La figura 31-13 ofrece una vista esquemática de una curvatura con ángulo recto, donde las cargas superficiales han de distribuirse más o menos como se indica. La carga negativa crea un campo cerca de la curvatura que se opone al movimiento de la corriente que llega y la positiva da un "empujón" inicial en la nueva dirección. El cálculo precedente da otra vez una estimación del orden de magnitud de las cargas necesarias: bastan unos cuantos electrones en la superficie para cambiar la dirección de una corriente de un ampere.

El examen de la carga superficial nos ayuda a entender el efecto que un resistor tiene en un circuito. Consideremos un resistor de carbono y, para simplificar el ejemplo, le daremos el mismo diámetro que los alambres de nuestro circuito (Fig. 31-14). El carbono no es un buen conductor, pero tampoco un buen aislante: su resistividad es de unos $3 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot \text{m}$, alrededor de 2000 veces mayor que la del cobre, pero no tan grande como la resistividad de los aislantes ordinarios (Tabla 29-1). Como el resistor y los alambres tienen la misma superficie transversal, la densidad de corriente es igual en ambos. Utilizando la densidad anterior de corriente con una de 1 A en el radio de 1 mm, podemos obtener el campo eléctrico en el resistor:

$$E = \rho j = (3 \times 10^{-5}\ \Omega\cdot\text{m})(3 \times 10^5\ \text{A/m}^2) \approx 10\ \text{V/m},$$

lo cual nos da un campo unas 2000 veces mayor que el de los alambres de cobre. (¿Entiende por qué la caída de potencial en los alambres es insignificante comparada con la del resistor?) Se necesita este campo eléctrico grande para hacer que los electrones pasen por la "constricción" del circuito debida al resistor. Como se advierte en la figura 31-14, las cargas que se acumulan en los extremos del alambre (semejantes a las de un capacitor) son las que originan dicho campo. Con un resistor de 1 mm de espesor, el lector deberá ser capaz de demostrar que unos 1000 electrones en cada extremo pueden producir el campo requerido.

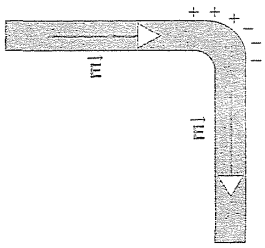


FIGURA 31-13. Detalle de las cargas superficiales cerca de un doblez en ángulo recto.

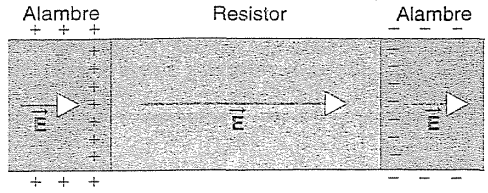


FIGURA 31-14. Detalles de cargas superficiales cerca de un resistor. La acumulación de carga en los extremos del alambre genera un gran campo eléctrico en el resistor.

Lo que acabamos de describir es un hermoso sistema autorregulador. La batería le suministra al circuito la "ráfaga" inicial de corriente y casi al instante la carga se dirige a los lugares donde guía la corriente estacionaria e impide que siga acumulándose más carga en la superficie de los alambres. Este equilibro se conserva mientras la batería continúe bombeando carga en todo el circuito.

31-5 RESISTORES EN SERIE Y EN PARALELO

Igual que en el caso de los capacitores (Sec. 30-4), a menudo hay resistores en circuitos con varias combinaciones. Al analizar esos circuitos, conviene reemplazar la combinación de resistores por una sola *resistencia equivalente* R_{eq}, cuyo valor se elige de modo que no se altera el funcionamiento del circuito. Vamos a examinar dos formas de combinar los resistores.

Resistores conectados en paralelo

Recuerde la definición que en la sección 30-4 se dio de la combinación en paralelo de los elementos de un circuito: podemos recorrer la combinación cruzando *solamente uno* de ellos, la misma diferencia de potencial ΔV aparece en cada uno y el flujo de carga se comparte entre ellos.

La figura 31-15 muestra dos resistores conectados en paralelo. Buscamos la resistencia equivalente entre los puntos a y b. Supongamos que conectamos una batería (u otra fuente de fuerza electromotriz) que mantenga una diferencia de potencial ΔV entre los puntos. La diferencia en los resistores es

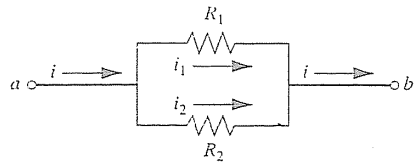


FIGURA 31-15. Dos resistores en paralelo.

ΔV. De acuerdo con la ecuación 29-12, la corriente que pasa por los resistores es

$$i_1 = \Delta V/R_1 \quad \text{e} \quad i_2 = \Delta V/R_2. \tag{31-9}$$

Atendiendo a las propiedades de un circuito en paralelo, las líneas han de compartir la corriente total i, de manera que

$$i = i_1 + i_2. \tag{31-10}$$

Si quisiéramos reemplazar la combinación en paralelo por una resistencia equivalente R_{eq}, debe fluir la misma corriente total i (porque la sustitución no debe modificar el funcionamiento del circuito). Entonces la corriente es

$$i = \Delta V/R_{eq}. \tag{31-11}$$

La sustitución de las ecuaciones 31-9 y 31-11 en la ecuación 31-10 nos da

$$\frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2}$$

o

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{31-12}$$

Para calcular la resistencia equivalente de una combinación en paralelos con más de dos resistores, primero se determina la resistencia equivalente R_{12} de R_1 y R_2 utilizando la ecuación 31-12. Después se obtiene la resistencia equivalente R_{12} y luego la siguiente resistencia en paralelo, R_3, utilizando una vez más la ecuación 31-12. Prosiguiendo en esta forma, se consigue una expresión general de la resistencia equivalente de una combinación en paralelo con cualquier número de resistores.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_n \frac{1}{R_n} \quad \text{(combinación en paralelo).} \tag{31-13}$$

Es decir, para determinar la resistencia equivalente de una combinación en paralelo, se suman las recíprocas de las resistencias individuales y se toma la de la suma resultante. Adviértase que R_{eq} siempre es *menor que* la resistencia más pequeña de la combinación en paralelo: sumando más trayectorias para la corriente obtenemos más corriente con la misma diferencia de potencial.

En el caso especial de dos resistores en paralelo, la ecuación 31-12 puede escribirse

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \tag{31-14}$$

o como el producto de dos resistencias dividido entre su suma.

Resistores conectados en serie

La figura 31-16 muestra dos resistores conectados en serie. Recuérdense las propiedades de una combinación en serie de los elementos de un circuito (Sec. 30-4): para pasar por la combinación, es preciso recorrer todos los elementos sucesivamente, la diferencia de potencial en la combinación es la suma de las que hay en cada elemento y la misma corriente se conserva en ellos.

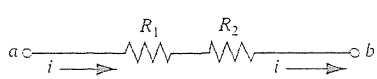


FIGURA 31-16. Dos resistores en serie.

Supóngase que una batería de diferencia de potencial ΔV se conecta en los puntos a y b de la figura 31-16. Se crea una corriente i en la combinación y en cada uno de los resistores. Las diferencias de potencial entre ellos son

$$\Delta V_1 = iR_1 \quad \text{y} \quad \Delta V_2 = iR_2. \tag{31-15}$$

La suma de las diferencias de potencial ha de producir la que existe en los puntos a y b mantenidos por la batería, o sea

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2. \tag{31-16}$$

Si reemplazáramos la combinación por su resistencia equivalente R_{eq}, se generaría la misma corriente i y, en consecuencia,

$$\Delta V = iR_{eq}. \tag{31-17}$$

La combinación de las ecuaciones 31-15, 31-16 y 31-17 nos da

$$iR_{eq} = iR_1 + iR_2,$$

o

$$R_{eq} = R_1 + R_2. \tag{31-18}$$

Extendiendo el resultado anterior a una combinación en serie de cualquier número de resistores, obtenemos

$$R_{eq} = \sum_n R_n \quad \text{(combinación en serie).} \tag{31-19}$$

Es decir, si queremos encontrar la resistencia equivalente de una combinación en serie, obtenemos la suma de los resistores individuales. Nótese que este tipo de resistencia siempre es *mayor* que la resistencia más grande en la serie: al agregar más resistores en serie se genera menos corriente para la misma diferencia de potencial.

Al comparar estos resultados con las ecuaciones 30-17 y 30-22 en el caso de las combinaciones en serie y en paralelo de capacitores, observamos que los resistores en paralelo se suman como capacitores en serie y que los resistores en serie se suman como los capacitores en paralelo. Ello se relaciona con la forma diferente de definir las dos magnitudes: la resistencia es potencial/corriente y la capacitancia es carga/potencial.

En ocasiones los resistores aparecen en combinaciones que no están ni en serie ni en paralelo. En tal caso, la resistencia equivalente puede determinarse a veces dividiendo el problema en unidades más pequeñas que pueden considerarse conexiones en serie o en paralelo, como lo demuestran los siguientes problemas resueltos.

PROBLEMA RESUELTO 31-5. *a*) Calcule la resistencia equivalente de la combinación de la figura 31-17*a*, utilizando para ello los valores $R_1 = 4.6\ \Omega$, $R_2 = 3.5\ \Omega$ y $R_3 = 2.8\ \Omega$. *b*) ¿Cuál es el valor de la corriente que pasa por R_1 cuando una batería de 12.0 V está conectada en los puntos a y b?

Solución *a*) Calcule primero la resistencia equivalente R_{12} de la combinación en paralelo de R_1 y R_2. Por medio de la ecuación 31-14 obtenemos

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(4.6\ \Omega)(3.5\ \Omega)}{4.6\ \Omega + 3.5\ \Omega} = 2.0\ \Omega.$$

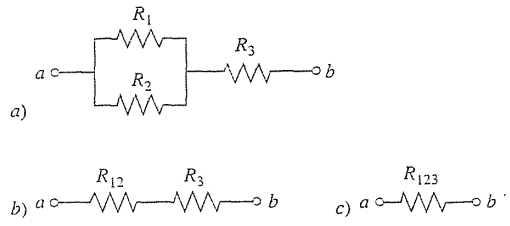


FIGURA 31-17. Problema resuelto 31-5. *a*) La combinación en paralelo de R_1 y R_2 está en serie con R_3. *b*) La combinación en paralelo R_1 y R_2 ha sido reemplazada por su resistencia equivalente, R_{12}. *c*) La combinación en serie de R_{12} y R_3 ha sido sustituida por su resistencia equivalente R_{123}.

R_{12} y R_3 están en serie como se muestra en la figura 31-17*b*. Con la ecuación 31-18 puede determinarse la resistencia equivalente R_{123} de esta combinación en serie de la combinación entera original:

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 2.0\ \Omega + 2.8\ \Omega = 4.8\ \Omega.$$

b) Con una batería de 12.0 V conectado en los puntos *a* y *b* de la figura 31-17*c*, la corriente resultante es

$$i = \frac{\Delta V}{R_{123}} = \frac{12.0\ \text{V}}{4.8\ \Omega} = 2.5\ \text{A}.$$

Con esta corriente de las combinaciones en serie en la figura 31-17*b*, la diferencia de potencial en R_{12} es

$$\Delta V_{12} = iR_{12} = (2.5\ \text{A})(2.0\ \Omega) = 5.0\ \text{V}.$$

En una combinación en paralelo, la misma diferencia de potencial aparece en cada elemento (y en su combinación). Por tanto, la diferencia de potencial en R_1 (y R_2) es 5.0 V, y la corriente que cruza R_1 es

$$i_1 = \frac{\Delta V_{12}}{R_1} = \frac{5.0\ \text{V}}{4.6\ \Omega} = 1.1\ \text{A}.$$

PROBLEMA RESUELTO 31-6. La figura 31-18*a* muestra un cubo hecho con 12 resistores, cada uno con una resistencia *R*. Determine R_{12}, la resistencia equivalente en un lado del cubo.

Solución Aunque a primera vista parece que este problema no puede dividirse en subunidades en serie y en paralelo, la simetría de las conexiones indica una manera de hacerlo. La clave consiste en entender que, partiendo exclusivamente de consideraciones de simetría, los puntos 3 y 6 han de tener el mismo potencial y, por lo mismo, también los puntos 4 y 5.

Si dos puntos de un circuito tienen el mismo potencial, las corrientes en el circuito no cambian si conecta estos puntos por medio de un alambre. No hay corriente en el alambre, porque tampoco existe diferencia de potencial entre sus extremos. En consecuencia, los puntos 3 y 6 pueden estar conectados por un alambre, así como los puntos 4 y 5.

Esto nos permite volver a dibujar el cubo como en la figura 31-18*b*. A partir de este punto basta reducir el circuito entre las terminales de entrada a un solo resistor, aplicando las reglas de los resistores en serie y en paralelo. En la figura 31-18*c*, comenzamos reemplazando cinco combinaciones en paralelo de dos resistores por sus equivalentes, cada uno con una resistencia $\frac{1}{2}R$.

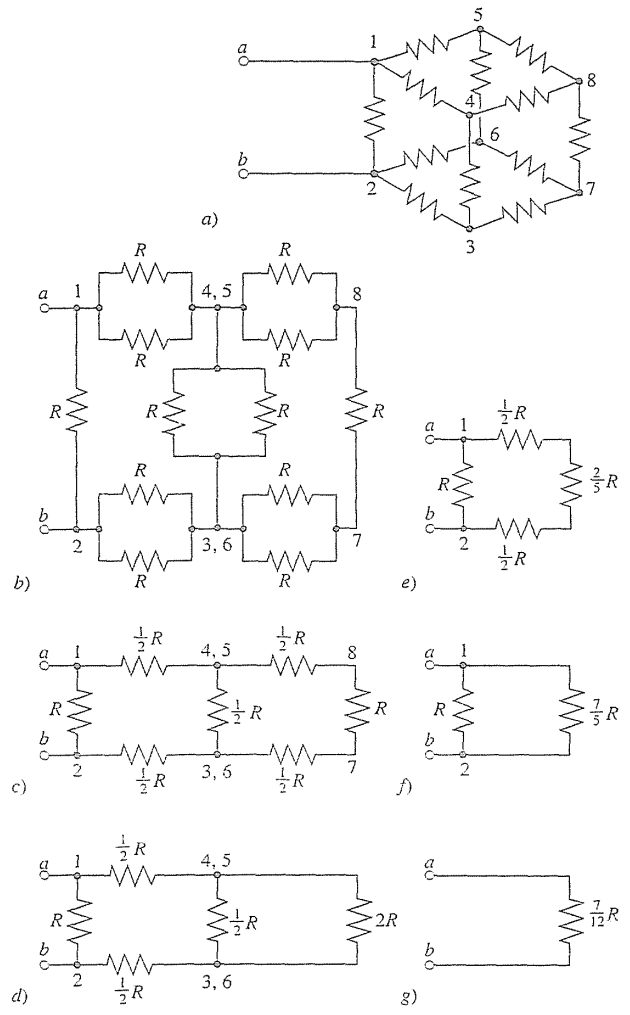


FIGURA 31-18. Problema resuelto 31-6. *a*) Cubo formado por 12 resistores idénticos. *b*)-*g*) Reducción paso por paso del cubo a una sola resistencia equivalente.

En la figura 31-18*d* hemos agregado los tres resistores que se encuentran en serie en la malla derecha, obteniendo un solo resistor equivalente de 2*R*. En la figura 31-18*e* hemos reemplazado los dos resistores que ahora forman la malla derecha por un solo resistor equivalente $\frac{2}{5}R$. Al hacerlo conviene recordar que la resistencia equivalente de dos resistores en paralelo es igual a su producto dividido entre su suma (Ec. 31-14).

En la figura 31-18*f* hemos agregado los tres resistores en serie de la figura 31-18*e*, obteniendo $\frac{7}{5}R$ y en la figura 31-18*g* redujimos esta combinación en paralelo a una sola resistencia equivalente que buscamos, a saber:

$$R_{12} = \tfrac{7}{12}R.$$

También podemos aplicar estos métodos para encontrar R_{13}, la resistencia equivalente de un cubo en una diagonal frontal, y R_{17} para encontrar la resistencia equivalente en una diagonal del cuerpo (Prob. 7).

31-6 TRANSFERENCIAS DE ENERGÍA EN UN CIRCUITO ELÉCTRICO

La figura 31-19 contiene un circuito que consta de una batería B conectada a un dispositivo electrónico: un resistor, un capacitor, un motor u otra batería. En los alambres hay una corriente i y una diferencia de potencial ΔV_{ab} entre las terminales.

Examinemos primero el funcionamiento de la batería, que suponemos es una fuente ideal (sin resistencia) de fuerza electromotriz $\mathscr{E}$. Conforme transfiere una cantidad de carga dq de su terminal negativa a la positiva, realiza trabajo en la carga dado por la ecuación 31-1: $dW = \mathscr{E}\, dq$. La potencia suministrada por la fuente de fuerza electromotriz depende de la rapidez con que se lleva a cabo el trabajo, esto es, $P_{\text{fem}} = dW/dt = \mathscr{E}\, dq/dt$, o

$$P_{\text{fem}} = \mathscr{E} i. \tag{31-20}$$

Esta cantidad indica la rapidez con que una fuente ideal de fuerza electromotriz transfiere energía al resto del circuito. Según comentamos en la sección 31-2, la energía podría aparecer como la energía interna de un resistor, la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor, la energía mecánica de un motor o la energía química de una batería mientras la cargan. Si suponemos que el circuito es un sistema aislado, su energía total no puede cambiar y la disminución de la que tiene la fuente de fuerza electromotriz ha de ser balanceada por un incremento equivalente neto de energía de la de otras partes del circuito.

Supóngase que el circuito consta sólo de una fuente de fuerza electromotriz y de un resistor R. La diferencia de potencial entre las terminales a y b en la figura 31-19 es $\Delta V_R = iR$. A medida que la cantidad de carga dq se desplaza por el resistor de a a b, experimenta un cambio de energía potencial $dU = dq\, \Delta V_R$ (Ec. 28-14). Esta energía ha de ser transferida al resistor, de modo que la potencia que recibe éste es $P_R = dU/dt = (dq/dt)\, \Delta V_R = i\, \Delta V_R$ o

$$P_R = i^2 R. \tag{31-21}$$

Con $i = \Delta V_R/R$, podemos escribir además este resultado así

$$P_R = \frac{(\Delta V_R)^2}{R}. \tag{31-22}$$

Esta transferencia de energía a un resistor de un circuito se conoce a menudo como *calentamiento de Joule*.

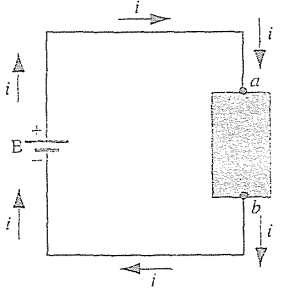


FIGURA 31-19. Una batería B genera una corriente i en un circuito que contiene un dispositivo electrónico arbitrario.

A medida que una carga se desplaza por el resistor del potencial más alto (terminal a) al potencial más bajo (terminal b), tendería a adquirir energía si no fuera por las colisiones con los átomos del resistor. Las colisiones mantienen la rapidez constante de desplazamiento en los portadores de carga, y la energía que obtienen los átomos con estas colisiones (que aumenta la amplitud de su vibración en las posiciones de equilibrio) puede corresponder a un incremento de temperatura. La situación se parece a la caída de una piedra con su velocidad terminal a través de un medio viscoso como el aire o el agua. Al ir cayendo la piedra por la gravedad, su disminución de energía potencial se transforma inmediatamente no en un incremento de la energía cinética, sino de la energía interna de la piedra y del medio circundante.

En una batería real con resistencia interna r, la diferencia de potencial entre las terminales es $\Delta V_{\text{bat}} = \mathscr{E} - ir$ y la carga que pasa por ella adquiere una energía potencial $dU = dq\, \Delta V_{\text{bat}} = dq(\mathscr{E} - ir)$. La potencia suministrada por la batería es $P_{\text{bat}} = dU/dt$ o

$$P_{\text{bat}} = \mathscr{E} i - i^2 r = P_{\text{fem}} - P_r. \tag{31-23}$$

La energía disponible para el resto del circuito disminuye por el calentamiento de Joule en la resistencia interna.

La unidad de potencia que se deduce de las ecuaciones 31-20 a 31-22 es el volt · ampere, que según puede demostrarse equivale al watt si se utilizan las definiciones del volt (joule/coulomb) y del ampere (coulomb/segundo).

PROBLEMA RESUELTO 31-7. Recibe una longitud de un alambre de calentamiento hecho de una aleación de níquel-cromio-hierro, denominada Nicromel; tiene una resistencia R de 72 Ω. Debe conectarse a una línea de 120 V. ¿En qué circunstancias disipará más calor: *a*) su longitud entera está conectada en la línea o *b*) el alambre se corta a la mitad y las dos mitades se conectan en paralelo a lo largo de la línea?

Solución *a*) Conforme a la ecuación 31-22, la potencia P_R disipada por el alambre entero es

$$P_R = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{(120\ \text{V})^2}{72\ \Omega} = 200\ \text{W}.$$

b) La potencia de un alambre de media longitud (y por lo mismo de media resistencia) es

$$P_R' = \frac{(\Delta V)^2}{\frac{1}{2}R} = \frac{(120\ \text{V})^2}{36\ \Omega} = 400\ \text{W}.$$

Existen dos mitades y, por eso, la potencia obtenida de ellas es 800 W, es decir, cuatro veces la de un solo alambre. Esto parecería indicar que podría comprarse un alambre de calentamiento, cortarlo a la mitad, y reconectarlo para obtener cuatro veces la producción de calor. ¿Por qué no es una buena idea?

31-7 CIRCUITOS RC

Las secciones anteriores versaron sobre los circuitos que contienen resistores exclusivamente, en que las corrientes no varían con el tiempo. En ésta vamos a introducir el capacitor como un elemento del circuito, lo cual nos lleva a estudiar las corrientes que varían con el tiempo.

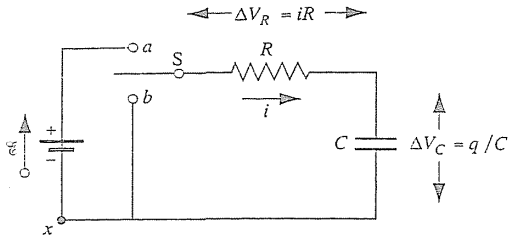


FIGURA 31-20. Cuando se conecta el interruptor S a *a*, al capacitor *C* lo carga la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ que pasa por el resistor *R*. Después de ello, se pone el interruptor en *b* y el capacitor se descarga a través de *R*. Es fácil medir la diferencia de potencial ΔV_R (= iR) en el resistor para determinar la corriente i y también para determinar la carga q es fácil medir la diferencia de potencial ΔV_C (= q/C) en las placas del capacitor.

Supóngase que cargamos el capacitor de la figura 31-20 colocando el interruptor S en la posición *a*. (Más tarde estudiaremos la conexión para ponerlo en *b*.) ¿Qué corriente se crea en el circuito resultante de una sola malla? Apliquemos en este caso los principios de conservación de la energía.

En el tiempo dt una carga dq (= $i\,dt$) se desplaza por una sección transversal del circuito y se deposita en la placa positiva del capacitor. El trabajo ($\mathscr{E} = dq$; Ec. 31-1) efectuado por la fuente de fuerza electromotriz ha de ser igual a la energía interna (= $i^2R\,dt$) producida en el resistor durante el tiempo dt más el incremento dU de la cantidad de energía U (= $q^2/2C$; Ec. 30-24) que se almacena en el capacitor. La conservación de energía nos da

$$\mathscr{E}\,dq = i^2R\,dt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

o

$$\mathscr{E}\,dq = i^2R\,dt + \frac{q}{C}\,dq.$$

Al dividir entre dt se obtiene

$$\mathscr{E}\,\frac{dq}{dt} = i^2R + \frac{q}{C}\,\frac{dq}{dt}.$$

Puesto que q es la carga en la placa superior, una i positiva significa una dq/dt también positiva. Con $i = dq/dt$, la ecuación anterior queda así

$$\mathscr{E} = iR + \frac{q}{C}. \qquad (31\text{-}24)$$

Esta ecuación se deduce de la regla de la malla como debe ser, pues la regla se obtuvo del principio de conservación de la energía. Comenzando en el punto x y recorriendo el circuito en el sentido de las manecillas del reloj, observamos un aumento del potencial al atravesar la fuente de fuerza electromotriz y reducciones de él al pasar por el resistor y el capacitor, o sea

$$\mathscr{E} - iR - \frac{q}{C} = 0,$$

expresión idéntica a la ecuación 31-24.

Si queremos resolver la ecuación 31-24 sustituimos primero i por dq/dt, lo cual nos da

$$\mathscr{E} = R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}. \qquad (31\text{-}25)$$

Podemos rescribir la ecuación 31-25 así

$$\frac{dq}{q - \mathscr{E}C} = -\frac{dt}{RC}. \qquad (31\text{-}26)$$

Al integrar el resultado anterior en el caso en que $q = 0$ en $t = 0$, obtenemos (después de resolver para q),

$$q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}). \qquad (31\text{-}27)$$

Podemos verificar que esta función $q(t)$ es realmente una solución de la ecuación 31-25, con solo sustituirla junto con su primera derivada e introducirla en la ecuación para comprobar si se produce una identidad. Así pues, la derivación de la ecuación 31-27 respecto al tiempo nos da

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{R}\,e^{-t/RC}. \qquad (31\text{-}28)$$

Al sustituir q (en la Ec. 31-27) y dq/dt (Ec. 31-28) en la ecuación 31-25, se obtiene una identidad y le recomendamos que lo verifique. Así pues, la ecuación 31-27 es una solución de la ecuación 31-25.

En el laboratorio podemos determinar, sin problemas, i y q midiendo las cantidades proporcionales a ellas: la diferencia de potencial ΔV_R (= iR) en el resistor y la diferencia de potencial ΔV_C (= q/C) en el capacitor. Tales mediciones se obtienen con relativa facilidad si se conectan los voltímetros (o puntos del osciloscopio) al resistor y al capacitor. La figura 31-21 contiene las gráficas resultantes de ΔV_R y ΔV_C. Nótese lo siguiente 1) En $t = 0$, $\Delta V_R = \mathscr{E}$ (la diferencia total de potencial aparece en R) y $\Delta V_C = 0$ (el capacitor no está cargado). 2) A medida que $t \to \infty$, $\Delta V_C \to \mathscr{E}$ (el capacitor se carga por completo) y $\Delta V_R \to 0$ (la corriente deja de fluir). 3) En todo momento, $\Delta V_R + \Delta V_C = \mathscr{E}$, tal como lo exige la ecuación 31-25.

La cantidad RC en las ecuaciones 31-27 y 31-28 presenta las dimensiones de tiempo y se conoce como *constante de*

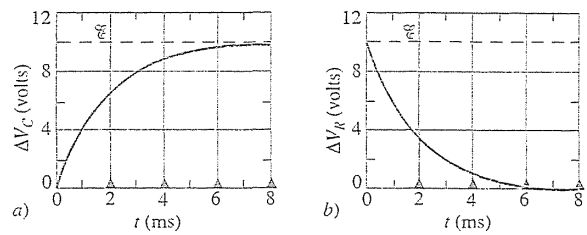


FIGURA 31-21. *a*) Como lo indica la diferencia de potencial ΔV_C, durante el proceso de carga, la que se encuentra en el capacitor aumenta con el tiempo y ΔV_C se acerca al valor de la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$. El tiempo se mide después de cerrar el interruptor en *a* con $t = 0$. *b*) La diferencia de potencial en el resistor disminuye con el tiempo, aproximándose más tarde a 0 porque la corriente cae a ese valor, una vez que el capacitor está cargado por completo. Las curvas se dibujaron con $\mathscr{E}$ = 10 V, R = 2000 Ω y C = 1 μF. Los triángulos llenos representan sucesivas constantes de tiempo RC.

tiempo capacitiva τ_C del circuito

$$\tau_C = RC. \tag{31-29}$$

Es el tiempo en que la carga del capacitor ha aumentado hasta un factor de $1 - e^{-1}$ ($\approx 63\%$) de su valor final $C\mathscr{E}$. Para demostrarlo introducimos $t - \tau_C = RC$ en la ecuación 31-27 y así obtenemos

$$q = C\mathscr{E}(1 - e^{-1}) = 0.63C\mathscr{E}.$$

En la figura 31-21*a* se indica que, si una resistencia está incluida en un circuito con un capacitor cargándose, el incremento de su carga hacia el valor límite *se ve retrasado* por un tiempo caracterizado por la constante de tiempo RC. Cuando no hay un resistor ($RC = 0$), la carga se elevaría inmediatamente hasta alcanzar su valor límite. Hemos demostrado que este retraso temporal se debe a una aplicación de la regla de la malla a los circuitos RC; no obstante, conviene dar una explicación física de las causas de la demora.

Cuando el interruptor S en la figura 31-20 se cierra en *a*, la carga del capacitor es cero al inicio, de manera que también lo es su diferencia de potencial. En este tiempo la ecuación 31-24 muestra que $\mathscr{E} = iR$ y así que $i = \mathscr{E}/R$ en $t = 0$. A causa de esta corriente, la carga fluye hacia el capacitor y la diferencia de potencial en él y aumenta con el tiempo. Ahora la ecuación 31-24 indica que, por ser una constante la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$, cualquier aumento de la diferencia de potencial en el capacitor ha de ser balanceada por un *decremento* correspondiente en la que existe en el resistor, con una reducción similar de la corriente. Esta disminución significa que la carga en el capacitor crece con mayor lentitud. El proceso continúa hasta que la corriente disminuye a cero, momento en que no se registra caída de potencial en el resistor. La entera diferencia de potencial de la fuerza electromotriz aparece ahora en el capacitor, que está cargado por completo ($q = C\mathscr{E}$). Ya no fluirá más carga, salvo que se operen cambios en el circuito. Repase la obtención de las ecuaciones 31-27 y 31-28 y estudie la figura 31-20 teniendo en mente los argumentos cualitativos de este párrafo.

PROBLEMA RESUELTO 31-8. Un resistor R (= 6.2 MΩ) y un capacitor C (= 2.4 μF) están conectados en serie, y una batería de 12 V con una resistencia interna despreciable está conectada a su combinación. *a)* ¿Cuál es la constante de tiempo capacitiva del circuito? *b)* ¿En qué tiempo después de conectar la batería la diferencia de potencial en el capacitor es de 5.6 V?

Solución *a)* Con base en la ecuación 31-29,

$$\tau_C = RC = (6.2 \times 10^6\ \Omega)(2.4 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 15\ \text{s}.$$

b) La diferencia de potencial en el capacitor es $\Delta V_C = q/C$, expresión que según la ecuación 31-27 puede escribirse

$$\Delta V_C = \frac{q}{C} = \mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}).$$

Resolviendo para t obtenemos (por medio de $\tau_C = RC$)

$$t = -\tau_C \ln\left(1 - \frac{\Delta V_C}{\mathscr{E}}\right)$$

$$= -(15\ \text{s}) \ln\left(1 - \frac{5.6\ \text{V}}{12\ \text{V}}\right) = 9.4\ \text{s}.$$

Como vimos con anterioridad, al cabo de un tiempo τ_C (= 15 s), la diferencia de potencial en el capacitor es $0.63\mathscr{E} = 7.6$ V. Es razonable que, en un tiempo más breve de 9.4 s, la diferencia de potencial en el capacitor alcance apenas el valor más pequeño de 5.6 V.

Descarga de un capacitor

Suponga ahora que el interruptor S en la figura 31-20 ha estado en la posición *a* durante un tiempo mucho mayor que RC. En la práctica el capacitor está totalmente cargado, sin que fluya carga alguna. Después se pone el interruptor S en la posición *b*. ¿Cómo varían con el tiempo la carga del capacitor y la corriente?

Con el interruptor S cerrado en *b*, el capacitor descarga a través del resistor. No aparece fuerza electromotriz en el circuito y la ecuación 31-24 referente al circuito, con $\mathscr{E} = 0$, se convierte simplemente en

$$iR + \frac{q}{C} = 0. \tag{31-30}$$

Si hacemos $i = dq/dt$, podemos escribir la ecuación del circuito (compárela con la Ec. 31-25) así

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{31-31}$$

La solución podrá obtenerla fácilmente por integración (luego de escribir $dq/q = -dt/RC$) y verificarla por sustitución, la solución es

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C}, \tag{31-32}$$

donde q_0 es la carga inicial del capacitor ($= \mathscr{E}C$, en nuestro caso). La constante de tiempo capacitiva τ_C ($= RC$), aparece en esta expresión relativa a un capacitor descargándose y también en la de un capacitor cargándose (Ec. 31-27). Veremos que en un tiempo tal que $t = \tau_C = RC$, la carga del capacitor se reduce a $q_0 e^{-1}$, que representa aproximadamente un 37% de la carga inicial q_0.

Al derivar la ecuación 31-32 encontramos la corriente durante la descarga,

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/\tau_C}. \tag{31-33}$$

El signo negativo indica que la corriente sigue dirección contraria a la de la figura 31-20. Y así debería ser, puesto que el capacitor no está cargando sino descargando. Si al inicio se carga por completo, $q_0 = C\mathscr{E}$ y entonces podemos escribir la ecuación 31-33 así

$$i = -\frac{\mathscr{E}}{R} e^{-t/\tau_C}. \tag{31-34}$$

La corriente inicial, calculada haciendo $t = 0$ en la ecuación 31-34, es $-\mathscr{E}/R$. Ello resulta razonable, pues la diferencia de potencial inicial en el resistor es $\mathscr{E}$.

Las diferencias de potencial entre R y C, que son respectivamente proporcionales a i y q, pueden medirse otra vez como se indicó en la figura 31-20. Los resultados habituales se muestran en la figura 31-22. Nótese que, como se muestra en la ecuación 31-32, ΔV_C ($= q/C$) cae exponencialmente de su

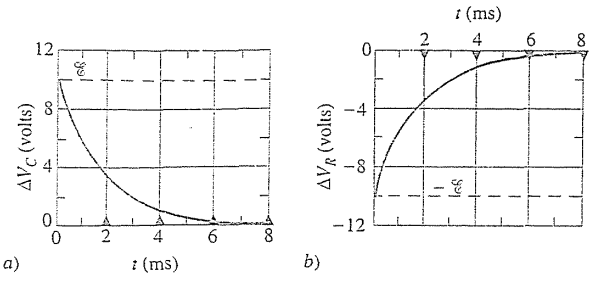


FIGURA 31-22. *a*) Después de cargar el capacitor por completo, el interruptor de la figura 31-20 se pasa de *a* a *b*, que tomamos para definir un nuevo $t = 0$. La diferencia de potencial en el capacitor decrece exponencialmente a cero, conforme el capacitor va descargándose. *b*) Cuando ponemos el interruptor inicialmente en *b*, la diferencia de potencial en el resistor es negativa comparada con su valor durante el proceso de carga de la figura 31-21. A medida que el capacitor descarga, la magnitud de la corriente cae exponencialmente a cero y lo mismo sucede con el potencial en el resistor.

valor máximo, lo cual sucede cuando $t = 0$, mientras que ΔV_R $(= iR)$ es negativa y crece exponencialmente hasta llegar a cero. Nótese asimismo que $\Delta V_C + \Delta V_R = 0$, tal como lo exige la ecuación 31-30.

PROBLEMA RESUELTO 31-9. Un capacitor C descarga a través del resistor R. *a*) ¿Después de cuántas constantes de tiempo se reduce la carga a la mitad de su valor inicial? *b*) ¿Después de cuantas constantes de tiempo se reduce la energía almacenada a la mitad de su valor inicial?

Solución *a*) La carga del capacitor varía conforme a la ecuación 31-32,

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C},$$

donde q_0 es la carga inicial. Buscamos el tiempo t en que $q = \frac{1}{2}q_0$, o sea

$$\tfrac{1}{2}q_0 = q_0 e^{-t/\tau_C}.$$

Cancelamos q_0 y tomamos el logaritmo natural en ambos lados; así obtenemos

$$-\ln 2 = -\frac{t}{\tau_C}$$

o bien

$$t = (\ln 2)\tau_C = 0.69\tau_C.$$

La carga se reduce a la mitad de su valor inicial tras 0.69 constantes de tiempo.

b) La energía almacenada en el capacitor es

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} e^{-2t/\tau_C} = U_0 e^{-2t/\tau_C},$$

donde U_0 es la energía almacenada inicial. El tiempo en que $U = \frac{1}{2}U_0$ se obtiene de

$$\tfrac{1}{2}U_0 = U_0 e^{-2t/\tau_C}.$$

Al cancelar U_0 y al tomar el logaritmo en ambos lados, obtenemos

$$-\ln 2 = -2t/\tau_C$$

o

$$t = \tau_C \frac{\ln 2}{2} = 0.35\tau_C.$$

La energía almacenada se reduce a la mitad de su valor inicial después que han transcurrido 0.35 constantes de tiempo. Esto sucede sin importar cuál sea la energía inicial almacenada. El tiempo $(0.69\tau_C)$ necesario para que la *carga* disminuya a la mitad de su valor inicial es mayor que el tiempo requerido $(0.35\tau_C)$ para que la energía disminuya a la mitad de su valor inicial. ¿Por qué?

OPCIÓN MÚLTIPLE

31-1 Corriente eléctrica

1. La regla de nudos es consecuencia directa de
   A) la ley de Newton.
   B) la conservación del momento.
   C) la conservación de la energía.
   D) la conservación de la carga.
2. La figura 31-23 contiene una red de alambres que llevan varias corrientes. ¿Cuál es la corriente que pasa por A?
   A) 1 A B) 2 A C) 3 A D) 9 A
   E) 11 A

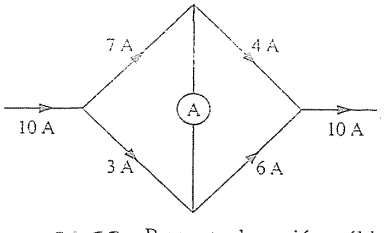


FIGURA 31-23. Pregunta de opción múltiple 2.

3. La figura 31-24 contiene una red de alambres que llevan varias corrientes. ¿Cuál es la corriente que pasa por A?
   A) 1 A B) 2 A C) 6 A D) 8 A
   E) No se cuenta con suficiente información.

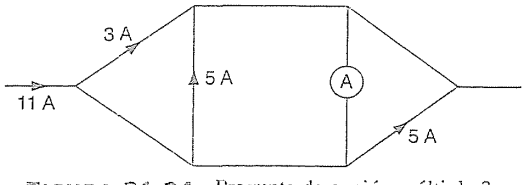


FIGURA 31-24. Pregunta de opción múltiple 3.

31-2 Fuerza electromotriz

4. ¿Cuáles son las unidades de $\mathscr{E}$, la fuerza electromotriz?
   A) Fems B) Joules C) Volts D) Newtons
5. La función de la fuente de fuerza electromotriz en un circuito consiste en
   A) suministrarle electrones al circuito.
   B) elevar el potencial de los electrones.

C) disminuir el potencial de los electrones.
D) aumentar la rapidez de los electrones acelerándolos.

31-3 Análisis de circuitos

6. La regla de la malla es consecuencia directa de
   A) la segunda ley de Newton.
   B) la conservación del momento.
   C) la conservación de la energía.
   D) la conservación de la carga.
7. Un resistor fijo R está en serie con un resistor variable y con una batería ideal. Al inicio las resistencias son iguales.
   a) A medida que disminuye la resistencia del resistor variable, la corriente que pasa por él
   A) aumenta. B) disminuye.
   C) no se altera.
   D) no se puede determinar sin más información.
   b) Al disminuir la resistencia del resistor variable, la diferencia de potencial en el resistor variable
   A) aumenta. B) disminuye.
   C) no se altera.
   D) no se puede determinar sin más información.

31-4 Campos eléctricos en los circuitos

31-5 Resistores en serie y en paralelo

8. Dos resistores R_1 y R_2 están conectados en serie, Suponga que $R_1 < R_2$. La resistencia equivalente de este arreglo es R, donde
   A) $R < R_1/2$. B) $R_1/2 < R < R_1$.
   C) $R_1 < R < R_2$. D) $R_2 < R < 2R_2$.
   E) $2R_2 < R$.
9. Dos resistores R_1 y R_2 están conectados en paralelo. Suponga que $R_1 < R_2$. La resistencia equivalente de este arreglo es R, donde
   A) $R < R_1/2$. B) $R_1/2 < R < R_1$.
   C) $R_1 < R < R_2$. D) $R_2 < R < 2R_2$.
   E) $2R_2 < R$.
10. ¿Cuál es el número mínimo de resistores necesario para construir una red que *no* pueda analizarse a fin de obtener la resistencia equivalente, tratando las resistencia en paralelo o en serie conforme a las ecuaciones 31-13 y 31-19?
    A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

31-6 Transferencias de energía en un circuito eléctrico

11. Una lámpara estándar en Estados Unidos es la de 60 watts, diseñada para funcionar en un circuito 120 volts. Durante un oscurecimiento parcial se observó que la salida de potencia de la lámpara se redujo a 30 W. ¿A qué porcentaje disminuyó el valor original del voltaje?
    A) 75% B) 70% C) 50% D) 33%
12. Un resistor fijo R está en serie con un resistor variable y con una batería real (la resistencia interna no es insignificante). Inicialmente ambos resistores poseen la misma resistencia.
    a) A medida que se disminuye la resistencia del resistor variable, la rapidez con que se transfiere energía al resistor fijo
    A) aumenta. B) disminuye.
    C) no se altera.
    D) no se puede determinar sin más información.
    b) A medida que se reduce la resistencia del resistor variable, la rapidez con que se le transfiere energía
    A) aumenta. B) disminuye.
    C) no se altera.
    D) no se puede determinar sin más información.
13. Un resistor fijo está en paralelo con un resistor variable: ambos están conectados a una batería real (la resistencia interna no es insignificante). Al inicio ambos poseen la misma resistencia.
    a) A medida que se reduce la resistencia del resistor variable, la corriente que pasa por el resistor fijo
    A) aumenta. B) disminuye.
    C) no se altera.
    D) no se puede determinar sin más información.
    b) A medida que se reduce la resistencia del resistor variable, la rapidez con que se transfiere energía al resistor fijo
    A) aumenta. B) disminuye.
    C) no se altera.
    D) no se puede determinar sin más información.
    c) A medida que se reduce la resistencia del resistor variable, la rapidez con que se le transfiere energía
    A) aumenta. B) disminuye.
    C) no se altera.
    D) no se puede determinar sin más información.

31-7 Circuitos *RC*

14. Un resistor, un capacitor, un interruptor y una batería ideal están en serie. Al inicio el capacitor no está cargado. Después se cierra el interruptor y esto permite que la corriente fluya.
    a) Mientras la corriente fluye, la diferencia de potencial en el resistor
    A) aumenta. B) disminuye. C) está fija.
    b) Mientras la corriente fluye, la diferencia de potencial en el capacitor
    A) aumenta. B) disminuye. C) está fija.
15. Se carga un capacitor conectándolo en serie a un resistor y a una batería ideal. Ésta suministra energía a una rapidez $P(t)$, la energía interna del resistor aumenta a una velocidad $P_R(t)$ y el capacitor almacena energía con una velocidad de $P_C(t)$. ¿Qué puede concluirse respecto a la relación entre $P_R(t)$ y $P_C(t)$?
    A) $P_R(t) > P_C(t)$ en todos los tiempos t mientras carga.
    B) $P_R(t) = P_C(t)$ en todos los tiempos t mientras carga.
    C) $P_R(t) < P_C(t)$ en todos los tiempos t mientras carga.
    D) $P_R(t) > P_C(t)$ sólo al inicio de la carga.
    E) $P_R(t) < P_C(t)$ sólo al inicio de la carga.

PREGUNTAS

1. ¿La dirección de la fuerza electromotriz suministrada por una batería depende de la que sigue la corriente al pasar por ella?
2. En la figura 31-4, explique qué cambios ocurrirían si aumentáramos la masa m en una cantidad tal que el "motor" invirtiera la dirección y se convirtiera en "generador", es decir, en una fuente de fuerza electromotriz.
3. Explique la afirmación de que el método de energía y la regla de la malla con que se resuelven los circuitos son perfectamente equivalentes.
4. Diseñe un método para medir la fuerza electromotriz y la resistencia interna de una batería.
5. ¿Cuál es el origen de la resistencia interna de una batería? ¿Depende de su edad y de su tamaño?

6. Con un medio externo disminuye la corriente que atraviesa una batería de fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ y de resistencia interna r. ¿Necesariamente se reduce o aumenta la diferencia de potencial entre sus terminales? Explique.
7. ¿Cómo podría calcular ΔV_{ab} en la figura 31-8*a*, siguiendo una trayectoria de a a b que no se encuentre en el circuito conductor?
8. Una lámpara de 25 W y de 120 V ilumina con brillantez normal cuando se conecta a un banco de baterías. Una lámpara de 500 W y de 120 V ilumina tenuemente cuando está conectada al mismo banco. ¿A qué se debe ello?
9. ¿En qué circunstancias puede exceder su fuerza electromotriz una diferencia terminal de potencial?
10. Los automóviles están equipados generalmente con un sistema eléctrico de 12 V. Hace años se empleaba un sistema de 6 V. ¿A qué obedeció el cambio? ¿Y por qué no se usa un sistema de 24 V?
11. La regla de la espira se funda en el principio de conservación de la energía y la de la unión se basa en el principio de conservación de la carga. Explique cómo ambas reglas se fundan en esos dos principios.
12. ¿En qué circunstancias querrá conectar las baterías en paralelo? ¿Y en serie?
13. Compare y contraste las fórmulas en el caso de valores equivalentes de combinaciones en serie y en paralelo de *a*) capacitores y *b*) de resistores.
14. ¿En qué circunstancias querrá conectar los resistores en paralelo? ¿Y en serie?
15. ¿Qué diferencia hay entre una fuerza electromotriz y una diferencia de potencial?
16. En relación con la figura 31-10, utiliza un argumento cualitativo para convencerse de que i_2 se dibujó en la dirección equivocada.
17. ¿Se aplican las reglas de nudo y de la malla a un circuito que contenga un capacitor?
18. Demuestre que el producto RC en la ecuación 31-29 posee las dimensiones de tiempo, es decir, 1 segundo = 1 ohm × 1 farad.
19. Un capacitor, un resistor y una batería están conectados en serie. La carga que el capacitor almacena no se ve afectada por la resistencia del resistor. ¿Qué función cumple entonces el resistor?
20. Explique por qué, en el problema resuelto 31-9, la energía almacenada se reduce a la mitad de su valor inicial más rápidamente que la carga.
21. El destello de la lámpara de una cámara fotográfica es producido por la descarga de un capacitor a través de ella. ¿Por qué no conectamos el flash directamente a la fuente de alimentación con que se carga el capacitor?
22. ¿Depende del valor de la fuerza electromotriz aplicada el tiempo que una carga de un capacitor en un circuito RC tarda en acumular cierta fracción de su valor final? ¿Depende de ella el tiempo necesario para que la carga cambie en cierta cantidad?
23. Se conecta un capacitor a las terminales de una batería. ¿La carga que finalmente aparece en las placas del capacitor depende del valor de su resistencia interna?
24. Invente un método que permita utilizar un circuito RC para medir resistencias muy altas.
25. En la figura 31-20 suponga que el interruptor S se cierra en a. Explique por qué, como lo predice la ecuación 31-28 la corriente en R debería ser $\mathscr{E}/R$, dado que la terminal negativa no está conectada a la resistencia R.
26. En la figura 31-20 suponga que el interruptor S está cerrado en a. ¿No aumenta instantáneamente a $q = C\mathscr{E}$ la carga en el capacitor C? Después de todo, la terminal positiva de la batería está conectada a una placa del capacitor y la terminal negativa a la otra.
27. ¿Qué características especiales debe reunir un alambre de calentamiento?
28. La ecuación 31-21 parece indicar que la rapidez con que crece la energía interna en un resistor se reduce si se disminuye la resistencia; la ecuación 31-22 parece indicar lo contrario. ¿Cómo explica usted esta paradoja?
29. ¿Por qué las compañías eléctricas reducen el voltaje en horas de gran demanda? ¿Qué es lo que ahorran?
30. ¿Es la resistencia del filamento mayor o menor en una lámpara de 500 W que en una de 100 W? Ambas están diseñadas para operar a 120 V.
31. Cinco alambres de la misma longitud y diámetro se conectan uno a la vez entre dos puntos mantenidos a una diferencia de potencial constante. ¿Se generará energía interna con rapidez mayor en el alambre de *a*) la resistencia más pequeña o *b*) la resistencia más grande?
32. ¿Por qué a largas distancias es mejor enviar 10 MW de potencia eléctrica a 10 kV que a 220 V?

EJERCICIOS

31-1 Corriente eléctrica

31-2 Fuerza electromotriz

1. Se genera una corriente de 5.12 A en un circuito externo mediante una batería de 6.00 V durante 5.75 min. ¿En cuánto se reduce la energía química de la batería?
2. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza una fuente de 12.0 V de fuerza electromotriz al dirigirse de la terminal positiva a la negativa? *b*) Si 3.40×10^{18} electrones pasan por segundo, ¿qué salida de potencia tiene la fuente?
3. Cierto acumulador de 12 V para automóvil puede "bombear" una carga total de 125 A · h antes de agotarse. Suponiendo que la diferencia de potencial entre las terminales permanece constante, ¿cuánto tiempo puede suministrar energía con un valor de 110 W?
4. Una batería estándar de linterna puede suministrar aproximadamente 2.0 W · h de energía antes de agotarse. *a*) Si una batería cuesta 80 centavos de dólar, ¿cuánto costará operar una lámpara de 100 W durante 8.0 h utilizando baterías? *b*) ¿Cuál es el costo si se usa la potencia suministrada por una compañía eléctrica, a 12 centavos por kW · h?

31-3 Análisis de circuitos

5. En la figura 31-25 el potencial en el punto P es de 100 V. ¿Cuál es el potencial en el punto Q?

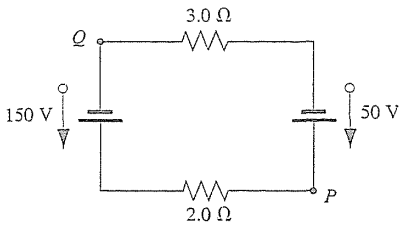


FIGURA 31-25. Ejercicio 5.

6. Un medidor de gasolina para automóvil se muestra esquemáticamente en la figura 31-26. El indicador (en el tablero de instrumentos) tiene una resistencia de 10 Ω. La unidad del tanque es simplemente un flotador conectado a un resistor que tiene una resistencia de 140 Ω cuando el tanque está vacío, de 20 Ω cuando está lleno y que varía linealmente con el volumen de gasolina. Calcule la corriente en el circuito cuando el tanque está *a*) vacío, *b*) medio lleno y *c*) lleno.

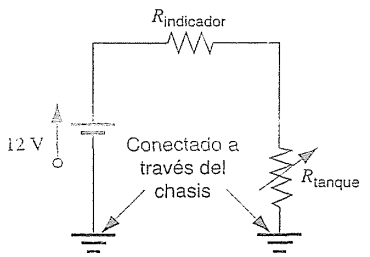


FIGURA 31-26. Ejercicio 6.

7. *a*) En la figura 31-27, ¿qué valor debe tener R para que la corriente del circuito sea 50 mA? Suponga que $\mathscr{E}_1 = 2.0$ V, $\mathscr{E}2 = 3.0$ V y $r_1 = r_2 = 3.0\ \Omega$. *b*) ¿Con qué rapidez aparece la energía interna en R?

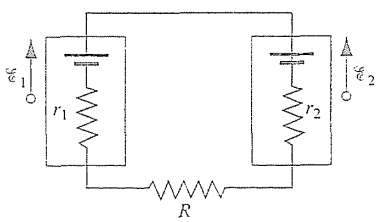


FIGURA 31-27. Ejercicio 7.

8. La corriente en un circuito de malla simple es 5.0 A. Cuando se coloca en serie una resistencia adicional de 2.0 Ω, la corriente se reduce a 4.0 A. ¿Cuál es la resistencia del circuito original?
9. La sección del circuito AB (Fig. 31-28) absorbe 53.0 W de potencia cuando una corriente $i = 1.20$ A pasa por ella en la dirección indicada. *a*) Determine la diferencia de potencial entre A y B. *b*) Si el elemento C no tiene resistencia interna, ¿cuál es su fuerza electromotriz? *c*) ¿Cuál terminal, derecha o izquierda, es positiva?

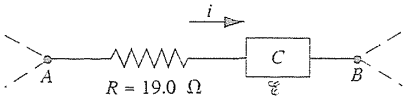


FIGURA 31-28. Ejercicio 9.

10. Debe generarse energía interna en un resistor de 108 mΩ con un valor de 9.88 W conectándolo a una batería cuya fuerza electromotriz es de 1.50 V. *a*) ¿Qué resistencia interna tiene la batería? *b*) ¿Qué diferencia de potencial existe en el resistor?
11. ¿Qué corriente, en función de $\mathscr{E}$ y de R, indica el amperímetro A en la figura 31-29? Suponga que A tiene resistencia cero.

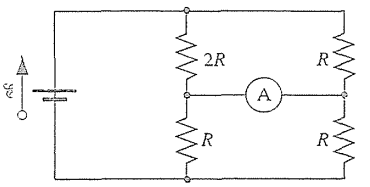
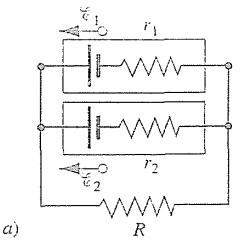


FIGURA 31-29. Ejercicio 11.

12. Recibe usted dos baterías cuyos valores de fuerza electromotriz son $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ y cuyas resistencias internas son r_1 y r_2. Pueden estar conectadas *a*) en paralelo o *b*) en serie; sirven para crear una corriente en el resistor R, como se muestra en la figura 31-30. Obtenga expresiones referentes a la corriente en R con ambos métodos de conexión.



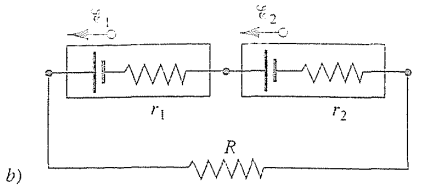


FIGURA 31-30. Ejercicio 12.

13. *a*) Calcule la corriente que pasa por las fuentes de fuerza electromotriz de la figura 31-31. *b*) Calcule $V_b - V_a$. Suponga que $R_1 = 1.20\ \Omega$, $R_2 = 2.30\ \Omega$, $\mathscr{E}_1 = 2.00$ V, $\mathscr{E}_2 = 3.80$ V y $\mathscr{E}_3 = 5.00$ V.

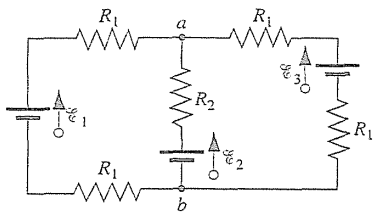


FIGURA 31-31. Ejercicio 13.

14. *a*) En el circuito de la figura 31-8, demuestre que la potencia suministrada a R como energía interna es máxima cuando R es igual a la resistencia interna r de la batería. *b*) Demuestre que esta potencia máxima es $P = \mathscr{E}^2/4r$.
15. Una batería con una fuerza electromotriz $\mathscr{E} = 2.0$ V y con una resistencia interna $r = 0.50\ \Omega$ suministra energía a un motor. Éste levanta un objeto de 2.0 n con una velocidad constante $v = 0.50$ m/s. Suponiendo que no se produzcan pérdidas de potencia, calcule *a*) la corriente i del circuito y *b*) la diferencia de potencial ΔV en las terminales del motor. *c*) Explique el hecho de que el problema tiene dos soluciones.

31-4 Campos eléctricos en los circuitos
31-5 Resistores en serie y en paralelo

16. Cuatro resistores de 18 Ω están conectados en paralelo a una batería de 27 V. ¿Qué corriente pasa por ella?
17. Usando sólo dos resistores, cada uno en serie o en paralelo, puede obtener resistencias de 3.0 Ω, 4.0 Ω, 12 Ω y 16 Ω. ¿Qué resistencia poseen los resistores?
18. En la figura 31-32 calcule la resistencia equivalente entre los puntos *a*) A y B, *b*) A y C, y *c*) B y C.

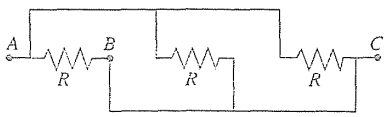


FIGURA 31-32. Ejercicio 18.

19. Un circuito que contiene cinco resistores conectados a una batería de 12 V se muestra en la figura 31-33. Calcule la diferencia de potencial en el resistor de 5.0 Ω.

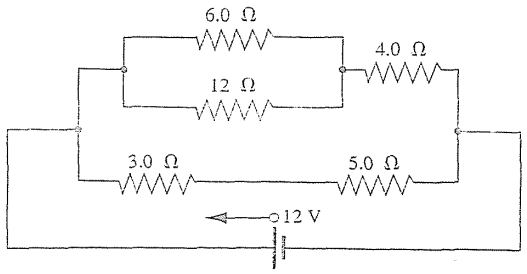


FIGURA 31-33. Ejercicio 19.

20. Una línea de energía de 120 V está protegida por un fusible de 15 A. ¿Cuál es el número máximo de lámparas de 500 W que en esta línea puede operarse simultáneamente en paralelo?
21. Dos resistores R_1 y R_2 pueden conectarse en serie o en paralelo a una batería (sin resistencia) con una fuerza electromotriz $\mathscr{E}$. Queremos que la rapidez de transferencia de energía interna de la combinación en paralelo sea cinco veces mayor que la de la combinación en serie. Si $R_1 = 100\ \Omega$, ¿cuál es R_2?
22. Recibe varios resistores de 10 Ω, capaces de disipar apenas 1.0 W. ¿Cuál es el mínimo número de ellos que necesita para combinar en serie o en paralelo para obtener un resistor de 10 Ω capaz de disipar 5.0 W, por lo menos?
23. *a*) En la figura 31-34 obtenga la resistencia equivalente de la red mostrada. *b*) Calcule la corriente en cada resistor. Haga $R_1 = 112\ \Omega$, $R_2 = 42.0\ \Omega$, $R_3 = 61.6\ \Omega$, $R_4 = 75.0\ \Omega$ y $\mathscr{E} = 6.22$ V.

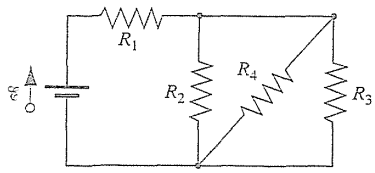


FIGURA 31-34. Ejercicio 23.

24. En el circuito de la figura 31-35, $\mathscr{E}$, R_1 y R_2 tienen valores constantes pero es posible variar R. Encuentre una expresión de R que origine la máxima disipación de potencia en ese resistor.

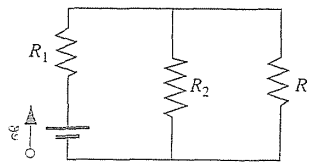


FIGURA 31-35. Ejercicio 24.

25. En la figura 31-36 calcule la resistencia equivalente entre los puntos *a*) F y H y *b*) entre F y G.

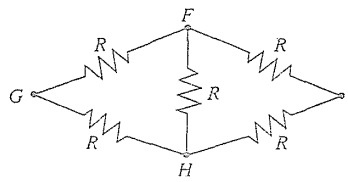


FIGURA 31-36. Ejercicio 25.

26. Un divisor de voltaje consta de dos resistores en serie. La diferencia de potencial aplicada entre ellos es 12 V, y la del segundo resistor, 2.4 V. Determine las resistencias, suponiendo que la corriente que fluye por ambos es 1 mA.

27. Diseñe un divisor de voltaje que introduzca 1.5 V y que libere aproximadamente 0.95 ± 0.01 V, empleando sólo valores estándar de los resistores.
28. Una parte de un arreglo infinito de resistores idénticos de 1 $\mu\Omega$ se muestra en la figura 31-37. Una batería está conectada en dos uniones distantes. Demuestre que el potencial en cualquiera de ellas es el promedio del de las cuatro más cercanas. Este resultado le servirá para resolver el problema por computadora 1.

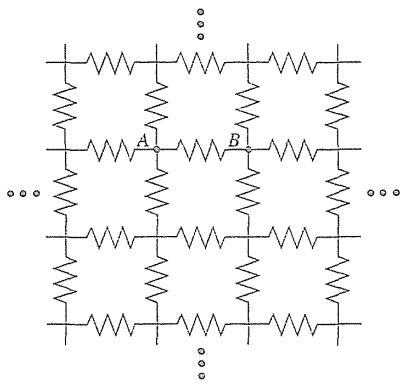


FIGURA 31-37. Ejercicio 28 y problema 1 para resolver por computadora.

31-6 Transferencias de energía en un circuito eléctrico

29. Una radio portátil de 9.0 V y 7.5 W, de un alumno estuvo encendida desde las 9 de la noche hasta las 3 de la mañana. ¿Cuánta energía pasa por los alambres? Y, ¿cuánta carga pasó por ellos?
30. Los faros de un automóvil en movimiento extraen 9.7 A de un alternador de 12 V, que es activado por el motor. Suponga que el alternador tiene una eficiencia del 82%; calcule la potencia en H.P. que debe producir el motor para encender los faros.
31. Un calentador de espacio, que opera con una línea de 120 V, tiene una resistencia caliente de 14.0 Ω. *a)* ¿Con qué rapidez la energía eléctrica se convierte en energía interna? *b)* Con 5.22¢/kW · h, ¿cuánto cuesta operarlo durante 6 h y 25 minutos?
32. La figura 31-38 muestra una batería conectada a un resistor uniforme R_0. Un contacto deslizante puede moverse por el resistor desde $x = 0$ a la izquierda hasta $x = 10$ cm a la derecha. Encuentre una expresión correspondiente a la energía disipada en el resistor R en función de x. Grafique la función cuando $\mathscr{E} = 50$ V, $R = 2000\ \Omega$ y $R_0 = 100\ \Omega$.

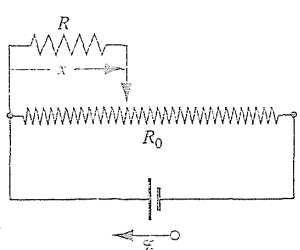


FIGURA 31-38. Ejercicio 32.

33. Dos lámparas, una de resistencia R_1 y la otra de resistencia R_2 ($< R_1$), se conectan *a)* en paralelo, y *b)* en serie. ¿Cuál es más brillante en cada caso?
34. El National Board of Fire Underwriters estableció las capacidades seguras de transporte de corriente para varios tamaños y tipos de alambre. La corriente máxima de seguridad es 25 A con alambre #10 de cobre revestido de hule. En esta corriente calcule *a)* la densidad de corriente, *b)* el campo eléctrico, *c)* la diferencia de potencial para 1000 ft de alambre y *d)* la rapidez con que se obtiene energía interna en ese alambre.
35. Una lámpara de 100 W se enchufa a una toma de 120 V. *a)* ¿Cuánto cuesta por mes (31 días) dejarla encendida? Suponga que la energía eléctrica cuesta 6¢/kW · h. *b)* ¿Qué resistencia tiene la lámpara? *c)* ¿Cuál es la corriente que pasa por la lámpara? *d)* ¿Es la resistencia diferente cuando se apaga la lámpara?
36. Un calentador de Nicromel disipa 500 W cuando la diferencia de potencial aplicada es 110 V y la temperatura del alambre es 800°C. ¿Cuánta energía disipará si mantuviéramos a 200°C la temperatura del alambre sumergiendo el calentador en un baño de aceite enfriador? La diferencia de potencial permanece igual; α para el Nicromel a 800°C es $4.0 \times 10^{-4}/\text{C}°$.
37. Un acelerador lineal de electrones produce un haz de pulso de electrones. La corriente de pulso es 485 mA y la duración del pulso es 95.0 ns. *a)* ¿Cuántos electrones se aceleran por pulso? *b)* Determine la corriente promedio de una máquina que funciona a 520 pulsos/s. *c)* Si se aceleran los electrones hasta una energía de 47.7 MeV, ¿qué valor tienen las salidas de potencia promedio y máximas del acelerador?
38. Un resistor cilíndrico de 5.12 mm de radio y de 1.96 cm de longitud está hecho de un material cuya resistividad es $3.50 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot$ m. ¿Cuáles son *a)* la densidad de corriente y *b)* la diferencia de potencial cuando la disipación de energía es 1.55 W?
39. Un elemento de calentamiento se construye manteniendo una diferencia de potencial de 75 V a lo largo de un alambre de Nicromel con una sección transversal de 2.6 mm^2 y una resistividad de $5.0 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot$ m. *a)* Si el elemento disipa 4.8 kW, ¿cuánto mide de largo? *b)* Si una diferencia de potencial de 110 V se emplea para obtener la misma salida de potencia, ¿cuál debería ser su longitud?
40. Un calentador de inmersión de 420 W se coloca en una olla que contiene 2.10 litros de agua a 18.5°C. *a)* ¿Cuánto tardará en hacer que el agua alcance la temperatura de ebullición, suponiendo que el agua absorbe 77.0% de la energía disponible? *b)* ¿Cuánto tardará en consumir la mitad del agua por ebullición?

31-7 Circuitos *RC*

41. *a)* Realice los pasos faltantes para obtener la ecuación 31-27 a partir de la ecuación 31-26. *b)* En forma similar, obtenga la ecuación 31-32 a partir de la ecuación 31-31. Nótese que $q = q_0$ (capacitor cargado) cuando $t = 0$.
42. En un circuito en serie *RC* $\mathscr{E} = 11.0$ V, $R = 1.42$ MΩ y $C = 1.80\ \mu$F. *a)* Calcule la constante de tiempo. *b)* Calcule la carga máxima que aparecerá en el capacitor durante la carga. *c)* ¿Cuánto tarda la carga en alcanzar 15.5 μC?
43. ¿Cuántas constantes de tiempo deben transcurrir antes que un capacitor en un circuito *RC* se cargue hasta el 99% de su máximo?
44. Un resistor de 15.2 kΩ y un capacitor están conectados en serie y de repente se les aplica un potencial de 13.0 V. El potencial en el capacitor llega a 5.00 V en 1.28 μs. *a)* Calcule la constante de tiempo. *b)* Calcule la capacitancia del capacitor.

45. Se descarga un circuito *RC* cerrando un interruptor en el tiempo $t = 0$. La diferencia de potencial inicial en el capacitor es 100 V. *a*) Si se disminuye la diferencia a 1.06 V al cabo de 10.0 s, calcule la constante de tiempo del circuito. *b*) ¿Cuál será la diferencia de potencial en $t = 17$ s?
46. Un controlador en una galería de juegos electrónicos es un resistor variable conectado a las placas de un capacitor de 220 nF. Se carga el capacitor a 5.00 V y luego se descarga a través del resistor. El tiempo que la diferencia de potencial en las placas tarda en disminuir a 800 mV se mide con un reloj interno. Si el intervalo de los tiempos de descarga que puede manejarse fluctúa entre 10.0 μs y 6.00 ms, ¿cuál debería ser el rango de la resistencia del resistor?
47. La figura 31-39 muestra el circuito de unas lámparas centelleantes como las que se sujetan a barriles en los sitios de construcción de las carreteras. Se conecta la lámpara fluorescente *L* en paralelo a través del capacitor *C* de un circuito *RC*. Pasa corriente por la lámpara cuando el potencial que la cruza llega al voltaje de ruptura V_L; en este caso, el capacitor descarga a través de ella y relampaguea un breve intervalo. Suponga que se necesitan dos destellos por segundo. ¿Cuál será la resistencia *R* del resistor usando una lámpara con un voltaje de ruptura de $V_L = 72$ V, una batería de 95 V y un capacitor de 15 μF?

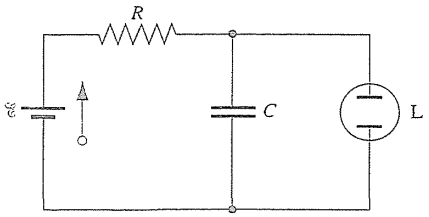


FIGURA 31-39. Ejercicio 47.

48. Un capacitor de 1.0 μF con una energía inicial almacenada de 0.50 J se descarga a través de un resistor de 1.0 MΩ. *a*) ¿Cuál es la carga inicial en el capacitor? *b*) ¿Qué corriente pasa por el resistor cuando empieza la descarga? *c*) Determine en función del tiempo ΔV_C, el voltaje del capacitor y ΔV_R, el voltaje en el resistor. *d*) Exprese en función del tiempo la rapidez con que se genera energía interna en el resistor.
49. Un resistor de 3.0 MΩ y un capacitor de 1.0 μF están conectados en un circuito de una sola malla a una fuente de fuerza electromotriz con $\mathscr{E} = 4.0$ V. En 1.0 s después de hacer la conexión, ¿con qué rapidez *a*) aumenta la carga del capacitor, *b*) se guarda energía en él, *c*) aparece energía interna en el resistor y *d*) la fuente de la fuerza electromotriz suministra energía?
50. Pruebe que, cuando el interruptor S en la figura 31-20, se pasa de *a* a *b*, toda la energía almacenada en el capacitor es transformada en energía interna dentro del resistor. Suponga que el capacitor está totalmente cargado antes de mover el interruptor.

PROBLEMAS

1. El motor de arranque de un automóvil gira lentamente y el mecánico debe decidir si reemplaza el motor, el cable o la batería. El manual del fabricante indica que la resistencia del acumulador de 12V no puede ser mayor de 0.020 Ω, que la del motor no puede ser mayor de 0.200 Ω y que la del cable no puede ser mayor de 0.040 Ω. El mecánico enciende el motor y mide 11.4 V en la batería, 3.0 V en el cable y una corriente de 50 A. ¿Cuál de ellos está defectuoso?
2. Dos baterías con la misma fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ pero con distinta resistencia interna r_1 y r_2 ($r_1 > r_2$) están conectadas a una resistencia externa *R*. *a*) Calcule el valor de *R* que hace cero la diferencia de potencial entre las terminales de una batería. *b*) ¿Cuál de las dos es?
3. Una celda solar genera una diferencia de potencial de 0.10 V cuando un resistor de 500 Ω se conecta a ella y un potencial de 0.16 V cuando se conecta un resistor de 1000 Ω. ¿Cuáles son *a*) la resistencia interna y *b*) la fuerza electromotriz de la célula solar? *c*) La superficie de la celda es 5.0 cm^2 y la intensidad de la luz que choca contra ella es 2.0 mW/cm^2. ¿Con qué eficiencia la celda convierte la energía luminosa en energía interna dentro del resistor externo de 1000 Ω?
4. Cuando se encienden las luces de un automóvil, un amperímetro en serie con ellas lee 10.0 A, y un voltímetro conectado a ellas lee 12.0 V (Fig. 31-40). Cuando se enciende el motor eléctrico de arranque, el amperímetro desciende a 8.00 A y las luces se oscurecen un poco. Si la resistencia interna de la batería es 50.0 mΩ y la del amperímetro es despreciable, ¿cuáles son *a*) la fuerza electromotriz de la batería y *b*) la corriente que cruza el motor cuando las luces están encendidas?

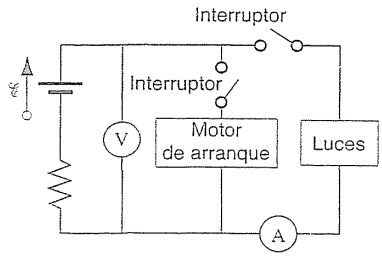


FIGURA 31-40. Problema 4.

5. Los rieles conductores *A* y *B*, con una longitud igual de 42.6 m y una superficie transversal de 91.0 cm^2 están conectados en serie. Una diferencia de potencial de 630 V se aplica en sus puntos terminales. Tienen una resistencia de 76.2 $\mu\Omega$ y 35.0 $\mu\Omega$. Determine *a*) las resistividades de los rieles, *b*) la densidad de corriente en cada uno, *c*) su intensidad de campo eléctrico y *d*) la diferencia de potencial en ellos.

6. Determine la resistencia equivalente entre los puntos x y y que aparecen en la figura 31-41. Cuatro de los resistores tienen la misma resistencia R, como se indica; el resistor "intermedio" presenta el valor $r \neq R$. (Compare este problema con el Prob. 10 del Cap. 30.)

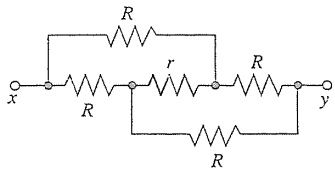


FIGURA 31-41. Problema 6.

7. Doce resistores, con una resistencia de R ohms, forman un cubo (Fig. 31-18*a*). *a*) Calcule R_{13}, la resistencia equivalente de una diagonal frontal. *b*) Calcule R_{17}, la resistencia equivalente de una diagonal del cuerpo. Consúltese el ejemplo resuelto 31-6.
8. En la figura 31-42 determine *a*) la corriente en cada resistor y *b*) la diferencia de potencial entre a y b. Suponga que $\mathscr{E}_1 = 6.0$ V, $\mathscr{E}_2 = 5.0$ V, $\mathscr{E}_3 = 4.0$ V, $R_1 = 100\ \Omega$ y $R_2 = 50\ \Omega$.

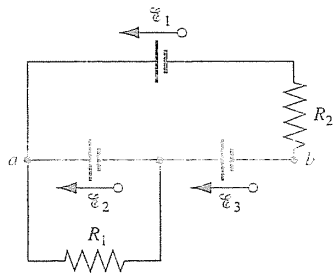


FIGURA 31-42. Problema 8.

9. Una lámpara de 120 V y de tres vías, diseñada para 100-200-300 W, quema un filamento. Funciona después con la misma intensidad en sus posiciones baja y alta del interruptor, pero no funciona en la posición intermedia. *a*) ¿Cómo se conectan los dos filamentos en el interior de la lámpara? *b*) Calcule su resistencia.
10. Se construye un ohmetro simple conectando en serie una batería de linterna eléctrica a un resistor R y a un amperímetro de 1.00 mA, como se muestra en la figura 31-43. Se ajusta R de manera que, cuando las terminales se juntan poniéndolas en cortocircuito, el medidor se desvía y alcanza su valor pleno de 1.00 mA. ¿Qué resistencia externa a través de las terminales produce una desviación *a*) de 10%, *b*) de 50% y *c*) de 90%? *d*) Si el amperímetro tiene una resistencia de 18.5 Ω y si la resistencia interna de la batería es insignificante, ¿cuál es la resistencia de R?

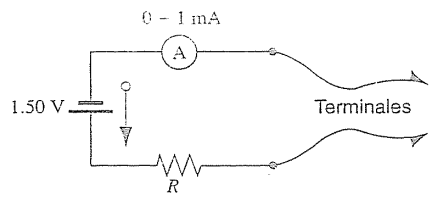


FIGURA 31-43. Problema 10.

11. En la figura 31-44 imagine un amperímetro insertado en una línea que contiene R_3. *a*) ¿Qué leerá suponiendo que $\mathscr{E} = 5.0$ V, $R_1 = 2.0\ \Omega$, $R_2 = 4.0\ \Omega$ y $R_3 = 6.0\ \Omega$? *b*) El amperímetro y la fuente de fuerza electromotriz se intercambian ahora físicamente. Demuestre que la lectura del amperímetro no se modifica. Suponga que su resistencia es cero.

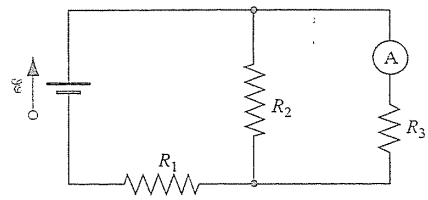


FIGURA 31-44. Problema 11.

12. En la figura 31-45, el valor de R_s ha de ajustarse hasta que los puntos a y b sean llevados exactamente al mismo potencial. (Esta condición se prueba conectando momentáneamente una amperímetro sensible entre a y b; el amperímetro no se desviará para que los puntos tengan el mismo potencial.) Demuestre que, cuando se hace el ajuste, se cumple la siguiente relación:

$$R_x = R_s(R_2/R_1).$$

Una resistencia desconocida (R_x) puede medirse a partir de una (R_s) estándar, empleando este dispositivo denominado *puente de Wheatstone*.

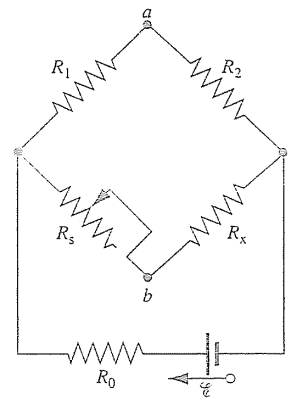


FIGURA 31-45. Problemas 12 y 13.

13. Si los puntos a y b de la figura 31-45 se conectan mediante un alambre de resistencia r, demuestre que la corriente en él es

$$i = \frac{\mathscr{E}(R_s - R_x)}{(R + 2r)(R_s + R_x) + 2R_sR_x},$$

donde $\mathscr{E}$ es la fuerza electromotriz de la batería. Suponga que R_1 y R_2 son iguales ($R_1 = R_2 = R$) y que R_0 es cero. ¿Es compatible esta ecuación con el resultado del problema 12?

14. Una bobina de alambre Nicromel que transporta corriente está sumergida en un líquido contenido en un calorímetro. Cuando su diferencia de potencial es de 12 V y la corriente que pasa por ella es de 5.2 A, el líquido hierve con rapidez constante y se evapora con una rapidez de 21 mg/s. Calcule el calor de vaporización.
15. Una bobina de resistencia, conectada a una batería externa, se coloca dentro de un cilindro adiabático que está equipado con un pistón sin fricción y que contiene un gas ideal. Una corriente $i = 240$ mA fluye por ella y su resistencia es de $R = 550\ \Omega$. ¿Con qué velocidad v debe el pistón (masa $m = 11.8$ kg) elevarse de modo que la temperatura del gas no se modifique? (Fig. 31-46.)

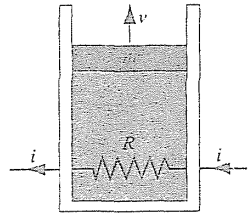


FIGURA 31-46. Problema 15.

16. Un capacitor de 32 μF está conectado a una fuente de alimentación programada. Durante el intervalo entre $t = 0$ y $t = 3$ s, el voltaje de salida de la fuente está dado por $V(t) = (6\ \text{V}) + (4\ \text{V/s})t - (2\ \text{V/s}^2)t^2$. En $t = 0.50$ s, calcule *a*) la carga del capacitor, *b*) la corriente que llega a él y *c*) la potencia de salida proveniente de la fuente de alimentación.
17. Una diferencia de potencial ΔV está conectada a un alambre de superficie transversal A, de longitud L y de conductividad σ. Queremos cambiar la diferencia de potencial aplicada y modificar el alambre, para que la energía disipada aumente en un factor de 30 y la corriente lo haga en un factor de 4. ¿Cuáles deberían ser los nuevos valores de *a*) la longitud y *b*) la superficie transversal?
18. A un capacitor C inicialmente descargado lo carga por completo una fuerza electromotriz constante $\mathscr{E}$ en serie con un resistor R. *a*) Demuestre que la energía final almacenada en él es la mitad de la suministrada por la fuerza electromotriz. *b*) Por integración directa de i^2R durante el tiempo de carga, demuestre que la energía interna disipada por el resistor es también la mitad de la energía generada por la fuerza electromotriz.
19. ¿En qué tiempo después de iniciarse la carga en el problema 18 la rapidez con que se disipa energía en el resistor es igual a la rapidez con que se almacena en el capacitor?

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Con los resultados del ejercicio 28 calcule la resistencia equivalente entre dos puntos separados por un solo resistor (como A y B) en el arreglo infinito de resistores de la figura 31-37. Este problema resulta muy fácil al resolverlo por iteración; en menos de un minuto puede programarse y resolverse en una hoja de cálculo.
2. Repita el problema 1 con un toroide en vez de una hoja infinita. Comience con un toroide hecho de una rejilla de resistores de 10×10. ¿Cuánto cambia la respuesta si se duplica el tamaño de la rejilla original? Encontrará sugerencias para plantearlo en el problema para resolver por computadora 2 del capítulo 30.

CAPÍTULO 32

EL CAMPO MAGNÉTICO

La ciencia del magnetismo *se originó en la antigüedad. Nació de la observación de que ciertas piedras naturales se atraían entre sí y también a pequeños trozos de un metal (el hierro), pero no otros como el oro o la plata. El término "magnetismo" proviene del nombre de una región (Magnesia) en Asia menor, una de las localidades donde se descubrieron esas piedras.*

Hoy el descubrimiento del magnetismo tiene aplicaciones prácticas de gran utilidad, desde los imanes pequeños del "refrigerador" hasta la cinta magnética para grabar y los discos de computadora. Los físicos usan el magnetismo de los núcleos del átomo para obtener imágenes de los órganos internos del cuerpo humano. Las naves espaciales han medido el magnetismo de la Tierra y de otros planetas para conocer la estructura interna de éstos.

En este capítulo iniciamos el estudio del magnetismo examinando el campo magnético y sus efectos en una carga eléctrica en movimiento. En el siguiente capítulo vamos a estudiar la producción de campos magnéticos por la corriente eléctrica. En capítulos posteriores continuamos analizando la estrecha relación entre la electricidad y el magnetismo, la cual se designa con el nombre común de electromagnetismo.

32-1 INTERACCIONES Y POLOS MAGNÉTICOS

Cuando comenzamos a estudiar la electrostática en el capítulo 25, describimos una observación —la atracción entre una varilla de plástico frotada con piel y una varilla de vidrio frotada con seda— que no pudimos explicar a partir de las fuerzas e interacciones que habíamos considerado hasta ese momento. La explicamos como una fuerza ejercida por las cargas eléctricas de una varilla sobre las cargas eléctricas de la otra. En capítulos subsecuentes aprendimos que muchos fenómenos muy interesantes y útiles podían entenderse en función de esta fuerza electrostática fundamental.

En el presente capítulo introducimos otra observación, la cual tendrá consecuencias tan interesantes y útiles como la anterior. Se basa en la interacción *magnética* entre objetos, cuyos efectos se exponen en los siguientes capítulos. Al iniciar este estudio, conviene tener presente muchas semejanzas importantes entre las interacciones eléctricas y magnéticas, lo mismo que las diferencias más significativas entre ellas.

A principios del siglo VIII a. de C., los griegos habían descubierto que un trozo de magnetita mineral (conocida como piedra imán o calamita, un óxido de hierro) atraía un trozo de hierro, pero sin ejercer una fuerza mensurable en la mayoría de los otros materiales. Más tarde se descubrió que un pedazo de este material podía atraer o repeler otro de magnetita, según su orientación relativa. En estos experimentos y en los que se comentan a continuación, es necesario determinar que ninguno de los dos objetos transporta una carga eléctrica neta, pues sólo así podremos estar seguros de que las nuevas fuerzas no son de origen eléctrico.

En el siglo XII ya se conocía el siguiente experimento: Un pequeño trozo de magnetita en forma de aguja se suspende de modo que gira alrededor de un eje vertical. Inclusive sin ningún otro trozo de magnetita o hierro cercano, girará espontáneamente alrededor de su eje y, con el tiempo, se detendrá con un extremo señalando hacia el polo norte geográfico de la

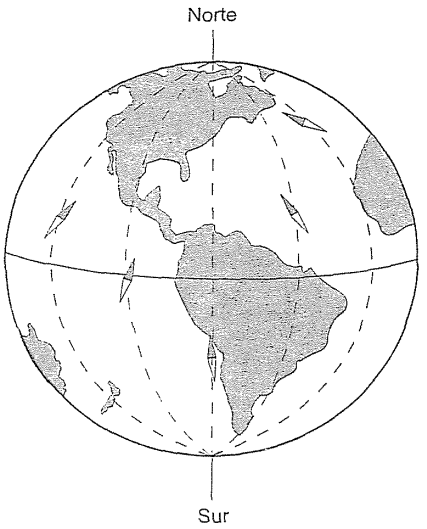


FIGURA 32-1. En cualquier lugar de la Tierra, una aguja magnética apuntará aproximadamente hacia el polo norte.

Tierra. Marquemos ese extremo pintándolo de rojo. Siempre apuntará en esa dirección sin importar dónde efectuemos el experimento (Fig. 32-1).

El aparato que hemos construido es una brújula magnética, la cual responde al campo magnético de la Tierra del mismo modo que dos trozos de magnetita ejercen fuerza uno sobre otro. Este resultado lo describimos empleando el mismo lenguaje que el de las interacciones eléctricas: un trozo de magnetita (o de la Tierra) crea un campo magnético y el otro reacciona ante él. La dirección de la brújula indica la del componente horizontal del campo magnético de la Tierra.

También podemos servirnos de nuestra brújula magnética para localizar el campo magnético de un imán de barra. En la figura 32-2 se pintó de rojo un imán de barra, porque apunta al norte si lo colgamos como una brújula. Por convención, lo llamamos "buscador del norte" o simplemente polo *norte* del imán y al extremo opuesto, polo *sur*. Cuando acercamos nuestra brújula al imán de barra, la primera gira hasta que su dirección indica la del campo magnético en ese punto, según se observa en la figura 32-2. Como veremos en el capítulo 35, el campo magnético de la Tierra se parece, en muchos aspectos, al de un imán de barra.

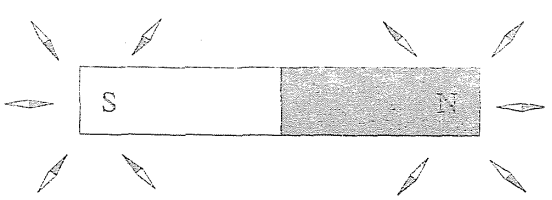


FIGURA 32-2. La aguja de la brújula muestra el campo magnético que rodea al imán de barra.

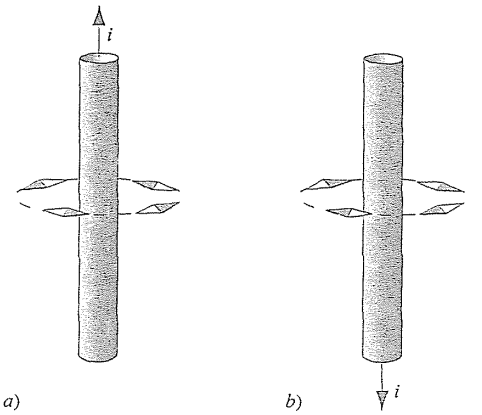


FIGURA 32-3. *a*) Una brújula muestra un campo magnético que rodea un alambre portador de corriente. *b*) Cuando se invierte la corriente, también se invierte la dirección del campo magnético.

Resultados aún más sorprendentes ocurren cuando ponemos nuestra brújula cerca de un alambre portador de corriente, como se aprecia en la figura 32-3. Si por dicho alambre fluye una corriente estable, la brújula mostrará muy claramente que existe un campo magnético, y la dirección de su aguja indicará la dirección del campo magnético cercano al alambre. Si apagamos la corriente, no habrá campo magnético. Cuando invertimos su dirección, la aguja de la brújula apunta en dirección contraria (Fig. 32-3*b*).

Las observaciones anteriores nos dan una ligera idea de la compleja y fascinante relación entre los fenómenos eléctricos (como una corriente en un alambre) y los magnéticos (la desviación de la aguja de una brújula). Más adelante en el libro explicamos otros ejemplos de esta relación, que causa efectos tan diversos como el funcionamiento de los motores eléctricos y la propagación de la luz.

Magnetismo y cargas en movimiento

Resulta tentador intentar entender los campos magnéticos aplicando el mismo procedimiento utilizado en los campos eléctricos: servirse de una carga de prueba para sondear el campo. De inmediato surgen preguntas respecto a la relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos.

1. *¿Existe en la naturaleza una "carga magnética de prueba" susceptible de usarse para determinar la intensidad y la dirección del campo magnético, del mismo modo que utilizamos una carga eléctrica de prueba para determinar el campo eléctrico?* (Como en $\vec{E} = \vec{F}/q_0$, Ec. 26-3.) La teoría permite la existencia de cargas magnéticas aisladas, pero nunca se ha encontrado una de estas cargas, a pesar de búsquedas experimentales muy intensas. Concluimos que las cargas magnéticas aisladas, conocidas como *monopolos magnéticos*, son muy raras o inexistentes; por ello las ecuaciones del electromagnetismo se escriben como si no hubiera cargas magnéticas separadas.

2. *¿Podemos usar una carga eléctrica de prueba para sondear un campo magnético?* Sí, pero sólo si la carga se

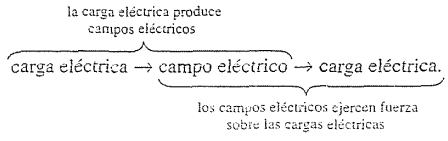
mueve en relación con la fuente de él. Un campo magnético no ejerce fuerza alguna sobre una carga eléctrica en reposo.

3. *¿Si pueden emplearse cargas eléctricas en movimiento para sondear campos magnéticos, producen también campos magnéticos?* Sí, como se explica esquemáticamente en la figura 32-3. De hecho, las cargas eléctricas en movimiento originan los campos magnéticos de la Tierra y del imán de barra (en el segundo caso, las cargas son electrones que se mueven en el átomo).

4. *En electrostática relacionamos una energía potencial eléctrica con una carga de prueba en un campo magnético (Sec. 28-2). ¿Existe una "energía potencial magnética" relacionada con una carga eléctrica de prueba en movimiento dentro de un campo magnético?* En general, la respuesta es negativa, porque las fuerzas que dependen de la velocidad no son conservativas. (En el Cap. 12 se dice que la energía potencial puede definirse únicamente en las fuerzas de conservativas.)

Del mismo modo que el espacio alrededor de un conjunto de cargas se describe como la región de un campo eléctrico, representado por un vector $\vec{E}$, también el espacio alrededor de la Tierra, de un imán de barra o de un alambre portador de corriente se describe como la región de un campo magnético,* representado por un vector $\vec{B}$. En analogía con el campo eléctrico, describimos el campo magnético mediante líneas de campo cercanas entre sí cuando el campo es grande, y lejanas cuando es pequeño. A menudo las líneas de $\vec{B}$ se parecerán a los patrones que hemos trazado antes para las líneas de $\vec{E}$; por ejemplo, en el caso de un campo uniforme o del campo de un dipolo. No obstante, conforme avance el lector, debe notar varias diferencias importantes entre las líneas de $\vec{E}$ y las de $\vec{B}$, que explicamos en los siguientes capítulos.

En electrostática, la relación básica entre las cargas eléctricas y el campo eléctrico puede representarse así



Es decir, las cargas eléctricas generan un campo eléctrico, el cual después ejerce una fuerza de origen eléctrico en otras cargas. Nos gustaría poder escribir una relación similar en el caso de los campos magnéticos:

carga magnética → campo magnético → carga magnética.

Pero como todavía no se encuentra una carga magnética aislada, hay que emplear una relación distinta:

carga eléctrica en movimiento → campo magnético → carga eléctrica en movimiento.

Dicho de otra manera, las cargas eléctricas en movimiento generan un campo magnético y, a su vez, éste ejerce una fuerza (que llamamos fuerza magnética) sobre ellas. En este capítulo vamos a explorar la segunda parte de la relación (la fuerza magnética en una carga en movimiento). En el siguiente veremos cómo los campos magnéticos son producidos por cargas eléctricas en movimiento, entre ellas las corrientes en alambres.

Polos magnéticos

Al suspender un fragmento de material magnético en la superficie terrestre, se identifica y se marca su polo norte (el extremo que apunta aproximadamente en la dirección del polo norte geográfico de la Tierra) y su polo sur (el extremo opuesto). Vamos a probar y marcar en esta forma dos trozos de material magnético. Después podremos estudiar directamente la fuerza magnética que uno de ellos ejerce sobre el otro en diversas orientaciones. En particular, es posible estudiar la fuerza que el polo norte ejerce sobre otro polo norte o polo sur. A partir de esta clase de experimentos deducimos la siguiente regla concerniente a la interacción de los polos magnéticos:

Los polos iguales se repelen, y los distintos se atraen.

En otras palabras, un polo sur atrae un polo norte, pero dos polos norte o sur se repelen. Esta regla se parece mucho a la de la interacción de las cargas eléctricas (Sec. 25-2). Al aplicarla al comportamiento de una brújula magnética en la superficie de la tierra, como se hace en la figura 32-1, concluimos que para atraer el polo norte de la brújula ha de haber un polo magnético *sur* de la Tierra cerca de su polo norte geográfico.

32-2 LA FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CARGA EN MOVIMIENTO

Con el propósito de empezar a entender las propiedades de los campos magnéticos, lo primero que haremos es estudiar la fuerza sobre una partícula cargada que se desplaza a través de un campo magnético. En electrostática, la fuerza sobre ella es $\vec{F}_E = q\vec{E}$ (Ec. 26-4). Esa expresión nos permite probar si hay o no un campo eléctrico en varios puntos de una región del espacio; si tras explicar las demás fuerzas no eléctricas (gravedad, etc.) descubrimos que la fuerza en una carga de prueba en reposo no es cero, concluiremos que debe existir un campo eléctrico en ese punto. Ahora buscaremos la expresión correspondiente para los campos magnéticos que nos permita probar la presencia de ellos, basándonos en la fuerza ejercida sobre una partícula cargada en movimiento. Sabemos de antemano que no obtendremos una expresión tan simple como la de fuerza eléctrica, porque la fuerza magnética contiene dos vectores: el campo magnético $\vec{B}$ y la velocidad $\vec{v}$.

Antes de iniciar nuestros experimentos, probamos la región en cuestión para cerciorarnos de que no haya un campo eléctrico. Esto lo hacemos colocando la carga de prueba en reposo en varios sitios y verificando que la fuerza eléctrica en la carga de prueba sea cero.

* Los vectores de campo en el magnetismo se conocen con varios nombres. A $\vec{B}$ se le asignan los siguientes nombres: *inducción magnética* o *densidad de flujo magnético;* en cambio, otro vector de campo, denotado con $\vec{H}$, puede designarse como el campo magnético. Para nosotros $\vec{B}$ es una magnitud más fundamental y por eso la llamaremos campo magnético.

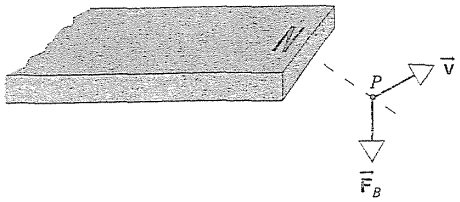


FIGURA 32-4. Una partícula cargada se desplaza con la velocidad $\vec{v}$ cerca de un imán de barra. Se ejerce una fuerza magnética $\vec{F}_B$ sobre ella. Dicha fuerza será cero si la velocidad de la partícula sigue una de las dos direcciones en la línea punteada.

Una vez demostrado que no hay una carga eléctrica que opera sobre la partícula cargada, podemos utilizar eso como un sondeo para encontrar la fuerza magnética. Escogemos un punto P cerca de una fuente de un campo magnético, como un imán de barra (Fig. 32-4). Suponemos que contamos con un dispositivo que emite partículas cargadas a través del punto P; el dispositivo nos permite seleccionar la magnitud de la velocidad de las partículas y la dirección de su movimiento. Con él efectuamos experimentos que nos permiten realizar diversas observaciones acerca de la fuerza magnética $\vec{F}_B$ que actúa sobre las partículas.

1. Al disparar partículas a través de P en varias direcciones, descubrimos que la fuerza magnética —si la hay— es perpendicular a la velocidad $\vec{v}$, como se aprecia en la figura 32-4. Sin que importe la dirección de $\vec{v}$, la fuerza magnética siempre será perpendicular a $\vec{v}$.

2. Al cambiar la dirección de $\vec{v}$ a través de P (manteniendo constante la magnitud de $\vec{v}$), observamos que la fuerza magnética es cero en una dirección particular de $\vec{v}$, indicada por la línea punteada de la figura 32-4. Cuando la velocidad es perpendicular a esta dirección, la fuerza magnética alcanza su valor máximo. Entre esas direcciones, varía como sen ϕ, donde ϕ es el ángulo entre la velocidad y la línea punteada. (Nótese que la línea punteada denota dos direcciones opuestas donde la fuerza es cero, una correspondiente a $\phi = 0$ y la otra a $\phi = 180°$.)

3. A medida que modificamos la magnitud de la velocidad, nos damos cuenta de que la magnitud de $\vec{F}_B$ varía en proporción directa.

4. También descubrimos que la magnitud de $\vec{F}_B$ es proporcional a la de la carga de prueba q y que $\vec{F}_B$ invierte la dirección cuando q cambia de signo.

A continuación definimos el campo magnético $\vec{B}$ en los siguientes términos, basándonos en las observaciones anteriores: la dirección de $\vec{B}$ en el punto P es la misma que una de las direcciones de $\vec{v}$ (cosa que especificaremos en seguida) para la cual la fuerza es cero y la magnitud de $\vec{B}$ depende de la magnitud $F_{B,\text{máx}}$ de la fuerza máxima ejercida cuando se proyecta la carga de prueba perpendicularmente a la dirección de $\vec{B}$, o sea

$$B = \frac{F_{B,\text{máx}}}{|q|v}. \tag{32-1}$$

En ángulos arbitrarios nuestras observaciones se resumen mediante la fórmula

$$F_B = |q|vB \text{ sen } \phi, \tag{32-2}$$

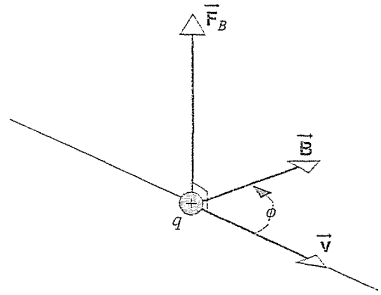


FIGURA 32-5. Una partícula con una carga positiva q se mueve con una velocidad $\vec{v}$ a través de un campo magnético $\vec{B}$ experimenta una fuerza magnética deflectora $\vec{F}_B$.

donde ϕ es el ángulo más pequeño entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Puesto que F_B, v y B son vectores, la ecuación 32-2 puede escribirse como un producto vectorial

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{32-3}$$

Al escribir $\vec{v} \times \vec{B}$ en vez de $\vec{B} \times \vec{v}$ en la ecuación 32-3, hemos especificado cuál de las dos direcciones posibles de $\vec{B}$ queremos emplear. El producto vectorial o cruz aparecerá frecuentemente en el estudio del magnetismo. Conviene revisar las propiedades del producto vectorial en el apéndice H.

La figura 32-5 contiene la relación geométrica entre los vectores $\vec{F}_B$, $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Nótese que, como siempre sucede con un producto vectorial, $\vec{F}_B$ es perpendicular al plano formado por $\vec{v}$ y $\vec{B}$. En consecuencia, $\vec{F}_B$ siempre es perpendicular a $\vec{v}$ y la fuerza magnética siempre será una fuerza lateral de desviación. Adviértase que también $\vec{F}_B$ se cancela cuando $\vec{v}$ es paralela o antiparalela a la dirección de $\vec{B}$ (entonces $\phi = 0°$ o $180°$ y $\vec{v} \times \vec{B} = 0$) y que $\vec{F}_B$ alcanza su magnitud máxima, igual a qvB, cuando $\vec{v}$ forma ángulos rectos con $\vec{B}$.

La fuerza magnética siempre es perpendicular a $\vec{v}$ y por eso no puede modificar la magnitud de $\vec{v}$, sólo su dirección. En forma equivalente, la fuerza invariablemente forma ángulos rectos con el desplazamiento de la partícula y no puede realizar trabajo en ella. De ahí que un campo magnético constante no pueda alterar la energía cinética de una partícula cargada en movimiento. (En el Cap. 34 estudiamos los campos magnéticos que varían con el tiempo y que *sí pueden* modificar la energía cinética de una partícula. En este capítulo nos ocupamos exclusivamente de los que no varían con el tiempo.)

La ecuación 32-3, que sirve de definición al campo magnético $\vec{B}$, indica tanto su magnitud como su dirección. Definimos al campo eléctrico de modo similar mediante una ecuación, $\vec{F}_E = q\vec{E}$, de tal manera que al medir la fuerza eléctrica es posible determinar la magnitud y la dirección del campo. Los campos magnéticos no pueden determinarse de modo tan simple con una sola medición. Como se muestra en la figura 32-5, no basta medir $\vec{F}_B$ para una sola $\vec{v}$ para calcular $\vec{B}$, porque la dirección de $\vec{F}_B$ no indica la de $\vec{B}$. Primero se obtiene la dirección de $\vec{B}$ (encontrando, por ejemplo, las de $\vec{v}$ donde no existe fuerza) y luego una medición adicional es suficiente para calcular su magnitud.

TABLA 32-1 Valores típicos de algunos campos magnéticos[a]

Ubicación	*Campo magnético* (T)
Cerca de la superficie de una estrella de neutrones (calculado)	10^{8}
Cerca de un imán superconductor	5
Cerca de un electroimán grande	1
Cerca de un pequeño imán de barra	10^{-2}
En la superficie terrestre	10^{-4}
En el espacio interestelar	10^{-10}
En un cuarto con protección magnética	10^{-14}

[a] Valores aproximados.

La unidad de $\vec{B}$ en el SI es la tesla (cuya abreviatura es T). De la ecuación 32-1 se deduce que

$$1 \text{ tesla} = 1 \frac{\text{newton}}{\text{coulomb} \cdot \text{metro/segundo}} = \frac{\text{newton}}{\text{amper} \cdot \text{metro}}$$

Una unidad más antigua (no perteneciente al SI) todavía en uso es el *gauss*, relacionado con la tesla por medio de

$$1 \text{ tesla} = 10^{4} \text{ gauss}.$$

La tabla 32-1 contiene algunos valores comunes de los campos magnéticos.

La figura 32-6 contiene las líneas de $\vec{B}$ en un imán de barra. Obsérvese que las líneas pasan por el imán, formando espiras cerradas. A partir del agrupamiento de líneas de campo fuera del imán cercano a sus extremos, deducimos que el campo magnético en el espacio alrededor del imán tiene su magnitud máxima allí. Observe que las líneas del campo emergen desde el polo norte del imán y convergen hacia el polo sur.

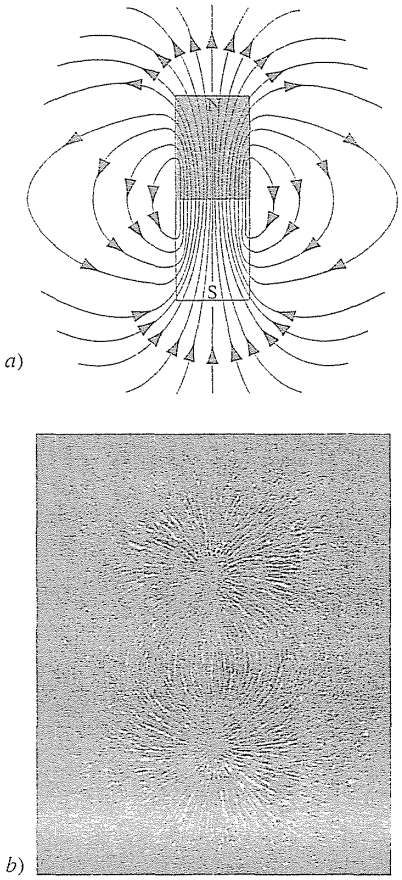


FIGURA 32-6. *a*) Líneas del campo magnético de un imán de barra. Forman espiras cerradas saliendo del imán en su polo norte y entrando en su polo sur. *b*) Podemos hacerlas visibles rociando limaduras de hierro en una hoja de papel que cubra un imán de barra.

PROBLEMA RESUELTO 32-1. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$, con una magnitud de 1.2 mT, apunta verticalmente hacia arriba en el volumen del cuarto donde usted está sentado (Fig. 32-7). Un protón con una energía cinética de 5.3 MeV se dirige horizontalmente hacia el norte, atravesando cierto punto del cuarto. ¿Qué fuerza magnética de deflexión opera sobre el protón mientras cruza el punto? El protón tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg.

Solución La fuerza magnética deflectora depende de la velocidad del protón, que puede obtenerse partiendo de $K = \frac{1}{2} mv^2$. Resolvemos para v y con ello obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(5.3 \text{ MeV})(1.60 \times 10^{-13} \text{ J/MeV})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}}$$

$$= 3.2 \times 10^{7} \text{ m/s}.$$

Entonces la ecuación 32-2 nos da

$$F_B = |q| vB \operatorname{sen} \phi$$
$$= (1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(3.2 \times 10^{7} \text{ m/s})(1.2 \times 10^{-3} \text{ T})(\operatorname{sen} 90°)$$
$$= 6.1 \times 10^{-15} \text{ N}.$$

Esta fuerza puede parecer pequeña, pero actúa sobre una partícula de masa también pequeña y produce gran aceleración, a saber:

$$a = \frac{F_B}{m} = \frac{6.1 \times 10^{-15} \text{ N}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 3.7 \times 10^{12} \text{ m/s}^2.$$

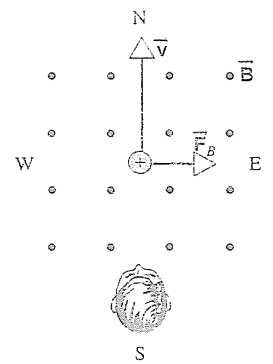


FIGURA 32-7. Problema resuelto 32-1. Vista desde arriba de un estudiante sentado en un cuarto donde un campo magnético verticalmente ascendente desvía hacia el este un protón en movimiento. (Los puntos, que representan los puntos de las flechas, simbolizan los vectores del campo que apuntan hacia afuera de la página.)

Queda por obtener la dirección de $\vec{F}_B$ cuando, como en la figura 32-7, $\vec{v}$ apunta al norte y cuando $\vec{B}$ apunta verticalmente hacia arriba. La ecuación 32-3 y la regla de la mano derecha aplicada a la dirección de los productos vectoriales (Ap. H) nos permiten concluir lo siguiente: la fuerza de deflexión $\vec{F}_B$ debe apuntar horizontalmente hacia el este, como se indica en la figura 32-7.

Si la carga de la partícula fuera negativa, la fuerza magnética de deflexión debería apuntar en dirección contraria, esto es, horizontalmente al oeste. Lo anterior lo predice automáticamente la ecuación 32-3, si sustituimos q por $-q$.

En el cálculo anterior, hemos empleado la expresión clásica (aproximada) ($K = \frac{1}{2}mv^2$) con la energía cinética del protón, y no la expresión relativista (Ec. 20-27). El criterio para utilizar sin problemas la expresión clásica es $K << mc^2$, donde mc^2 es la energía en reposo de la partícula. En este caso, $K = 5.3$ MeV, y la energía en reposo de un protón (Ap. F) es 938 MeV. Este protón pasa la prueba y se justifica utilizar la fórmula clásica $K = \frac{1}{2}mv^2$ con la energía cinética. Siempre hemos de tener presente esto cuando nos ocupemos de partículas energéticas.

Combinación de campos eléctricos y magnéticos

Si un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$ actúan sobre una partícula cargada, la fuerza total en ella puede expresarse como

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{32-4}$$

A esta fuerza se le llama *fuerza de Lorentz*. No es un nuevo tipo de fuerza; es tan sólo la suma de las fuerzas eléctrica y magnética que operan simultáneamente sobre una partícula cargada. La parte eléctrica de ella actúa sobre cualquier partícula de ese tipo, sin importar si está en reposo o en movimiento; la parte magnética actúa sólo sobre partículas cargadas en movimiento.

Una aplicación común de la fuerza de Lorentz ocurre cuando un haz de partículas con carga cruza una región donde los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí y con la velocidad de ellas. Si $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{v}$ están orientados como se muestra en la figura 32-8, la fuerza eléctrica $\vec{F}_E = q\vec{E}$ sigue la dirección contraria a la fuerza magnética $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$. Podemos ajustar los campos magnético y eléctrico hasta que la magnitud de las fuerzas sea igual, entonces la fuerza de Lorentz será cero. En términos escalares,

$$qE = qvB \tag{32-5}$$

o bien

$$v = \frac{E}{B}. \tag{32-6}$$

Por tanto, los campos cruzados $\vec{E}$ y $\vec{B}$ sirven de *selector de velocidad*: sólo las partículas con una velocidad $v = E/B$ pasan por la región no afectada por los dos campos, mientras que las que tengan otra velocidad son desviadas. Este valor de v no depende de la carga ni de la masa de las partículas.

A menudo se preparan los haces de partículas cargadas con métodos que dan una distribución de velocidades (por ejemplo, una distribución térmica como la de la Fig. 22-6). Por medio de un selector de velocidades es posible aislar las partículas con una velocidad escogida del haz. Este principio fue aplicado en 1897 por J. J. Thomson en su descubrimiento del electrón y en la medición de su razón de carga a masa. En la figura 32-9 se ofrece una versión modificada del aparato. Thomson midió primero la deflexión vertical y del haz, cuando sólo existía el campo eléctrico. Según el problema resuelto 26-6 la deflexión es

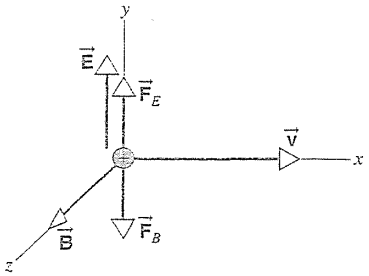


FIGURA 32-8. Una partícula con carga positiva, que pasa por una región donde hay campos eléctricos y magnéticos perpendiculares entre sí, experimenta fuerzas eléctricas y magnéticas opuestas $\vec{F}_E$ y $\vec{F}_B$.

$$y = -\frac{qEL^2}{2mv^2}. \tag{32-7}$$

En la expresión anterior, como en la figura 32-9, suponemos que la dirección positiva y es hacia arriba y que E es la *magnitud* del campo eléctrico. La deflexión y de una partícula con carga negativa es positiva en la ecuación 32-7 y en la figura 32-9.

Después se activó y se ajustó el campo magnético hasta que la deflexión del haz fue cero (equivalente a la medida en ausencia de campos). En este caso $v = E/B$ y, al resolver para la razón de carga a masa con $q = -e$, se obtiene

$$\frac{e}{m} = \frac{2yE}{B^2L^2}. \tag{32-8}$$

El valor que Thomson asignó a e/m (expresado en unidades modernas) fue 1.7×10^{11} C/kg, que concuerda bastante con el valor actual de $1.758820174 \times 10^{11}$ C/kg.

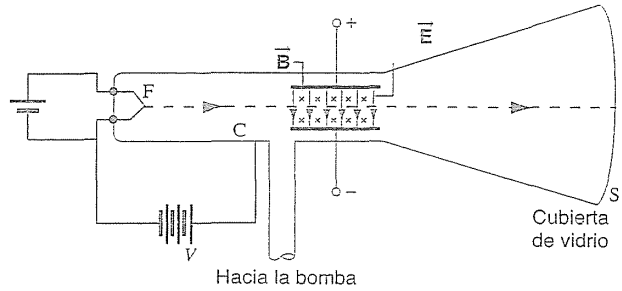


FIGURA 32-9. Versión moderna del aparato de J. J. Thomson con que se mide la razón de carga a masa del electrón. El filamento F produce un haz de electrones con una distribución de velocidades. Se crea el campo eléctrico $\vec{E}$ conectando una batería a las terminales de la placa. Se produce el campo magnético $\vec{B}$ por medio de bobinas portadoras de corriente (que no aparecen en la figura). El haz hace visible un punto donde choca contra la pantalla S. (Las cruces, que representan las colas de las flechas, simbolizan los vectores $\vec{B}$ que apuntan hacia el interior de la página.)

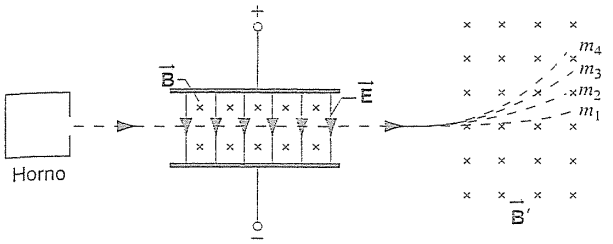


FIGURA 32-10. Diagrama esquemático de un espectrómetro de masas. Un haz de átomos ionizados que tiene una mezcla de varias masas sale del horno y entra en una región de campos perpendiculares $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Sólo los átomos con velocidades $v = E/B$ pasan sin desviarse por la región. Otro campo magnético desvía los átomos a lo largo de trayectorias circulares cuyos radios están determinados por la masa de los átomos.

Otra aplicación del selector de velocidades es el espectrómetro de masa, aparato con que se separan los iones por su masa. En este caso un haz de iones, que quizá incluya especies de distinta masa, puede obtenerse de un vapor del material calentado en un horno (Fig. 32-10). Un selector de velocidades deja pasar sólo iones de cierta velocidad y, cuando se hace pasar el haz resultante por otro campo magnético, las trayectorias de las partículas son arcos circulares (como veremos en la siguiente sección) cuyos radios dependen del momento de las partículas. Como todas llevan la misma velocidad, los radios están determinados por la masa y cada componente de masa diferente en el haz sigue una trayectoria de radio distinto. Podemos juntar los átomos y medirlos o integrarlos en un haz para experimentos ulteriores. En los problemas 5 a 8 se ofrecen detalles sobre cómo separar los iones por su masa.

32-3 CARGAS CIRCULANTES

En la figura 32-11 se muestra un haz de electrones que se desplazan por una cámara al vacío, donde hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ hacia afuera del plano de la figura. La fuerza magnética deflectora es la única importante que opera sobre los electrones. El haz sigue claramente una trayectoria circular en el plano. Vemos cómo podemos entender este comportamiento.

La fuerza magnética deflectora tiene dos propiedades que afectan las trayectorias de las partículas cargadas: 1) no altera la velocidad de las partículas y 2) siempre opera perpendicularmente a la velocidad de ellas. Son exactamente las características que se requieren para que una partícula describa un círculo a velocidad constante, como en el caso de los electrones de la figura 32-11.

Puesto que $\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{v}$, la magnitud de la fuerza magnética puede escribirse $|q|vB$, y la segunda ley de Newton con una aceleración centrípeta de v^2/r nos da

$$|q|vB = m\frac{v^2}{r} \tag{32-9}$$

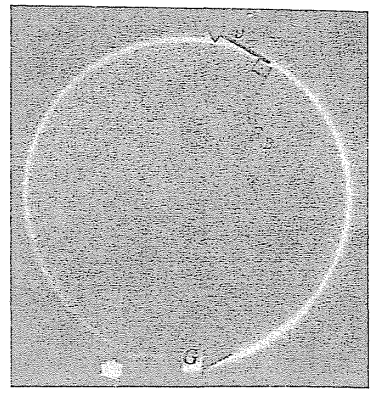


FIGURA 32-11. Electrones que giran por una cámara que contiene un gas a baja presión. Al haz lo hacen visible las colisiones con los átomos del gas. Llena la cámara un campo magnético uniforme $\vec{B}$, el cual apunta hacia fuera del plano de la figura en ángulos rectos con ella. El campo magnético $\vec{F}_B$ se dirige radialmente hacia el interior.

o bien

$$r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{p}{|q|B}. \tag{32-10}$$

Por tanto, el radio de la trayectoria depende del momento p de las partículas, de su carga y de la intensidad del campo magnético. Si la fuente de electrones en la figura 32-11 los hubiera proyectado con una velocidad menor, habrían descrito un círculo de radio más pequeño.

La velocidad angular del movimiento circular es

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{|q|B}{m}, \tag{32-11}$$

y la frecuencia correspondiente es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m}. \tag{32-12}$$

Nótese que la frecuencia asociada al movimiento circular no depende de la velocidad de la partícula (a condición de que $v \ll c$, según se verá luego). Por consiguiente, si los electrones de la figura 32-11 fueran proyectados con velocidad menor, tardarían el mismo tiempo en completar el círculo más pequeño que los más rápidos tardan en completar el círculo más grande. La frecuencia dada por la ecuación 32-12 recibe el nombre de *frecuencia de ciclotrón*, porque las partículas circulan a esta frecuencia en un tipo de acelerador de partículas denominado *ciclotrón*. La frecuencia caracteriza a una partícula que se desplaza en un campo magnético circular, del mismo modo que el sistema de péndulo oscilante o de masa–resorte posee su frecuencia típica.

El ciclotrón

El ciclotrón (Fig. 32-12) es un dispositivo que acelera haces de partículas cargadas, que podrían emplearse en los experimentos de reacción nuclear o con fines médicos. La figura 32-13 ofrece una visión esquemática de él. Consta de dos objetos metá-

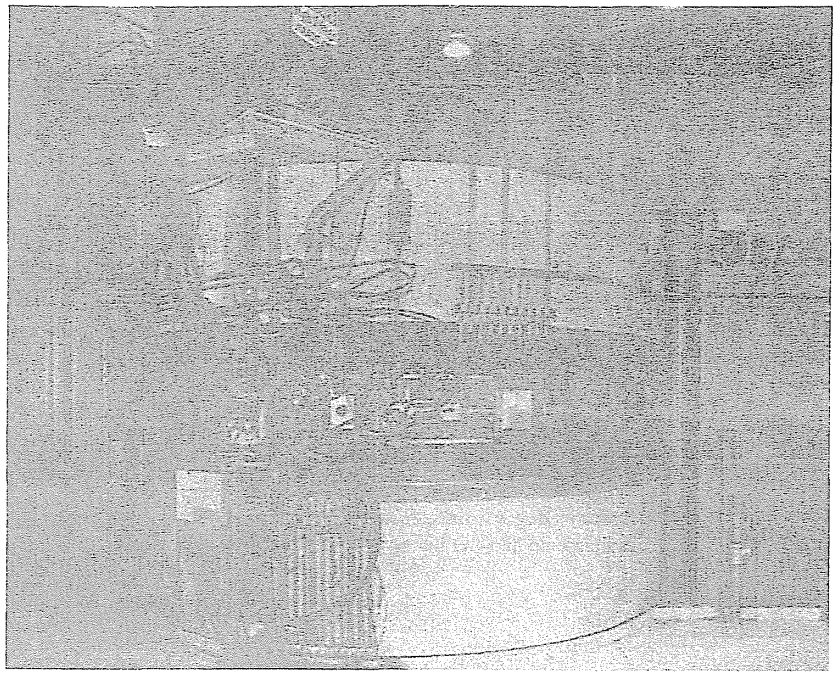


FIGURA 32-12. Acelerador ciclotrón. Los imanes se hallan en grandes cámaras en la parte superior e inferior. El haz es visible al salir del acelerador porque, como el de electrones de la figura 32-11, ioniza las moléculas del aire en las colisiones.

licos huecos denominados *electrodos huecos en forma de D.* Los electrodos están hechos de material conductor como láminas de cobre y están abiertos en sus bordes rectos. Se encuentran conectados a un oscilador eléctrico, que crea una diferencia de potencial oscilante entre ellos. Un campo magnético es perpendicular a su plano. En el centro del instrumento se halla una fuente que emite los iones que queremos acelerar.

Cuando los iones se localizan en la separación entre los electrodos en forma de D, son acelerados por la diferencia de potencial entre estos últimos. Después entran en uno de los electrodos donde no sienten campo eléctrico alguno (porque el campo eléctrico dentro de un conductor es cero), pero el campo magnético (no protegido por los electrodos de cobre) modifica su trayectoria en un semicírculo. Cuando las partículas entran después en la separación, el oscilador invierte la dirección del campo eléctrico y de nuevo se aceleran las partículas a medida que la cruzan. Moviéndose con mayor rapidez recorren una trayectoria de radio mayor, tal como lo exige la ecuación 32-10. Sin embargo, en conformidad con la ecuación 32-12, *tardan exactamente el mismo tiempo en describir el semicírculo más grande;* ésta es la característica distintiva del funcionamiento del ciclotrón. La frecuencia del oscilador eléctrico debe ajustarse para que sea igual a la del ciclotrón (determinada por el campo magnético, así como por la carga y masa de la partícula por acelerar según la Ec. 32-12); esta igualdad de frecuencias recibe el nombre de *condición de resonancia.* Si se cumple, las partículas seguirán acelerando en la separación y "deslizándose" alrededor de semicírculos: logran un reducido incremento de energía en cada ciclo hasta que se desvían y salen del acelerador.

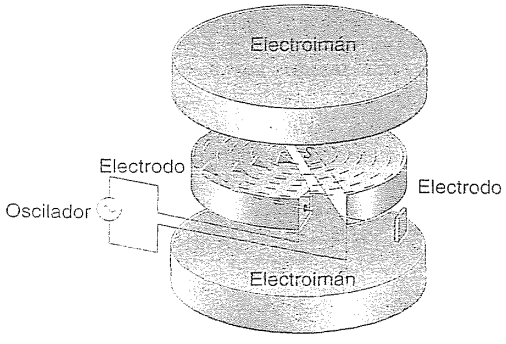


FIGURA 32-13. Elementos de un ciclotrón que muestran la fuente S de iones y los electrodos en forma de D. Los electroimanes dan origen a un campo magnético uniforme. Las partículas se mueven en espiral hacia fuera en el interior de los electrodos huecos, adquiriendo energía cada vez que cruzan la separación entre ellos.

La velocidad final de las partículas depende del radio R en que salen del acelerador. Con base en la ecuación 32-10,

$$v = \frac{|q|BR}{m}, \tag{32-13}$$

y la energía cinética correspondiente (no relativista) de la partícula es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}. \tag{32-14}$$

Los ciclotrones comunes producen haces de electrones con energías máximas en el orden de 10 MeV. Para una masa determinada, iones con cargas eléctricas salen con energías que aumentan con el cuadrado de la carga.

Sorprende un poco que la energía en la ecuación 32-14 dependa del campo magnético, que no acelera las partículas pero que tampoco dependa de la diferencia de potencial cau-

sante de la aceleración. Una diferencia mayor les da un impulso más fuerte con cada ciclo; el radio crece más rápidamente y las partículas cumplen menos ciclos antes de salir del acelerador. Con una diferencia menor de potencial, las partículas realizan más ciclos pero reciben un impulso menos fuerte cada vez. Así, la energía de las partículas no depende de la diferencia de potencial.

Es limitada la energía a la que el ciclotrón puede acelerar las partículas, ya que al alcanzar estas velocidades más altas las expresiones clásicas del momento ($p = mv$ en la Ec. 32-10) y de la energía cinética ($K = \frac{1}{2}mv^2$ en la Ec. 32-14) dejan de ser válidas y hay que usar las expresiones relativistas correspondientes del capítulo 20. A medida que las partículas empiezan a moverse con velocidades que se acercan a la de la luz, tardan más tiempo en recorrer la trayectoria circular, y por eso se pierde la condición de resonancia. En la práctica, unos 40 MeV constituyen la energía cinética más alta de los protones que pueden conseguirse con un ciclotrón ordinario, que podría tener un radio del orden de 1 m.

Para obtener las energías mayores que se necesitan en la investigación actual de la física de partículas, se utiliza un acelerador de distinto diseño, denominado *sincrotrón*. Aun cuando no se basa en la condición de resonancia del ciclotrón, se sirve de campos magnéticos para mantener las partículas en movimiento en una trayectoria circular, donde son aceleradas varias veces por un campo eléctrico. En el diseño de un sincrotrón, tanto la frecuencia del oscilador como la fuerza del campo magnético se modifican a medida que grupos de partículas son acelerados en una trayectoria circular de radio constante. Se requiere un radio de trayectoria de 1 km para conseguir una energía de 1 TeV (= 10^6 MeV), como en el caso del Fermi National Acelerator Laboratory cerca de Chicago; aproximadamente en 10 s los protones efectúan unas 400,000 revoluciones alrededor de la circunferencia de 6.3 km.

El espejo magnético

Un campo magnético no uniforme puede emplearse para atrapar una partícula cargada en una región del espacio. La figura 32-14 ofrece una visión esquemática del funcionamiento de un

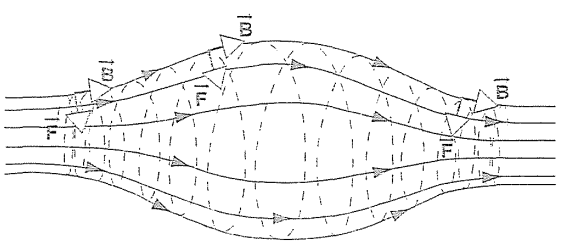


FIGURA 32-14. Partícula cargada en movimiento en espiral dentro de un campo magnético no uniforme. El campo es mayor en los extremos izquierdo y derecho de la región que en el centro. Las partículas pueden quedar atrapadas, oscilando en espiral entre las regiones del campo fuerte en los extremos. Obsérvese que en ellos los vectores de la fuerza magnética de esta "botella magnética" tienen componentes que apuntan hacia el centro; son estos componentes de la fuerza los que sirven para confinar las partículas.

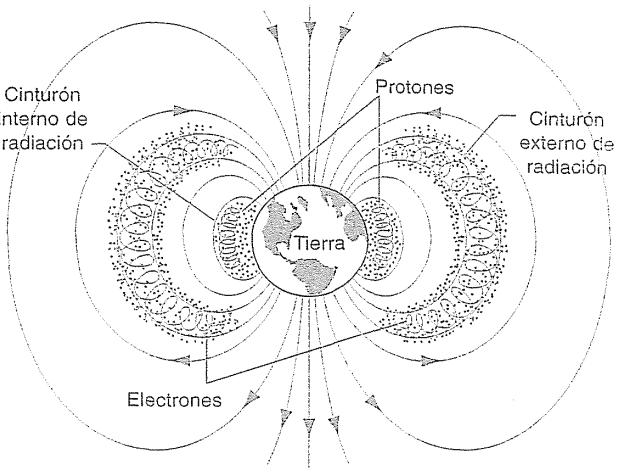


FIGURA 32-15. Campo magnético de la Tierra, que muestra los protones y electrones atrapados en los cinturones de radiación de Van Allen.

espejo magnético. Las partículas cargadas tienden a moverse en círculos alrededor de la dirección del campo. Supóngase que empieza a desplazarse lateralmente, digamos hacia la derecha de la figura 32-14. Así pues, el movimiento es el de una hélice, como un resorte enrollado. El campo aumenta cerca de los bordes de la "botella magnética" y la fuerza tiene un componente pequeño que apunta al centro de la región y que invierte la dirección del movimiento de las partículas haciendo que se mueven en espiral en dirección contraria, hasta que terminan por reflejarse en el extremo opuesto. Las partículas continúan oscilando, confinadas en el espacio entre las dos regiones de campo alto. Este arreglo sirve para confinar los gases ionizados calientes (llamados *plasmas*) que se emplean al investigar la fusión termonuclear controlada (Sec. 51-8).

Un fenómeno similar ocurre en el campo magnético de la Tierra, como se muestra en la figura 32-15. Los electrones y los protones quedan atrapados en varias regiones del campo terrestre y describen un movimiento espiral oscilatorio entre las regiones de campo alto cercanas a los polos en cuestión de segundos. Estas partículas rápidas originan los cinturones de radiación de Van Allen que rodean la Tierra.

PROBLEMA RESUELTO 32-2. Se diseña un ciclotrón particular con electrodos en forma de D con un radio R de 75 cm y con imanes capaces de crear un campo de 1.5 T. *a)* ¿A qué frecuencia debe colocarse el oscilador para acelerar los deuterones? *b)* ¿Cuál es la energía máxima que pueden alcanzar los deuterones?

Solución a) Un deuterón es un núcleo de hidrógeno pesado, con una carga $q = +e$ y una masa de 3.34×10^{-27} kg, más o menos el doble de la masa del hidrógeno ordinario. Por medio de la ecuación 32-12 podemos calcular la frecuencia:

$$f = \frac{|q|B}{2\pi m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.5\ \text{T})}{2\pi(3.34 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$

$$= 1.1 \times 10^7\ \text{Hz} = 11\ \text{MHz}.$$

b) La energía máxima ocurre en los deuterones que emergían en el radio máximo R. De acuerdo con la ecuación 32-14,

$$K = \frac{q^2B^2R^2}{2m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.5\ \text{T})^2(0.75\ \text{m})^2}{2(3.34 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 4.85 \times 10^{-12}\ \text{J} = 30\ \text{MeV}.$$

Los deuterones con esta energía tienen un alcance de unos cuantos metros en el aire, como se aprecia en la figura 32-12.

Movimiento en campos no uniformes (opcional)

La trayectoria de una partícula cargada en un campo magnético uniforme no es un círculo, y puede ser un problema complicado calcularla (como se muestra en la Fig. 32-14). Por lo regular no existe una solución analítica, y la trayectoria ha de calcularse numéricamente, en analogía con la trayectoria de un proyectil que incluye la resistencia al aire (Cap. 4). La figura 32-16 ilustra por qué la trayectoria de un campo no uniforme ya no es un círculo. Al principio la partícula se halla en el punto P_0, donde su velocidad $\vec{v}_0$ sigue la dirección y. Suponemos que el campo está en la dirección z y que su intensidad crece junto con x y y. Originalmente el campo es $\vec{B}_0$ y la fuerza resultante en la partícula $\vec{F}_0$ en la dirección x. Esta fuerza le imprime a la partícula un incremento de velocidad en la dirección x, y un instante más tarde la partícula se halla en el punto P_1 moviéndose con una velocidad $\vec{v}_1$. En este punto el campo magnético $\vec{B}_1$ tiene mayor magnitud y la fuerza $\vec{F}_1$ también es más grande. En el movimiento circular, la fuerza debe tener la misma magnitud en todos los lugares y, por lo mismo, la trayectoria de la partícula no es evidentemente un círculo.

Este problema podemos resolverlo numéricamente si sabemos cómo varía la magnitud de $\vec{B}$ (y posiblemente también su dirección) en todos los puntos donde pudiera estar la partícula. Comenzamos escribiendo la expresión completa de la fuerza como producto cruz (Ap. H):

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$$
$$= q(v_yB_z - v_zB_y)\hat{i} + q(v_zB_x - v_xB_z)\hat{j} + q(v_xB_y - v_yB_x)\hat{k}. \qquad (32\text{-}15)$$

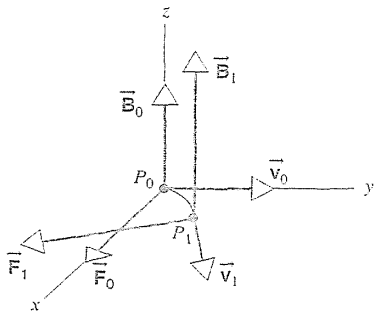


FIGURA 32-16. En un campo magnético no uniforme, la magnitud de la fuerza varía (aquí mientras la partícula pasa de P_0 a P_1) y, en consecuencia, la trayectoria resultante no es un círculo.

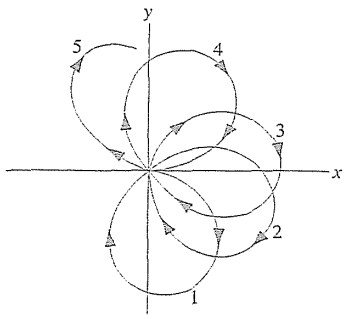


FIGURA 32-17. Trayectoria en el plano xy de una partícula que se halla inicialmente en el origen y que se desplaza en la dirección x, sujeta al campo magnético de la ecuación 32-17. Se numeran las espiras en el orden que las recorre una partícula.

Por medio de la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a} = m(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})$ podemos igualar los componentes vectoriales correspondientes para obtener las ecuaciones de movimiento, que puedan resolverse para la trayectoria. Por ejemplo, en la situación descrita en la figura 32-16 $\vec{B}$ tiene sólo un componente z ($B_x = B_y = 0$). En este caso, las ecuaciones de movimiento se simplifican y nos dan

$$F_{Bx} = q(v_yB_z - v_zB_y) = qv_yB_z = ma_x = m\,dv_x/dt$$
$$F_{By} = q(v_zB_x - v_xB_z) = -qv_xB_z = ma_y = m\,dv_y/dt$$
$$F_{Bz} = q(v_xB_y - v_yB_x) = 0 = ma_z = m\,dv_z/dt. \qquad (32\text{-}16)$$

(Si $v_z = 0$ inicialmente, entonces $v_z = 0$ en todo momento porque $a_z = 0$.) Estas expresiones han de evaluarse en todos los puntos de la trayectoria, puesto que los valores de v_x, v_y y B_z varían de un punto a otro. Por lo regular se usa una computadora para obtener una solución numérica de la trayectoria. Supóngase, por ejemplo, que el campo varía como

$$B_z = B_0\left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right), \qquad (32\text{-}17)$$

donde $R = mv/qB_0$ es el radio de la trayectoria en un campo uniforme B_0. El campo aumenta con la distancia de la partícula respecto al origen. El movimiento resultante, que se calcule numéricamente (Prob. para resolver por computadora 1) nos da el patrón en forma de flor de la figura 32-17. ■

32-4 EL EFECTO HALL

Hemos explicando varios ejemplos de la fuerza deflectora lateral que un campo magnético ejerce sobre partículas cargadas en movimiento. Hasta ahora nos hemos concentrado exclusivamente en partículas o haces individuales de partículas que por lo demás se desplazan con entera libertad. En 1879 Edwin Hall demostró que los electrones de conducción en movimiento dentro de un conductor también pueden ser desviados por un campo magnético. El *efecto Hall* ofrece un medio de determinar tanto el signo como la densidad de los portadores de carga.

Considere una tira plana de material, con un ancho w, que transporta una corriente i, como se ve en la figura 32-18. La dirección de la corriente i es convencional, opuesta a la dirección del movimiento de los electrones. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ se establece perpendicularmente al plano de la tira, colocándola, por ejemplo, entre los polos de un electroimán. Los portadores de carga (los electrones por ejemplo) experimentan una fuerza magnética deflectora $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ como se indica en la figura, y se dirigen a la derecha de la tira. Nótese que las cargas positivas que se mueven en la dirección i experimentan una fuerza deflectora en la *misma* dirección.

La acumulación de carga a la derecha de la tira (y una deficiencia correspondiente de la carga de ese signo en el lado opuesto de la tira), que es el efecto Hall, produce un campo eléctrico $\vec{E}_H$ a lo largo de la tira como se ve en la figura 32-18*b*. En forma equivalente, una diferencia de potencial $\Delta V_H = E_H w$, denominada *diferencia potencial de Hall* (o voltaje de Hall), existe en ella. Podemos medir ΔV_H conectando las puntas de un voltímetro a los puntos x y y de la figura 32-18. Como señalamos luego, el signo de ΔV_H nos da el de los portadores de carga y la magnitud de ΔV_H, su densidad (número por unidad de volumen). Si por ejemplo los portadores son electrones, un exceso de cargas negativas se acumula a la derecha de la tira y el punto y se halla en un potencial más bajo que el punto x. Lo anterior puede parecer una conclusión obvia en el caso de los metales; sin embargo, recuerde que Hall realizó su trabajo casi 20 años antes que Thomsom descubriera el electrón y que la naturaleza de la conducción eléctrica en los metales no era evidente en absoluto por esa época.

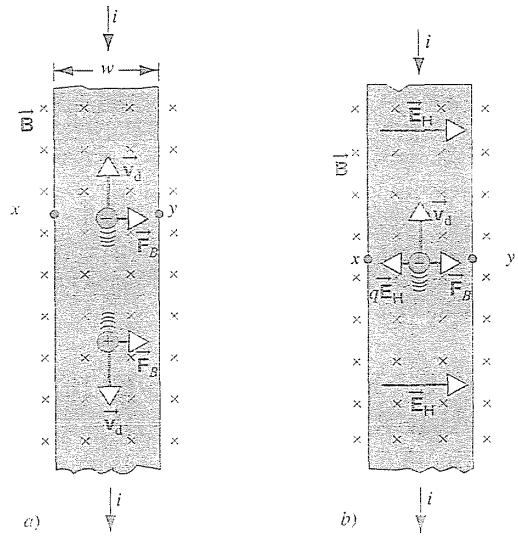


FIGURA 32-18. Una tira de cobre inmersa en un campo magnético $\vec{B}$ transporta una corriente i. *a*) La situación poco después que el campo magnético ha sido activado y *b*) la situación en el equilibrio que aparece pronto. Las cargas negativas se acumulan en el lado derecho de la tira, dejando en la izquierda cargas positivas no compensadas. El punto x está en un potencial más alto que el punto y.

Supongamos que la conducción en el material se debe a los portadores de carga de determinado signo (positivo o negativo) que se mueven con la velocidad de deriva $\vec{v}_d$. A medida que los portadores se desplazan, son desviados a la derecha en la figura 32-18 por la fuerza magnética. Al acumularse las cargas a la derecha, crean un campo eléctrico que opera dentro del conductor para oponerse al movimiento lateral de los portadores adicionales. Pronto se alcanza el equilibrio y el voltaje de Hall alcanza su máximo; la fuerza magnética lateral ($\vec{F}_B = q\vec{v}_d \times \vec{B}$) se equilibra entonces por medio de la fuerza eléctrica lateral ($q\vec{E}_H$). En términos vectoriales, la fuerza de Lorentz en los portadores de carga es cero en tales circunstancias:

$$q\vec{E}_H + q\vec{v}_d \times \vec{B} = 0, \tag{32-18}$$

o bien

$$\vec{E}_H = -\vec{v}_d \times \vec{B}. \tag{32-19}$$

Puesto que $\vec{v}_d$ y $\vec{B}$ forman ángulos rectos, podemos escribir así la ecuación 32-19 en función de las magnitudes:

$$E_H = v_d B. \tag{32-20}$$

A partir de la ecuación 29-6 la velocidad de deriva se escribe como $v_d = j/ne$, donde j es la densidad de corriente de la tira y n la densidad de los portadores de carga. La densidad de corriente j es la corriente i por unidad de superficie transversal A de la tira. Si t es su espesor, su superficie transversal puede escribirse como wt. Al sustituir E_H por $\Delta V_H/w$, obtenemos

$$\frac{\Delta V_H}{w} = v_d B = \frac{j}{ne} B = \frac{i}{wtne} B$$

o, resolviendo para la densidad de portadores de carga,

$$n = \frac{iB}{et\,\Delta V_H}. \tag{32-21}$$

Después de medir la magnitud de la diferencia de potencial de Hall ΔV_H, podemos calcular la densidad numérica de los portadores de carga. La tabla 32-2 ofrece un resumen de los datos relativos al efecto Hall de varios metales y semiconductores.

TABLA 32-2 Resultados del efecto Hall en algunos materiales

Material	$n(10^{28}/\mathrm{m}^3)$	*Signo de* ΔV_H	*Número por átomo*[a]
Na	2.5	−	0.99
K	1.5	−	1.1
Cu	11	−	1.3
Ag	7.4	−	1.3
Al	21	−	3.5
Sb	0.31	−	0.09
Be	2.6	+	2.2
Zn	19	+	2.9
Si (puro)	1.5×10^{-12}	−	3×10^{-13}
Si (tipo n común)	10^{-7}	−	2×10^{-8}

[a]Número de los portadores de carga por átomo del material, que se determina mediante el número por unidad de volumen y mediante la densidad y la masa molar del material.

En algunos metales monovalentes (Na, K, Cu, Ag) el efecto Hall indica que cada átomo aporta a la conducción aproximadamente un electrón libre. En otros metales el número de electrones es mayor que uno por átomo (Al) o menos que uno por átomo (Sb). En algunos metales (Be, Zn), la diferencia de potencial de Hall muestra que los portadores de carga tienen signo *positivo*. En tal caso la conducción está dominada por *agujeros*, niveles no ocupados de energía en la banda de valencia (Cap. 49). Los agujeros corresponden a la ausencia de un electrón y, por lo mismo, se comportan como portadores de carga positiva que se desplazan por el material. En algunos materiales —sobre todo en los semiconductores—, los electrones y los agujeros pueden hacer importantes contribuciones; no es suficiente la simple interpretación del efecto Hall en función de la conducción libre por un tipo de portador de carga. En este caso, hay que recurrir a cálculos más detallados que se basan en la teoría cuántica.

PROBLEMA RESUELTO 32-3. Una tira de cobre con un espesor de 150 μm se coloca en un campo magnético $B = 0.65$ T perpendicular al plano de la tira y se produce una corriente $i = 23$ A en ella. ¿Qué diferencia de potencial de Hall ΔV_H aparecería en el ancho de la tira si hubiera un portador de carga por átomo?

Solución En el problema resuelto 29-3 se calculó el número de portadores de carga por unidad de volumen en el cobre, suponiendo que cada átomo contribuye con un electrón; descubrimos que $n = 8.49 \times 10^{28}$ electrones/m^3. Entonces, con base en la ecuación 32-21,

$$\Delta V_H = \frac{iB}{net}$$

$$= \frac{(23\text{ A})(0.65\text{ T})}{(8.49 \times 10^{28}\text{ m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\text{ C})(150 \times 10^{-6}\text{ m})}$$

$$= 7.3 \times 10^{-6}\text{ V} = 7.3\ \mu\text{V}.$$

Esta diferencia de potencial se mide fácilmente pese a ser pequeña.

El efecto Hall cuántico* (opcional)

Reescribamos la ecuación 32-21 como

$$\frac{\Delta V_H}{i} = \frac{1}{etn} B. \qquad (32\text{-}22)$$

La cantidad de la izquierda tiene la dimensión de resistencia (voltaje dividido entre corriente), aunque no es una resistencia en el sentido habitual. Tradicionalmente se le da el nombre de *resistencia de Hall*. Podemos calcularla midiendo el voltaje de Hall ΔV_H en un material que lleve una corriente i.

La ecuación 32-22 muestra lo que se espera que, un material (donde n y t son constantes), aumente linealmente la resistencia de Hall con el campo magnético B. Un diagrama de la resistencia en función de B debería ser una línea recta.

*Véase "The Quantized Hall Effect" de Bertrand I. Halperin, *Scientific American*, abril de 1986, p. 52.

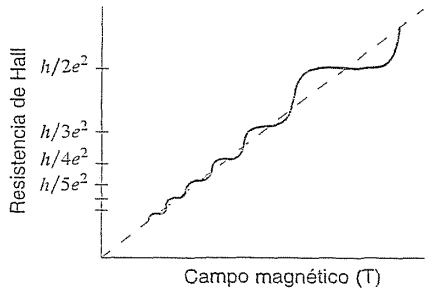


FIGURA 32-19. Efecto Hall cuántico. La línea punteada muestra el comportamiento clásico esperado; los pasos, el comportamiento cuántico.

En unos experimentos efectuados en 1980, el físico alemán Klaus von Klitzing descubrió que, en campos magnéticos altos y a bajas temperaturas (alrededor de 1 K), la resistencia de Hall no crecía linealmente con el campo, sino que el diagrama mostraba una serie de "escalones", como se aprecia en la figura 32-19. A este efecto se le conoce como *efecto Hall cuántico*; por este descubrimiento von Klitzing obtuvo el Premio Nobel de Física en 1985.

La explicación del efecto incluye las trayectorias circulares donde el campo obliga a los electrones a moverse. La mecánica cuántica impide que se sobrepongan las órbitas de electrones de átomos vecinos. Conforme crece el campo, el radio orbital disminuye, permitiendo con ello que más órbitas se agrupen en un lado del material. Como el movimiento orbital de los electrones está cuantizado (sólo se admiten ciertas órbitas), los cambios del movimiento orbital ocurren repentinamente, en correspondencia con los pasos de la figura 32-19. Una unidad natural de resistencia correspondiente a dicho movimiento es h/e^2, donde h es la constante de Planck; los pasos en la figura 32-19 se realizan en las resistencias de Hall de $h/2e^2$, $h/3e^2$, $h/4e^2$, y así sucesivamente.

La resistencia cuantizada de Hall h/e^2, hoy conocida como la constante de von Klitzing, tiene el valor 25812.807572 Ω y se ha determinado con una precisión mayor que 1 parte en 10^8; así que el efecto Hall ofrece un nuevo estándar de resistencia. En 1990 el estándar, que puede duplicarse exactamente en los laboratorios del mundo, se convirtió en la nueva representación del ohm. ■

32-5 LA FUERZA MAGNÉTICA EN UN ALAMBRE PORTADOR DE CORRIENTE

La corriente es una colección de cargas en movimiento. Dado que un campo magnético ejerce una fuerza lateral sobre una carga en movimiento, debería ejercerla también en un alambre que transporte corriente. Es decir, una fuerza lateral actúa sobre los electrones de conducción del alambre; pero como éstos no pueden escapar a los lados, la fuerza debe transmitirse al alambre mismo. La figura 32-20 muestra un alambre que atraviesa una región donde existe el campo magnético $\vec{B}$. Cuando no trans-

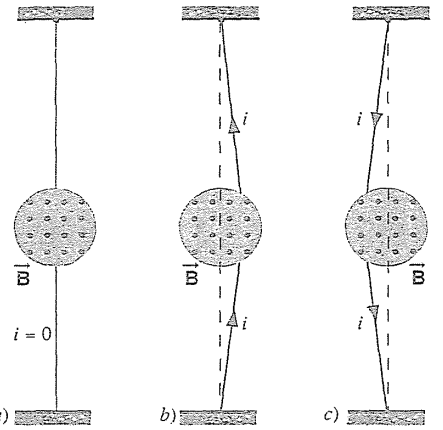


FIGURA 32-20. Un alambre flexible pasa entre los polos de un imán. *a*) No hay corriente en el alambre. *b*) Se genera una corriente en él. *c*) Se invierte la corriente.

porta corriente (Fig. 32-20*a*), tampoco experimenta deflexión. Cuando una corriente es transportada por el alambre (Fig. 32-20*b*) éste se deflecta; cuando la corriente se invierte (Fig. 32-20*c*), lo mismo sucede con la deflexión. Cuando el campo $\vec{B}$ se invierte, también la deflexión se invierte.

Para entender este efecto examinamos las cargas individuales que fluyen en un alambre (Fig. 32-21). Nos valemos del modelo de electrones libres (Sec. 29-3) en una corriente dentro de un alambre, suponiendo que los electrones se mueven con velocidad constante, la velocidad de deriva $\vec{v}_d$. Desde luego, la dirección real de su movimiento se opone a la que asignamos a la corriente i en el alambre.

El alambre atraviesa una región donde existe un campo uniforme $\vec{B}$. La fuerza lateral en cada electrón (de carga $q = -e$) debida al campo magnético es $-e\vec{v}_d \times \vec{B}$. Consideremos la fuerza lateral total en un segmento del alambre de longitud L. La misma fuerza (magnitud y dirección) opera sobre los electrones del segmento, y la fuerza total $\vec{F}_B$ en el segmento será, por eso, igual al número N de electrones multiplicado por la fuerza en cada electrón:

$$\vec{F}_B = -Ne\vec{v}_d \times \vec{B}. \tag{32-23}$$

¿Cuántos electrones contiene ese segmento del alambre? Si n es la densidad numérica (número por unidad de volumen) de electrones, la cantidad total de ellos en el segmento es nAL, donde A es la superficie transversal del alambre. Al realizar la sustitución en la ecuación 32-23, obtenemos

$$\vec{F}_B = -nALe\vec{v}_d \times \vec{B}. \tag{32-24}$$

La ecuación 29-6 nos permite escribir la ecuación 32-24 en función de la corriente i. Si queremos preservar la forma vectorial de la ecuación 32-24, definimos el vector $\vec{L}$ de modo que su magnitud sea igual a la longitud del segmento y que apunte en dirección de la corriente (contraria a la dirección del flujo de electrones). Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{L}$ siguen dirección opuesta, y podemos escribir la relación escalar utilizando vectores como

$$-nALe\vec{v}_d = i\vec{L}. \tag{32-25}$$

Al sustituir la ecuación 32-25 en la ecuación 32-24, obtenemos una expresión de la fuerza en el segmento:

$$\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}. \tag{32-26}$$

La ecuación 32-26 se parece a la ecuación 32-3 ($\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$) en que puede suponerse que cualquiera de las dos sea la ecuación definitoria del campo magnético. La figura 32-22 muestra la relación vectorial entre $\vec{F}$, $\vec{L}$ y $\vec{B}$; compárela con la figura 32-5 para captar las semejanzas entre las ecuaciones 32-26 y 32-3.

Si el campo es uniforme a lo largo del segmento de alambre y si la dirección de la corriente forma un ángulo ϕ con él, la magnitud de la fuerza será (compare la expresión siguiente con la Ec. 32-2)

$$F_B = iLB \operatorname{sen} \phi. \tag{32-27}$$

Cuando $\vec{L}$ es paralela a $\vec{B}$, la fuerza es cero. Si el segmento es perpendicular a la dirección del campo, la magnitud de la fuerza es

$$F_B = iLB. \tag{32-28}$$

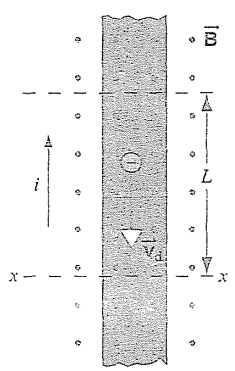


FIGURA 32-21. Vista de cerca de una longitud L del alambre de la figura 32-20*b*. La corriente se dirige hacia arriba, lo cual significa que los electrones se desplazan hacia abajo. Un campo magnético sale del plano de la figura, de modo que el alambre se desvía a la derecha.

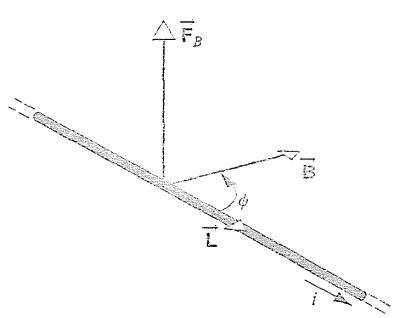


FIGURA 32-22. La fuerza magnética en un segmento dirigido del alambre $\vec{L}$, que forma un ángulo ϕ con un campo magnético. Compare muy bien esto con la figura 32-5.

Si el alambre no es recto o si el campo no es uniforme, podemos imaginar que aquél está formado por pequeños segmentos de longitud dL; hacemos los segmentos lo bastante pequeños para que sean aproximadamente rectos y el campo sea aproximadamente uniforme. Entonces la fuerza en cada segmento puede escribirse así

$$d\vec{F}_B = i\,d\vec{L} \times \vec{B}. \qquad (32\text{-}29)$$

La fuerza total del segmento de longitud L se obtiene efectuando una integración adecuada sobre la longitud.

PROBLEMA RESUELTO 32-4. Un segmento recto y horizontal de alambre de cobre transporta una corriente $i = 28$ A. ¿Qué magnitud y dirección debe tener el campo magnético para "flotar" el alambre, es decir, para equilibrar su peso? Su densidad lineal de masa es 46.6 g/m.

Solución La figura 32-23 contiene el arreglo. Con una longitud L del alambre tenemos (Ec. 32-28)

$$mg = iLB,$$

o

$$B = \frac{(m/L)g}{i} = \frac{(46.6 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(9.8\ \text{m/s}^2)}{28\ \text{A}}$$

$$= 1.6 \times 10^{-2}\ \text{T} = 16\ \text{mT}.$$

El resultado anterior es unas 400 veces el campo magnético de la Tierra.

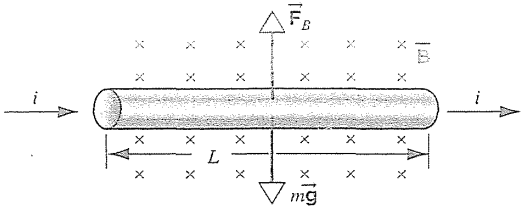


FIGURA 32-23. Problema resuelto 32-4. Puede hacerse que un alambre "flote" en un campo magnético, con una fuerza magnética hacia arriba $\vec{F}_B$ equilibrando el empuje de la gravedad hacia abajo. El campo magnético se dirige al interior del plano de la página.

PROBLEMA RESUELTO 32-5. En la figura 32-24 se muestra un segmento de alambre, colocado en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ que apunta al plano de la figura. Si el segmento lleva una corriente i, ¿qué fuerza magnética resultante opera sobre él?

Solución Consideremos el alambre en las tres secciones: las dos partes rectas (secciones 1 y 3) y la parte curva (sección 2). De acuerdo con la ecuación 32-28, la fuerza magnética que actúa sobre cada sección recta tiene la magnitud

$$F_1 = F_3 = iLB$$

y apunta hacia abajo, como lo indican las flechas de la figura. La fuerza dF_B que opera sobre un segmento del arco de longitud $dL = R\,d\theta$ tiene la magnitud

$$dF_B = iB\,ds = iB(R\,d\theta)$$

y la dirección radial hacia O, el centro del arco. Nótese que sólo el componente hacia abajo (dF_B sen θ) de este elemento de fuerza es eficaz. Al componente horizontal (dF_B cos θ) lo cancela un componente horizontal de dirección contraria, debido a un segmento ubicado simétricamente en el lado opuesto del arco.

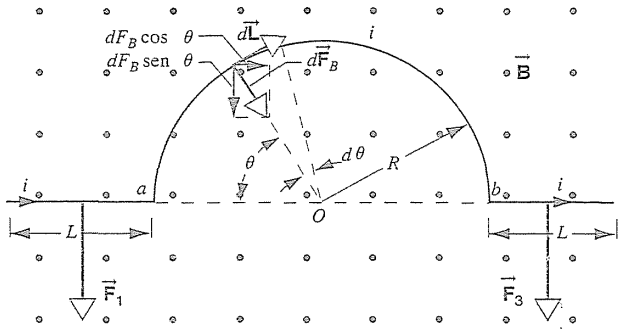


FIGURA 32-24. Problema resuelto 32-5. Un segmento de alambre que transporta una corriente i está inmerso en un campo magnético. La fuerza resultante en el alambre se dirige hacia abajo.

La fuerza total en el arco central apunta hacia abajo y está dada por

$$F_2 = \int_0^{\pi} dF_B \operatorname{sen}\theta = \int_0^{\pi} (iBR\,d\theta) \operatorname{sen}\theta$$

$$= iBR \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta = 2iBR.$$

Así pues, la fuerza resultante en el alambre entero es

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = iLB + 2iBR + iLB$$
$$= iB(2L + 2R).$$

La misma fuerza operará sobre un alambre similar al de la figura 32-24, donde el segmento central semicircular está sustituido por un segmento de cualquier forma (incluso una línea recta) que conecta los punto a y b. ¿Puede convencerse de que así son las cosas?

32-6 EL PAR EN UNA ESPIRA DE CORRIENTE

En un motor eléctrico, se pone una espira de alambre que transporta una corriente en un campo magnético. Una versión simplificada aparece en la figura 32-25 para una espira rectangular en un campo uniforme. La espira puede girar alrededor de un eje vertical. Cuando su orientación es tal que el campo se encuentre en el plano de la espira, las fuerzas magnéticas en los extremos cortos son cero conforme a la ecuación 32-26, ya que $\vec{B}$ y $\vec{L}$ son paralelos. En los extremos largos, las fuerzas son iguales sólo que apuntan en dirección contraria, de modo que la fuerza neta en la espira es cero. No obstante, hay una torca neta que tiende a girarla alrededor de su eje en dirección de las manecillas del reloj cuando se ve desde arriba. Este modelo tan simple muestra cómo la combinación de una corriente eléctrica y de un campo magnético puede producir el movimiento rotatorio del motor eléctrico. El mismo principio origina la acción de los voltímetros y amperímetros analógicos.

En la figura 32-26 se ve una espira rectangular de longitud a y de ancho b que lleva una corriente i. Su plano forma un ángulo θ con el eje x. Para simplificar las cosas sólo la es-

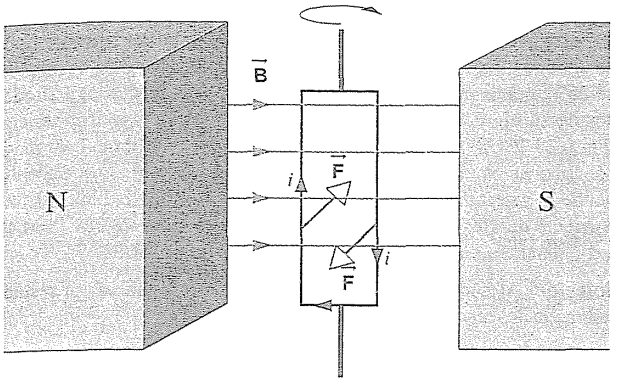


FIGURA 32-25. Diagrama simplificado de un motor eléctrico. La espira transporta una corriente eléctrica. Las fuerzas magnéticas en los lados largos de ella producen un par que tiende a girarla en sentido de las manecillas del reloj, vista desde arriba.

pira se muestra, no así los alambres necesarios para introducir y sacar la corriente de la espira. Se supone que el campo magnético es uniforme y que sigue la dirección y; el eje z se halla en el plano de la espira. Queremos conocer la fuerza y el par neto sobre ella, para lo cual calculamos la fuerza en ambos lados de la espira.

En esta orientación los lados 1 y 3 son perpendiculares al campo. En otras palabras, si decidimos que el vector $\vec{L}$ sigue la dirección de la corriente, $\vec{L}$ será perpendicular a $\vec{B}$. En estos lados podemos emplear la ecuación 32-28 para la magnitud de las fuerzas:

$$F_1 = F_3 = iaB, \tag{32-30}$$

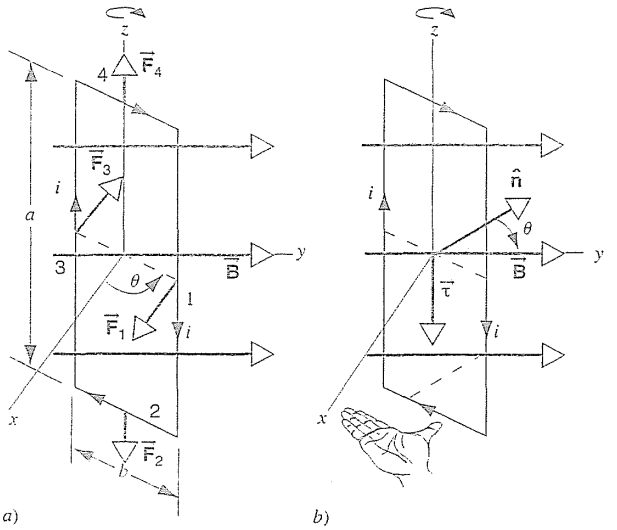


FIGURA 32-26. Espira rectangular de alambre en un campo magnético uniforme. *a*) Se muestran las fuerzas en los cuatro lados. *b*) El par tiende a girar la espira de modo que el vector unitario $\hat{n}$, determinado con la regla de la mano derecha y perpendicular al plano de la espira, gire para alinearse con $\vec{B}$.

puesto que los lados 1 y 3 tienen la longitud a. Las fuerzas son paralelas al eje x de la figura 32-26, con $\vec{F}_1$ en la dirección x positiva y $\vec{F}_3$ en la dirección x negativa.

El ángulo entre el lado 2 del alambre y $\vec{B}$ es $\theta + 90°$. Por medio de la ecuación 32-27 descubrimos que la fuerza en este segmento es

$$F_2 = ibB \text{ sen } (\theta + 90°) = ibB \cos \theta \tag{32-31}$$

en la dirección negativa z. De manera similar, la fuerza del lado 4 es

$$F_4 = ibB \text{ sen } (90° - \theta) = ibB \cos \theta \tag{32-32}$$

en la dirección positiva z.

Para calcular la fuerza total en la espira sumamos las fuerzas en los cuatro lados, teniendo cuidado de tomar en cuenta su magnitud y dirección. La suma de F_2 y F_4 es cero porque tienen la misma magnitud y dirección contraria; lo mismo sucede con F_1 y F_3. La fuerza neta en la espira es cero; así que su centro de masa no se acelera bajo la acción de la fuerza magnética. Se llega a esta conclusión por ser uniforme el campo; en caso de que no lo fuera, el campo en parejas opuestas de los lados 1 y 3 o de los lados 2 y 4 podría tener diferente magnitud y la magnitud de las fuerzas en ellos podría no ser igual.

Aun cuando la fuerza neta es cero, el par neto no lo es. Las fuerzas F_2 y F_4 se hallan a lo largo del eje z y, por lo mismo, tienen la misma línea de acción; no contribuyen al par neto. Pero ninguna F_1 y F_3 tiene la misma línea de acción; como se advierte en la figura 32-26, tienden a girar la espira en dirección de las manecillas del reloj alrededor del eje z, visto desde arriba. En relación con este eje, las fuerzas F_1 y F_3 tienen brazos de momento de $(b/2)$ sen θ y, por ello, la magnitud del par total es

$$\tau = 2(iaB)(b/2) \text{ sen } \theta, \tag{32-33}$$

donde entra el factor 2 porque ambas fuerzas contribuyen igualmente al par.

El par alcanza su magnitud máxima cuando la espira está orientada de modo que el campo magnético se encuentre en el plano de la espira ($\theta = 90°$). El par es cero cuando el campo magnético es perpendicular al plano de la espira ($\theta = 0$).

Si la espira estuviera construida como un bobina de N vueltas de alambre (como podría encontrarse en un motor o en un amperímetro), la ecuación 32-34 nos da el par en cada vuelta y el par total de la bobina será

$$\tau = NiAB \text{ sen } \theta, \tag{32-34}$$

donde hemos sustituido por A, la superficie de la espira, el producto ab. Puede demostrarse que en general la ecuación 32-34 es válida para todas las espiras planas de superficie A, sean o no rectangulares.

La figura 32-26*b* nos da otra forma de interpretar el par en la espira actual. Por medio de la regla de la mano derecha, definimos un vector unitario $\hat{n}$ perpendicular al plano de la espira. La dirección de $\hat{n}$ se determina sosteniendo la mano derecha de modo que los dedos sigan la dirección de la corriente: el pulgar indica la dirección de $\hat{n}$. El par trata de girar la espira para que $\hat{n}$ quede alineado con $\vec{B}$. El par, que sigue la dirección negativa z en la figura 32-26*b*, aparece en la dirección deter-

minada por el producto cruz $\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Con $|\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{B}}| = B \operatorname{sen} \theta$, podemos escribir la ecuación 32-34 en la forma vectorial como

$$\vec{\tau} = NiA\, \hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{B}}. \qquad (32\text{-}35)$$

PROBLEMA RESUELTO 32-6. Los voltímetros y los amperímetros analógicos, donde la deflexión de un apuntador sobre una balanza permite visualizar la lectura, miden el par ejercido por un campo magnético sobre una espira de corriente. La figura 32-27 muestra los rudimentos de un *galvanómetro*, en el cual se basan estos dos tipos de aparatos. La bobina tiene 2.1 cm de altura y 1.2 cm de ancho; tiene 250 vueltas uniformes y está montada de modo que gira alrededor de su eje dentro de un campo magnético radial uniforme, con $B = 0.23$ T. Un resorte ofrece un contrapar que equilibra al par magnético, ocasionando una deflexión angular estacionaria ϕ que corresponde a determinada corriente estacionaria i en la bobina. Si una corriente de 100 μA produce una deflexión angular de 28° (= 0.49 rad), ¿cuál debe ser la constante torsional κ del resorte?

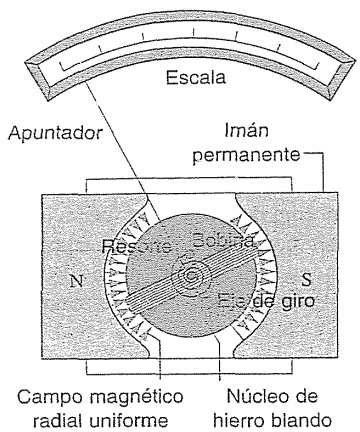


FIGURA 32-27. Problema resuelto 32-6. Rudimentos de un galvanómetro. Según el circuito externo que se utilice, este dispositivo puede actuar como un voltímetro o un amperímetro.

Solución Al hacer el par magnético (Ec. 32-24) igual al par restaurador $\kappa\phi$ del resorte, se obtiene

$$\tau = NiAB \operatorname{sen} \theta = \kappa\phi,$$

donde ϕ es la deflexión angular del apuntador y A (= 2.52×10^{-4} m^2) es la superficie de la bobina. Nótese que la normal al plano de la bobina (es decir, el apuntador) siempre forma ángulo recto con el campo magnético (radial), de modo que $\theta = 90°$ en todas las posiciones del apuntador.

Al resolver para κ, obtenemos

$$\kappa = \frac{NiAB \operatorname{sen} \theta}{\phi}$$

$$= \frac{(250)(100 \times 10^{-6}\ \text{A})(2.52 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(0.23\ \text{T})(\operatorname{sen} 90°)}{0.49\ \text{rad}}$$

$$= 3.0 \times 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{m/rad}.$$

Los amperímetros y voltímetros modernos son del tipo digital de lectura directa y funcionan en una forma que no requiere un bobina móvil.

OPCIÓN MÚLTIPLE

32-1 Interacciones y polos magnéticos

32-2 La fuerza magnética sobre una carga en movimiento

1. De los tres vectores de la ecuación $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$, ¿cuál par, o pares, siempre forma ángulos rectos? (*Puede haber más de una respuesta correcta.*)

   A) $\vec{\mathbf{F}}_B$ y $\vec{\mathbf{v}}$ B) $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ C) $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{F}}_B$
   D) ninguno E) Los tres deben formar ángulos rectos.

2. Una carga negativa q_1 se desplaza con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}$ en una región donde hay un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ y un campo magnético también uniforme $\vec{\mathbf{B}}$.

   a) De los tres vectores $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, ¿cuál par, o pares, han de ser perpendiculares? (*Puede haber más de una respuesta correcta.*)

   A) $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ B) $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ C) $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$
   D) Ninguno E) Los tres han de ser perpendiculares.

   b) A la carga negativa la reemplaza otro carga q_2 que se mueve inicialmente con la misma velocidad. ¿En qué condiciones la segunda carga también se desplazará con la misma velocidad?

   A) q_2 debe ser idéntica a q_1.
   B) q_2 debe ser negativa, pero puede tener cualquier magnitud.
   C) q_2 puede ser positiva, pero debe tener la misma magnitud que q_1.
   D) q_2 puede ser cualquier carga.

3. Se libera un electrón del reposo en una región del espacio donde existe un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ que apunta *hacia arriba* de la página y un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ que apunta *hacia fuera* de ella. ¿Qué trayectoria de la figura 32-28 representa mejor el movimiento de un electrón después de liberarlo?

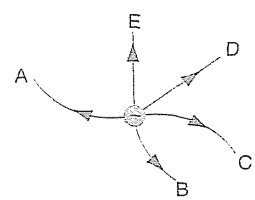


FIGURA 32-28. Pregunta de opción múltiple 3.

4. ¿Cuál de las siguientes propiedades de un protón puede cambiar mientras se desplaza libremente en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$? (*Puede haber más de una respuesta correcta.*)

   A) Masa B) Rapidez C) Velocidad
   D) Momento E) Energía cinética

5. ¿Cuál de las siguientes propiedades de un protón puede cambiar mientras se mueve libremente en un campo magnético uniforme $\vec{B}$? (*Puede haber más de una respuesta correcta.*)
   A) Masa B) Rapidez C) Velocidad
   D) Momento E) Energía cinética

6. ¿Cuál de las siguientes propiedades de un protón puede cambiar mientras se mueve libremente en un campo magnético *no* uniforme $\vec{B}$? (*Puede haber más de una respuesta correcta.*)
   A) Masa B) Rapidez C) Velocidad
   D) Momento E) Energía cinética

7. ¿Puede un campo magnético estático realizar trabajo positivo sobre una partícula cargada?
   A) Sí.
   B) Sí, pero sólo si la partícula lleva una carga positiva.
   C) Sí, pero sólo si la partícula tiene una velocidad inicial.
   D) No.

8. Una región del espacio tiene un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ dirigido hacia abajo y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido al este. La gravedad es insignificante. Un electrón se desplaza con una velocidad constante $\vec{v}_1$ a través de los dos campos.
   a) ¿En qué dirección podría moverse el electrón? (*Puede haber más de una respuesta correcta.*)
   A) Norte B) Sur C) Hacia arriba D) Hacia abajo
   b) Un segundo electrón sigue inicialmente la *dirección* del primero, pero se desplaza con una velocidad un poco menor $v_2 < v_1$. ¿Qué dirección presenta la fuerza neta en el segundo electrón?
   A) Norte B) Sur C) Hacia arriba D) Hacia abajo

32-3 Cargas circulantes

9. Un electrón con una velocidad $v_0 << c$ describe un círculo de radio r_0 en un campo magnético uniforme. El tiempo necesario para una revolución del electrón es T_0. Su rapidez se ha duplicado ahora a $2v_0$.
   a) El radio del círculo cambiará a
   A) $4r_0$. B) $2r_0$. C) r_0. D) $r_0/2$.
   b) El tiempo necesario para una revolución del electrón cambiará a
   A) $4T_0$. B) $2T_0$. C) T_0. D) $T_0/2$.

10. Considere el movimiento de la carga en la figura 32-17. Describa el campo magnético.
    A) El campo es más fuerte cerca del centro.
    B) El campo es más débil cerca del centro.
    C) No se cuenta con suficiente información para resolver el problema.

32-4 El efecto Hall

11. El campo magnético de la figura 32-29 apunta a la página. Un pequeño aeroplano metálico se mueve hacia abajo de ella.
    a) De acuerdo con el piloto, ¿cuál ala adquiere carga negativa mientras el aeroplano se desplaza?
    A) El ala izquierda. B) El ala derecha.
    C) Ninguna de las alas se carga.
    D) La respuesta depende del signo que tengan los portadores de carga en el aeroplano.
    b) El aeroplano se gira ahora y "vuela" hacia la parte superior de la página. ¿Cuál ala adquiere carga negativa mientras el aeroplano se mueve hacia arriba de la página?
    A) El ala izquierda. B) El ala derecha.
    C) Ninguna de las dos alas se carga.
    D) La respuesta depende del signo que tengan los portadores de carga en el aeroplano.

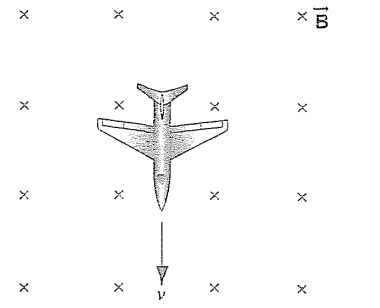


FIGURA 32-29. Pregunta de opción múltiple 11.

32-5 La fuerza magnética en un alambre portador de corriente

12. La figura 32-30 muestra varios segmentos de alambre que llevan las mismas corrientes de *a* a *b*. Los alambres se encuentran en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido al interior de la página. ¿Cuál segmento de alambre experimenta la mayor fuerza neta?
    A) 1 B) 2 C) 3
    D) Todos experimentan la misma fuerza.
    E) La pregunta no puede contestarse sin información adicional.

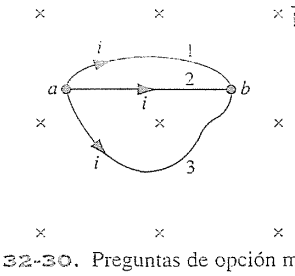


FIGURA 32-30. Preguntas de opción múltiple 12 y 13.

13. Repita la pregunta de opción múltiple 12, sólo que suponiendo que el campo magnético uniforme pueda apuntar en *cualquier* dirección. ¿Cuál segmento de alambre experimenta la máxima fuerza neta?
    A) 1 B) 2 C) 3
    D) Todos experimentan la misma fuerza neta.
    E) La respuesta depende de la dirección del campo magnético.

32-6 El par en una espira de corriente

14. ¿Es válida la ecuación 32-35 con espiras de alambre de una sola vuelta que no sean rectángulos?
    A) Es una aproximación razonable con formas semejantes a las rectangulares.
    B) Es una aproximación razonable con cualquier forma que se encuentre en un plano.
    C) Es válida con formas de suficiente simetría, como los triángulos equiláteros o los círculos.
    D) Es válida con todas las formas que estén en un plano.

15. La espira de alambre de la figura 32-31 lleva una corriente en dirección de las manecillas del reloj. Hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ que se dirige a la derecha.

a) ¿Qué dirección sigue la fuerza neta en la espira de corriente?

A) Hacia la página B) Fuera de la página
C) Hacia arriba de la página D) Hacia abajo de la página
E) La fuerza neta es cero.

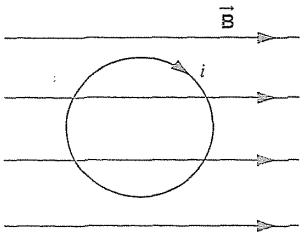


FIGURA 32-31. Pregunta de opción múltiple 15.

b) ¿Cuál es la dirección del par en la espira de corriente?

A) Hacia la página B) Fuera de la página
C) Hacia arriba de la página D) Hacia abajo de la página
E) La fuerza neta es cero.

16. Repita la pregunta de opción múltiple 15, sólo que ahora suponga que el campo no es uniforme; es más fuerte en la parte superior de la página que en la parte inferior.

a) ¿Qué dirección sigue la fuerza neta en la espira de corriente?

A) Hacia la página B) Fuera de la página
C) Hacia arriba de la página D) Hacia abajo de la página
E) La fuerza neta es cero.

b) ¿Qué dirección sigue el par en la espira de corriente?

A) Hacia la página B) Fuera de la página
C) Hacia arriba de la página D) Hacia abajo de la página
E) La fuerza neta es cero.

PREGUNTAS

1. ¿Por qué no definimos simplemente la dirección del campo magnético $\vec{B}$ como la dirección de la fuerza magnética que opera sobre una carga en movimiento?
2. Imagine que está sentado en un cuarto con la espalda contra una pared y que se desvía a su derecha un haz de electrones, que se desplaza horizontalmente de la pared posterior a la frontal. ¿Qué dirección sigue el campo magnético uniforme existente en el cuarto?
3. ¿Cómo podríamos excluir que las fuerzas entre dos imanes sean electrostáticas?
4. Si no se desvía un electrón a los lados al atravesar cierta región del espacio, ¿podemos estar seguros de que no existe un campo magnético en ella?
5. Si se desvía a los lados un electrón en movimiento que cruza cierta región del espacio, ¿podemos estar seguros de que existe un campo magnético en ella?
6. Podemos desviar a los lados un haz de electrones mediante un campo eléctrico o magnético. ¿Es un método mejor que el otro? ¿En qué sentido es más sencillo?
7. Los campos eléctricos pueden representarse con mapas de superficies equipotenciales. ¿Puede hacerse lo mismo con los campos magnéticos? Explique su respuesta.
8. ¿Es conservativa o no conservativa una fuerza magnética? Justifique su respuesta. ¿Podríamos definir una energía potencial magnética como lo hicimos con la energía eléctrica o con la energía potencial gravitacional o eléctrica?
9. Una partícula cargada pasa por un campo magnético y es desviada. Ello significa que una fuerza operó sobre ella y alteró su momento. ¿Donde hay una fuerza debe haber también una fuerza de reacción? ¿Sobre qué objeto actúa?
10. En el experimento de Thomson prescindimos de las desviaciones ocasionadas por el campo gravitacional y magnético de la Tierra. ¿Qué errores se introdujeron al hacerlo?
11. Imagine que el cuarto donde se encuentra está lleno con un campo magnético uniforme que apunta verticalmente hacia abajo. En el centro dos electrones son proyectados de repente en dirección horizontal, con la misma velocidad inicial pero en dirección contraria. *a*) Describa sus movimientos. *b*) Descríbalos si una partícula es un electrón y otra un positrón, es decir, un electrón con carga positiva. (Los electrones disminuyen gradualmente su velocidad al chocar contra las moléculas del aire en el cuarto.)
12. La figura 32-32 muestra las trayectorias de dos electrones (e^-) y de un positrón (e^+) en una cámara de burbujas. Un campo magnético la llena, perpendicularmente al plano de la figura. ¿Por qué las trayectorias son espirales y no círculos? ¿Qué puede decir de las partículas basándose en sus trayectorias? ¿Qué dirección sigue el campo magnético?

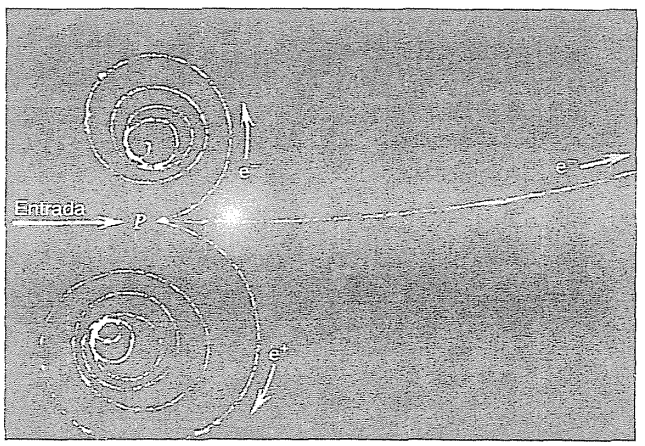


FIGURA 32-32. Pregunta 12.

13. ¿Cuáles son las funciones primarias de *a*) el campo eléctrico y *b*) el campo magnético del ciclotrón?
14. En un campo magnético determinado, ¿un protón o un electrón que se desplazan con la misma velocidad tienen la mayor frecuencia de revolución? Tenga en cuenta los efectos relativistas.
15. ¿Qué hecho central hace posible el funcionamiento de un ciclotrón ordinario? Desprecie los efectos relativistas.
16. Un alambre desnudo de cobre sobresale de una pared en un cuarto, lo cruza y desaparece en la pared de enfrente. Le dicen que una corriente estacionaria fluye por él. ¿Cómo puede deter-

minar su dirección? Describa el mayor número posible de formas de hacerlo. Puede utilizar cualquier equipo razonable pero no debe cortar el alambre.

17. Explique la posibilidad de valerse del efecto Hall para medir la intensidad B de un campo magnético.
18. *a*) Al medir las diferencias de potencial de Hall, ¿por qué hay que cerciorarse de que los puntos x y y de la figura 32-18 estén exactamente uno frente a otro? *b*) Si uno de los contactos es movible, ¿qué procedimiento podría aplicarse al ajustarlo para asegurarnos de que los dos puntos están bien situados?
19. En la sección 32-5 dijimos que un campo magnético $\vec{B}$ ejerce una fuerza lateral sobre los electrones de conducción en —digamos— un alambre de cobre portador de una corriente i. Hemos supuesto tácitamente que también opera sobre el conductor. ¿Faltan elementos en este argumento? De ser así, Expréselos.
20. Un alambre recto de cobre que lleva una corriente i está inmerso en un campo magnético $\vec{B}$, formando ángulos rectos con él. Sabemos que $\vec{B}$ ejerce una fuerza lateral sobre los electrones libres (de conducción). ¿Hace lo mismo con los electrones ligados? Después de todo están en reposo. Comente su respuesta.
21. ¿Se aplica la ecuación 32-26 ($\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}$) a una alambre recto cuya sección transversal varía irregularmente a su largo (es decir, un alambre deforme)?
22. Una corriente experimenta una fuerza en un campo magnético. Por tanto, debería ser posible bombear líquidos conductores enviando una corriente por el líquido (en la dirección apropiada) y dejándola pasar por un campo magnético. Diseñe la bomba. Este principio se aplica para bombear sodio líquido (un conductor, pero muy corrosivo) en algunos reactores nucleares, donde se emplea como elemento refrigerante. ¿Qué ventajas ofrece la bomba?
23. Un campo magnético uniforme llena cierta región cúbica del espacio. ¿Podemos disparar un electrón al interior de él desde el exterior, de modo que recorra una trayectoria circular cerrada dentro del cubo?
24. Un conductor tiene carga neta cero, a pesar de que transporta corriente. ¿Por qué un campo magnético ejerce fuerza sobre él?
25. Una espira rectangular de corriente tiene una orientación arbitraria en un campo magnético externo. ¿Cuánto trabajo se requiere para girarla alrededor de un eje perpendicular a su plano?
26. La ecuación 32-35 muestra que no hay un par en una espira de corriente dentro de un campo magnético externo, si el ángulo entre el eje de ella y el campo es *a*) 0° o *b*) 180°. Explique la naturaleza del equilibrio (es decir, si es estable, neutra o inestable) en estas dos posiciones.
27. Imagine que el cuarto donde se encuentra está lleno con un campo magnético uniforme que apunta verticalmente hacia arriba. Una espira circular de alambre tiene su plano horizontal. ¿Para qué dirección de la corriente, vista desde arriba, estará la espira en equilibrio estable respecto a las fuerzas y pares de origen magnético?

EJERCICIOS

32-1 Interacciones y polos magnéticos

32-2 La fuerza magnética sobre una carga en movimiento

1. Cuatro partículas siguen las trayectorias de la figura 32-33, a medida que cruzan el campo magnético allí. ¿Qué puede concluirse en relación con la carga de cada una?

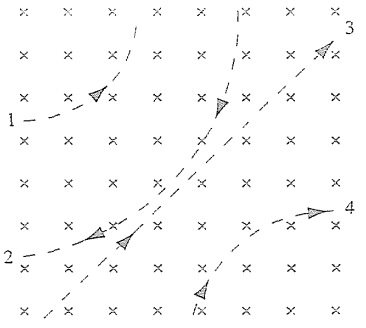


FIGURA 32-33. Ejercicio 1.

2. Un electrón en un tubo de cámara de televisión se desplaza a 7.2 $\times$ 10^6 m/s en un campo magnético de 83 mT de intensidad. *a*) Sin conocer la dirección del campo, ¿cuáles podrían ser las magnitudes máxima y mínima de la fuerza que el electrón experimentaría debida al campo? *b*) En un punto la aceleración del electrón es 4.9 $\times$ 10^{16} m/s^2. ¿Cuál es el ángulo entre su velocidad y el campo magnético?
3. Un campo eléctrico de 1.5 kV/m y un campo magnético de 0.44 T actúan sobre un electrón en movimiento y no producen fuerza alguna. *a*) Calcule su velocidad mínima v. *b*) Trace los vectores $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{v}$.
4. Un protón que se desplaza a 23.0° respecto a un campo magnético de 2.63 mT de fuerza experimenta una fuerza magnética de 6.48 $\times$ 10^{-17} N. Calcule *a*) la velocidad y *b*) la energía cinética del protón en eV.
5. Un protón de rayos cósmicos choca contra la Tierra cerca del ecuador con una velocidad vertical de 2.8 $\times$ 10^7 m/s. Suponga que el componente horizontal del campo magnético de la Tierra en el ecuador es 30 μT. Calcule la razón de la fuerza magnética en el protón a la fuerza gravitacional sobre él.
6. Aceleramos un electrón mediante una diferencia de potencial de 1.0 kV y lo dirigimos hacia una región entre dos placas paralelas separadas por 20 mm, con una diferencia de potencial de 100 V entre ellas. Si entra moviéndose perpendicularmente al campo eléctrico entre las placas, ¿qué campo magnético perpendicular a la trayectoria del electrón y al campo eléctrico se requiere para que se desplace en línea recta?
7. Un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ es perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Un protón que se mueve con una velocidad $\vec{v}_p$ perpendicular a ambos no experimenta fuerza neta alguna. Un electrón que se mueve con la velocidad $\vec{v}_e$ tampoco experimenta fuerza neta alguna. Demuestre que la razón de la energía cinética del protón a la del electrón es m_p/m_e.
8. Una fuente produce iones de ^{6}Li (masa = 6.01 u), cada uno de los cuales transporta una carga neta de $+e$. Los iones son acele-

rados por una diferencia de potencial de 10.8 kV y se dirigen horizontalmente a una región donde hay un campo magnético vertical $B = 1.22$ T. Calcule la intensidad del campo eléctrico horizontal que debe crearse en la misma región para que los iones de ^{6}Li pasen sin desviarse.

32-3 Cargas circulantes

9. *a*) En un campo magnético con $B = 0.50$ T, ¿con qué radio de trayectoria circulará un electrón a una velocidad de $0.10c$? *b*) ¿Cuál será su energía cinética en eV? No tenga en cuenta los efectos relativistas pequeños.
10. Un electrón de 1.22 keV tiene trayectoria circular por un plano en ángulos rectos con un campo magnético uniforme. El radio de su órbita es 24.7 cm. Calcule *a*) la velocidad del electrón, *b*) el campo magnético, *c*) la frecuencia de revolución y *d*) el periodo del movimiento.
11. Una diferencia de potencial de 350 V acelera un electrón del reposo. Después entra en un campo magnético uniforme de 200 mT de magnitud, su velocidad forma ángulos rectos con el campo. Calcule *a*) la velocidad del electrón y *b*) el radio de su trayectoria en el campo magnético.
12. S. A. Goudsmit inventó un método para medir exactamente la masa de los iones pesados, cronometrando su periodo de revolución en un campo magnético conocido. En 1.29 ms un ion de yodo con una sola carga realiza 7.00 rev en un campo de 45.0 mT. Calcule su masa en unidades de masa atómica. En realidad las mediciones de masa se efectúan con mucha mayor precisión de la que indican los datos aproximados.
13. Una partícula alfa ($q = +2e$, $m = 4.0$ u) describe una trayectoria circular de 4.5 cm de radio, en un campo magnético con $B = 1.2$ T. Calcule *a*) su velocidad, *b*) su periodo de revolución, *c*) su energía cinética en eV y *d*) la diferencia de potencial en la que debería ser acelerada para alcanzar esta energía.
14. Un físico está diseñando un ciclotrón que acelere protones a $0.100c$. El imán utilizado producirá un campo de 1.40 T. Calcule *a*) el radio del ciclotrón y *b*) la frecuencia correspondiente del oscilador. Las consideraciones de relatividad no son significativas.
15. En un experimento nuclear, un protón con energía cinética K_p se desplaza en un campo magnético uniforme describiendo una trayectoria circular. ¿Qué energía deben tener *a*) una partícula alfa y *b*) un deuterón para que circulen por la misma órbita? (En un deuterón, $q = +e$, $m = 2.0$ u; en una partícula alfa, $q = +2e$, $m = 4.0$ u.)
16. Un protón, un deuterón y una partícula alfa, acelerados mediante la misma diferencia de potencial ΔV, entran en una región de campo magnético uniforme, dirigiéndose en ángulos rectos a $\vec{B}$. *a*) Calcule su energía cinética. Si el radio de la trayectoria circular de un protón es r_p, ¿cuáles son los radios de *b*) de la trayectoria del deuterón y *c*) de la de la partícula alfa en función de r_p?
17. Un protón, un deuterón y una partícula alfa con la misma energía cinética entran en una región de campo magnético uniforme, moviéndose en ángulos rectos hacia $\vec{B}$. El protón describe un círculo de radio r_p. En función de r_p, ¿cuáles son los radios de *a*) la trayectoria del deuterón y *b*) la de la partícula alfa?
18. Un deuterón en un ciclotrón se mueve en un campo magnético con un radio orbital de 50 cm. A causa de una colisión de rozamiento con el blanco, con una insignificante pérdida de energía cinética el deuterón se separa transformándose en un protón y en un neutrón. Explique los subsecuentes movimientos de estas dos partículas. Suponga que en la separación comparten la energía del deuterón en partes iguales.
19. *a*) ¿Qué velocidad necesitaría un protón para darle la vuelta a la Tierra en el ecuador, si el campo magnético de ella es horizontal en toda esa región y dirigido a lo largo de líneas longitudinales? Hay que tener en cuenta los efectos relativistas. Se supone que la magnitud del campo magnético de la Tierra es 41 μT en el ecuador. *b*) Dibuje los vectores de velocidad y de campo magnético correspondientes a esta situación.
20. Calcule el radio de la trayectoria de un electrón de 10.0 Mev que se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 2.20 T. Utilice *a*) la fórmula clásica y *b*) la relativista. *c*) calcule el verdadero periodo del movimiento circular. ¿Es el resultado independiente de la velocidad del electrón?
21. Las mediciones de ionización muestran que un portador de partículas nucleares lleva doble carga ($= 2e$) y que se desplaza con una velocidad de $0.710c$. Describe una trayectoria circular de radio 4.72 m en un campo magnético de 1.33 T. Determine la masa de la partícula e identifíquela.
22. Un sincrotrón de protones en Fermilab acelera protones hasta alcanzar una energía cinética de 950 GeV. Con este nivel de energía calcule *a*) la velocidad, expresada como una fracción de la velocidad de la luz; *b*) el campo magnético en una órbita de protón que tiene 750 m de radio de curvatura. (La energía en reposo del protón es 938 MeV; aquí hay que aplicar fórmulas relativistas.)
23. Estime la longitud total de la trayectoria recorrida por un deuterón en un ciclotrón durante el proceso de aceleración. Suponga un potencial de aceleración entre los electrodos en forma de D de 80 kV, un radio de 53 cm en ellos y una frecuencia de oscilador de 12 MHz.
24. Considere una partícula de masa m y de carga q que se desplaza en el plano xy bajo el influjo de un campo magnético uniforme $\vec{B}$ que apunta en la dirección $+z$. Escriba expresiones de las coordenadas $x(t)$ y $y(t)$ de la partícula en función del tiempo t, suponiendo que describen un círculo de radio R centrado en el origen de las coordenadas.

32-4 El efecto Hall

25. Una tira metálica de 6.5 cm de largo, 0.88 cm de ancho y 0.76 mm de espesor se mueve con velocidad constante v por un campo magnético $B = 1.2$ mT perpendicularmente a ella, como se observa en la figura 32-34. Una diferencia de potencial de 3.9 μV se mide entre los puntos x y y en la tira. Calcule la velocidad v.

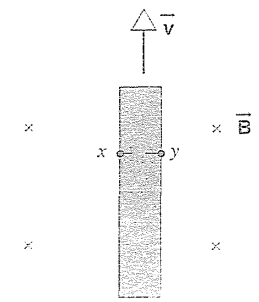


FIGURA 32-34. Ejercicio 25.

26. En un experimento del efecto Hall, una corriente de 3.2 A de longitud en un conductor de 1.2 cm de ancho, de 4.0 cm de largo y de 9.5 μm de espesor produce un voltaje transversal de Hall (a lo ancho) de 40 μV, cuando un campo magnético de 1.4 T opera perpendicularmente al conductor delgado. Con estos da-

tos, calcule *a*) la velocidad de deriva de los portadores de carga y *b*) la densidad numérica de ellos. Con base en la tabla 32-2 identifique el conductor. *c*) Demuestre en un diagrama la polaridad del voltaje de Hall con cierta corriente y dirección de campo magnético, suponiendo que los portadores de energía son electrones (negativos).

27. Demuestre que, en función del campo eléctrico de Hall E_H y de la densidad de corriente j, el número de portadores de carga por unidad de volumen está dado por

$$n = \frac{jB}{eE_H}.$$

28. *a*) Demuestre que la razón del campo eléctrico de Hall E_H al campo eléctrico E_c causante de la corriente es

$$\frac{E_H}{E_c} = \frac{B}{nep},$$

donde ρ es la resistividad del material. *b*) Calcule numéricamente la razón en el problema resuelto 32-3 (Tabla 29-1.)

32-5 La fuerza magnética en un alambre portador de corriente

29. Un alambre de 62.0 cm de longitud y de 13.0 g de masa está suspendido por un par de conductores flexibles en un campo magnético de 440 mT. Encuentre la magnitud y la dirección de la corriente en el alambre que se necesita para eliminar la tensión en los conductores de sostén (Fig. 32-35).

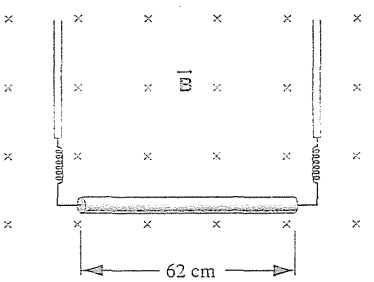


FIGURA 32-35. Ejercicio 29.

30. Un conductor horizontal en una línea de energía lleva de sur a norte una corriente de 5.12 kA. El campo magnético de la Tierra cerca de ella es de 58.0 μT, se dirige al norte y se inclina hacia abajo a 70.0° con la horizontal. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza magnética en 100 m del conductor creada por el campo magnético.

31. Estudie la posibilidad de un nuevo diseño de un tren eléctrico. Al motor lo activa la fuerza proveniente del componente vertical del campo magnético de la Tierra en un eje conductor. Se envía una corriente hacia un riel que llega a una rueda conductora, atraviesa el eje y después llega a otra rueda conductora; luego regresa a la fuente a través de otro riel. *a*) ¿Qué corriente se necesita para generar una modesta fuerza de 10 kN? Suponga que el componente vertical del campo magnético de la Tierra es 10 μT y que el eje mide 3.0 m de longitud. *b*) ¿Cuánta energía se perderá por cada ohm de resistencia en los rieles? *c*) ¿Es el tren totalmente irrealista o simplemente un poco irrealista?

32. Un alambre metálico de masa m se desliza sin fricción en dos rieles horizontales separados por una distancia d, según se aprecia en la figura 32-36. La vía se encuentra en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Una corriente constante i fluye del generador G en un riel, cruza el alambre y vuelve al otro riel. Calcule la velocidad (rapidez y dirección) del alambre en función del tiempo, suponiendo que está en reposo en $t = 0$.

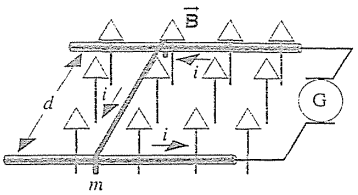


FIGURA 32-36. Ejercicio 32.

33. Un conductor largo y rígido, que se encuentra en el eje x, transporta una corriente de 5.0 A en la dirección $-x$. Existe un campo magnético $\vec{B}$, dado por $\vec{B} = (3\text{ mT})\hat{i} + (8\text{ mT/m}^2)x^2\hat{j}$. Calcule la fuerza en el segmento de 2.0 m del conductor que se halla entre $x = 1.2$ m y $x = 3.2$ m.

34. Una varilla de cobre de 1.15 kg descansa sobre dos rieles horizontales separados por una distancia de 95.0 cm y lleva una corriente de 53.2 A de uno a otro. El coeficiente de fricción estática es de 0.58. Determine el campo magnético más pequeño (no necesariamente vertical) que haría deslizarse la barra.

32-6 El par en una espira de corriente

35. Una espira de corriente de una vuelta, que transporta una corriente de 4.00 A, presenta la forma de un triángulo recto con lados de 50, 120 y 130 cm. Se halla en un campo magnético uniforme de 75.0 mT de magnitud, cuya dirección es paralela a la corriente en el lado de 130 cm. *a*) Calcule la fuerza magnética en los tres lados de la espira. *b*) Demuestre que la fuerza magnética total en ella es cero.

36. La figura 32-37 muestra un espira rectangular de 20 vueltas que mide 12 cm por 5.0 cm. Transporta una corriente de 0.10 A y se encuentra articulada en un lado. Está montada con su plano en un ángulo de 33° en dirección de un campo magnético uniforme de 0.50 T. Calcule el par, alrededor de la línea de gozne, que opera sobre la espira.

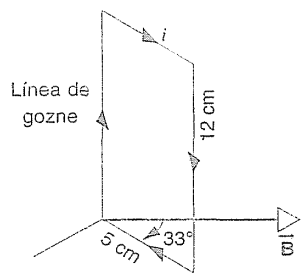


FIGURA 32-37. Ejercicio 36.

37. Un reloj estacionario y circular de pared tiene una cara de 15 cm de radio. Seis vueltas de alambre se enrollan alrededor de su perímetro; el alambre lleva una corriente de 2.0 A en dirección de las manecillas del reloj. El reloj está situado donde hay un campo magnético constante uniforme externo de 70 mT (pero marca el tiempo con absoluta precisión). Exactamente a la 1 de la tarde el horario apunta en dirección del campo magnético externo. *a*) ¿Al cabo de cuántos minutos el minutero apuntará en dirección del par en el embobinado debido al campo magnético? *b*) ¿Cuál es la magnitud de este par?

PROBLEMAS

1. Un electrón en un campo magnético uniforme tiene una velocidad $\vec{v} = (40\ \text{km/s})\hat{i} + (35\ \text{km/s})\hat{j}$. Experimenta una fuerza $\vec{F} = (-4.2\ \text{fN})\hat{i} + (4.8\ \text{fN})\hat{j}$. Si $B_x = 0$, calcule el campo magnético.
2. Un electrón tiene una velocidad inicial $(12.0\ \text{km/s})\hat{j} + (15.0\ \text{km/s})\hat{k}$ y una aceleración constante de $(2.00 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2)\hat{i}$ en una región donde hay campos eléctricos y magnéticos uniformes. Si $\vec{B} = (400\ \mu\text{T})\hat{i}$, determine el campo eléctrico $\vec{E}$.
3. Los electrones en un haz de un tubo de televisión tienen una energía cinética de 12.0 keV. La orientación del tubo es tal que los electrones se dirigen horizontalmente del sur magnético al norte magnético. El componente vertical del campo magnético de la Tierra apunta hacia abajo y posee una magnitud de 55.0 μT. *a*) ¿En qué dirección se desviará el haz? *b*) ¿Cuál es la aceleración de un electrón debida al campo magnético? *c*) ¿A qué distancia se desviará el haz al recorrer 20.0 cm por el tubo de televisión?
4. Un haz de electrones, cuya energía cinética es K, emerge de una "ventana" de láminas delgadas en el extremo de un tubo acelerador. Una placa metálica está situada a una distancia d de ella y en ángulo recto con la dirección del haz emergente (Fig. 32-38). *a*) Demuestre que podemos evitar que el haz choque contra la placa, con sólo aplicar un campo magnético B tal que

$$B \geq \sqrt{\frac{2mK}{e^2d^2}},$$

donde m y e son la masa y la carga de los electrones. *b*) ¿De qué manera deberíamos orientar B?

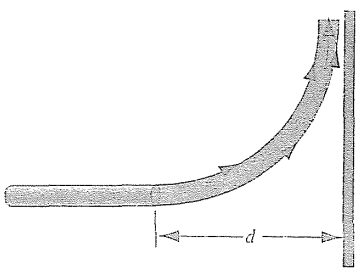


FIGURA 32-38. Problema 4.

5. El espectrómetro de masa de Bainbridge, que aparece en la figura 32-39 separa los iones que llevan la misma velocidad. Después de entrar por las ranuras S_1 y S_2 cruzan un selector de velocidades compuesto de un campo eléctrico producido por las placas cargadas P y P′, así como un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular al campo eléctrico y a la trayectoria de los iones. Los que sin desviarse pasan por los campos cruzados $\vec{E}$ y $\vec{B}$ penetran en una región donde existe un segundo campo magnético $\vec{B}'$; luego se desvían y describen trayectorias circulares. Una placa fotográfica registra su llegada. Demuestre que $q/m = E/rBB'$, donde r es el radio de la órbita circular.

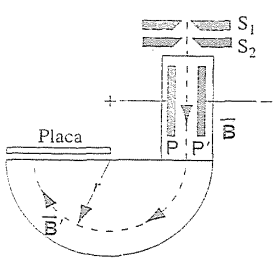


FIGURA 32-39. Problema 5.

6. La figura 32-40 muestra un arreglo con que se miden las masas de los iones. Un ion de masa m y de carga $+q$ se produce esencialmente en reposo dentro de la fuente S, cámara donde se lleva a cabo una descarga de gases. Una diferencia de potencial ΔV lo acelera y le permite entrar en un campo magnético $\vec{B}$. En éste describe un semicírculo, chocando contra una placa fotográfica a una distancia x de la ranura de entrada. Demuestre que la masa m del ion está dada por

$$m = \frac{B^2q}{8\Delta V}x^2.$$

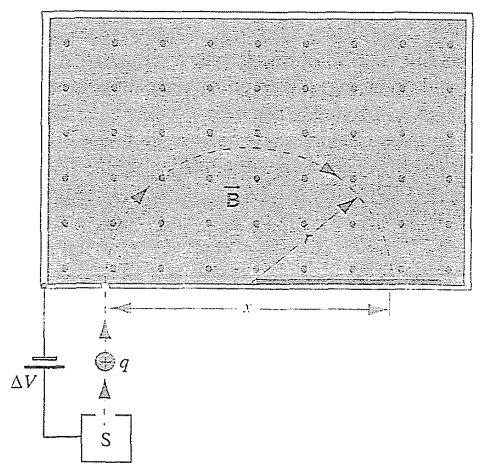


FIGURA 32-40. Problema 6.

7. Dos tipos de átomos ionizados individualmente, con igual carga q y con una masa que difiere en una cantidad pequeña Δm, se introducen en el espectrómetro de masas descrito en el problema 6. *a*) Calcule la diferencia de masa en función de ΔV, q, m (de cualquiera), B y la distancia Δx entre los puntos de la placa fotográfica. *b*) Calcule Δx para un haz de átomos de cloro ionizados individualmente cuyas masas son 35.0 y 37.0 u, si $\Delta V = 7.33$ kV y si $B = 520$ mT.
8. En un espectrómetro de masas (Prob. 6), empleado con fines comerciales, se separan de especies conexas los iones de uranio con una masa de 238 u y una carga de $+2e$. Al inicio se aceleran mediante una diferencia de potencial de 105 kV y luego entran en un campo magnético, donde recorren un arco de 180°, cuyo radio mide 97.3 cm. Después los reunimos en un vaso una vez que han cruzado una ranura de 1.20 mm de ancho y 1.14 cm de altura. *a*) ¿Qué magnitud tiene el campo magnético (perpendicular) en el separador? Si la máquina está diseñada para separar 90.0 mg de material por hora, calcule *b*) la corriente de los iones deseados en ella y *c*) la energía interna disipada en el vaso durante 1.00 h.
9. Una partícula neutra se halla en reposo dentro de un campo magnético uniforme de magnitud B. En el tiempo $t = 0$, decae

en dos partículas cargadas con una masa m cada una. *a*) Si la carga de una de ellas es $+q$, ¿cuál será la carga de la otra? *b*) Las dos se separan siguiendo trayectorias distintas que están en el plano perpendicular a $\vec{B}$. Más tarde chocan entre sí. En función de m, B y q, exprese el tiempo desde el decaimiento hasta antes de la colisión.

10. En la teoría del átomo de hidrógeno de Bohr, puede suponerse que el electrón describe una órbita circular de radio r alrededor del protón. Imaginemos que el átomo se coloca en un campo magnético, con el plano de la órbita en ángulos rectos con $\vec{B}$. *a*) Si el electrón gira en dirección de las manecillas del reloj como lo vería un observador a lo largo de $\vec{B}$, ¿aumentará o disminuirá la frecuencia angular? *b*) ¿Y en caso de que gire en dirección contraria a las manecillas? Suponga que el radio de órbita permanece inalterado. [Sugerencia: la fuerza centrípeta tiene ahora un origen parcialmente eléctrico ($\vec{F}_E$) y parcialmente magnético ($\vec{F}_B$).] *c*) Demuestre que el cambio de frecuencia de revolución causado por el campo magnético está dado aproximadamente por

$$\Delta f = \pm \frac{Be}{4\pi m}.$$

En 1896 Zeeman observó esos cambios de frecuencia. (Sugerencia: calcule la frecuencia de revolución sin el campo magnético y también con él. Efectúe la resta recordando que, como el efecto del campo magnético es muy pequeño, algunos términos que contienen B se igualarán a cero con un error pequeño.)

11. A un positrón de 22.5 eV (electrón con carga positiva) se le proyecta en un campo magnético uniforme $B = 455\ \mu$T con su vector de velocidad que forma un ángulo de 65.5° con $\vec{B}$. Determine *a*) el periodo, *b*) el paso p y *c*) el radio de la trayectoria helicoidal (Fig. 32-41).

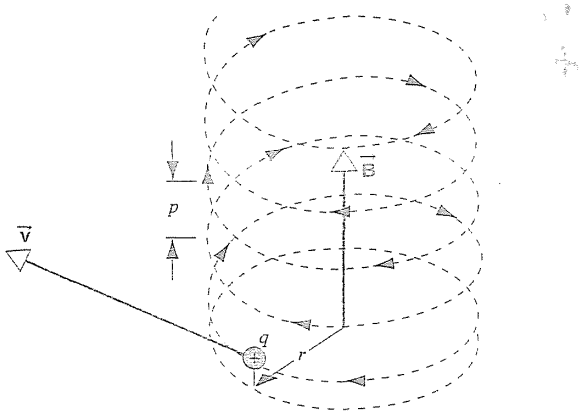


FIGURA 32-41. Problema 11.

12. La figura 32-42 muestra un alambre de forma arbitraria que transporta una corriente i entre los puntos a y b. El alambre se halla en un plano que forma ángulos rectos con un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Pruebe que la fuerza en el alambre es la misma que en un alambre recto que lleve una corriente i directamente de a a b. (Sugerencia: reemplace el alambre por una serie de "escalones" que sean paralelos y perpendiculares a la línea recta que une a y b.)

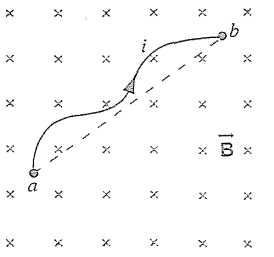


FIGURA 32-42. Problema 12.

13. Considere la partícula del ejercicio 24, sólo que esta vez pruebe (en vez de suponer) que la partícula recorre una trayectoria circular resolviendo analíticamente la segunda ley de Newton. [Sugerencia: resuelva la expresión para F_y a fin de calcular v_x; sustitúyala después en la expresión de F_x a fin de obtener una ecuación susceptible de resolverse para v_y. Haga lo mismo con v_x reemplazándola en la ecuación F_y. Finalmente obtenga $x(t)$ y $y(t)$ a partir de v_x y v_y.]

14. Por integración directa de

$$\vec{F}_B = \oint i\, d\vec{L} \times \vec{B},$$

demuestre que la fuerza neta en una espira *arbitraria* de corriente en un campo magnético uniforme es cero. (*Nota: una espira arbitraria de corriente no necesita estar en un plano.*)

15. Se introduce en mercurio un alambre en forma de U, con masa m y con longitud L, por sus dos extremos (Fig. 32-43). Se halla en un campo magnético homogéneo $\vec{B}$. Si una carga —es decir, un pulso de corriente $q = \int i dt$— se envía por el alambre, éste saltará. A partir de la altura h que alcanza, calcule el tamaño del pulso de carga o de corriente suponiendo que el tiempo del pulso de corriente es mucho más pequeño que el de vuelo. Aproveche el hecho de que el impulso de la fuerza es $\int F dt$, que es igual a mv. (Sugerencia: relacione $\int i dt$ a $\int F dt$.) Evalúe q con $B = 0.12$ T, $m = 13$ g, $L = 20$ cm y $h = 3.1$ m.

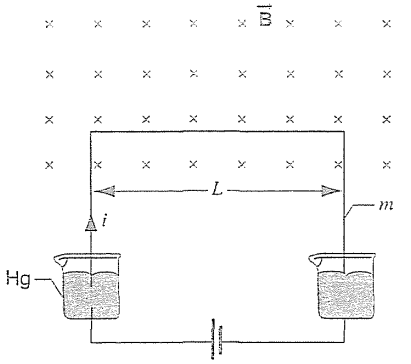


FIGURA 32-43. Problema 15.

16. Pruebe que la ecuación 32-34 se aplica a espiras cerradas de forma arbitraria y no sólo a las rectangulares como en la figura 32-26. (Sugerencia: reemplace la espira de forma arbitraria por un sistema de espiras aproximadamente rectangulares que casi sean equivalentes a ella en lo tocante a la distribución de corriente.)

17. Una longitud L de alambre transporta una corriente i. Demuestre que, si el alambre se enrolla en una bobina circular, el par máximo en un campo magnético cualquiera se produce cuando la bobina tiene una vuelta solamente y el par posee la magnitud

$$\tau = \frac{1}{4\pi} L^2 iB.$$

18. La figura 32-44 contiene un anillo de alambre de radio a, que forma ángulos rectos con la dirección general de un campo magnético divergente de simetría radial. En el anillo el campo es en todas partes de igual magnitud B y su dirección en el anillo forma siempre un ángulo θ con la normal al plano del anillo. Los alambres de plomo trenzados no influyen en el problema. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza que el campo ejerce sobre el anillo, si éste lleva una corriente i como se aprecia en la figura.

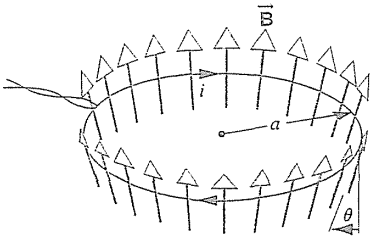


FIGURA 32-44. Problema 18.

19. La figura 32-45 muestra un cilindro de madera con una masa $m = 262$ g y una longitud $L = 12.7$ cm y con $N = 13$ vueltas de alambre enrolladas longitudinalmente alrededor de él, de manera que el plano de la espira de alambre contiene el eje del cilindro. ¿Cuál es la corriente mínima a través de la espira que impida que el cilindro ruede por un plano inclinado en un ángulo θ con la horizontal cuando hay un campo magnético vertical uniforme de 477 mT, si el plano de los devanados es paralelo al plano inclinado?

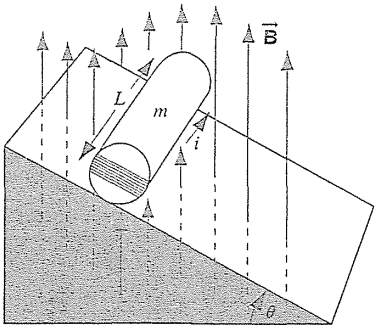


FIGURA 32-45. Problema 19.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Usando el campo magnético de la ecuación 32-17 con $B_0 = 0.15$ T, obtenga la trayectoria de una partícula alfa que al inicio se mueve por el origen en la dirección x con una velocidad $v_0 = 3.0 \times 10^6$ m/s (Fig. 32-17). Determine el tiempo que la partícula tarda en regresar a su punto de partida y en alcanzar su distancia máxima del origen. Compare los valores anteriores con los correspondientes en el caso de un campo uniforme B_0.

2. Un campo magnético con simetría cilíndrica en cierta región del espacio está dado por $\vec{B} = (B_0 r/a)\hat{k}$ donde r es la distancia perpendicular con el eje z. Determine la trayectoria de un electrón emitido de un punto en el eje z, con una velocidad inicial de $0.050c$ perpendicular al eje. ¿Cuál es la distancia máxima que recorrerá el electrón desde el eje antes de retornar?

CAPÍTULO 33

EL CAMPO MAGNÉTICO DE UNA CORRIENTE

En el capítulo anterior estudiamos el efecto de un campo magnético sobre una carga en movimiento. Ahora vamos a ocuparnos de la fuente del campo; y en este capítulo examinamos el campo magnético que producen las cargas en movimiento, sobre todo las corrientes en alambres.

En analogía con el estudio anterior de los campos eléctricos de algunas distribuciones simples de carga, en este capítulo investigamos los campos magnéticos producidos por algunas distribuciones simples de corriente: los alambres rectos y las espiras circulares. Por último mostramos que la relación entre los campos eléctricos y magnéticos es más profunda que la mera semejanza de las ecuaciones: abarca la transformación de un campo en otro, cuando las distribuciones de carga o de corriente son vistas desde varios marcos inerciales.

33-1 EL CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO

En el capítulo anterior explicamos la fuerza experimentada por una partícula cargada que se desplaza en un campo magnético. En analogía con el campo eléctrico, en que las partículas cargadas en reposo son las fuentes del campo y su partícula de prueba, cabría suponer lo siguiente: las cargas eléctricas en movimiento, que según demostramos ya son partículas de prueba del campo magnético, podrían servirle también de fuentes.

En 1820 Hans Christian Oersted* probó la expectativa anterior, pues observó que —como se indica en la figura 33-1—, cuando se pone una brújula cerca de un alambre recto que lleva corriente, la aguja se alinea de modo que es tangente al círculo trazado alrededor del alambre (despreciando la influencia del campo magnético de la Tierra en la brújula). Su descubrimiento significó el primer nexo entre electricidad y magnetismo.

Las pruebas experimentales directas del campo magnético de una carga en movimiento se consiguieron apenas en 1876, en un experimento efectuado por Henry Rowland,** que aparece esquemáticamente en la figura 33-2. Preparó un disco de carga (conectando una batería a una capa de oro depositada en la superficie de un disco de material aislante). Al girarlo alrededor de su eje, logró producir cargas móviles y demostró su efecto magnético, suspendiendo cerca del disco una aguja magnetizada.

En este capítulo nos proponemos estudiar la interacción magnética entre dos cargas en movimiento, tal como Coulomb analizó la interacción eléctrica entre cargas en reposo. Pudo medir la fuerza electrostática directamente, y en teoría debemos ser capaces de hacer lo mismo: medir la fuerza magnética entre dos cargas en movimiento. Por desgracia, la fuerza es extremadamente pequeña y difícil de medir; por ejemplo, en el experimento de Rowland el campo magnético producido por su disco cargado en rotación fue apenas 0.00001 del campo de la Tierra.

Pese al tamaño tan pequeño del campo magnético de una sola carga en movimiento, desde el punto de vista conceptual

* Hans Christian Oersted (1777-1851) fue un físico y químico danés. Su descubrimiento de que el alambre portador de corriente puede desviar la aguja de un compás lo realizó inesperadamente durante una conferencia en la Universidad de Copenhagen. La unidad de la intensidad del campo magnético (H), el oersted, se llama así en su honor.

** Henry Rowland (1848-1901) fue un médico norteamericano a quien hoy se le recuerda por su revolucionario trabajo en el desarrollo de los reticulados, que utilizó para precisar en la espectroscopia óptica; por ejemplo, las mediciones de longitudes de onda del espectro solar. Rowland fungió como el primer presidente de la American Physical Society

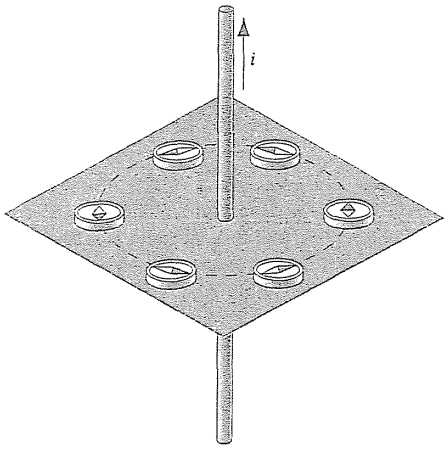


FIGURA 33-1. Experimento de Oersted. La dirección de la aguja de la brújula siempre es perpendicular a la de la corriente del alambre.

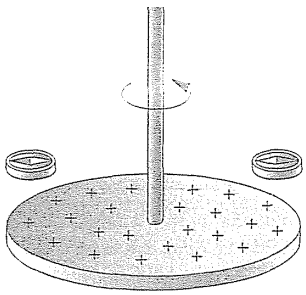


FIGURA 33-2. Diagrama esquemático del experimento de Rowland. Las cargas móviles en la superficie de oro del disco giratorio producen un campo magnético que desvía la aguja de la brújula. En la práctica, la deflexión es muy pequeña y requiere un aparato mucho más sensible que una brújula para ser detectada.

resulta más fácil comenzar nuestra exposición de cómo una sola carga en movimiento origina un campo magnético. Más adelante veremos por qué este enfoque no es práctico y por qué es más fácil producir campos magnéticos en el laboratorio utilizando cargas en movimiento por medio de corrientes en alambres.

Por eso vamos a efectuar un "experimento mental", donde proyectamos una carga simple q con una velocidad $\vec{v}$ y detectamos el campo mediante una aguja magnética suspendida que puede alinearse en cualquier dirección. Para evitar los problemas de la relatividad, habrá que conservar la velocidad de la partícula pequeña (en comparación con la de la luz) dentro de nuestro marco de referencia. Preparamos el experimento en una región donde el campo magnético de la Tierra es insignificante. (No es necesario viajar al espacio exterior para encontrarla; en el laboratorio podemos servirnos de bobinas portadoras de corriente para crear campos que cancelen el campo terrestre.) La figura 33-3*a*, contiene el resultado de algunas mediciones del campo magnético en varios lugares. La carga en movimiento origina un campo magnético $\vec{B}$, y la aguja indica su dirección en cualquier sitio. En teoría, como se describe en la sección 32-2, podríamos determinar también la magnitud del campo; por ejemplo, medir la fuerza en una segunda partícula cargada en movimiento.

Si pudiéramos realizar los experimentos anteriores, descubriríamos algunas propiedades del campo magnético debido a una carga en movimiento:

1. La fuerza del campo es directamente proporcional a la velocidad v y también a la carga q.

2. Si $\vec{v}$ invierte la dirección o si q cambia de signo, se invierte la dirección $\vec{B}$.

3. El campo es cero en los puntos a lo largo de la dirección de $\vec{v}$ (hacia adelante y también hacia atrás). El cambio varía como sen ϕ en otras direcciones en relación con $\vec{v}$, según se observa en la figura 33-3*b*.

4. $\vec{B}$ es tangente a los círculos trazados alrededor de $\vec{v}$ en planos perpendiculares a $\vec{v}$, con la dirección $\vec{B}$ determinada por la regla de la mano derecha (apunte el pulgar en dirección de $\vec{v}$, y sus dedos se enrollarán en dirección de $\vec{B}$). En un círculo cualquiera, la magnitud de $\vec{B}$ es la misma en todos los puntos.

5. En los puntos de una línea perpendicular a la dirección del movimiento de q (como en la Fig. 33-3*b*) o, equivalente-

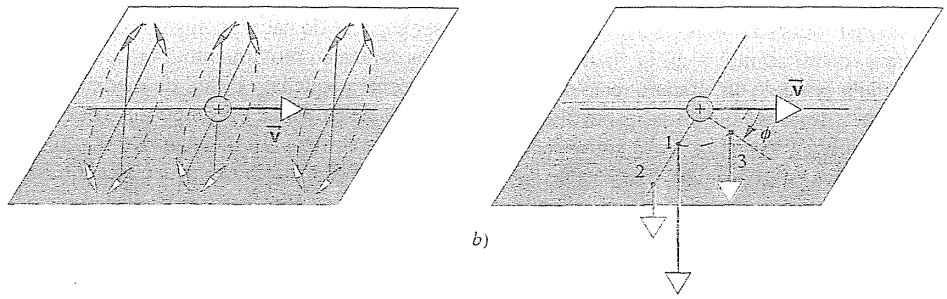


FIGURA 33-3. *a*) Una aguja de compás suspendida libremente indica la dirección del campo magnético en varios lugares, debido a una carga eléctrica en movimiento. *b*) El campo en el punto 2 es $\frac{1}{4}$ del campo en el punto 1, porque el punto 2 está al doble de la distancia de la carga. El punto 3 se halla a la misma distancia de la carga que el punto 1, pero el campo en el punto 3 es más pequeño que en el punto 1 por el factor sen ϕ.

mente, en los círculos de radio creciente, dibujados alrededor de la línea de movimiento, descubrimos que la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ disminuye como $1/r^2$ donde r es la distancia de q al punto de observación.

La forma más simple de definir $\vec{\mathbf{B}}$ que es consistente con nuestras observaciones se describe esquemáticamente en la figura 33-4. En un punto arbitrario P (donde queremos determinar el campo magnético), $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al plano determinado por $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$ (el vector que localiza P en relación con q). Nuestras observaciones nos indican que la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ es directamente proporcional a q, v y sen ϕ e inversamente proporcional a r^2:

$$B \propto \frac{qv \operatorname{sen} \phi}{r^2}. \tag{33-1}$$

La dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ en relación con $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$ nos recuerda la regla con que se obtiene un producto vectorial (cruz). En la expresión $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$, el vector $\vec{\mathbf{c}}$ es perpendicular al plano que contiene $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$. Por consiguiente, podemos escribir la ecuación 31-1 en forma vectorial así

$$\vec{\mathbf{B}} = K \frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \tag{33-2}$$

donde K es una constante de proporcionalidad por determinar. Aquí $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario en dirección de $\vec{\mathbf{r}}$. (El lector querrá repasar la Sec. 25-4, donde utilizamos una notación similar de vector unitario para expresar la ley de Coulomb.) Puesto que $\hat{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}/r$, podemos escribir la ecuación como

$$\vec{\mathbf{B}} = K \frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^3}. \tag{33-3}$$

A pesar de que el denominador contiene un factor de r^3, el campo varía como $1/r^2$, porque también el numerador contiene un factor de r.

Para obtener la expresión completa del campo magnético de una carga en movimiento, tan sólo hay que determinar la constante de proporcionalidad en la ecuación 33-3, del mismo modo que insertamos la constante $1/4\,\pi\epsilon_0$ en la ley de Coulomb. Las constantes en las ecuaciones del campo eléctrico y magnético no son cantidades independientes: se relacionan por medio de la velocidad de la luz, según veremos en el capítulo 38. Y como dicha velocidad es una magnitud definida, disponemos de dos opciones: 1) aplicar la ley de la fuerza eléctrica (ley de Coulomb) para definir la constante eléctrica y aprovechar después el valor de la velocidad de la luz para determinar la constante magnética o 2) usar la ley de la fuerza magnética (la fuerza entre los alambres portadores de corriente, que explicaremos más adelante en el capítulo) con el fin de definir la constante magnética y utilizar luego el valor de la velocidad de la luz para obtener la constante eléctrica. Escogemos el segundo método, puesto que la fuerza magnética entre los alambres portadores de corriente puede medirse más exactamente que la fuerza eléctrica entre las cargas.

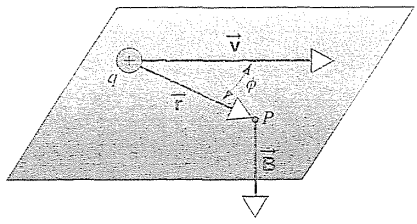


FIGURA 33-4. El campo magnético en el punto P generado por una carga en movimiento es perpendicular al plano que contiene a $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$.

La constante de proporcionalidad K en la ecuación 33-3 se define en unidades del SI para que posea en valor exacto 10^{-7} tesla · metro/ampere (T · m/A). No obstante, como en el caso de la electrostática, nos parece apropiado escribir la constante en una forma diferente:

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}.$$

A la constante μ_0 se le conoce tradicionalmente como *constante de permeabilidad*, pero aquí la designaremos simplemente como *constante magnética*. Posee el valor exacto:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}.$$

La constante magnética μ_0 interviene al calcular los campos magnéticos de modo similar al de la constante eléctrica ϵ_0 al calcular los campos eléctricos. Relacionamos las dos constantes por medio de la velocidad de la luz: $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$. La definición de μ_0 y de c entonces determina ϵ_0 exactamente.

Ahora podemos escribir la expresión completa del campo magnético producido por una carga en movimiento:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^3}. \tag{33-4}$$

Podemos escribir la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ así

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|q| v \operatorname{sen} \phi}{r^2}, \tag{33-5}$$

donde ϕ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$.

Basándonos en estos experimentos pensados, hemos logrado descubrir varias propiedades del campo magnético producido por una carga en movimiento, entre ellas la importante relación geométrica entre la dirección de la velocidad y la del campo. Ahora nos será fácil transferir esta relación al caso más útil del campo magnético producido por corrientes en los alambres.

¿Por qué no es de mucha utilidad el campo magnético especificado en la ecuación 33-4 o 33-5? Cuando estudiamos los campos eléctricos, nos concentramos en el campo eléctrico estacionario generado por cargas cuya ubicación no cambiaba. A este tema le dimos el nombre de *electrostática*. En este momento nos interesa la *magnetostática*: la producción de campos magnéticos estacionarios por cargas cuyo movimiento permanece inalterado. La carga individual en movimiento de la figura 33-4 no cumple con este criterio: un instante después de la situación ilustrada en la figura, la carga está en otro lugar respecto al punto P y no existe carga alguna en el lugar anterior. Un momento después habrá otro campo magnético en P. Para mantener un campo magnético estacionario allí, producido por una carga en movimiento en el sitio exacto indicado, habría que planear para destruirla tan pronto salga de ese lugar e introducir otra nueva en ese lugar con la misma velocidad, cosa muy

poco probable. En cambio, una corriente estacionaria realiza exactamente lo que queremos: un movimiento inalterado de cargas que produce un campo magnético estacionario. En la siguiente sección adaptamos las ecuaciones 33-34 y 33-5 al caso de las corrientes estacionarias.

PROBLEMA RESUELTO 33-1. Una partícula alfa ($q = +2e$) se desplaza en la dirección positiva x con una velocidad de $0.0050c = 1.50 \times 10^6$ m/s. Cuando se halla en el origen, calcule el campo magnético en *a*) P_1: $x = 0$, $y = 0$, $z = +2.0$ cm; *b*) P_2: $x = 0$, $y = +2.0$ cm, $z = 0$; *c*) P_3: $x = +1.0$ cm, $y = +1.0$ cm, $z = +1.0$ cm.

Solución *a*) En la figura 33-5, $\vec{r}_1$ está en la dirección $+z$ (que apunta de q a P_1). La longitud de $\vec{r}_1$ es la distancia desde el origen hasta P_1, o sea 2.0 cm. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{r}_1$ se hallan en el plano xz; $\vec{B}$ debe ser perpendicular a él o seguir la dirección y positiva o negativa. La dirección de $\vec{v} \times \vec{r}_1$ determina que $\vec{B}$ se halla en la dirección $-y$. La magnitud de $\vec{B}$ está dada por la ecuación 33-5:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \operatorname{sen}\phi}{r_1^2}$$

$$= (10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})\frac{(2)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.50 \times 10^6\ \text{m/s})(\operatorname{sen} 90°)}{(0.020\ \text{m})^2}$$

$$= 1.2 \times 10^{-16}\ \text{T}.$$

b) En P_2, $\vec{r}_2$ está en la dirección $+y$ y, por tanto, $\vec{v} \times \vec{r}_2$ determina que $\vec{B}$ siga la dirección $+z$. Puesto que la distancia entre q y P_2 es la misma que la existente entre q y P_1, la magnitud de $\vec{B}$ en P_2 es la misma que obtuvimos en la parte *a*) para P_1. De hecho, $\vec{B}$ tiene esta misma magnitud en todos los puntos del círculo de radio $r = 2.0$ cm trazados alrededor de q en el plano yz.

c) En P_3, $r_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.73$ cm. El vector $\vec{r}_3$ de q a P_3 y el vector $\vec{v}$ forman un plano en un ángulo de 45° con los ejes y y z (Fig. 33-5). El ángulo ϕ entre $\vec{v}$ y $\vec{r}_3$ es 54.7°, como el lector podrá mostrarlo. La magnitud de $\vec{B}$ en P_3 es

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \operatorname{sen}\phi}{r_3^2}$$

$$= (10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})$$

$$\times \frac{(2)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.50 \times 10^6\ \text{m/s})(\operatorname{sen} 54.7°)}{(0.0173\ \text{m})^2}$$

$$= 1.3 \times 10^{-16}\ \text{T}.$$

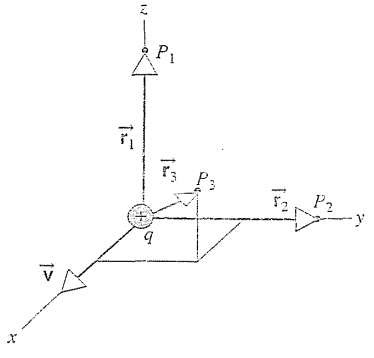


FIGURA 33-5. Problema resuelto 33-1.

$\vec{B}$ es perpendicular al plano de $\vec{r}_3$ y $\vec{v}$. Sus componentes cartesianos B_y y B_z tienen igual magnitud, sólo que B_y es negativa y B_z es positiva. En forma equivalente, $\vec{B}$ es tangente al círculo trazado alrededor del eje x pero centrado en $x = 1.0$ cm, no $x = 0$. Este círculo tiene un radio $\sqrt{x^2 + z^2} = 1.41$ cm. En este caso nótese que, a diferencia de las partes *a*) y *b*), r_3 no es el radio del círculo al que $\vec{B}$ es tangente.

Los campos magnéticos que encontramos en este problema son muy pequeños: aproximadamente 12 órdenes de magnitud menores que el campo de la Tierra. En este cálculo se ve por qué es imposible intentar medir la fuerza entre las partículas cargadas individuales en movimiento. Sin embargo, los campos producidos por partículas individuales en las distancias r correspondientes a las dimensiones atómicas (10^{-10} m) son del orden de 1 T, que sin duda puede producir efectos mensurables. A nivel atómico, la fuerza entre las partículas cargadas en movimiento generalmente tienen efectos observables, como se estudia en el capítulo 35.

33-2 EL CAMPO MAGNÉTICO DE UNA CORRIENTE

En el laboratorio producimos campos magnéticos usando alambres portadores de corriente, y no el movimiento de cargas individuales. En esta sección ampliamos los resultados de la sección anterior para poder obtener el campo magnético producido por una corriente. La estrategia consiste en calcular el campo en un elemento corto del alambre, para aplicar después el método de integración a fin de determinar el campo debido a la corriente en todo el alambre.

Este método se parece al que empleamos en la sección 26-4 para determinar el campo eléctrico generado por una distribución continua de carga. En el capítulo 26, comenzamos con el campo eléctrico debido a una carga puntual, que puede escribirse como $\vec{E} = (q/4\ \pi\epsilon_0 r^2)\hat{r}$. Para calcular el campo eléctrico producido por una distribución continua de carga, imaginamos que el objeto se compone de elementos infinitesimales de carga dq, cada uno de los cuales podría ser tratado como una carga puntual al calcular su contribución $d\vec{E}$ al campo eléctrico: $d\vec{E} = (dq/4\ \pi\epsilon_0 r^2)\hat{r}$. El campo eléctrico total se obtiene sumando las contribuciones de todos los elementos de carga: $\vec{E} = \int d\vec{E}$, que es una forma abreviada de representar el campo total de los componentes vectoriales: $E_x = \int dE_x$ y así sucesivamente.

¿Cómo representamos un elemento de la corriente en el cálculo análogo de un campo magnético? Una pista de cómo proceder la encontramos al revisar la relación, señalada en el capítulo anterior, entre la fuerza magnética ejercida sobre la carga individual en movimiento, $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ (Ec. 32-3) y la fuerza magnética ejercida sobre un elemento de la corriente, $d\vec{F}_B = i\,d\vec{L} \times \vec{B}$ (Ec. 32-29). En esta ecuación, $d\vec{L}$ es un vector cuya longitud es igual a la del elemento del alambre y cuya dirección es la de la corriente en ese elemento. En otras palabras, con sólo reemplazar $q\vec{v}$ por $i\,d\vec{L}$ podemos pasar de una expresión que describa la fuerza en la carga individual móvil a otra que describa la fuerza en un elemento de la corriente.

Podemos modificar la ecuación 33-4 exactamente en la misma forma. Buscamos las contribuciones $d\vec{B}$ al campo

magnético producido por un elemento de corriente, representado por un elemento de carga dq que se desplaza con una velocidad $\vec{v}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dq\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}. \qquad (33\text{-}6)$$

Podemos escribir la velocidad como $\vec{v} = d\vec{s}/dt$, de modo que la carga dq se mueve a través del desplazamiento $d\vec{s}$ en el intervalo dt. Ahora tenemos

$$dq\,\vec{v} = dq\,\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dq}{dt}\,d\vec{s} = i\,d\vec{s}. \qquad (33\text{-}7)$$

Sustituyendo la ecuación 33-7 por la ecuación 33-6, obtenemos

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \qquad (33\text{-}8)$$

A la expresión anterior se le conoce como *ley de Biot-Savart*. La dirección de $d\vec{B}$ es la misma que la de $d\vec{s} \times \vec{r}$. La magnitud del elemento de campo $d\vec{B}$ es

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\operatorname{sen}\phi}{r^2}, \qquad (33\text{-}9)$$

donde ϕ es el ángulo entre el vector $d\vec{s}$, que indica la dirección de la corriente, y el vector $\vec{r}$ del elemento de corriente al punto de observación P. La figura 33-6 muestra las relaciones vectoriales; compárela con la figura 33-34 y advierta la gran semejanza que guardan.

Si queremos determinar el campo total $\vec{B}$ producido por la distribución total de corriente, hay que integrar en todos los elementos de la corriente $i\,d\vec{s}$:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\,d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\,d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \qquad (33\text{-}10)$$

Como lo hicimos en el capítulo 26 con los campos eléctricos, al calcular esta integral habrá que tener en cuenta generalmente que no todos los elementos de $d\vec{B}$ siguen la misma dirección (Sec. 26-4).

A continuación veremos cómo aplicar la ley de Biot-Savart para calcular los campos magnéticos de algunos alambres portadores de corriente de varias formas.

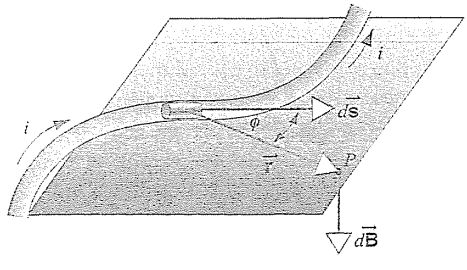


FIGURA 33-6. Campo magnético $d\vec{B}$ producido por un elemento de un alambre portador de corriente. En analogía con la figura 33-4, el campo es perpendicular al plano que contiene a $d\vec{s}$ y $\vec{r}$.

Un segmento de alambre recto

Ejemplificamos el uso de la ley de Biot-Savart aplicándola al cálculo del campo magnético creado por una corriente i en un segmento de alambre recto de longitud L. En la figura 33-7 vemos la geometría en cuestión. El alambre se halla en el eje z, y queremos encontrar $\vec{B}$ en el punto P del eje y, a una distancia d del alambre. El centro de éste se encuentran en el origen, por lo cual P está en el sector perpendicular del alambre. El primer paso del cálculo consiste en escoger un elemento arbitrario del alambre $i\,d\vec{s}$, el cual está situado en la coordenada z en relación con el origen. La contribución $d\vec{B}$ de este elemento al campo en P está dada por la ecuación 33-8 e incluye el producto vectorial (cruz) $d\vec{s} \times \vec{r}$. Con la regla de la mano derecha es posible demostrar que, en la geometría de la figura 33-7, $d\vec{s} \times \vec{r}$ es un vector que apunta en la dirección x negativa; vemos que esto es verdad sin importar dónde sobre el alambre escogemos el elemento de corriente. Todos los elementos $i\,d\vec{s}$ del alambre nos dan una $d\vec{B}$ en la dirección x negativa; por tanto, cuando sumamos todos los elementos $d\vec{B}$, descubriremos que el campo total sigue la dirección x negativa. Como ahora ya conocemos la dirección de $\vec{B}$, podemos concentrarnos en calcular su magnitud por medio de la ecuación 33-9.

Con $d\vec{s}$ en la dirección z tenemos $ds = dz$, y z será nuestra variable de integración evaluando entre $-L/2$ y $+L/2$. Para integrar la ecuación 33-9, hemos de expresar primero ϕ y r en función de la variable de integración z:

$$r = \sqrt{z^2 + d^2}$$

y

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}(\pi - \phi) = \frac{d}{\sqrt{z^2 + d^2}}.$$

Al efectuar las sustituciones anteriores en la ecuación 33-9, obtenemos

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dz\,\operatorname{sen}\phi}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d}{(z^2 + d^2)^{3/2}}\,dz. \qquad (33\text{-}11)$$

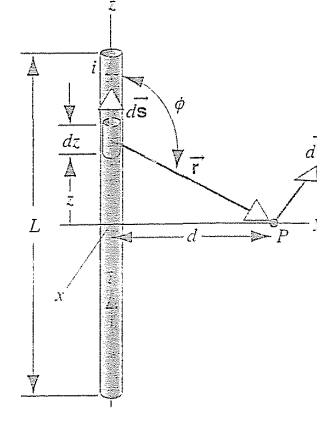


FIGURA 33-7. Un elemento $i\,d\vec{s}$ en un segmento de alambre recto crea en el punto P un campo $d\vec{B}$ en la dirección x negativa.

Resolvemos la integral y de ese modo calculamos el campo total:

$$B = \frac{\mu_0 id}{4\pi}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dz}{(z^2+d^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d}\frac{z}{(z^2+d^2)^{1/2}}\Bigg|_{z=-L/2}^{z=+L/2}$$

o

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi d}\frac{L}{(L^2/4+d^2)^{1/2}}. \qquad (33\text{-}12)$$

En el límite de un alambre muy largo (esto es, $L >> d$), la ecuación 33-12 queda así

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}. \qquad (33\text{-}13)$$

Este problema nos recuerda a su equivalente electrostático. Mediante los métodos de integración y la ley de Coulomb obtuvimos una expresión para $\vec{E}$ producido por una larga varilla cargada (Sec. 26-4). El mismo problema lo resolvimos usando la ley de Gauss (Sec. 27-5). Más adelante vamos a estudiar una ley de campos magnéticos, la de Ampère, que se parece a la de Gauss porque simplifica el cálculo del campo magnético en los casos (como éste) que presentan gran simetría.

Como lo hicimos con los campos eléctricos, podemos representar el campo magnético de un alambre portador de corriente mediante sus líneas. La figura 33-8 contiene una serie de líneas de un alambre largo y recto. Forman círculos concéntricos a su alrededor, como lo propuso el experimento de Oersted (Fig. 33-1) y como lo indica el patrón de limaduras de hierro cerca del alambre (Fig. 33-9).

En cualquier punto, la dirección de $\vec{B}$ es tangente a la línea de campo en ese punto. El campo es grande donde las líneas están cerca una de otra (en la proximidad del alambre por ejemplo) y pequeño donde están más separados (distantes del alambre). En contraste con las líneas del campo eléctrico producidas por la carga, que comienzan en cargas positivas y terminan en negativas, las del campo magnético provenientes de las corrientes forman espiras continuas sin inicio ni fin. Para encontrar la dirección de las líneas de campo se emplea la regla de la mano derecha: si cogiéramos el alambre en la mano derecha con el pulgar en dirección de la corriente, los dedos se enrollarían alrededor del alambre en dirección del campo magnético.

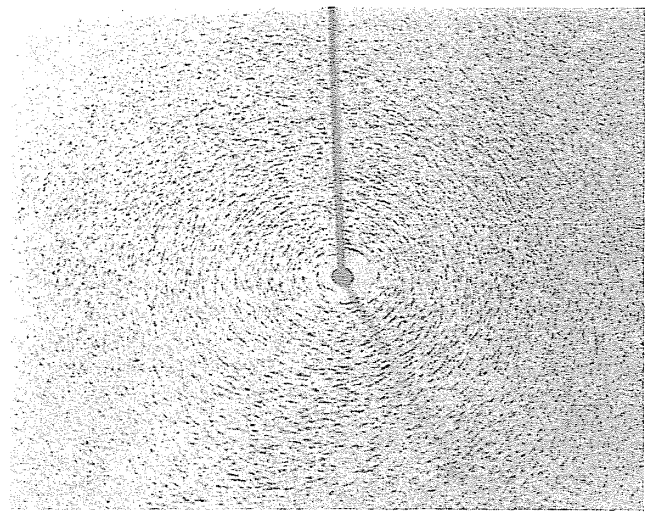


FIGURA 33-9. El alambre vertical transporta una corriente, que crea un campo magnético. Las limaduras de hierro esparcidas en el cartón muestran el patrón de círculos concéntricos que representan al campo.

Una espira circular de corriente

La figura 33-10 muestra una espira circular de radio R que lleva una corriente i. Calculemos $\vec{B}$ en un punto P del eje, situado a una distancia z del centro de dicha espira.

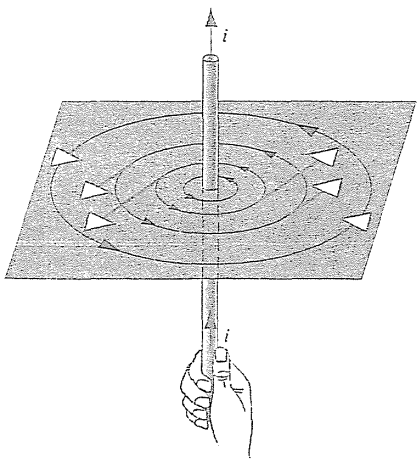


FIGURA 33-8. Las líneas del campo magnético son círculos concéntricos en un alambre largo, recto y portador de corriente. Su dirección está dada por la regla de la mano derecha.

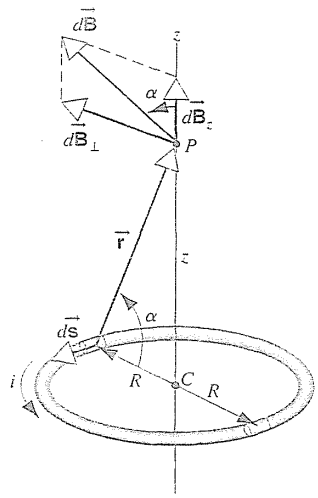


FIGURA 33-10. Espira circular de corriente. El elemento $i\,d\vec{s}$ de la espira crea un campo $d\vec{B}$ en un punto P en el eje de la espira.

El ángulo ϕ entre el elemento de corriente $i\,d\vec{s}$ y $\vec{r}$ es de 90°. Basándonos en la ley de Biot-Savart, sabemos que el vector $d\vec{\mathbb{B}}$ de este elemento está en ángulo recto con el plano formado por $i\,d\vec{s}$ y $\vec{r}$ y, por ello, se encuentra en ángulo recto con $\vec{r}$, como se aprecia en la figura.

Resolvamos $d\vec{\mathbb{B}}$ en dos componentes: uno, $d\vec{\mathbb{B}}_z$, a lo largo del eje de la espira y el otro, $d\vec{\mathbb{B}}_\perp$, en ángulos rectos con él. Únicamente $d\vec{\mathbb{B}}_z$ contribuye al campo magnético total $\vec{\mathbb{B}}$ en el punto P. Se deduce esto porque los componentes $d\vec{\mathbb{B}}_z$ para todos los elementos de corriente se hallan en el eje y se suman directamente; no obstante, los componentes $d\vec{\mathbb{B}}_\perp$ apuntan en direcciones distintas perpendiculares al eje y, por simetría, la suma de todos los $d\vec{\mathbb{B}}_\perp$ en la espira completa es cero. (Un elemento de corriente diametralmente opuesto, indicado en la Fig. 33-10, produce la misma $d\vec{\mathbb{B}}_z$ pero $d\vec{\mathbb{B}}_\perp$ en dirección contraria.) Podemos, pues, reemplazar la integral vectorial en todos los $d\vec{\mathbb{B}}$ por una integral en el componente z exclusivamente, y la magnitud del campo está dada por

$$B = \int dB_z. \tag{33-14}$$

En el elemento de corriente de la figura 33-10, la ley de Biot-Savart (Ec. 33-9) nos da

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\,\operatorname{sen} 90°}{r^2}. \tag{33-15}$$

También tenemos

$$dB_z = dB\cos\alpha,$$

que, al combinarse con la ecuación 33-15, nos da

$$dB_z = \frac{\mu_0 i\cos\alpha\,ds}{4\pi r^2}. \tag{33-16}$$

La figura 33-10 muestra que r y α no son independientes entre sí. Expresémoslas en función de z, la distancia entre el centro de la espira y el punto P. Las relaciones son

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

y

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Al sustituir los valores anteriores en la ecuación 33-16 para dB_z se obtiene

$$dB_z = \frac{\mu_0 iR}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}\,ds. \tag{33-17}$$

Nótese que i, R y z tienen los mismos valores en todos los elementos de corriente. La integración de esta ecuación nos da

$$B = \int dB_z = \frac{\mu_0 iR}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}\int ds \tag{33-18}$$

o bien, al observar que $\int ds$ es simplemente la circunferencia de la espira ($= 2\pi R$),

$$B = \frac{\mu_0 iR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{33-19}$$

Podemos repetir el cálculo anterior para encontrar el campo en el centro de la espira. En este caso $r = R$ en todas partes, y la ley de Biot-Savart nos da

$$B = \int dB_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\int ds. \tag{33-20}$$

Si integramos alrededor del círculo, una vez más la integral es $2\pi R$, y así que

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R}, \tag{33-21}$$

que podríamos haber obtenido haciendo $z = 0$ en la ecuación 33-19. Sin embargo, podemos emplear este método para conseguir un resultado más general cuando la corriente no fluya en un círculo completo, sino en un arco de círculo. Supóngase que el arco subtiende un ángulo θ en su centro. Entonces en la ecuación 33-20 la integral ofrece no la circunferencia entera del círculo, sino sólo la longitud de arco $R\theta$ (que es igual a $2\pi R$ cuando $\theta = 2\pi$). Así, el campo en el centro del arco será

$$B = \frac{\mu_0 i\theta}{4\pi R}. \tag{33-22}$$

En esta ecuación el ángulo θ debe expresarse en radianes. Una vez más la regla de la mano derecha da la dirección del campo magnético, que está a lo largo del eje z.

Si $z >> R$ y si, por lo mismo, los puntos cercanos a la espira no se tienen en cuenta, la ecuación 33-19 se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 iR^2}{2z^3}. \tag{33-23}$$

Esta dependencia del campo respecto al cubo inverso de la distancia nos recuerda el campo eléctrico de un dipolo (consúltense la Ec. 26-12 y también el Prob. 1 del capítulo 26 tocante al campo en el eje del dipolo). A menudo conviene suponer que una espira de alambre es un *dipolo magnético*. Del mismo modo que el comportamiento eléctrico de muchas moléculas se caracteriza a veces a partir de su momento de dipolo, también el comportamiento magnético de los átomos puede describirse atendiendo a su *momento de dipolo magnético*. En este último caso, la espira de corriente se origina en la circulación de los electrones alrededor del núcleo. En el capítulo 35 nos ocuparemos de los momentos de dipolo magnético de los átomos.

PROBLEMA RESUELTO 33-2. En el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr, el electrón circula alrededor del núcleo en una trayectoria circular de radio 5.29×10^{-11} m, con una frecuencia f de 6.60×10^{15} Hz (rev/s). ¿Qué valor de B se produce en el centro de la órbita?

Solución La corriente es la rapidez con que la carga pasa por un punto cualquiera de la órbita y está dada por

$$i = ef = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(6.60 \times 10^{15}\ \text{Hz}) = 1.06 \times 10^{-3}\ \text{A}.$$

El campo magnético B en el centro de la órbita está dado por la ecuación 33-21,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(1.06 \times 10^{-3}\ \text{A})}{2(5.29 \times 10^{-11}\ \text{m})} = 12.6\ \text{T}.$$

33-3 DOS CORRIENTES PARALELAS

En esta sección utilizamos largos alambres portadores de corrientes paralelas (o antiparalelas) para ilustrar dos propiedades de los campos magnéticos: la adición de los campos debida a varios alambres y la fuerza ejercida por uno sobre otro.

Estudiaremos primero la adición vectorial de campos debida a dos alambres paralelos, como se observa en la figura 33-11. Dos alambres son paralelos al plano de ella y transportan corrientes en dirección contraria. Queremos calcular el campo magnético en el punto P debido a los dos alambres. Las líneas del campo producidas por el alambre 1 forman círculos concéntricos alrededor de él y la magnitud del campo en la distancia r_1 está dada por la ecuación 33-13, $B = \mu_0 i_1/2\pi r_1$. La dirección de $\vec{\mathbf{B}}_1$ es tangente al arco circular que pasa por P; en forma equivalente, $\vec{\mathbf{B}}_1$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}_1$, el vector radial entre el alambre y P.

Asimismo, el campo producido por el alambre 2 se muestra en la figura como $\vec{\mathbf{B}}_2$ y es tangente a las líneas circulares del campo magnético y perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}_2$. Si queremos determinar el campo neto en P, tomamos la suma vectorial de los campos debido a los dos alambres: $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2$. La magnitud y la dirección del campo total se obtienen aplicando las reglas usuales de la adición de vectores.

La situación representada en la figura 33-11 nos recuerda el método con que se calcula el campo eléctrico total generado por dos cargas puntuales q_1 y q_2: obtenemos los campos individuales en el punto P generados por cada una y luego la suma vectorial nos da el campo total $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2$. Para observar este campo eléctrico total en P, podríamos medir la fuerza en una tercera partícula cargada situada allí. De modo parecido, para observar el campo magnético total en P en la figura 33-11, podríamos medir la fuerza en la partícula cargada que cruza ese punto o un tercer alambre que lleva una corriente por él.

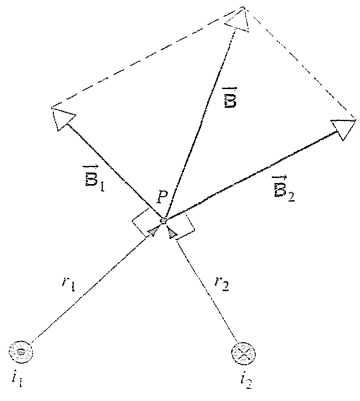


FIGURA 33-11. Dos alambres llevan corrientes perpendicularmente a la página; i_1 está hacia fuera de la página (representada por ⊙, lo cual indica la punta de una flecha) e i_2 se dirige al interior de la página (representada por ⊗, lo cual indica las plumas de una flecha). El campo total en el punto P es la suma vectorial de $\vec{\mathbf{B}}_1$ y $\vec{\mathbf{B}}_2$.

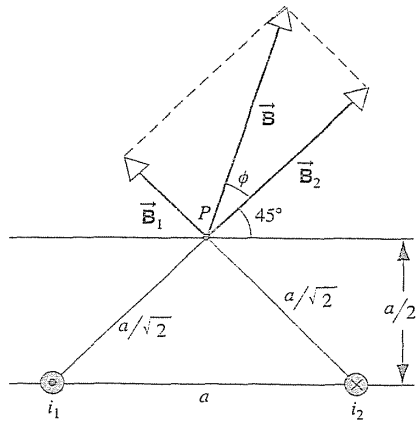


FIGURA 33-12. Problema resuelto 33-3. La corriente i_1 sale de la página, y la corriente i_2 entra en ella.

PROBLEMA RESUELTO 33-3. En la figura 33-12, supongamos que $i_1 = 15$ A e $i_2 = 32$ A. Una distancia $a = 5.3$ cm separa los dos alambres. Determine el campo magnético total en un punto situado a una distancia $a/2$ a lo largo de la línea perpendicular a la que conecta los dos alambres.

Solución La figura 33-12 muestra la geometría y los campos $\vec{\mathbf{B}}_1$ y $\vec{\mathbf{B}}_2$. Con $d_1 = d_2 = a/\sqrt{2}$, las magnitudes de los campos son

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d_1} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(15\ \text{A})}{2\pi(0.053\ \text{m})/\sqrt{2}} = 80\ \mu\text{T},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d_2} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(32\ \text{A})}{2\pi(0.053\ \text{m})/\sqrt{2}} = 171\ \mu\text{T}.$$

En la geometría especial de la figura 33-12 los dos campos son perpendiculares y por lo mismo

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 190\ \mu\text{T}.$$

El ángulo ϕ entre $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{B}}_2$ es

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B_1}{B_2} = 25°,$$

así que el ángulo entre $\vec{\mathbf{B}}$ y el eje horizontal es $25° + 45° = 70°$.

PROBLEMA RESUELTO 33-4. Dos largos alambres paralelos, separados por una distancia $2b$, transportan corrientes iguales i en dirección contraria, como se ve en la figura 33-13*a*. Obtenga una expresión para el campo magnético B en el punto P sobre la línea que conecta los alambres y para una distancia x del punto intermedio entre ellos.

Solución Al estudiar la figura 33-13*a* vemos que $\vec{\mathbf{B}}_1$ producido por la corriente i_1 y $\vec{\mathbf{B}}_2$ producido por la corriente i_2 apuntan en la misma dirección en P. Los dos están dados por la ecuación 33-13 ($B = \mu_0 i/\pi d$), así que

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b + x)} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(b - x)} = \frac{\mu_0 i b}{\pi(b^2 - x^2)}.$$

El análisis de este resultado demuestra que 1) B es simétrico alrededor de $x = 0$, 2) B tiene su valor mínimo ($= \mu_0 i/\pi b$) en $x = 0$, y 3) $B \to \infty$ como $x \to \pm b$. Esta última conclusión no es correcta, porque la ecuación 33-13 no puede aplicarse a los puntos dentro de los

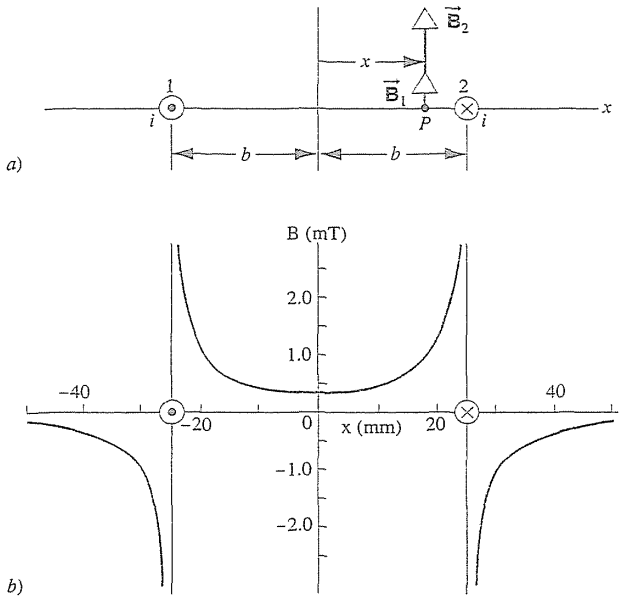


FIGURA 33-13. Problema resuelto 33-4. *a*) Los campos magnéticos en el punto *P* producido por las corrientes en los alambres 1 y 2. *b*) El campo resultante en *P*, calculado con $i = 25$ A y $b = 25$ mm.

alambres. En realidad, el campo debido a cada alambre debería desaparecer en su centro.

El lector debería probar que nuestro resultado relativo al campo combinado mantiene su validez en los puntos donde $|x| > b$. En la figura 33-13*b* se incluye la variación de B con x cuando $i = 25$ A y cuando $b = 25$ mm.

PROBLEMA RESUELTO 33-5. La figura 33-14 muestra una tira plana de cobre de ancho a y de espesor despreciable que transporta una corriente i. Calcule el campo magnético $\vec{B}$ en el punto P, a una distancia r del centro de la tira a lo largo de su bisector perpendicular.

Solución Subdividamos la tira en filamentos infinitesimales largos de ancho dx, cada uno de los cuales puede tratarse como un alambre portador de un elemento de corriente di dado por $i\,(dx/a)$. En el elemento de corriente en la mitad izquierda de la tira de la figura 33-14, la magnitud dB del campo en P está dada por la forma diferencial de la ecuación 33-13, o sea

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{d} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i(dx/a)}{R\ \text{desecante}\ \theta},$$

donde $d = R/\cos\theta = R\sec\theta$. Nótese que el vector $d\vec{B}$ forma un ángulo recto con la línea marcada d.

Sólo el componente horizontal de $d\vec{B}$ —a saber, $dB\cos\theta$— es eficaz; un componente vertical cancela la contribución de un elemento de corriente simétricamente situado en el otro lado de la tira (el segundo elemento sombreado de la Fig. 33-14). Por tanto, B en el punto P está dado por la integral (escalar)

$$B = \int dB\cos\theta = \int \frac{\mu_0 i(dx/a)}{2\pi R\ \text{desecante}\ \theta}\cos\theta$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi a R}\int \frac{dx}{\text{desecante}^2\,\theta}.$$

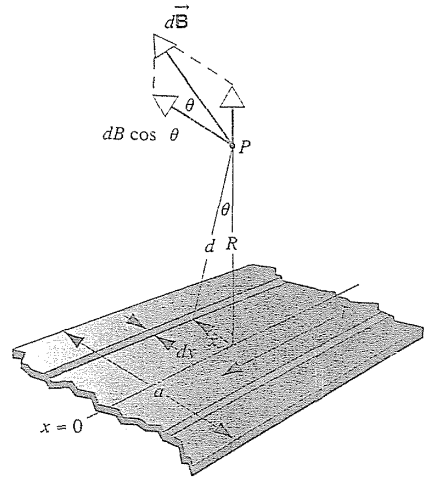


FIGURA 33-14. Problema resuelto 33-5. *a*) Un tira plana de ancho a transporta una corriente i.

Las variables x y θ no son independientes, ya que están relacionadas mediante

$$x = R\tan\theta$$

o bien

$$dx = R\ \text{desecante}^2\,\theta\,d\theta.$$

Los límites en θ son $\pm\alpha$, mientras que $\alpha = \tan^{-1}(a/2R)$. Al sustituir para dx en la expresión correspondiente a B, encontramos

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a R}\int \frac{R\ \text{desecante}^2\,\theta\,d\theta}{\text{desecante}^2\,\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = \frac{\mu_0 i}{\pi a}\alpha = \frac{\mu_0 i}{\pi a}\tan^{-1}\frac{a}{2R}. \qquad (33\text{-}24)$$

El anterior es el resultado general del campo magnético producido por la tira.

En los puntos lejanos de ella, α es un ángulo pequeño donde $\alpha \approx \tan\alpha = a/2R$. Por tanto, como resultado aproximado tenemos

$$B \approx \frac{\mu_0 i}{\pi a}\left(\frac{a}{2R}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{R}.$$

Es un resultado esperado, puesto que en puntos distantes la tira no puede distinguirse de un alambre delgado (Ec. 33-13).

La interacción entre corrientes paralelas

A continuación vamos a estudiar otro cálculo que incluye dos largos alambres rectos que transportan corrientes paralelas (o antiparalelas). Una fuerza magnética se ejerce sobre el segundo alambre, a causa del campo magnético generado por el primer alambre en el lugar del otro. En forma parecida, el segundo alambre crea un campo magnético en el lugar del primero que ejerce fuerza sobre él.

En la figura 33-15, el alambre 1 que lleva la corriente i_1 origina un campo magnético $\vec{B}_1$, cuya magnitud en el sitio del segundo es según la ecuación 33-13

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}.$$

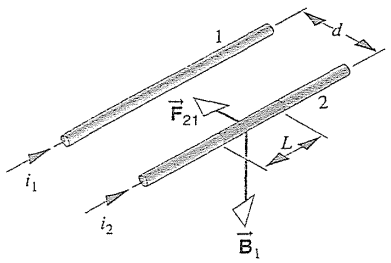


FIGURA 33-15. Dos alambres paralelos que llevan corrientes en la misma dirección se atraen entre sí. El campo $\vec{B}_1$ en el alambre 2 es el producido por la corriente en el alambre 1.

La regla de la mano derecha indica que $\vec{B}_1$ en el alambre 2 se dirige hacia abajo, como se aprecia en la figura.

Por eso, podemos suponer que el alambre 2, que transporta una corriente i_2, está inmerso en un campo magnético *externo* $\vec{B}_1$. Una longitud L de él experimenta una fuerza magnética lateral $\vec{F}_{21} = i_2\vec{L} \times \vec{B}_1$ de magnitud

$$F_{21} = i_2 L B_1 = \frac{\mu_0 L i_1 i_2}{2\pi d}. \qquad (33\text{-}25)$$

La regla de vectores aplicada al producto cruz indica que $\vec{F}_{21}$ se encuentra en el plano de los alambres y que apunta hacia el alambre 1 en la figura 33-15.

También podríamos haber comenzado en el alambre 2, calculando primero el campo magnético $\vec{B}_2$ producido por él en el sitio del alambre 1 y luego haber calculado la fuerza $\vec{F}_{12}$ ejercida sobre la longitud L del alambre 1 por el campo del alambre 2. En las corrientes paralelas esta fuerza apunta hacia el alambre 2 de la figura 33-15. Las fuerzas que los dos alambres ejercen entre sí tienen igual magnitud y dirección contraria: forman un par de acción-reacción de acuerdo con la tercera ley de Newton.

Si las corrientes en la figura 33-15 fuesen antiparalelas, comprobaríamos que las fuerzas en los alambres siguen dirección contraria: los alambres se repelerán entre sí. He aquí la regla general:

Las corrientes paralelas se atraen y las antiparalelas se repelen.

En cierto modo, la regla anterior se opone a la de las cargas eléctricas en el sentido de que las corrientes iguales (paralelas) se atraen, mientras que las cargas (del mismo signo) se repelen.

La fuerza entre alambres largos y paralelos sirve para definir el ampere. En dos de ellos con una sección circular insignificante separada en el vacío por una distancia de 1 m, el ampere se define como la corriente, en cada uno, que produciría una fuerza de 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.

PROBLEMA RESUELTO 33-6. Un alambre largo, horizontal y rígidamente sostenido transporta una corriente i_a de 96 A. Arriba del alambre paralelamente a él, un alambre fino lleva una corriente de 23 A y pesa 0.073 N/m. ¿A qué altura del alambre de la parte inferior debería este segundo alambre estar tendido, si esperamos que lo sostenga una repulsión magnética?

Solución Para conseguir la repulsión, es necesario que dos corrientes apunten en dirección contraria. En el estado de equilibrio, la fuerza magnética por unidad de longitud ha de ser igual al peso por unidad de longitud y seguir una dirección contraria. Al resolver la ecuación 32-25 para d se obtiene

$$d = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi(F/L)} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(96\ \text{A})(23\ \text{A})}{2\pi(0.073\ \text{N/m})}$$

$$= 6.0 \times 10^{-3}\ \text{m} = 6.0\ \text{mm}.$$

Suponemos que el diámetro del alambre suspendido es mucho menor que la separación entre los dos alambres. Se requiere esta suposición porque al obtener la ecuación 33-25 supusimos de modo tácito que el campo magnético producido por un alambre es uniforme en todos los puntos dentro del segundo alambre.

¿Es el equilibrio del alambre suspendido estable o inestable frente a los desplazamientos verticales? Esto puede probarse desplazándolo verticalmente y examinando cómo cambian las fuerzas en dicho alambre. ¿Es el equilibrio estable o inestable contra los desplazamiento horizontales?

Supóngase que el alambre fino está suspendido *debajo* del alambre soportado rígidamente. ¿Cómo podemos hacerlo "flotar"?; ¿es el equilibrio estable o inestable contra los desplazamientos verticales?, ¿contra los horizontales?

33-4 EL CAMPO MAGNÉTICO DE UN SOLENOIDE

El problema resuelto 33-5 indica una manera de conseguir un campo magnético uniforme (esto es, uno cuya magnitud y dirección no varíen). Una tira plana de conductor, que transporta una corriente i distribuida uniformemente, crea un campo magnético dado por la ecuación 33-24. En puntos muy cercanos a ella ($R \to 0$ y $\tan^{-1} a/2R \to \pi/2$), la ecuación 33-24 se convierte en $B = \mu_0 i/2a$ que no depende de la distancia R respecto a la tira. Lo anterior nos recuerda el campo eléctrico cerca a una placa plana que tiene una densidad uniforme de carga, cuya magnitud y dirección tampoco cambian. En analogía con el capacitor de placas paralelas en los campos eléctricos, podríamos construir un dispositivo con dos placas planas que transporten corrientes iguales en dirección contraria, donde los campos se reforzarían en la región situada entre ellas y se cancelarían fuera de las mismas.

Un modo más práctico de conseguir un campo magnético casi uniforme consiste en servirse de un *solenoide*. Como se indica en la figura 33-16*a*, el solenoide es un devanado helicoidal en un núcleo cilíndrico. El alambre transporta una corriente i y están enrollados en forma compacta; así que hay n devanados por unidad de longitud en el solenoide.

En esta sección vamos a calcular el campo a lo largo del eje central del solenoide, usando para ello el resultado anterior del campo magnético en una espira circular del alambre. Es difícil calcular el campo fuera del eje por medio de la ley de Biot-Savart; pero en la siguiente sección explicaremos otra forma mucho más fácil de hacerlo.

La figura 33-16*b* contiene la geometría con que se calcula el campo en el eje. Suponemos que el eje de simetría del solenoide es el eje z, con el origen en el centro del solenoide. Queremos

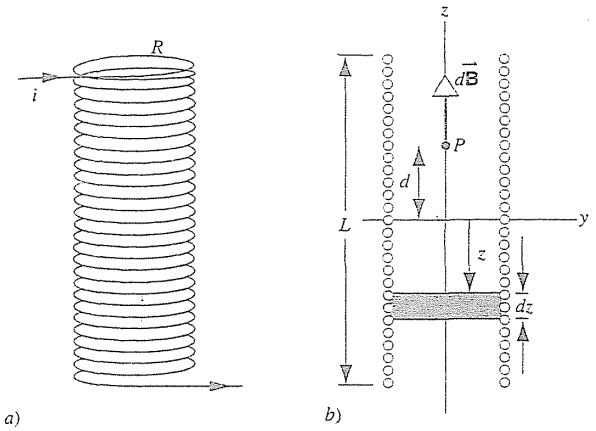


FIGURA 33-16. *a*) Un solenoide. *b*) Un anillo delgado de ancho dz genera un campo $d\vec{B}$ en el punto P sobre el eje z.

determinar el campo en el punto P, que está a una distancia d del origen a lo largo del eje z. Suponemos que los devanados son tan estrechos que pueden considerarse aproximadamente espiras circulares de alambre paralelas al plano xy. El solenoide tiene N vueltas de alambre en una longitud L, de modo que el número de vueltas por unidad de longitud es $n = N/L$.

Consideremos un anillo delgado de ancho dz. El número de vueltas en ese anillo es $n\,dz$ y, por lo mismo, la corriente total que transporta es $ni\,dz$, puesto que cada vuelta tiene una corriente i. Si empleamos la ecuación 33-19, el campo en P proveniente del anillo es

$$dB = \frac{\mu_0(ni\,dz)R^2}{2[R^2 + (z - d)^2]^{3/2}}, \qquad (33\text{-}26)$$

donde $z - d$ es la posición del anillo en relación con el punto P. Si deseamos determinar el campo total producido por estos anillos, integraremos la expresión anterior de $z = -L/2$ a $z = +L/2$. La evaluación de la integral (usando la integral 18 del Ap. 1) nos da

$$B = \frac{\mu_0 niR^2}{2}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dz}{[R^2 + (z - d)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 ni}{2}\left(\frac{L/2 + d}{\sqrt{R^2 + (L/2 + d)^2}} + \frac{L/2 - d}{\sqrt{R^2 + (L/2 - d)^2}}\right). \qquad (33\text{-}27)$$

La expresión anterior indica el campo en el eje del solenoide a una distancia d de su centro. Es válida para todos los puntos del interior y del exterior del solenoide. La dirección del campo se determina como de costumbre aplicando la regla de la mano derecha; por ello, si la corriente circula en dirección contraria a la de las manecillas del reloj vista desde arriba, el campo seguirá la dirección positiva z.

En un solenoide ideal, la longitud L es mucho mayor que el radio R. En este caso la ecuación 33-27 queda así

$$B = \mu_0 ni \qquad \text{(solenoide ideal)}. \qquad (33\text{-}28)$$

Como demostraremos en la siguiente sección, la ecuación 33-28 ofrece el campo de un solenoide ideal en todos los puntos interiores, tanto fuera del eje como en él; el campo es cero en todos los que se encuentran fuera del solenoide.

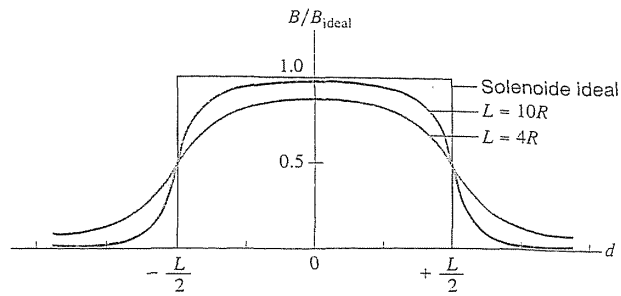


FIGURA 33-17. Campos magnéticos de un solenoide ideal y dos solenoides no ideales en función de la distancia d respecto al centro.

En el caso de un solenoide ideal y de dos solenoides no ideales, el campo calculado a partir de la ecuación 33-27 se grafica en función de la posición a lo largo del eje en la figura 33-17. Nótese que, a medida que el solenoide se vuelve más grande y estrecho acercándose así al comportamiento ideal, el campo a lo largo del eje se torna casi constante y disminuye más rápidamente a cero más allá de los extremos del solenoide.

Comenzaremos a entender el campo en el interior de un solenoide estudiando atentamente en la figura 33-18 el solenoide "estirado hacia afuera". Muy cerca del alambre, el comportamiento magnético es casi el de un alambre largo y recto donde las líneas de campo forman círculos concéntricos cerca de él. El campo tiende a cancelarse en los puntos situados entre alambres vecinos. La figura muestra que los campos provenientes de las espiras individuales del alambre se combinan para formar líneas que son más o menos paralelas al eje del solenoide en su interior. El campo se vuelve uniforme y paralelo al eje en el caso límite del solenoide ideal.

En los puntos exteriores, entre ellos el punto P en la figura 33-18, el campo producido por la parte superior de las vueltas del solenoide (marcado ⊙ porque la corriente está hacia afuera de la página) apunta a la izquierda y tiende a

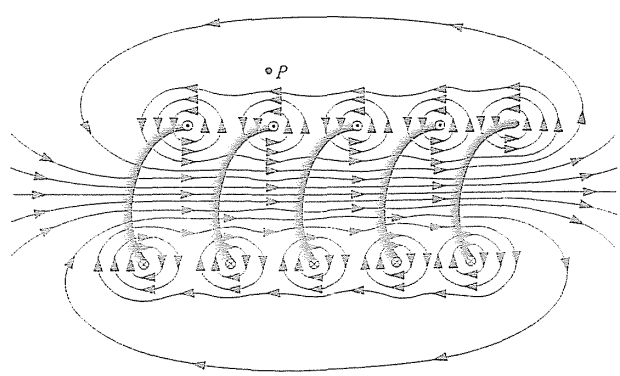


FIGURA 33-18. Una sección de un solenoide que ha sido estirado para esta ilustración. Se muestran las líneas del campo magnético.

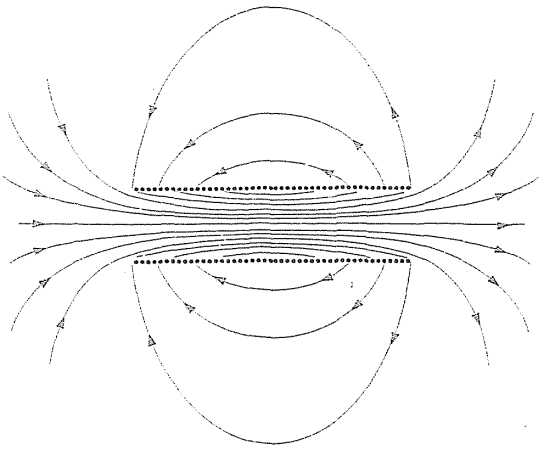


FIGURA 33-19. Líneas del campo magnético en un solenoide de longitud finita. Nótese que el campo es más fuerte (indicado por la mayor densidad de las líneas de campo) dentro del solenoide que afuera de él.

cancelar el campo debido a las vueltas de las partes inferiores del solenoide (marcada ⊗ porque la corriente se dirige al interior de la página). El campo fuera del solenoide es cero en el caso límite del solenoide ideal. Suponer que el campo externo sea cero es una buena aproximación de un solenoide real, si la longitud es mucho mayor que su radio y si consideramos sólo los puntos externos como P. La figura 33-19 muestra las líneas del campo magnético en un solenoide no ideal. En el espaciamiento de las líneas de campo se aprecia que el campo exterior al solenoide es mucho más débil que el que se halla en el interior, el cual es casi uniforme en la sección transversal.

El solenoide es para los campos magnéticos lo que el capacitor es para los campos eléctricos: un dispositivo bastante simple capaz de crear un campo más o menos uniforme. En un capacitor de placas paralelas, el campo eléctrico es casi uniforme si la separación entre ellas es pequeña comparada con sus dimensiones y si no están demasiado cerca del borde del capacitor. En el solenoide, el campo magnético es prácticamente uniforme, si el radio es menor que la longitud y si no estamos demasiado cerca de los extremos. Como se puede ver en la figura 33-17, inclusive en una longitud apenas 10 veces mayor que el radio, el campo magnético se halla dentro de un porcentaje pequeño del campo de un solenoide ideal en la mitad central del dispositivo.

PROBLEMA RESUELTO 33-7. Un solenoide tiene una longitud L = 1.23 m y un diámetro interno d = 3.55 cm. Tiene cinco capas de devanados de 850 vueltas cada uno y transporta una corriente i = 5.57 A. ¿Calcule B en su centro?

Solución Con $L/R = 69$, podemos pensar con seguridad que se trata de un solenoide casi ideal. Con base en la ecuación 33-28 tenemos

$$B = \mu_0 ni = (4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})\left(\frac{5 \times 850\ \text{vueltas}}{1.23\ \text{m}}\right)(5.57\ \text{A})$$

$$= 2.42 \times 10^{-2}\ \text{T} = 24.2\ \text{mT}.$$

Nótese que la ecuación 33-28 se aplica incluso si el solenoide posee más de una capa de devanados, ya que el diámetro de estos no se incluye en ella.

33-5 LEY DE AMPÈRE

La ley de Coulomb puede juzgarse fundamental en electrostática; podemos utilizarla para calcular el campo eléctrico asociado a cualquier distribución de cargas. Sin embargo, en el capítulo 27 demostramos que la ley de Gauss permite resolver con facilidad y elegancia cierta clase de problemas, los que ofrecen un alto grado de simetría. Demostramos asimismo que contenía la de Coulomb tratándose del campo eléctrico de una carga puntual. Dijimos que la ley de Gauss era más básica que la de Coulomb y que es una de las cuatro ecuaciones fundamentales (de Maxwell) del electromagnetismo.

La situación es similar en el caso del magnetismo. Por medio de la ley de Biot-Savart se calcula el campo magnético de cualquier distribución de corriente, como usamos la ecuación 26-6 o las ecuaciones 26-13 y 26-14 (que son equivalentes a la ley de Coulomb) para calcular el campo eléctrico de una distribución cualquiera de cargas. Un enfoque más básico del campo magnético aplica una ley que (como la de Gauss referente a los campos eléctricos) aprovecha la simetría de algunos problemas para simplificar el cálculo de $\vec{\mathbf{B}}$. Se la considera más fundamental que la de Biot-Savart y conduce a otra de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

A este nuevo resultado se le conoce como *ley de Ampère* y se escribe

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 i. \qquad (33\text{-}29)$$

Recordará el lector que, al emplear la ley de Gauss, construimos primero una superficie imaginaria cerrada (una superficie gaussiana) que encerraba cierta cantidad de carga. Al aplicar la ley de Ampère construimos una curva imaginaria cerrada (denominada *espira amperiana*), como se observa en la figura 33-20. El lado izquierdo de la ecuación 33-29 nos indica dividir la curva en pequeños segmentos de longitudes $d\vec{\mathbf{s}}$. Al recorrer la espira (la dirección del recorrido determina

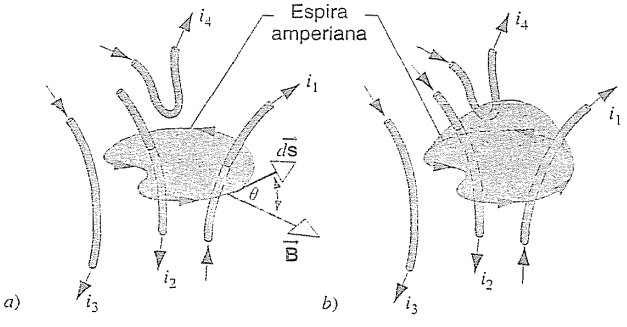


FIGURA 33-20. *a*) Al aplicar la ley de Ampère integramos alrededor una espira cerrada. La integral está determinada por la corriente neta que atraviesa la superficie acotada por la espira. *b*) La superficie acotada ha sido estirada hacia arriba.

la de $d\vec{s}$), evaluamos la magnitud $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ y sumamos (integramos) todas esas cantidades alrededor de la espira.

La integral a la izquierda de la ecuación 33-29 recibe el nombre de *integral de línea.* (Ya las empleamos antes en el Cap. 11 para calcular el trabajo y en el capítulo 28 para calcular la diferencia de potencial.) El círculo sobrepuesto al signo de la integral nos recuerda que la integral lineal debe evaluarse alrededor de una trayectoria *cerrada.* Representando con θ el ángulo entre $d\vec{s}$ y $\vec{B}$, podemos escribir la integral lineal como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B\, ds \cos\theta. \qquad (33\text{-}30)$$

La corriente i en la ecuación 33-29 es la corriente total "encerrada" por la espira, es decir, la corriente total transportada por los alambres que cruzan cualquier superficie acotada por la espira. En analogía con las cargas en el caso de la ley de Gauss, no se incluyen las corrientes afuera de ella. La figura 33-20*a* muestra cuatro alambres portadores de corriente. El campo magnético $\vec{B}$ en cualquier punto es el efecto neto de las corrientes en todos los alambres. Sin embargo, al evaluar el lado derecho de la ecuación 33-29 incluimos sólo las corrientes i_1 e i_2 porque los alambres portadores de i_3 e i_4 no atraviesan la superficie delimitada por la espira. Los dos alambres que pasan por ella llevan corrientes en dirección contraria. Se utiliza la regla de la mano derecha para asignarles signo a las corrientes: con los dedos de la mano derecha en la dirección en que se recorre la espira, se supone que las corrientes en dirección del pulgar (digamos i_1) son positivas; en cambio, se supone que las de dirección opuesta (como i_2) son negativas. Por tanto, la corriente neta i en el caso de la figura 33-20*a* es $i = i_1 - i_2$.

El campo magnético $\vec{B}$ en los puntos de la espira y dentro de ella depende ciertamente de las corrientes i_3 e i_4; sin embargo, la *integral* de $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ alrededor de la espira *no* depende de corrientes como i_3 e i_4 que no penetran en la superficie encerrada por la espira. Esto es razonable, porque $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ para el campo producido por i_1 o i_2 siempre tiene el mismo signo al recorrer la espira; pero $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ en los campos producidos por i_3 o i_4 cambia de signo al recorrer nosotros la espira, y de hecho las contribuciones positivas y negativas se cancelan exactamente entre sí.

Las conclusiones anteriores permanecen inalteradas al cambiar la forma de la superficie sin modificar la espira. En la figura 33-20*b* la superficie ha sido "estirada" hacia arriba, de manera que ahora el alambre portador de la corriente i_4 penetra en ella. No obstante, adviértase que lo hace dos veces, una vez moviéndose hacia abajo (lo cual corresponderá a una contribución $-i_4$ a la corriente total en la superficie, según la regla de la mano derecha) y otra vez desplazándose hacia arriba (lo cual contribuirá $+i_4$ al total). Por tanto, la corriente que pasa por la superficie no cambia; esto coincide con lo previsto, porque al estirar la superficie $\vec{B}$ no se altera en los lugares a lo largo de la espira fija y, por consiguiente, tampoco se modifica la integral de línea a la izquierda de la ley de Ampère.

Nótese que el hecho de incluir la constante arbitraria de 4π en la ley de Biot-Savart reduce simplemente a μ_0 la constante que aparece en la ley de Ampère. (Una simplificación semejante de la ley de Gauss se logró incluyendo la constante 4π en la ley de Coulomb.)

En la situación descrita en la figura 33-20 la ley de Ampère nos da

$$\oint B\, ds \cos\theta = \mu_0(i_1 - i_2). \qquad (33\text{-}31)$$

La ecuación 33-31 es válida para el campo magnético $\vec{B}$, a medida que su magnitud y su dirección varían alrededor de la trayectoria de la espira amperiana. No podemos resolver la ecuación para B a menos que encontremos la manera de eliminar B en la integral. Para ello nos valemos de simetrías geométricas y con ello escogemos una espira amperiana donde B es constante. Recurrimos a un truco parecido cuando calculamos los campos eléctricos por medio de la ley de Gauss.

En los siguientes ejemplos vemos cómo se emplea la ley de Ampère para calcular el campo magnético en casos con alto grado de simetría.

Aplicaciones de la ley de Ampère

Un alambre largo y recto (puntos externos). Podemos aplicar la ley de Ampère para determinar el campo magnético a una distancia d respecto a un alambre largo y recto, problema que ya resolvimos mediante la ley de Biot-Savart.

Como se observa en la figura 33-21, escogemos como espira amperiana un círculo de radio d centrado en el alambre, con su plano perpendicular a él. Según la simetría del problema, $\vec{B}$ puede depender sólo de d (y no, por ejemplo, de la coordenada angular alrededor del círculo). Al escoger una trayectoria que en todas partes esté a la misma distancia del alambre, sabemos que B es constante alrededor de la trayectoria.

Por los experimentos de Oersted sabemos que $\vec{B}$ tiene un solo componente tangencial. Así pues, el ángulo θ es cero y la integral de línea se convierte en

$$\oint B\, ds \cos\theta = B \oint ds = B(2\pi d). \qquad (33\text{-}32)$$

Nótese que la integral de ds alrededor de la trayectoria es simplemente la longitud de esta última, o sea $2\pi d$ en el caso del círculo. El lado derecho de la ley de Ampère es simplemente $\mu_0 i$ (tomada como positiva en conformidad con la regla de la

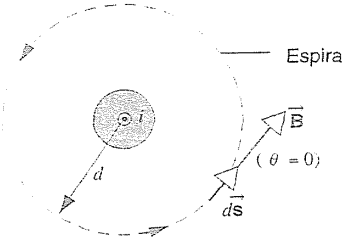


FIGURA 33-21. Se emplea una espira circular amperiana para determinar el campo magnético creado por una corriente en un alambre largo y recto. *Éste es perpendicular a la página* y la corriente se dirige hacia afuera de ella.

mano derecha). La ley de Ampère nos da

$$B(2\pi d) = \mu_0 i$$

o bien

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

Esta expresión es idéntica a la ecuación 33-13, resultado que obtuvimos (con mucho más esfuerzo) por medio de la ley de Biot-Savart.

Un alambre largo y recto (puntos internos). La ley de Ampère también nos sirve para calcular el campo magnético *dentro* de un alambre. Tomamos un alambre cilíndrico de radio R donde una corriente total i se distribuye uniformemente en su sección transversal. Queremos determinar el campo magnético a una distancia $r < R$ desde el centro del alambre.

La figura 33-22 muestra una espira circular amperiana de radio r dentro del alambre. La simetría indica que $\vec{B}$ posee magnitud constante en toda la espira y que es tangente a ella; así que el lado izquierdo de la ley de Ampère da $B(2\pi r)$, exactamente como en la ecuación 33-32. El lado derecho de la ley incluye sólo la corriente dentro del radio r. Cuando la corriente está distribuida uniformemente en el alambre, la fracción de ella dentro del radio r es la misma que la de la superficie dentro de r, o sea $\pi r^2/\pi R^2$, la ley de Ampère nos dará

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \frac{\pi r^2}{\pi R^2}, \qquad (33\text{-}33)$$

donde una vez más el lado derecho incluye sólo la fracción de la corriente que cruza la superficie delimitada por la trayectoria de integración (la espira amperiana).

Al resolver para B obtenemos

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}. \qquad (33\text{-}34)$$

En la superficie del alambre ($r = R$) la ecuación 33-34 se reduce a la ecuación 33-13 (con $d = R$). Es decir, ambas expresiones ofrecen el mismo resultado acerca del campo en la superficie del alambre. La figura 33-23 muestra cómo el campo depende de r en los puntos dentro y fuera del alambre.

La ecuación 33-34 es válida sólo en el caso en que la corriente se distribuya uniformemente en el alambre. Si la densidad de corriente depende de r, se obtiene otro resultado

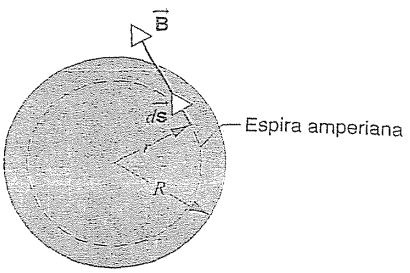


FIGURA 33-22. Un alambre largo y recto transporta una corriente que sale de la página y se distribuye uniformemente en la sección circular transversal de él. En el alambre se introduce una espira circular amperiana.

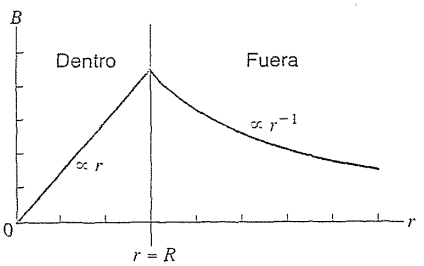


FIGURA 33-23. Campo magnético calculado en el alambre de la figura 33-22. Nótese que el campo más grande se encuentra en la superficie del alambre.

(Prob. 13). Sin embargo, la ecuación 33-13 aplicable al campo fuera del alambre conserva su validez sea la densidad constante o una función de r.

Un solenoide. Consideramos un solenoide ideal como se indica en la figura 33-24 y escogemos una espira amperiana en la forma del rectángulo *abcda*. En este análisis suponemos que el campo magnético es paralelo al eje del solenoide y que tiene magnitud constante a lo largo de la línea *ab*. Como probaremos más adelante, el campo es también uniforme en el interior (independientemente de la distancia de *ab* respecto al eje central), como se ve en el espaciamiento igual de las líneas de campo en la figura 33-24.

El lado izquierdo de la ley de Ampère puede escribirse como la suma de cuatro integrales, una para cada segmento de la trayectoria:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{s}. \qquad (33\text{-}35)$$

La primera integral de la derecha es Bh, donde B es la magnitud de $\vec{B}$ en el interior del solenoide, y h la longitud arbitraria de la trayectoria de a a b. Nótese que la trayectoria *ab* es paralela al eje del solenoide, aunque no necesariamente coincide con él. La segunda y la cuarta integrales de la ecuación 33-35 son cero, porque en todos los elementos de estas trayectorias $\vec{B}$ forma ángulos rectos con la trayectoria (en los puntos dentro del solenoide) o es cero (en los puntos afuera). En ambos casos, $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ es cero y las integrales se cancelan. La tercera, que abarca la parte del rectángulo situada afuera del solenoide, es cero porque hemos tomado $\vec{B}$ como cero en todos los puntos externos de un solenoide ideal.

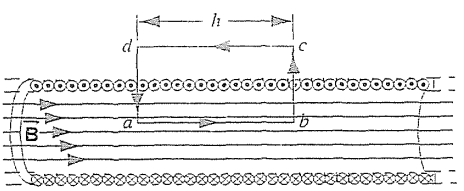


FIGURA 33-24. Una espira amperiana (el rectángulo *abcd*) se usa para calcular el campo magnético de este solenoide idealizado largo.

En la totalidad de la trayectoria rectangular, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ tiene el valor Bh. La corriente neta i que pasa por la espira rectangular amperiana no es igual a la corriente en el solenoide, porque los devanados cruzan la espira más de una vez. Sea n el número de vueltas por unidad de longitud; entonces nh es el número de vueltas dentro de ella y la corriente total, que cruza la espira rectangular amperiana de la figura 33-24, es nhi. Entonces la ley de Ampère se expresa así

$$Bh = \mu_0 nhi$$

o

$$B = \mu_0 ni.$$

El resultado anterior concuerda con la ecuación 33-28, que se refería sólo a los puntos en el eje central del solenoide. Podemos colocar la línea ab en la figura 33-24, a cualquier distancia del eje; por ello, concluimos aquí que el campo magnético dentro de un solenoide ideal es uniforme en su sección transversal.

Un toroide. La figura 33-25 contiene un toroide, que podemos considerar como un solenoide que se dobla y que adopta la forma de una rosquilla. La ley de Ampère sirve para calcular el campo magnético en los puntos interiores.

Debido a la simetría, las líneas de $\vec{B}$ forman círculos concéntricos dentro del toroide, como se ve en la figura. Escojamos un círculo concéntrico de radio r como una espira amperiana y crucémoslo en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. La ley de Ampère nos da

$$B(2\pi r) = \mu_0 iN,$$

donde i es la corriente en los devanados del toroide, y N el número total de vueltas. Esto nos da

$$B = \frac{\mu_0 iN}{2\pi r}. \qquad (33\text{-}36)$$

En contraste con el solenoide, B no es constante en la sección transversal de un toroide. El lector debe ser capaz de demostrar, mediante la ley de Ampère, que $B = 0$ en los puntos afuera del toroide ideal y en la cavidad central.

Un examen detenido de la figura 33-36 justifica la afirmación anterior de que el toroide es "un solenoide que se dobla y adopta la forma de una rosquilla". El denominador de la ecuación 33-36, $2\pi r$ es la circunferencia central del toroide y $N/2\pi r$ es sólo n, el número de vueltas por unidad de longitud. Con esta sustitución, la ecuación 33-36 se reduce a $B = \mu_0 in$, la ecuación del campo magnético en la región central de un solenoide.

La dirección del campo magnético dentro de un toroide (o un solenoide) se encuentra utilizando la regla de la mano derecha: enrolle los dedos de la mano derecha en dirección de la corriente; el pulgar extendido apuntará entonces en dirección del campo magnético.

Los toroides constituyen la característica principal de *tokamak*, dispositivo muy prometedor como base de un reactor de potencia de fusión. En el capítulo 51 examinaremos su funcionamiento.

El campo fuera de un solenoide (opcional). Hasta ahora hemos despreciado el campo fuera del solenoide, pero inclusive en un solenoide ideal, el situado en puntos afuera del devanado no es cero. La figura 33-26 contiene una trayectoria amperiana en forma de un círculo de radio r. Puesto que los devanados del solenoide son helicoidales, una vuelta del devanado atraviesa la superficie delimitada por el círculo. El producto $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ de esta trayectoria depende del componente tangencial del campo B_t; por tanto, la ley de Ampère nos da

$$B_t(2\pi r) = \mu_0 i$$

o bien

$$B_t = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \qquad (33\text{-}37)$$

que es el mismo campo (en magnitud y en dirección) que el que crearía un alambre recto. Nótese que los devanados, además de transportar corriente alrededor de la superficie del solenoide, también la transportan de izquierda a derecha en la figura 33-26; en este aspecto el solenoide se comporta como un alambre recto en los puntos afuera de los devanados.

El campo tangencial es mucho más pequeño que el campo interior (Ec. 33-28), como comprobamos al tomar la razón

$$\frac{B_t}{B} = \frac{\mu_0 i/2\pi r}{\mu_0 ni} = \frac{1}{2\pi rn}. \qquad (33\text{-}38)$$

Supóngase que el solenoide consta de una capa de vueltas, donde los alambres están en contacto como se aprecia en la figura 33-24. Todos los intervalos a lo largo del solenoide de longitud igual al diámetro D del alambre contienen una vuelta y, por ello, las vueltas por unidad de longitud n han de ser $1/D$. Así pues, la razón será

$$\frac{B_t}{B} = \frac{D}{2\pi r}. \qquad (33\text{-}39)$$

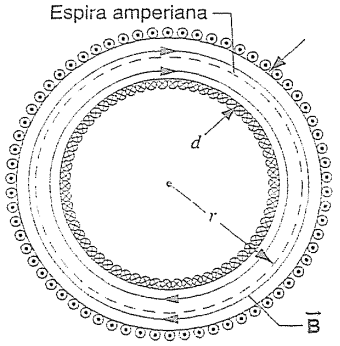


FIGURA 33-25. El toroide. El campo interior se obtiene empleando la espira circular amperiana aquí mostrada.

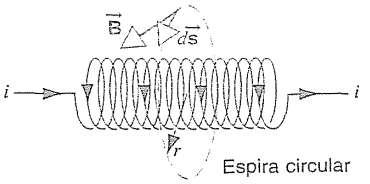


FIGURA 33-26. Una espira circular amperiana de radio r se utiliza para determinar el campo tangencial externo a un solenoide.

En un alambre típico, $D = 0.1$ mm. La distancia r con los puntos exteriores ha de ser por lo menos del mismo tamaño que el radio del solenoide, que podría medir unos cuantos centímetros. En consecuencia, $B_t/B \leq 0.001$; el campo tangencial exterior es efectivamente despreciable comparado con el interior en el eje. De modo que podemos despreciar el campo exterior sin riesgo alguno.

Al trazar un círculo amperiano similar al de la figura 33-26 pero con un radio menor que el del solenoide, el lector debe demostrar que el componente tangencial del campo interior es cero. ■

33-6 ELECTROMAGNETISMO Y MARCOS DE REFERENCIA (opcional)

La figura 33-27*a* muestra una partícula portadora de una carga positiva q en reposo cerca de un alambre largo y recto que lleva una corriente i. Vemos el sistema desde un marco de referencia S donde el alambre está en reposo. Dentro de él se mueven electrones negativos con una velocidad de deriva $\vec{v}_d$ y con núcleos positivos de iones también en reposo. En una longitud cualquiera del alambre, el número de electrones es igual al de núcleos de iones y la carga neta es cero. Los electrones pueden considerarse instantáneamente como una línea de carga negativa que crea un campo eléctrico en el lugar de q conforme a la ecuación 26-17:

$$E = \frac{\lambda_-}{2\pi\epsilon_0 r},$$

donde λ_- es la carga lineal positiva de electrones (un número negativo). También aparecen núcleos positivos de iones que producen un campo eléctrico dado por una expresión similar, según la densidad de carga lineal λ_+ de ellos. Puesto que las densidades de carga tienen la misma magnitud y signo contrario, $\lambda_+ + \lambda_- = 0$ y el campo eléctrico neto que opera sobre la partícula es cero.

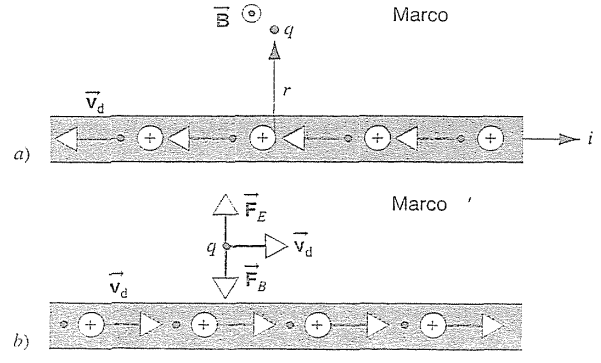


FIGURA 33-27. *a*) Una partícula de carga q se halla en reposo y en equilibrio cerca de un alambre que transporta la corriente i. La situación se ve desde un marco de referencia S en reposo respecto a la partícula. *b*) La misma situación vista desde un marco S' que se mueve con la velocidad de deriva de los electrones en el alambre. La partícula también se encuentra en equilibrio en este marco bajo la influencia de las dos fuerzas $\vec{F}_E$ y $\vec{F}_B$.

Existe un campo magnético no cero en el sitio de la partícula, pero no hay una fuerza magnética por hallarse la partícula en reposo. De ahí que ninguna fuerza neta de origen electromagnético actúe sobre ella dentro de este marco de referencia.

Examinemos ahora la situación desde la perspectiva de un marco de referencia S' que se mueve paralelamente al alambre con una velocidad $\vec{v}_d$ (la velocidad de deriva de los electrones). La figura 33-27*b* muestra la situación desde este punto de vista, donde los electrones se encuentran en reposo y los núcleos de los iones se dirigen a la derecha con una velocidad $\vec{v}_d$. Desde luego, en este caso la partícula está en movimiento y, por lo mismo, experimenta una fuerza magnética $\vec{F}_B$, como se indica en la figura.

Los observadores situados en distintos marcos inerciales coincidirán seguramente en que, si no se acelera la carga q en el marco S, tampoco habrá aceleración en el marco S' y, en consecuencia, ha de haber otro factor además de $\vec{F}_B$ que actúa sobre la partícula para producir una fuerza neta de cero.

Esta fuerza adicional que actúa sobre el marco de referencia S' debe tener un origen eléctrico. Consideremos en la figura 33-27*a* una longitud L del alambre. Podemos imaginar que la longitud del alambre consta de dos varillas medidoras, una con carga positiva (los iones) en reposo y otra con carga negativa (los electrones) en movimiento. Las dos poseen la misma longitud (en S) y contienen igual número de cargas. Cuando las transformamos en S', observamos que la varilla de carga negativa tiene mayor longitud en S'. En S esta varilla móvil posee una *longitud contraída* según el efecto relativista de la contracción estudiado en la sección 20-3. En S', está en reposo y tiene su *longitud propia,* que es más larga que la longitud contraída en S. La densidad de carga lineal negativa λ'_- en S' tiene menor magnitud que en S (esto es $|\lambda'_-| < |\lambda_-|$), porque la misma cantidad de carga se esparce en una longitud más grande en S'.

La situación se invierte en las cargas positivas. En S, estas cargas se hallan en reposo y la varilla con carga positiva tiene la longitud propia. En S', está en movimiento y su longitud es más corta y contraída. La densidad lineal λ'_+ de una carga positiva en S' es mayor que en ($\lambda'_+ > \lambda_+$), porque la misma cantidad de carga se distribuye en una longitud menor. Tenemos, pues, la siguiente relación entre las densidades de carga:

$$\text{en } S: \qquad \lambda_+ = |\lambda_-|,$$

$$\text{en } S': \qquad \lambda'_+ > |\lambda'_-|.$$

La carga q experimenta campos eléctricos provenientes de una línea de carga positiva y de otra de carga negativa. En S', estos campos no se cancelan, pues las densidades de carga lineal son diferentes. Por consiguiente, el campo eléctrico sobre q en S' es el producido por una densidad lineal de carga positiva y el alambre repele a q. La fuerza eléctrica $\vec{F}_E$ en q se opone a la fuerza magnética $\vec{F}_B$, como se observa en la figura 32-27*b*. Una explicación detallada* muestra que la fuerza eléctrica resultante es exactamente igual a la magnética y que la fuerza neta en S' es cero. En consecuencia, la partícu-

* Véase, por ejemplo, a R. Resnick, *Introduction to Special Relativity* (Wiley, 1968), capítulo 4.

la no experimenta aceleración en ninguno de los dos marcos de referencia. Este resultado podemos generalizarlo a otras situaciones aparte del caso especial aquí estudiado, donde S' se mueve a una velocidad $\overline{v}_d$ respecto a S. En otros marcos de referencia, la fuerza eléctrica y la magnética presentan valores distintos a los de sus valores en S'; no obstante, siempre iguales y opuestas entre sí y la fuerza neta en la partícula en cero en *todos* los marcos de referencia.

Es un resultado que debe resaltarse. De acuerdo con la relatividad especial, los campos eléctrico y magnético no tienen existencia separada. Un campo puramente eléctrico o magnético dentro de un marco de referencia tiene componentes eléctricos y magnéticos en otro. Por medio de ecuaciones de transformación relativista es fácil transitar de un marco a otro; a menudo resolvemos problemas difíciles escogiendo un marco donde los campos presentan un carácter más simple para transformar luego el resultado en el marco original. La relatividad especial es de gran utilidad práctica para solucionarlos, pues las técnicas de la relatividad especial a veces resultan más simples que los métodos clásicos.

En el lenguaje matemático decimos que las leyes del electromagnetismo (las ecuaciones de Maxwell) no varían respecto a la transformación de Lorentz. En la sección 11-6 hablamos de las leyes físicas *invariantes*: anotamos la ley dentro de un marco de referencia, la transformamos en otro y obtenemos una ley exactamente de la misma forma matemática. Por ejemplo, la ley de Gauss —una de las cuatro ecuaciones de Maxwell— presenta exactamente la misma forma en cualquier marco de referencia.

Las palabras de Einstein son directas y precisas: "La fuerza que actúa sobre un cuerpo en movimiento dentro de un campo magnético no es más que un campo eléctrico". (De hecho, su trabajo original de 1905, donde expuso por primera vez sus ideas de la relatividad especial, se titulaba "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento".) Dentro de este orden de ideas, podemos concebir el magnetismo como un efecto relativista, que depende de la velocidad de la carga en relación con el observador. Pero, a diferencia de otros efectos relativistas, produce importantes consecuencias observables a velocidades mucho menores que la de la luz. ■

OPCIÓN MÚLTIPLE

33-1 El campo magnético producido por una carga en movimiento

1. Dos cargas positivas q_1 y q_2 se dirigen a la derecha en la figura 33-28.
   a) ¿Qué dirección tiene la fuerza sobre la carga q_1 proveniente del campo magnético producido por q_2?
   A) Hacia el interior de la página.
   B) Hacia afuera de la página.
   C) Hacia arriba de la página.
   D) Hacia abajo de la página.
   b) ¿Qué dirección tiene la fuerza sobre la carga q_2 proveniente del campo magnético producido por q_1?
   A) Hacia el interior de la página.
   B) Hacia afuera de la página.
   C) Hacia arriba de la página.
   D) Hacia abajo de la página.

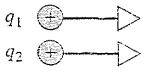


FIGURA 33-28. Pregunta de opción múltiple 1.

33-2 El campo magnético de una corriente

2. Considere la magnitud del campo magnético $B(z)$ en el eje de una espira circular de corriente.
   a) $B(z)$ alcanzará su valor máximo cuando
   A) $z = 0$. B) $0 < |z| < \infty$. C) $|z| = \infty$.
   D) A) y C) son correctos.
   b) $B(z)$ puede ser cero cuando
   A) $z = 0$. B) $0 < |z| < \infty$. C) $|z| = \infty$.
   D) A) y C) son correctos.
3. Se hace girar en dirección de las manecillas del reloj el disco con carga negativa de la figura 33-29. ¿Qué dirección tiene el campo magnético en el punto A dentro del plano del disco?
   A) Hacia el interior de la página.
   B) Hacia afuera de la página.
   C) Hacia arriba de la página.
   D) Hacia abajo de la página.

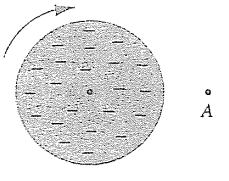


FIGURA 33-29. Pregunta de opción múltiple 3.

4. Una espira de alambre con longitud L que lleva una corriente i puede enrollarse una vez como en la figura 33-30*a* o dos veces como en la figura 33-30*b*. La razón de la intensidad del campo magnético B_1 en el centro de un espira simple a la intensidad B_2 en el centro de la espira doble es:
   A) 2. B) 1. C) 1/2. D) 1/4.

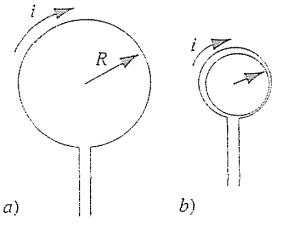


FIGURA 33-30. Pregunta de opción múltiple 4.

33-3 Dos corrientes paralelas

5. Un alambre largo y recto transporta una corriente al norte. Otro también largo y recto, situado a 0.5 m verticalmente sobre el

primero, lleva una corriente idéntica hacia el este. Los dos son lo bastante largos para que su longitud sea considerada infinita. *a)* ¿Qué dirección tiene la fuerza neta en el alambre de arriba a causa de la corriente del de abajo?

A) Hacia arriba B) Hacia abajo C) Al norte
D) Al sur E) La fuerza neta es cero.

b) ¿Qué dirección tiene el par en el alambre de arriba a causa de la corriente del de abajo?

A) Hacia arriba B) Hacia abajo C) Al norte
D) Al sur E) El par es cero.

6. Dos corrientes paralelas se dirigen hacia afuera de la página. Compare la magnitud del campo eléctrico B_2 en cualquier punto arbitrario equidistante de los alambres con la magnitud del campo B_1 en ese punto de un alambre solo.

A) $B_2 > B_1$ en todos los puntos equidistantes.
B) $B_2 = B_1$ en todos los puntos equidistantes.
C) $B_2 < B_1$ en todos los puntos equidistantes.
D) $B_2 > B_1$ sólo en los puntos equidistantes más cercanos.
E) $B_2 < B_1$ sólo en los puntos equidistantes más cercanos.

7. Las corrientes antiparalelas siguen una dirección tal que una lo hace hacia afuera de la página y la otra hacia el interior. Compare la magnitud del campo magnético B_2 en cualquier punto arbitrario equidistante de los alambres con la magnitud del campo B_1 en ese punto de un alambre solo.

A) $B_2 > B_1$ en todos los puntos equidistantes.
B) $B_2 = B_1$ en todos los puntos equidistantes.
C) $B_2 < B_1$ en todos los puntos equidistantes.
D) $B_2 > B_1$ sólo en los puntos equidistantes más cercanos.
E) $B_2 < B_1$ sólo en los puntos equidistantes más cercanos.

33-4 El campo magnético de un solenoide

8. Un ceñidor (faja) de metal puede emplearse como solenoide. Lo estiramos un poco y pasamos una corriente por él. ¿Hará el campo magnético resultante que el metal se contraíga o se estire más todavía?

A) Que se contraiga. B) Que se estire más.
C) Ni se contraerá ni se estirará; el campo magnético es cero fuera del solenoide.
D) La respuesta depende de la dirección de la corriente.

9. Considere un solenoide con $R << L$. El campo magnético en su centro es B_0. Se construye otro solenoide que tiene el doble del radio y de longitud y que transporta el doble de corriente que el primero, pero que tiene el mismo número de vueltas por metro. El campo magnético en el centro del solenoide es

A) $B_0/2$. B) B_0. C) $2B_0$. D) $4B_0$.

10. ¿Qué comportamiento observa el campo magnético $B(z)$ en los puntos z a lo largo del eje de un solenoide con $z >> L$, donde L es la longitud del solenoide?

A) $B(z)$ es constante. B) $B(z) \propto z^{-1}$
A) $B(z) \propto z^{-2}$ D) $B(z) \propto z^{-3}$

33-5 Ley de Ampère

11. Resuelva sin integrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} B\, dz,$$

donde B es el campo magnético a lo largo del eje de una espira circular de corriente dada por la ecuación 33-19. ¿Cuál es el resultado?

A) $i/2R$ B) $2\mu_0 i$ C) $\mu_0 i$
D) La expresión no puede resolverse sin integrar.

12. ¿Qué es $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ en la trayectoria que aparece en la figura 33-31?

A) $-8\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m}$ B) $-4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m}$
C) $+8\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m}$ D) $+32\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m}$

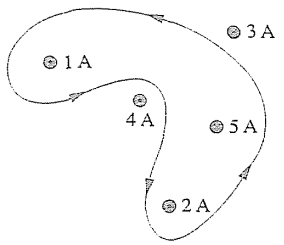


FIGURA 33-31. Pregunta de opción múltiple 12.

13. ¿Qué es $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ en la trayectoria que aparece en la figura 33-32?

A) $+56\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m}$ B) $-24\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m}$
C) $+328\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m}$ D) $+80\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m}$

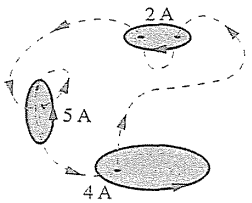


FIGURA 33-32. Pregunta de opción múltiple 13.

14. ¿Es $B = \mu_0 ni$ verdadera en solenoides infinitos que tienen secciones transversales no circulares?

A) Es una aproximación razonable para las secciones transversales cercanas a los círculos.
B) Es una aproximación razonable para cualquier forma transversal.
C) Es verdadera en las formas transversales de suficiente simetría (como los triángulos equiláteros o los cuadrados).
D) Es verdadera para cualquier forma de sección transversal.

33-6 Electromagnetismo y marcos de referencia

PREGUNTAS

1. Un haz de protones de 20 MeV sale de un ciclotrón. ¿Causan un campo megnético estas partículas?
2. Explique las analogías y las diferencias entre la ley de Coulomb y la de Biot-Savart.
3. Suponga una línea de campo magnético. ¿Es la magnitud de $\vec{B}$ constante o variable a lo largo de ella? ¿Puede ofrecer un ejemplo de ambos casos?
4. En electrónica, los alambres que transportan corrientes iguales

pero opuestas son trenzados para reducir su efecto magnético en puntos lejanos. ¿Por qué se hace esto?

5. Considere dos cargas, primero *a*) del mismo signo y luego *b*) de signo contrario, que con la misma velocidad se mueven en trayectorias paralelas separadas. Compare las direcciones de las fuerzas eléctricas y magnéticas mutuas en cada caso.
6. ¿Hay alguna manera de crear un campo magnético que no sea haciendo que las cargas se muevan?
7. Dé detalles de tres formas en que puede medir el campo magnético $\vec{B}$ en un punto P, a una distancia perpendicular r de un alambre largo que lleva una corriente i. Para ello *a*) proyecte una partícula de carga q a través del punto P con una velocidad $\vec{v}$ paralelamente al alambre; *b*) mida la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre el segundo alambre, paralelamente al primero y que transporte una corriente i'; *c*) mida el par ejercido sobre un pequeño dipolo magnético situado a una distancia perpendicular r del alambre.
8. ¿Es $\vec{B}$ uniforme en todos los puntos dentro de una espira circular de alambre que transporta una corriente? Explique su respuesta.
9. Dos largos conductores paralelos llevan corrientes iguales en la misma dirección. Bosqueje las líneas resultantes de $\vec{B}$ causadas por la acción de ellas. ¿Indica la figura atracción entre los alambres?
10. Se envía una corriente por un resorte vertical de cuyo extremo inferior cuelga una pesa. ¿Qué sucederá?
11. La ecuación 33-13 ($B = \mu_0 i/2\pi d$) indica que un fuerte campo magnético se crea en los puntos cercanos a un largo alambre con corriente. Como hay una corriente i y un campo magnético $\vec{B}$, ¿por qué no existe una fuerza en el alambre de acuerdo con la ecuación $\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}$?
12. Dos largos alambres rectos pasan cerca uno de otro en ángulos rectos. Si pueden moverse libremente, describa lo que sucede cuando se envían corrientes a través de ellos.
13. Dos alambres fijos se cruzan entre sí perpendicularmente, de manera que no se tocan sino que están cerca uno de otro como se aprecia en la figura 33-33. En ellos existen corrientes iguales i en las direcciones señaladas. ¿En qué región o regiones habrá algunos puntos de campo magnético neto cero?

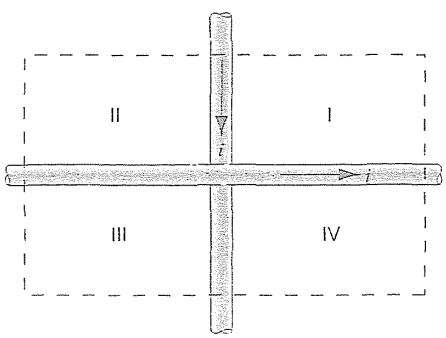


FIGURA 33-33. Pregunta 13.

14. Una espira deforme de alambre flexible se pone en una mesa sin fricción y apoyada en los puntos a y b, como se ve en la figura 33-34. Si ahora se hace pasar una corriente i por él, ¿tratará de formar una espira circular o de juntarse?

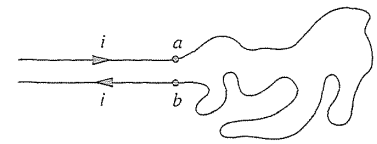


FIGURA 33-34. Pregunta 14.

15. ¿Puede la trayectoria de integración alrededor de la cual aplicamos la ley de Ampère atravesar un conductor?
16. Suponga que creamos una trayectoria de integración alrededor de un cable que contiene 12 alambres con corriente distinta (algunas en dirección contraria) en cada uno de ellos. ¿Cómo calcularemos en este caso i en la ley de Ampère?
17. Aplique cualitativamente la ley de Ampère a las tres trayectorias de la figura 33-35.

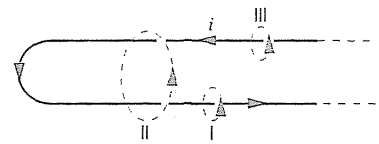


FIGURA 33-35. Pregunta 17.

18. Explique las analogías y las diferencias entre la ley de Gauss y la de Ampère.
19. ¿De los argumentos de simetría se deduce necesariamente que las líneas de $\vec{B}$ alrededor de un largo alambre recto que transporta la corriente i han de ser círculos concéntricos?
20. Una corriente estacionaria, longitudinal y uniforme se crea en un largo tubo de cobre. ¿Existe un campo magnético *a*) dentro y/o *b*) fuera de él?
21. Un conductor muy grande tiene una sección transversal cuadrada y contiene una cavidad coaxial, también con una sección transversal. La corriente está distribuida uniformemente en la sección transversal material del conductor. ¿Es el campo magnético de la cavidad igual a cero? Justifique su respuesta.
22. Un largo alambre recto de radio R transporta una corriente i. ¿Por qué depende de R el campo magnético generado por ella? Suponga puntos tanto dentro del alambre como afuera de él.
23. Un largo alambre recto lleva una corriente constante i. ¿Qué exige la ley de Ampère a *a*) una espira que lo encierra pero que no es circular, *b*) una espira que no lo encierra y *c*) una espira que lo encierra pero que no se halla en un plano?
24. Dos solenoides largos se enrollan respecto al mismo eje, como se ve en la figura 33-36. Transportan corrientes idénticas, sólo que en dirección contraria. Si no hay un campo magnético dentro del solenoide interno, ¿que puede decirse sobre n, el número de vueltas por unidad de longitud, en los dos solenoides? ¿Cuál de ellos tiene el valor más grande?

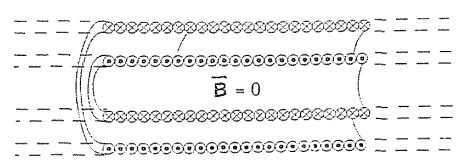


FIGURA 33-36. Pregunta 24.

25. El campo magnético en el centro de un espira circular de corriente posee el valor $B = \mu_0 i/2R$ (Ec. 33-21). Sin embargo, el campo eléctrico en el centro de un anillo de carga es cero. ¿A qué se debe la diferencia?
26. Se crea una corriente estacionaria en una red cúbica de alambres resistivos, como se indica en la figura 33-37. Utilice argumentos de simetría para demostrar que el campo magnético en el centro del cubo es cero.

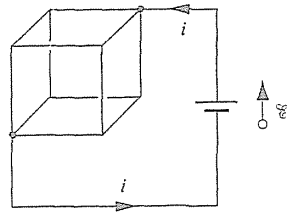


FIGURA 33-37. Pregunta 26.

27. ¿Es válida la ecuación ($B = \mu_0 ni$) con un solenoide de sección transversal cuadrada?
28. Un toroide se describe como un solenoide que se dobla y adopta la forma de una rosquilla. El campo magnético fuera de un solenoide ideal no es cero. ¿Qué puede decirse sobre la intensidad del campo magnético situado afuera de un toroide ideal?
29. Los electrones que se desplazan constituyen la corriente en un alambre y un campo magnético se asocia a ella. ¿Qué corriente y campo magnético debería medir un observador que se desplaza a lo largo de un alambre con la velocidad de deriva de los electrones?

EJERCICIOS

33-1 El campo magnético producido por una carga en movimiento

1. *a*) ¿Qué predecirá la física no relativista sobre la velocidad de dos protones que se mueven uno al lado del otro con una distancia d entre sí, de modo que la fuerza eléctrica equilibre exactamente a la fuerza magnética? *b*) Comente la conveniencia de emplear expresiones no relativistas en este problema.

33-2 El campo magnético de una corriente

2. Un topógrafo utiliza una brújula magnética a 6.3 m por debajo de una línea de energía, por la cual fluye una corriente estacionaria de 120 A. ¿Interferirá esto seriamente con la lectura de la brújula? El componente horizontal del campo magnético de la Tierra en el sitio es 210 μT.
3. Un alambre desnudo de cobre #10 (de 2.6 mm de diámetro) puede transportar una corriente de 50 A sin sobrecalentarse. ¿Cuál es para ella el campo magnético en la superficie del alambre?
4. En un lugar de las Filipinas, el campo magnético de la Tierra tiene un valor de 39.0 μT, es horizontal y se dirige horizontalmente hacia el norte. El campo neto es cero a 8.13 cm por arriba de un alambre largo, recto y horizontal que lleva una corriente estacionaria. *a*) Calcule la corriente y *b*) determine su dirección.
5. La pistola de 25 kV en un tubo de televisor dispara en la pantalla un haz de electrones de 0.22 mm de diámetro; llegan 5.6×10^{14} electrones por segundo. Calcule el campo magnético producido por el haz en un punto a 1.5 mm desde el eje del haz.
6. Un conductor recto que transporta una corriente i se divide en dos vueltas semicirculares idénticas, como se muestra en la figura 33-38. ¿Qué intensidad tiene el campo magnético en el centro C de la espira circular así formada?

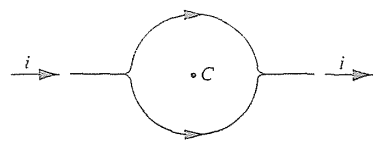


FIGURA 33-38. Ejercicio 6.

7. Un alambre largo recto lleva una corriente de 48.8 A. Un electrón que se desplaza a 1.08×10^7 m/s se halla a 5.20 cm del alambre. Calcule la fuerza que opera sobre el electrón si la velocidad de éste se dirige *a*) hacia el alambre, *b*) paralelamente a la corriente y *c*) en ángulos rectos con las direcciones definidas por *a*) y *b*).
8. Dos alambres largos, rectos y paralelos, separados por 0.75 cm, son perpendiculares al plano de la página como se muestra en la figura 33-39. El alambre W_1 lleva una corriente de 6.6 A hacia el interior de la página. ¿Cuál debe ser la corriente (magnitud y dirección) en el alambre W_2 para que sea cero el campo magnético resultante en el punto P?

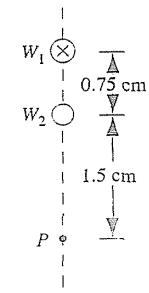


FIGURA 33-39. Ejercicio 8.

9. Dos largos alambres paralelos están a una distancia 8.10 cm uno de otro. ¿Qué corrientes iguales han de fluir por ellos, para que el campo magnético intermedio tenga una magnitud de 296 μT?
10. Una larga horquilla se forma doblando un alambre como se indica en la figura 33-40. Si el alambre transporta una corriente $i = 11.5$ A, *a*) ¿qué magnitud y dirección tiene $\vec{B}$ en el punto *a*? *b*) ¿Y en el punto *b*, muy lejos de *a*? Suponga que $R = 5.20$ mm?

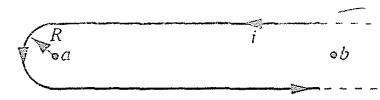


FIGURA 33-40. Ejercicio 10.

11. Un estudiante construye un electroimán enrollando 320 vueltas de alambre alrededor de un cilindro de madera de 4.80 cm de diá-

metro. La bobina está conectada a una batería que produce una corriente de 4.20 A en el alambre. ¿A qué distancia axial $z >> d$ alcanzará el campo magnético de la bobina 5.0 μT (aproximadamente una décima parte del campo magnético de la Tierra)?

12. Un alambre que lleva una corriente i presenta la configuración descrita en la figura 33-41. Dos secciones rectas semiinfinitas, tangentes al mismo círculo, están conectadas por un arco circular, de ángulo θ, a lo largo de la circunferencia del círculo, con todas sus secciones situadas en el mismo plano. ¿Cuánto debe ser θ a fin de que B sea cero en el centro del círculo?

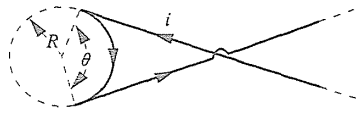


FIGURA 33-41. Ejercicio 12.

13. Examine detenidamente el circuito de la figura 33-42. Los segmentos curvos son arcos de círculo de radios a y b. Los segmentos rectos se hallan en los radios. Determine el campo magnético $\vec{B}$ en P, suponiendo una corriente i en el circuito.

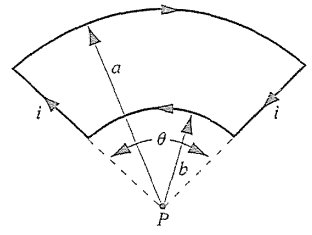


FIGURA 33-42. Ejercicio 13.

14. Demuestre que B en el centro de una espira rectangular de alambre de longitud L y de ancho W, que transporta una corriente i, está dado por

$$B = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{(L^2 + W^2)^{1/2}}{LW}.$$

Demuestre que la expresión anterior se reduce a un resultado compatible con el problema resuelto 33-4 cuando $L >> W$.

15. La figura 33-43 incluye una sección transversal de un listón largo y delgado de ancho w que transporta al interior de la página una corriente i total distribuida uniformemente. Calcule la magnitud y la dirección del campo magnético $\vec{B}$ en el punto P del plano del listón a una distancia d de su borde. (Sugerencia: imagine que el listón está construido con muchos alambres largos, delgados y paralelos.)

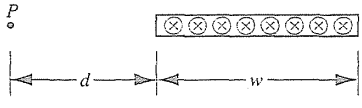


FIGURA 33-43. Ejercicio 15.

16. Dos alambres largos, rectos y paralelos separados por 12.2 cm transportan una corriente de 115 A cada uno. La figura 33-44 contiene una sección transversal: los alambres son perpendiculares a la página y al punto P que se halla en el bisector perpendicular de a. Obtenga la magnitud y la dirección del campo magnético en P cuando la corriente en el alambre de la izquierda está hacia fuera de la página y la corriente del alambre de la derecha se encuentra *a)* hacia fuera de página y *b)* hacia dentro de ella.

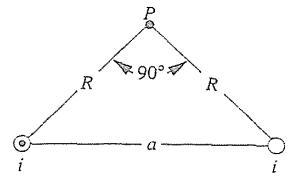


FIGURA 33-44. Ejercicio 16.

17. En la figura 33-13*a* suponga que las dos corrientes están en la misma dirección, afuera del plano de la página. Demuestre que el campo magnético en el plano definido por los alambres es

$$B = \frac{\mu_0 i x}{\pi(x^2 - b^2)}.$$

Suponga que $i = 25$ A y que $b = 2.5$ cm en la figura 33-13*a*; grafique después B en el intervalo $-2.5 \text{ cm} < x < +2.5$ cm. Suponga que los diámetros del alambre son despreciables.

18. Dos alambres largos, separados por una distancia b, llevan iguales corrientes antiparalelas i, como se aprecia en la figura 33-45. *a)* Demuestre que la intensidad del campo magnético en el punto P equidista de los alambres, está dada por

$$B = \frac{2\mu_0 i b}{\pi(4R^2 + b^2)}.$$

b) ¿En qué dirección apunta $\vec{B}$?

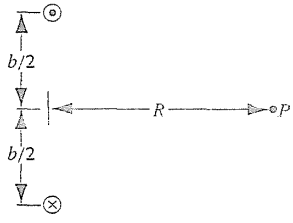


FIGURA 33-45. Ejercicio 18.

19. Una espira circular de 12 cm de radio lleva una corriente de 13 A. Otra con un radio de 0.82 cm, que tiene 50 vueltas y una corriente de 1.3 A, se halla en el centro de la primera. *a)* ¿Qué campo magnético crea la gran espira en su centro? *b)* Calcule el par que opera sobre la espira pequeña. Suponga que los planos de ambas forman ángulos rectos y que el campo magnético generado por la espira grande es esencialmente uniforme en todo el volumen ocupado por la pequeña.

20. *a)* Se dobla un alambre largo para que adopte la forma mostrada en la figura 33-46, sin contacto al cruzar en P. El radio de la sección circular es R. Determine la magnitud y la dirección de $\vec{B}$ en el centro C de la porción circular cuando la corriente i es la que se indica. *b)* Sin distorsión se gira la parte circular del alambre alrededor de la línea punteada un cuarto de vuelta en dirección de las manecillas del reloj —visto desde arriba—, de modo que el plano de la espira circular es ahora perpendicular al plano de la página. Determine $\vec{B}$ en C en este caso.

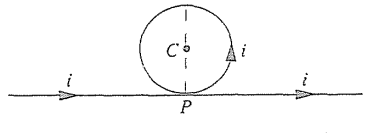


FIGURA 33-46. Ejercicio 20.

33-3 Dos corrientes paralelas

21. Cuatro largos alambres de cobre son paralelos y están dispuestos en un cuadrado (Fig. 33-47). Sacan de la página corrientes iguales, como se indica en la figura. Calcule la fuerza por metro en cualquiera de ellos; diga la magnitud y la dirección. Suponga que $i = 18.7$ A y que $a = 24.5$ cm. (A esto se le conoce como efecto de pellizco en el caso del movimiento paralelo de partículas cargadas en un plasma.)

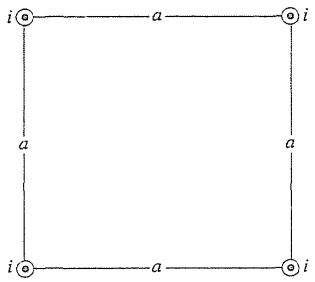


FIGURA 33-47. Ejercicio 21.

22. La figura 33-48 muestra cinco alambres paralelos largos en el plano xy. Cada uno transporta una corriente $i = 3.22$ A en la dirección positiva x. La separación entre los alambres contiguos es $a = 8.30$ cm. Calcule la fuerza magnética por metro, la magnitud y la dirección, ejercida en ellos.

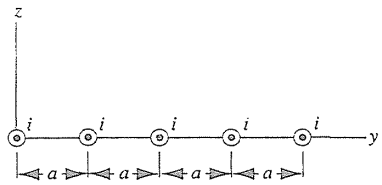


FIGURA 33-48. Ejercicio 22.

23. En la figura 33-49 se incluye un esquema idealizado de "un cañón electromagnético de riel", diseñado para disparar proyectiles a velocidades hasta de 10 km/s. El proyectil P está en contacto con dos rieles paralelos por los que puede deslizarse. Un generador G produce una corriente que fluye hacia arriba por un riel, atraviesa el proyectil y retorna al otro riel. *a)* Sea w la distancia entre los rieles, r su radio (supuestamente circular) e i la corriente. Demuestre que la fuerza en el proyectil se dirige a la derecha y que está dada aproximadamente por

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{i^2\mu_0}{\pi}\right)\ln\left(\frac{w+r}{r}\right).$$

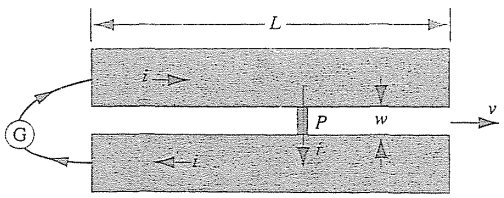


FIGURA 33-49. Ejercicio 23.

b) Si el proyectil parte del extremo izquierdo del riel en reposo, determine la velocidad v a la que se expulsa en la derecha. Suponga que $i = 450$ kA, $w = 12$ mm, $r = 6.7$ cm, $L = 4.0$ m y que la masa del proyectil es $m = 10$ g.

24. La figura 33-50 muestra un alambre largo que lleva una corriente i_1. La espira rectangular transporta una corriente i_2. Calcule la fuerza resultante que opera sobre ella. Suponga que $a = 1.10$ cm, $b = 9.20$ cm, $L = 32.3$ cm, $i_1 = 28.6$ A e $i_2 = 21.8$ A.

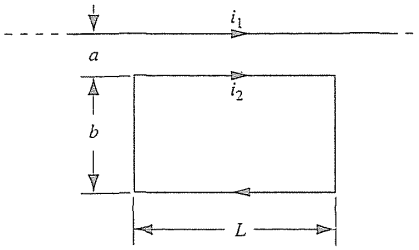


FIGURA 33-50. Ejercicio 24.

25. En el problema resuelto 33-6, suponga que se desplaza el alambre de la parte superior hacia abajo una pequeña distancia y que luego se suelta. Demuestre que su movimiento resultante es armónico simple, con la misma frecuencia de oscilación que un péndulo simple de longitud d.

33-4 El campo magnético de un solenoide

26. Un solenoide de 95.6 cm de largo tiene un radio de 1.90 cm, un devanado de 1230 vueltas y transporta una corriente de 3.58 A. Calcule la intensidad del campo magnético en el interior del solenoide.
27. Un solenoide de 1.33 m de largo y 2.60 cm de diámetro lleva una corriente de 17.8 A. El campo magnético en su interior es de 22.4 mT. Determine la longitud del alambre que forma al solenoide.
28. Un solenoide largo con 115 vueltas/cm y un radio de 7.20 cm transporta una corriente de 1.94 mA. Una corriente de 6.30 A entra en un conductor recto a lo largo de su eje. *a)* ¿A qué distancia radial del eje la dirección del campo magnético resultante estará a 40.0° de la dirección axial? *b)* ¿Qué magnitud tiene el campo magnético?
29. Verifique la integración en la ecuación 33-27 y demuestre que, conforme $L \to \infty$, la ecuación 33-27 se aproxima a la ecuación 33-28.

33-5 Ley de Ampère

30. Ocho alambres cortan la página perpendicularmente en los puntos indicados en la figura 33-51. Un alambre marcado con el entero k ($k = 1, 2, \ldots, 8$) soporta una corriente ki_0. La corriente está hacia fuera de página en los marcados con k impar y hacia adentro de ella, los marcados con k par. Evalúe $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ en una espira cerrada en la dirección que se muestra.

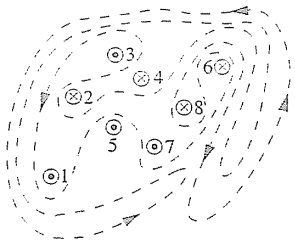


FIGURA 33-51. Ejercicio 30.

31. Los ocho conductores que aparecen en la figura 33-52 llevan 2.0 A de corriente al interior de la página o afuera de ella. Se indican dos trayectorias de la integral de línea $\vec{B} \cdot d\vec{s}$. ¿Cuál es el valor de la integral de *a*) la trayectoria con puntitos y *b*) la trayectoria de líneas?

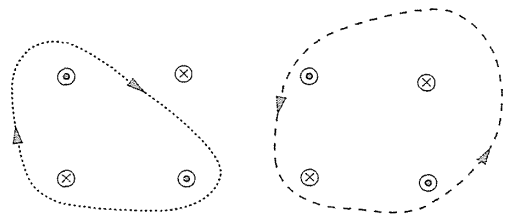


FIGURA 33-52. Ejercicio 31.

32. Considere un alambre cilíndrico largo de radio R que transporta una corriente i distribuida uniformemente en su sección transversal. ¿En cuáles dos distancias desde el eje del alambre la intensidad del campo magnético producido por la corriente equivale a la mitad del valor en la superficie?
33. La figura 33-53 muestra una sección transversal de un conductor largo de tipo cable coaxial, con los radios a, b y c. En los dos conductores existen corrientes i distribuidas uniformemente, iguales pero antiparalelas. Obtenga expresiones para $B(r)$ en los intervalos *a*) $r < c$, *b*) $c < r < b$, *c*) $b < r < a$ y *d*) $r > a$. *e*) Verifique las expresiones anteriores en todos los casos especiales que se le ocurran. *f*) Suponga que $a = 2.0$ cm, $b = 1.8$ cm, $c = 0.40$ cm e $i = 120$ A y grafique $B(r)$ en el intervalo $0 < r < 3$ cm.

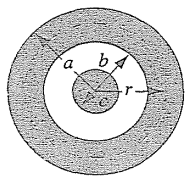


FIGURA 33-53. Ejercicio 33.

34. La figura 33-54 muestra una sección transversal de un conductor cilíndrico hueco de radios a y b, que transporta una corriente i uniformemente distribiuida. *a*) Por medio de la espira circular amperiana mostrada, verifique que $B(r)$ en el intervalo $b < r < a$ está dado por

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)} \frac{r^2 - b^2}{r}.$$

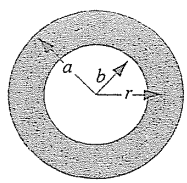


FIGURA 33-54. Ejercicio 34.

b) Pruebe la fórmula anterior en los casos especiales de $r = a$, $r = b$ y $b = 0$. *c*) Suponga que $a = 2.0$ cm, $b = 1.8$ cm e $i = 100$ A y grafique $B(r)$ para el intervalo $0 < r < 6$ cm.

35. Un largo tubo circular, con un radio externo de R, lleva una corriente de i_0 (distribuida uniformemente) al interior del papel como se ve en la Fig. 33-55). Un alambre se desplaza paralelamente a él a una distancia de $3R$ de centro a centro. Calcule la magnitud y la dirección de la corriente en el alambre que harían que el campo magnético resultante en el punto P tuviera la misma magnitud —pero en dirección contraria— que el campo resultante en el centro del tubo.

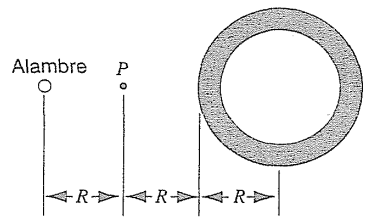


FIGURA 33-55. Ejercicio 35.

36. Un toroide, cuya sección cuadrada transversal mide 5.20 cm en el lado y cuyo radio interno mide 16.2 cm, tiene 535 vueltas y transporta una corriente de 813 mA. Calcule el campo magnético dentro del toroide en *a*) el radio interno y *b*) el radio externo del toroide.
37. Un efecto interesante (pero frustrante) se da cuando uno intenta confinar un grupo de electrones y de iones positivos (un plasma) en el campo magnético de un toroide. Las partículas cuyo movimiento es perpendicular al campo $\vec{B}$ no describirán trayectorias circulares, porque la intensidad del campo varía con la distancia radial del eje del toroide. Este efecto, que aparece (exagerado) en la figura 33-56, hace que las partículas de signo contrario se desplacen en dirección opuesta, paralelamente al eje del toroide. *a*) ¿Qué signo tiene la carga en la partícula cuya trayectoria se bosqueja en la figura? *b*) Si la trayectoria tiene un radio de curvatura de 11 cm cuando su distancia radial del eje del toroide es 125 cm, ¿cuál será el radio de curvatura cuando la partícula se halla a 110 cm del eje?

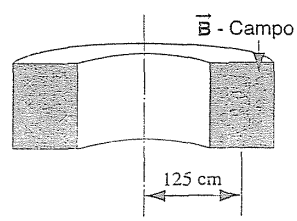


FIGURA 33-56. Ejercicio 37.

33-6 Electromagnetismo y marcos de referencia

PROBLEMAS

1. La figura 33-57 muestra un arreglo conocido como *bobinas de Helmholtz*. Consta de dos bobinas circulares coaxiales con N vueltas y un radio R, con una distancia R entre sí. Llevan igual corriente i en la misma dirección. Determine el campo magnético en P, a la mitad de distancia entre las dos bobinas.

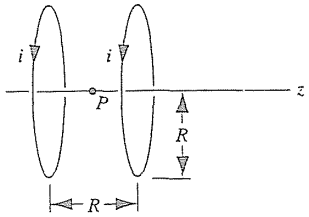


FIGURA 33-57. Problemas 1, 3 y problema para resolver por computadora 1.

2. Una sección recta de alambre con una longitud L transporta una corriente i. *a)* Demuestre que el campo magnético asociado a este segmento en P, una distancia perpendicular D de un extremo del alambre (Fig. 33-58), está dado por

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi D} \frac{L}{(L^2 + D^2)^{1/2}}.$$

b) Demuestre que el campo magnético es cero en el punto Q a lo largo de la línea del alambre.

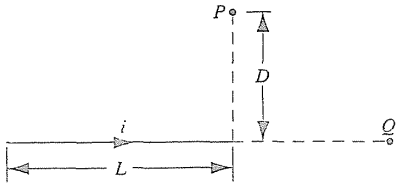


FIGURA 33-58. Problema 2.

3. En el problema 1 (Fig. 33-57) sea la separación de las bobinas una variable s (no necesariamente igual a su radio R). *a)* Demuestre que esta primera derivada del campo magnético (dB/dz) desaparece en el punto medio P, sin que importe el valor de s. ¿Por qué cabría suponer que esto es verdad de acuerdo con la simetría? *b)* Demuestre que la segunda derivada del campo magnético (d^2B/dz^2) también desaparece en el punto P si $s = R$. Esto explica la uniformidad de B cerca de P en esta separación particular de la bobina.
4. Una espira cuadrada de alambre de lado a transporta una corriente i. *a)* Demuestre que, en un punto del eje de la espira y a una distancia z de su centro, B está dado por

$$B(z) = \frac{4\mu_0 i a^2}{\pi(4z^2 + a^2)(4z^2 + 2a^2)^{1/2}}.$$

b) ¿A qué se reduce esto en el centro de la espira?

5. *a)* Un alambre en forma de polígono regular de n lados está encerrado por un círculo de radio a. Si la corriente en él es i, demuestre que el campo magnético $\vec{B}$ en el centro del círculo está dado por

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2\pi a} \tan(\pi/n).$$

b) Demuestre que, a medida que $n \to \infty$, este resultado se aproxima al de una espira circular.
6. Recibe una longitud L de alambre donde puede crearse una corriente i. El alambre puede formar un círculo o un cuadrado. Demuestre que el cuadrado produce un valor mayor de B en el punto central.
7. *a)* Calcule $\vec{B}$ en el punto P de la figura 33-59. *b)* ¿Es la fuerza del campo en P mayor o menor que en el centro del cuadrado?

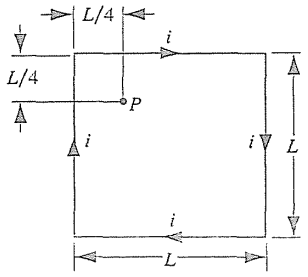


FIGURA 33-59. Problema 7.

8. Un disco delgado de plástico de radio R tiene una carga q distribuida uniformemente en su superficie. Si el disco gira con una frecuencia angular ω alrededor de su eje, demuestre que el campo magnético en el centro del disco es

$$B = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}.$$

(Sugerencia: el disco giratorio equivale a un arreglo de espiras de corriente.)
9. Un largo solenoide tiene 100 vueltas por centímetro. Un electrón se desplaza dentro de él describiendo un círculo de 2.30 cm de radio, perpendicularmente al eje del solenoide. La velocidad del electrón es $0.0460c$ (c = velocidad de la luz). Calcule la corriente en el solenoide.
10. En cierta región hay una densidad de corriente uniforme de $15\ \text{A/m}^2$ en la dirección z positiva. ¿Cuál es el valor de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ cuando la integral de línea se toma a lo largo de tres segmentos rectos de $(4d, 0, 0)$ a $(4d, 3d, 0)$, a $(0, 0, 0)$ y a $(4d, 0, 0)$, donde $d = 23$ cm?
11. Demuestre que un campo magnético uniforme $\vec{B}$ no puede descender abruptamente a cero al acercarnos a él en ángulos rectos, como lo indica la flecha horizontal que cruza el punto a en la figura 33-60. (Sugerencia: aplique la ley de Ampère a la trayectoria rectangular señalada por las líneas punteadas.) En los imanes reales siempre se observan bordes de las líneas de $\vec{B}$, lo cual

significa que $\vec{B}$ se acerca a cero de modo gradual. Modifique las líneas de $\vec{B}$ en la figura para indicar una situación más realista.

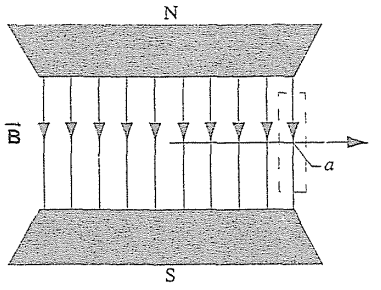


FIGURA 33-60. Problema 11.

12. Un conductor consta de un número infinito de alambres contiguos; todos ellos son infinitamente largos y transportan una corriente i. Demuestre que las líneas de $\vec{B}$ son como se representan en la figura 33-61 y que B en todos los puntos arriba y debajo de la hoja de corriente infinita está dado por

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 ni,$$

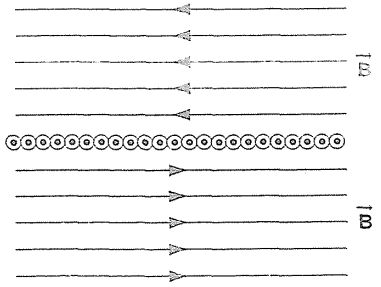


FIGURA 33-61. Problema 12.

donde n es el número de alambres por unidad de longitud. Obtenga ambos resultados aplicando directamente la ley de Ampère y considerando el problema como un caso límite del problema resuelto 33-5.

13. La densidad de corriente dentro de un alambre largo, sólido y cilíndrico de radio a sigue la dirección del eje, y varía linealmente con la distancia radial r del eje según $j = j_0 r/a$. Determine el campo magnético dentro del alambre. Exprese la respuesta en función de la corriente total i transportada por el alambre.

14. La figura 33-62 muestra una sección transversal de un conductor cilíndrico y largo de radio R que contiene un hoyo también largo y cilíndrico de radio a. Los ejes de los dos cilindros son paralelos y los separa una distancia b. Se distribuye una corriente i uniformemente sobre el área sombreada de la figura. *a*) Utilice las ideas de superposición para demostrar que el campo magnético en el centro del hoyo es

$$B = \frac{\mu_0 ib}{2\pi(R^2 - a^2)}.$$

b) Explique los dos casos especiales $a = 0$ y $b = 0$. *c*) ¿Puede usar la ley de Ampère para probar que el campo magnético en el hoyo es uniforme? (Sugerencia: suponga que el hoyo cilíndrico está lleno con dos corrientes iguales que se desplazan en dirección contraria, con lo cual se cancelan entre sí. Suponga que presentan la misma densidad de corriente que la existente en el conductor real. Sobreponemos, pues, los campos producidos por dos cilindros completos de corriente, de radios R y a, ambos con la misma densidad de corriente.)

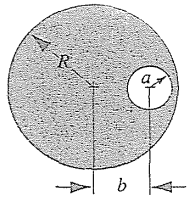


FIGURA 33-62. Problema 14.

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Dos bobinas de 300 vueltas cada una llevan una corriente i. Las separa una distancia igual a su radio, como se advierte en la figura 33-57. (Es la geometría de bobinas de Helmholtz, Prob. 1.) Con $R = 5.0$ cm e $i = 50$ A, grafique B en función de la distancia z a lo largo del eje común en el intervalo $z = -5$ cm a $z = +5$ cm, suponiendo que $z = 0$ en el punto medio P. Estas bobinas crean un campo especialmente uniforme B cerca del punto P.

2. *Diseñe una bobina doble de Helmholtz, de manera que* d^4B/dz^4 también desaparezca en el centro. Este problema se resuelve más fácilmente con un programa de computadora como Mathematica o MAPLE.

CAPÍTULO 34

LA LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY

A menudo prevemos el resultado de un experimento examinando cómo se relaciona, por simetría, con otros. Por ejemplo, una espira con corriente en un campo magnético experimenta un par (proveniente del campo) que la hace girar. Veamos una situación parecida: una espira de alambre, donde no hay corriente, se coloca en un campo magnético y un par aplicado por un agente externo la hace girar. Descubrimos que una corriente aparece en la espira. Tratándose de una espira de alambre en un campo magnético, una corriente produce un par y un par una corriente. Es un ejemplo de simetría natural.

Podemos entender y analizar la aparición de una corriente en la espira, basándonos en la ley de inducción de Faraday, *que es el tema de este capítulo. La ley de Faraday, una de las cuatro ecuaciones de Maxwell, se demuestra directamente a partir de experimentos simples que pueden efectuarse con facilidad en el laboratorio.*

34-1 LOS EXPERIMENTOS DE FARADAY

La ley de inducción de Faraday se descubrió a partir de los experimentos que en 1831 no sólo realizó Michael Faraday en Inglaterra, sino también Joseph Henry en Estados Unidos por la misma época.* Aun cuando Faraday publicó primero sus resultados, que le aseguraron que se le haya considerado como el antecesor de este descubrimiento, la unidad de inductancia en el SI (Cap. 36) recibe el nombre de *Henry* (cuya abreviatura es H). En cambio, como hemos visto la unidad de capacitancia es el *farad* (cuya abreviatura es F). En el capítulo 36, en que tratamos de las oscilaciones en circuitos capacitivos-inductivos, veremos la conveniencia de incluir en un solo contexto los nombres de esos dos científicos contemporáneos tan talentosos.

La figura 34-1 muestra una bobina de alambre como parte de un circuito con un amperímetro. En condiciones normales, cabría esperar que el amperímetro no mostrarse corriente alguna en el circuito porque, al parecer, no hay una fuerza electromotriz. Pero ocurre algo extraordinario al empujar un imán de barra hacia la bobina, con el polo norte frente a ella. *Mientras el imán se mueve,* la aguja del amperímetro se desvía e indica que se ha creado una corriente en la bobina. Si sostenemos el imán de manera estable respecto a la bobina, la aguja del amperímetro no se desviará. Si lo *alejamos* de la bobina, la aguja del amperímetro vuelve a desviarse pero en

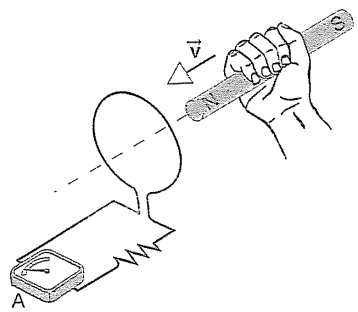


FIGURA 34-1. Cuando el imán se mueve respecto a la bobina la aguja del amperímetro A se desvía y con ello indica la presencia de una corriente en el circuito.

* Además del descubrimiento simultáneo e independiente de la ley de inducción, hubo otras coincidencias en la vida de Faraday y Henry. Ambos fueron aprendices en edad temprana. A los 14 años Faraday trabajó de aprendiz con un encuadernador en Londres. A los 13 años Henry trabajó de aprendiz en un taller de relojería de Albany (Estado de Nueva York). Siendo ya un hombre maduro, Faraday fue nombrado director de la Royal Institution en Londres, parte de cuyo financiamiento provenía de un norteamericano, Benjamin Thompson (Conde Rumford). Por su parte, Henry fue designado secretario de la Smithsonian Institution en Washington, DC, organismo financiado por el fideicomiso de un inglés, James Smithson.

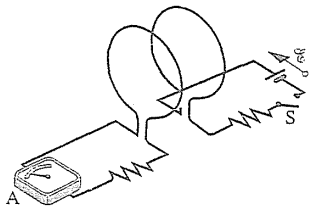


FIGURA 34-2. La aguja del amperímetro A se desvía momentaneamente cuando se abre o se cierra el circuito S. No existe movimiento físico de las bobinas.

dirección contraria; ello significa que ahora la corriente en la bobina sigue la dirección opuesta. Si utilizamos el extremo del polo sur de un imán en vez del extremo del polo norte, el experimento funciona como acabamos de describir, sólo que las deflexiones se invierten. Cuanto más rápidamente movamos el imán, mayor será la lectura del amperímetro. Experimentos posteriores revelan que *lo significativo es el movimiento relativo del imán y de la bobina.* No importa si movemos el imán hacia la bobina o la bobina hacia el imán.

La corriente que aparece en este experimento recibe el nombre de *corriente inducida* y se dice que la crea una fuerza *electromotriz inducida.* Nótese que no hay baterías en ninguna parte del circuito. Basándose en experimentos como el anterior, Faraday dedujo la ley que permite determinar la magnitud y la dirección de las fuerzas electromotrices inducidas. Son muy importantes en la práctica. Hay muchas probabilidades de que las luces del cuarto donde el lector está leyendo este libro sean encendidas por una fuerza electromotriz inducida que produce un generador eléctrico comercial.

En otro experimento se emplea el aparato de la figura 34-2. Las bobinas se colocan juntas pero en reposo una respecto a otra. Cuando cerramos el interruptor S, creando así una corriente estacionaria en la bobina derecha, la aguja del amperímetro en la bobina izquierda se desvía momentáneamente. Cuando abrimos el interruptor, y al hacerlo interrumpimos esta corriente, la aguja del amperímetro vuelve a desviarse unos instantes, sólo que en dirección contraria. Ninguna parte del aparato se mueve físicamente en este experimento.

Los experimentos revelan que existe una fuerza electromotriz inducida en la bobina izquierda de la figura 34-2, siempre que *cambie* la corriente en la bobina derecha. La *rapidez con que cambia esta corriente, y no su magnitud, es* lo que ocasiona este tipo de fuerza electromotriz.

La característica común de los dos experimentos anteriores es el *movimiento* o el *cambio*. El imán *en movimiento* o el *cambio* de corriente es lo que produce la fuerza electromatriz inducida. En la siguiente sección ofrecemos el fundamento matemático de estos efectos.

34-2 LA LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY

Imagine que hay líneas de campo magnético provenientes del imán de barra de la figura 34-1 y de la espira derecha de corriente de la figura 34-2. Algunas de estas líneas cruzan la bobina izquierda en ambas figuras. El número de las líneas del campo magnético que pasan por la bobina izquierda cambia al mover el imán de la figura 34-1 o al abrir o cerrar el interruptor de la figura 34-2. Tal como los experimentos de Faraday demostraron o como el método de líneas del campo nos ayuda a visualizar, *el cambio del número de líneas de campo que pasan por una espira de circuito es lo que induce la fuerza electromotriz en ella.* En concreto, la *rapidez del cambio en el número de líneas del campo que pasan a través de la espira es* lo que causa la fuerza electromotriz inducida.

Para hacer cuantitativa la afirmación anterior introducimos el *flujo magnético* Φ_B. A semejanza del flujo eléctrico (Sec. 27-3), el flujo magnético puede considerarse como una medida del número de líneas que cruzan una superficie. En analogía con el flujo eléctrico (Ec. 27-7), el flujo magnético en *cualquier* superficie se define así

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}. \qquad (34\text{-}1)$$

Aquí $d\vec{A}$ es un elemento del área de la superficie (que aparece en la Fig. 34-3), y se realiza la integración en la superficie donde queremos calcular el flujo (por ejemplo, la encerrada por la espira en la Fig. 34-1). Si el campo magnético tiene una magnitud y dirección constantes en la superficie plana A, el flujo puede escribirse

$$\Phi_B = BA \cos\theta, \qquad (34\text{-}2)$$

donde θ es el ángulo entre la normal a la superficie y la dirección del campo.

La unidad del flujo magnético en el SI es tesla · metro^2, que se indica con el nombre de *weber* (cuya abreviatura es Wb), es decir,

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ tesla} \cdot \text{metro}^2.$$

Al invertir la relación anterior, vemos que la tesla equivale a weber/metro^2, unidad que se usaba en los campos magnéticos antes de adoptar la tesla como la unidad del SI.

En relación con el flujo magnético, la fuerza electromotriz inducida en un circuito está dada por la *ley de inducción de Faraday:*

> *En un circuito la magnitud de la fuerza electromotriz inducida es igual a la rapidez con que el flujo magnético a través de este circuito cambia con el tiempo.*

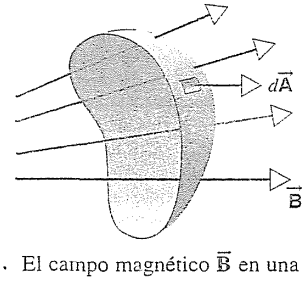


FIGURA 34-3. El campo magnético $\vec{B}$ en una superficie A produce un flujo magnético en ella. El elemento de la superficie $d\vec{A}$ está representado por un vector.

En términos matemáticos la ley de Faraday se expresa así

$$|\mathscr{E}| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|, \tag{34-3}$$

donde $\mathscr{E}$ es la fuerza electromotriz inducida. Si la rapidez de cambio del flujo se indica en unidades de webers por segundo, la fuerza electromotriz tiene unidades de volts. En la siguiente sección trataremos de la dirección (o signo) de ella.

Si la bobina consta de N vueltas, la fuerza electromotriz inducida aparece en todas ellas y el total de esta fuerza electromotriz en el circuito es la suma de los valores individuales, como en el caso de las baterías conectadas en serie. Si la bobina está tan compactamente enrollada que podemos suponer que cada vuelta ocupa la misma región del espacio y que, por lo mismo, experimenta la misma modificación de flujo, la fuerza electromotriz inducida total es

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|. \tag{34-4}$$

Existen muchas formas de cambiar el flujo que pasa a través de una espira: mover el imán en relación con ella (como en la Fig. 34-1), cambiar la corriente en un circuito cercano (como en la Fig. 34-2 y también como en un transformador), desplazarla en un campo no uniforme, girándola en un campo magnético fijo tal que se modifique el ángulo θ en la ecuación 34-2 (como en un generador, según explicaremos en la Sec. 34-5) o alterar el tamaño o forma de la espira. En todos estos métodos se induce una fuerza electromotriz en la espira.

Finalmente señalamos que, aunque la ecuación 34-3 se conoce como ley de Faraday, él no la escribió en esa forma, pues carecía de estudios de matemáticas. De hecho, no encontramos una sola ecuación en su obra sobre electromagnetismo, publicada en tres tomos, de este avance tan extraordinario en el desarrollo de la física y la química.

PROBLEMA RESUELTO 34-1. El solenoide largo de la figura 34-4 tiene 220 vueltas/cm; su diámetro d mide 3.2 cm. En el centro ponemos una bobina compacta C de 130 vueltas, con un diámetro $d_C = 2.1$ cm. Se aumenta la corriente en el solenoide de cero a 1.5 A con una rapidez estacionaria por un periodo de 0.16 s. ¿Cuál es el valor absoluto (es decir, la magnitud sin tener en cuenta el signo) de la fuerza electromotriz inducida que aparece en la bobina central mientras se altera la corriente del solenoide?

Solución En este caso el flujo que pasa a través de la bobina C cambia porque el campo B en el interior del solenoide varía a medida que la corriente cambia. El campo es uniforme y perpendicular a la superficie de cada vuelta de la bobina C; por tanto, $\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = BA$, donde A es el área de cada vuelta de la bobina interna. La ley de Faraday nos da

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}\right| = N\left|\frac{A\,\Delta B}{\Delta t}\right| = NA\left|\frac{\mu_0 n\,\Delta i}{\Delta t}\right| = NA\mu_0 n\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|,$$

donde hemos empleado $B = \mu_0 ni$ para el campo de un solenoide ideal (Ec. 33-28). El área A de la bobina central es $\frac{1}{4}\pi d_C^2 = 3.46 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$. La corriente cambia 1.5 A en 0.16 s. Entonces la fuerza electromotriz es

$$\begin{aligned}|\mathscr{E}| &= (130)(3.46 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A}) \\ &\quad \times (2.2 \times 10^4\ \text{vueltas/m})\,\frac{1.5\ \text{A}}{0.16\ \text{s}} \\ &= 1.2 \times 10^{-2}\ \text{V} = 12\ \text{mV}.\end{aligned}$$

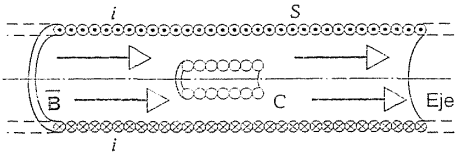


FIGURA 34-4. Problema resuelto 34-1. Una bobina C está situada dentro de un solenoide S. Éste lleva una corriente que sale de la página en la parte superior y que entra después en el fondo, como lo indican los puntos y las cruces. Cuando la corriente está cambiando, una fuerza electromotriz inducida aparece en la bobina.

En la siguiente sección vamos a explicar cómo obtener la *dirección* de la fuerza electromotriz inducida. Podemos adelantar un poco la exposición con el siguiente razonamiento. Supongamos un incremento del flujo en la bobina externa, causado por una corriente en la bobina interna que crea un campo magnético en la misma dirección que la del campo original. Esto a su vez aumentará el flujo a través del área encerrada por la bobina externa, lo cual hará también que la corriente aumente y con ella, una vez más, la de la bobina interna y así sucesivamente. ¿Es éste un resultado razonable?

34-3 LEY DE LENZ

Hasta ahora no hemos especificado la dirección de la fuerza electromotriz inducida. Más adelante en el capítulo hablaremos de la relación entre ella y el campo eléctrico inducido; ello nos permitirá escribir la ley de Faraday sin las barras de magnitud absoluta. Por ahora nos limitamos a determinar la dirección de la fuerza electromotriz inducida, basándonos en la corriente (inducida) que produciría y utilizando una regla propuesta en 1834 por Heinrich Lenz (1804-1865), conocida como la ley de Lenz:

> *El flujo del campo magnético debido a la corriente inducida se opone al cambio de flujo que produce a dicha corriente inducida.*

La ley de Lenz se refiere a *corrientes inducidas*, lo cual significa que se aplica sólo a circuitos conductores cerrados. Para obtener la dirección de la fuerza electromotriz inducida en un circuito abierto, por lo regular podemos pensar qué sucedería si *estuviera* cerrado para obtener así la dirección de la fuerza electromotriz inducida.

Si el "cambio de flujo" es un *incremento*, la ley de Lenz exige que la dirección de la corriente inducida se oponga al aumento; en otras palabras, el flujo procedente del campo magnético de la corriente inducida pasaría por la espira en dirección contraria a la del flujo original que está aumentando. Si el "cambio de flujo" es una *reducción*, el flujo procedente del campo magnético de la corriente inducida se opondrá a la reducción, esto es, tenderá a incorporarse al flujo original para impedir que disminuya.

A continuación damos un ejemplo de la aplicación de la ley de Lenz. Para ello consideramos el primer experimento de Faraday, que se muestra en la figura 34-1. A medida que acercamos

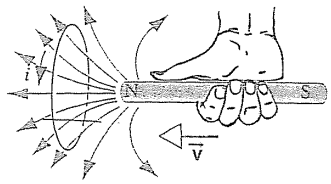


FIGURA 34-5. Cuando se empuja el imán hacia la espira, crece el flujo magnético que pasa por ella. La corriente inducida en la espira crea un campo magnético que se opone al incremento del flujo. No se muestra el campo de la espira de corriente.

a la espira el polo norte del imán, el flujo crece en la espira. Este incremento es el "cambio" al cual se refiere la ley de Lenz. La corriente en él debe oponerse al cambio, o sea que ha de crear un campo magnético que apunte en dirección contraria dentro de la espira. En la figura 34-5 vemos la dirección de la corriente inducida. Si aplicamos la regla de la mano derecha vemos que en el interior de la espira el campo magnético generado por la corriente inducida sigue una dirección contraria a la del imán.

En cambio, si *alejáramos* el imán de la espira, el flujo decrecería y la corriente inducida opondría a esta reducción. En consecuencia, el campo magnético producido por la corriente inducida debe incorporarse al campo del imán dentro de la espira, así la corriente tendría una dirección contraria a la que aparece en la figura 34-5.

Otra manera de interpretar la ley de Lenz se basa en el principio de conservación de la energía. Cuando movemos el imán hacia la espira, el campo debido a la corriente inducida en la espira ejerce una fuerza contraria al movimiento del imán, según se aprecia en la figura 34-6. La espira crea un campo magnético similar al de un imán con su polo norte hacia el polo norte del imán que se acerca; los dos polos se repelen entre sí. Es decir, hay que ejercer una fuerza mayor para continuar empujando el imán hacia la espira. Supóngase, en cambio, que la corriente de la espira tuviera la dirección contraria, de manera que generaría un campo inducido en dirección opuesta. En vez de ser repelido por el campo de la corriente inducida, el imán sería atraído por este campo y aceleraría hacia la espira. Conforme el imán acelera, crecerá la corriente en la espira causando una fuerza creciente en él y una mayor aceleración. En la espira aumentarán tanto la energía cinética del imán como la rapidez de la disipación de la energía de Joule (i^2R). A consecuencia del pequeño empujón inicial del imán hacia la espira, se registrará un gran incremento de energía, violación evidente

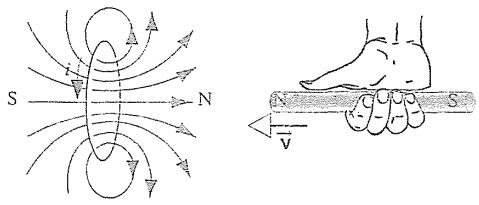


FIGURA 34-6. Cuando se empuja el imán hacia la espira, la corriente inducida i sigue la dirección señalada, produciendo un campo magnético que se opone al movimiento del imán. No se muestra aquí el campo de él, pero es el mismo que el de la figura 34-5.

de la conservación de energía. Esto no puede ocurrir y por ello concluimos que el campo procedente de la corriente inducida debe oponerse al acercamiento del imán a la espira. De modo similar, si quisiéramos alejarlo de ella, el campo inducido se opondría y empujaría el imán hacia la espira.

En cualquiera de los dos casos, no es importante que el campo inducido se oponga al *campo* del imán, sino que se oponga al *cambio,* el cual es un incremento o una reducción del flujo que pasa por la espira. Si en la figura 34-5, el campo del imán apunta hacia la izquierda y empieza a aumentar (a medida que el imán se dirige hacia la espira), el campo inducido ha de apuntar hacia la derecha el interior de dicha espira. Si el campo del imán apunta a la izquierda y está disminuyendo (conforme el imán se aleja de la espira), el campo inducido habrá de apuntar al interior izquierdo de ella. Si se girara el imán de modo que el polo sur se desplazara hacia la espira, el campo apuntaría a la derecha y aumentaría, de manera que el campo inducido apuntaría al interior izquierdo de la espira.

Ahora podemos obtener la dirección de la corriente en la bobina pequeña C del problema resuelto 34-1. El campo del solenoide S apunta a la derecha de la figura 34-4 y está creciendo. La corriente inducida en C debe oponerse a este aumento de flujo a través de C y, en consecuencia, debe crear un campo que se oponga al campo de S. Por ello la corriente en C sigue una dirección contraria a la de S. Si la corriente *disminuyera* en vez de aumentar, un razonamiento similar muestra que la corriente inducida en C tendría la misma dirección que la de la corriente en S.

Signos en la ley de Faraday

Hasta ahora hemos escrito la ley de Faraday en función de las magnitudes exclusivamente. La dirección y la magnitud de la corriente inducida en una espira conductora pueden determinarse mediante la ley de Lenz y la versión de la ley de Faraday aplicada exclusivamente a la magnitud.

Ahora nos gustaría eliminar de la ley las barras de valor absoluta (Ec. 34-3). Antes de hacerlo, hay que aclarar las ambigüedades de signo que existen en *ambos* lados de la ecuación. En caso de que queramos escribir $\mathscr{E}$ en vez de $|\mathscr{E}|$, será necesario especificar lo que entendemos por el signo de la dirección de una fuerza electromotriz inducida. Tomemos, por ejemplo, el circuito simple de una malla en la figura 34-7*a,* el cual puede incluir varias baterías y resistores. Para analizar este circuito podemos emplear la regla de la malla. Conviene aclarar lo siguiente: si nos desplazamos en dirección de las manecillas del reloj, si sumamos todas las fuerzas electromotrices y obtenemos un valor positivo, la corriente también mostrará ese mismo sentido. (Sólo así pueden ser negativas las diferencias totales de potencial en los resistores, con el fin de satisfacer el teorema de la malla.) En los circuitos reales, la dirección de la corriente positiva es la misma que en la del recorrido por la malla en que obtendríamos una fuerza electromotriz neta positiva. La misma conexión puede hacerse respecto a las corrientes inducidas y a las fuerzas electromotrices: *la dirección de la corriente inducida es la que se ob-*

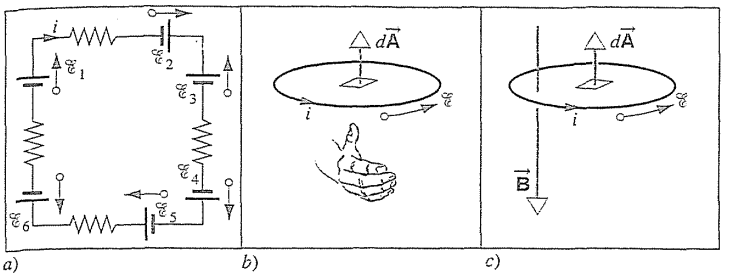


FIGURA 34-7. *a*) Adición de las fuerzas electromotrices en una espira de circuito para determinar la dirección de la corriente. *b*) Regla de la mano derecha aplicada a la ley de Faraday: con los dedos en dirección de *i*, el pulgar tiene la dirección de $d\vec{A}$. *c*). La corriente es la que se muestra aquí cuando $\vec{B}$ se dirige hacia abajo y su magnitud crece.

serva alrededor de la espira que recorremos para obtener una fuerza electromotriz positiva.

El signo del lado derecho de la ecuación 34-3 también nos plantea un problema. Cuando expusimos la ley de Gauss, que incluye el flujo a través de una superficie *cerrada*, definimos la dirección de $d\vec{A}$ como la de la normal hacia afuera que pasa por ella. No obstante, las superficies limitadas por las espiras de corriente a las que se aplica la ley de Faraday son abiertas y, por lo mismo, parece que podríamos decidir que $d\vec{A}$ sea normal a la superficie en una u otra dirección (como en el caso de la superficie acotada por la espira en la Fig. 34-5). La solución al dilema es la aplicación de otra regla más de la mano derecha: apunte los dedos de la mano derecha en la dirección alrededor de la espira que se usará para calcular la fuerza electromotriz. (En las espiras reales de corriente a través de alambres es la misma dirección que la de la corriente inducida.) El pulgar apuntará entonces en la dirección que asignamos a $d\vec{A}$ al calcular el flujo (Fig. 34-7*b*).

Con esas definiciones de la dirección o sentido de la fuerza electromotriz y de la dirección de $d\vec{A}$ para obtener el flujo, la ley de Faraday se escribe así

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad (34\text{-}5)$$

El signo negativo en esta ecuación es, en efecto, una expresión de la ley de Lenz, de modo que la fuerza electromotriz inducida se opone al cambio de flujo.

La figura 34-7*c* muestra cómo utilizar la ecuación 34-5. Supóngase que $\vec{B}$ se dirige hacia abajo a través de la espira y que su magnitud va creciendo. Escojamos que la dirección de $d\vec{A}$ es hacia arriba. (Mientras usemos la regla de la mano derecha, no importa la dirección que elijamos; lo importante es la relación existente entre $\mathcal{E}$ y $d\vec{A}$). En esta selección $\vec{B} \cdot d\vec{A}$ es negativo en toda la superficie y, en consecuencia, también lo es el flujo. Si $\vec{B}$ aumenta de magnitud, Φ_B será negativo y su magnitud también crecerá; por consiguiente, $d\Phi_B/dt < 0$. Entonces la ecuación 34-5 nos indica que $\mathcal{E}$ es positiva respecto a la dirección que escojamos con $d\vec{A}$. La regla de la mano derecha muestra que la fuerza electromotriz (y por ello la corriente inducida) ha de ser la que se indica en la figura 34-7*c*. La corriente inducida seguirá una dirección contraria a la de las manecillas del reloj vista desde arriba, exactamente como concluimos al aplicar la ley de Lenz en forma directa.

PROBLEMA RESUELTO 34-2. Una espira circular de alambre con un radio $r = 0.32$ m y una resistencia $R = 2.5\ \Omega$ se pone en un campo magnético uniforme que es perpendicular al plano de la espira y al inicio se dirige al interior de la página, como se ve en la figura 34-8. El campo varía con el tiempo como $B_z = -4.0\text{ T} - (5.6\text{ T/s})t + (2.2\text{ T/s}^2)t^2$, donde el eje z positivo está arriba afuera de la página. Calcule la magnitud y la dirección de la corriente en la espira cuando $t = 1$ s y cuando $t = 2$ s.

Solución Escojamos $d\vec{A}$ hacia adentro de la página. En $t = 1$ s, $B_z = -7.4$ T y en $t = 2$ s, $B_z = -6.4$ T. Así pues, en los intervalos abarcados por este problema $\vec{B}$ y $d\vec{A}$ son paralelos y $\Phi_B > 0$. Debido a que el campo es uniforme en la espira, $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = B_z A_z$ (es una magnitud positiva porque $A_z < 0$). Por tanto, la ley de Faraday nos da

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(B_z A_z)}{dt} = -A_z \frac{dB_z}{dt}.$$

La dirección de la fuerza electromotriz depende del signo de $dB_z/dt = +5.6 + 4.4t$. En $t = 1$ s, $dB_z/dt = -1.2$ T/s. Con $A = \pi r^2 = 0.322\ \text{m}^2$, tenemos $\mathcal{E} = -(-0.322\ \text{m}^2)(-1.2\ \text{T/m}) = -0.39$ V. El signo negativo significa que con el pulgar de la mano derecha apuntando en dirección de $\vec{A}$ (hacia el interior de la página), la fuerza electromotriz (y, por tanto, la corriente) sigue la dirección contraria a la de las manecillas del reloj. La magnitud de la corriente es $i = |\mathcal{E}|/R = 0.15$ A. Conviene comprobar que la misma dirección para la corriente (contraria a la de las manecillas del reloj) se obtenga con la ley de Lenz.

Al repetir el cálculo con $t = 2$ s, se obtiene $dB_z/dt = +3.2$ T/s y $\mathcal{E} = +1.03$ V. Esto nos da una corriente de magnitud $i = |\mathcal{E}|/R = 0.37$ A en dirección de las manecillas del reloj.

Nótese que la dirección de la corriente cambia entre $t = 1$ s y $t = 2$ s, a pesar de que la dirección del campo no se altera (hacia el interior de la página). La dirección del *cambio* en el campo, y no la de éste, es la que determina la dirección de la corriente inducida.

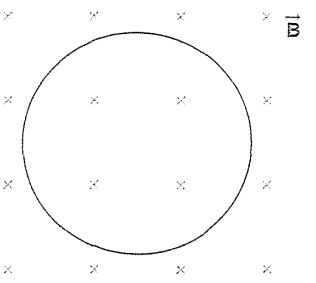


FIGURA 34-8. Problema resuelto 34-2. Espira de alambre en un campo magnético que se dirige al interior de la página.

34-4 FUERZA ELECTROMOTRIZ DE MOVIMIENTO

En la figura 34-9 se muestra una espira rectangular de alambre con ancho D, uno de cuyos extremos está en un campo uniforme y constante $\vec{B}$ que apunta en ángulos rectos al plano de la espira. El campo $\vec{B}$ puede producirse, por ejemplo, en la separación de un electroimán grande. Las líneas punteadas indican los supuestos límites del campo magnético. Se jala la espira a la derecha con una velocidad constante v.

La situación descrita en la figura 34-9 no difiere de la de la figura 34-5. En uno y otro caso una espira conductora y un imán se hallan en movimiento relativo; en ambos casos el flujo del campo del imán a través de la espira se debe al cambio con el tiempo. La diferencia importante entre ambos sistemas radica en que la situación de la figura 34-9 facilita más los cálculos.

El agente externo (la mano en la Fig. 34-9) tira de la espira hacia la derecha con una velocidad constante. Al moverse la espira, disminuye la parte de su área en el campo y, por lo mismo, se reduce el flujo. El flujo decreciente induce una fuerza electromotriz, y una corriente inducida fluye en la espira. A menudo a esta fuerza, la cual proviene del movimiento entre el conductor y la fuente del campo magnético, se le llama *fuerza electromotriz de movimiento*.

El flujo Φ_B encerrado por la espira en la figura 34-9 es

$$\Phi_B = BA = BDx,$$

donde Dx es la superficie de la parte de la espira donde B no es cero. Obtenemos la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ partiendo de la ley de Faraday:

$$|\mathscr{E}| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \frac{d}{dt}(BDx) = BD\frac{dx}{dt} = BDv, \qquad (34\text{-}6)$$

donde hemos hecho dx/dt igual a la velocidad v a la cual se saca la espira del campo magnético. Nótese que la única dimensión de la espira que entra en la ecuación 34-6 es la longitud D en el extremo izquierdo del conductor. Como veremos en la sección 34-7, la fuerza electromotriz inducida en la figura 34-9 puede considerarse situada en el extremo izquierdo de la espira.

La fuerza electromotriz BDv genera una corriente en la espira, dada por

$$i = \frac{|\mathscr{E}|}{R} = \frac{BDv}{R}, \qquad (34\text{-}7)$$

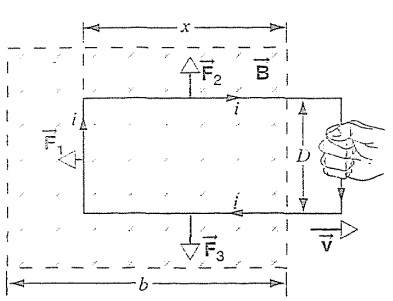


FIGURA 34-9. Cuando se retira del campo una espira conductora cerrada, en ella se produce una corriente inducida i.

donde R es la resistencia de la espira. De acuerdo con la ley de Lenz, esta corriente debe seguir la dirección de las manecillas del reloj en la figura 34-9; se opone al "cambio" (la disminución de Φ_B) creando para ello un campo paralelo al campo externo dentro de la espira.

Los lados de la espira, que pueden considerarse conductores portadores de corriente, experimentan las fuerzas magnéticas $\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}$ (Ec. 32-26), como se observa en la figura 34-9. Debido a que $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ son iguales y opuestas se cancelan sus efectos. La fuerza magnética neta en la espira está dada por $\vec{F}_1$; a fin de moverla a una velocidad constante, el agente externo debe ejercer una fuerza de igual magnitud y de dirección contraria a $\vec{F}_1$. Calculemos la potencia mecánica $P = Fv$ que debe efectuar el agente externo o, en forma equivalente, la rapidez con que realiza trabajo en la espira.

La magnitud de la fuerza $\vec{F}_1$ es $F_1 = iDB$ porque la dirección de la corriente siempre es perpendicular a $\vec{B}$. Como el agente externo debe ejercer una fuerza igual a F_1, la energía entregada por este agente es

$$P = F_1 v = iDBv = \frac{B^2D^2v^2}{R}, \qquad (34\text{-}8)$$

donde hemos empleado la ecuación 34-7 con la corriente inducida i.

También es posible calcular la rapidez con que se disipa la energía en la espira a consecuencia del calentamiento Joule por la corriente inducida. Está dada por

$$P = i^2R = \left(\frac{BDv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2D^2v^2}{R}, \qquad (34\text{-}9)$$

lo cual concuerda exactamente con la ecuación 34-8 respecto a la rapidez con que se realiza trabajo mecánico en la espira. El trabajo que efectúa el agente externo termina disipándose como calentamiento Joule de esta espira.

Corrientes parásitas

Cuando se modifica el flujo magnético que pasa a través de un trozo grande de material conductor, las corrientes inducidas aparecen en él (Fig. 34-10). A estas corrientes se les de-

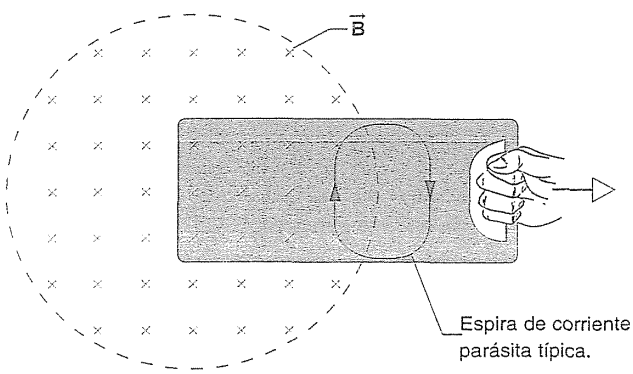


FIGURA 34-10. Cuando se retira del campo magnético un material conductor, en él aparece una corriente inducida (parásita) como se indica.

nomina *corrientes parásitas*. En algunos casos pueden producir efectos indeseables. Por ejemplo, incrementan la energía interna y, al hacerlo, elevan la temperatura del material. Por tal razón, en ocasiones los materiales sujetos a un campo magnético variable son *laminados* o construidos en pequeñas capas, aisladas unas de otras. Las corrientes parásitas, en vez de seguir una gran espira siguen muchas espiras pequeñas, con lo cual incrementan la longitud total de su trayectoria y la resistencia correspondiente; el calentamiento resistivo $\mathscr{E}^2/R$ es menor, lo mismo que el aumento de energía interna. Por otro lado, su calentamiento puede aprovecharse, como en un *horno de inducción*, donde una muestra de material se calienta por medio de un campo magnético que cambia rápidamente. Los hornos se emplean en casos en que no es posible establecer contacto térmico con el material a calentar, como cuando está confinado en una cámara al vacío.

Las corrientes parásitas son corrientes reales y producen los mismos efectos que las corrientes reales. En particular, una fuerza $\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}$ se ejerce sobre la parte de su trayectoria, en la figura 34-10, que pasa por el campo. La fuerza se transmite al material, y la ley de Lenz se aplica para demostrar (Preg. 25) que la fuerza se opone al movimiento del conductor. Se origina así una clase de *frenado magnético*, en el cual los campos magnéticos aplicados a una rueda giratoria o a un riel en movimiento producen fuerzas que desaceleran el movimiento. El freno no se compone de partes móviles ni de nexos mecánicos; tampoco está sujeto al desgaste friccional de los frenos mecánicos ordinarios. Más aún, alcanza su máxima eficiencia a gran velocidad (porque la fuerza magnética aumenta con la velocidad relativa), que es el caso en el cual los frenos mecánicos sufrirán su mayor deterioro.

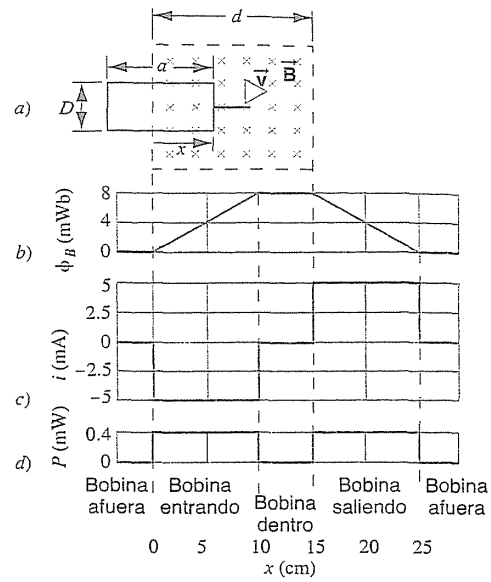


FIGURA 34-11. Problema resuelto 34-3. *a*) Con velocidad constante, se tira completamente de una espira conductora cerrada, en una región donde hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$. *b*) El flujo magnético que la cruza en función de la coordenada x del lado derecho de la espira. *c*) La corriente inducida en función de x. Los valores negativos indican una corriente en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. *d*) La rapidez con que la energía interna aparece en la espira al moverse ésta.

PROBLEMA RESUELTO 34-3. La figura 34-11*a* muestra una espira rectangular de resistencia R, de ancho D y de longitud a que es empujada con una velocidad constante v a través de una región de espesor d, donde un imán crea un campo magnético uniforme $\vec{B}$. En función de la posición x en el lado derecho de la espira, grafique *a*) el flujo Φ_B en ella, *b*) la corriente inducida i y c) la rapidez P de la producción de energía interna en la espira. Utilice $D = 4$ cm, $a = 10$ cm, $d = 15$ cm, $R = 16\ \Omega$, $B = 2.0$ T y $v = 1.0$ m/s.

Solución *a*) El flujo Φ_B es cero cuando la espira no se encuentra en el campo; BDa cuando está enteramente en el campo; BDx cuando entra en el campo, y $BD\,[a - (x - d)]$ cuando sale de él. Las conclusiones anteriores, que le recomendamos verificar, se muestran gráficamente en la figura 34-11*b*.

b) La magnitud de la fuerza electromotriz inducida $\mathscr{E}$ está dada por $\mathscr{E} = |d\Phi_B/dt|$, que podemos escribir como

$$\mathscr{E} = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \left|\frac{d\Phi_B}{dx}\frac{dx}{dt}\right| = \left|\frac{d\Phi_B}{dx}v\right|,$$

donde $d\Phi_B/dx$ es la pendiente de la curva de la figura 34-11*b*. La corriente i se grafica en función de x en la figura 34-11*c*. Con el mismo tipo de razonamiento que utilizamos con la figura 34-8, deducimos de la ley de Lenz que, cuando una espira entra en el campo, la corriente sigue una dirección contraria a la de las manecillas del reloj, vista desde arriba. Nótese que no hay corriente cuando la espira se halla en su totalidad dentro del campo magnético, porque el flujo Φ_B en la espira no cambia con el tiempo, según se aprecia en la figura 31-11*b*. c) La rapidez con que se produce la energía interna está dada por $P = i^2R$. Puede calcularse elevando al cuadrado la ordenada de la curva de la figura 34-11*c* y multiplicando por R. El resultado se grafica en la figura 34-11*d*.

Si se tienen en cuenta los bordes del campo magnético, que no puede evitarse en la práctica (Prob. 11 del Cap. 33), las inclinaciones y los bordes afilados de la figura 34-11 serán reemplazados por curvas suaves.

PROBLEMA RESUELTO 34-4. Una varilla de cobre con una longitud R gira a una frecuencia angular ω en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ como se observa en la figura 34-12. Determine la fuerza

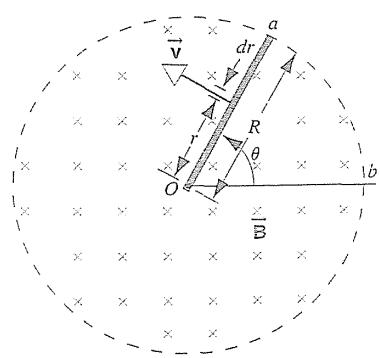


FIGURA 34-12. Problema resuelto 34-4. Una varilla de cobre gira en un campo magnético uniforme.

electromotriz $\mathscr{E}$ generada entre sus dos extremos. (Podríamos medir la fuerza colocando un riel conductor a lo largo del círculo punteado de la figura y conectado un voltímetro entre dicho riel y el punto O.)

Solución Si movemos un alambre de longitud dr con una velocidad $\vec{v}$ en ángulo recto con un campo $\vec{B}$, se producirá una fuerza eletromotriz de movimiento $d\mathscr{E}$ (Ec. 34-6) dado por

$$d\mathscr{E} = Bv\,dr.$$

La varilla de la figura 34-12 puede dividirse en elementos de longitud dr, y la velocidad lineal v de cada uno es ωr. Cada elemento es perpendicular a $\vec{B}$ y también se desplaza en una dirección en ángulos rectos con $\vec{B}$; por tanto, como las fems $d\mathscr{E}$ de cada elemento están "en serie",

$$\mathscr{E} = \int d\mathscr{E} = \int_0^R Bv\,dr = \int_0^R B\omega r\,dr = \tfrac{1}{2}B\omega R^2.$$

En un segundo enfoque suponga que en un instante cualquiera el flujo delimitado por el sector aOb de la figura 34-12 está dado por

$$\Phi_B = BA = B(\tfrac{1}{2}R^2\theta),$$

donde $\frac{1}{2}R^2\theta$ es la superficie del sector. Derivando se obtiene

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \tfrac{1}{2}BR^2\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}B\omega R^2.$$

Conforme a la ley de Faraday, este resultado es exactamente la magnitud de $\mathscr{E}$ y concuerda con el resultado previo.

34-5 GENERADORES Y MOTORES

Vamos a estudiar el funcionamiento de generadores y motores simples, pues constituye un ejemplo de las aplicaciones prácticas de la ley de Faraday.

La figura 34-13 muestra los elementos básicos de un generador. Una espira de alambre conductor gira con una velocidad constante angular ω en un campo magnético externo. (Se necesita otro aparato, que no aparece en la figura, que haga girar la espira. En las plantas eléctricas, ese dispositivo puede ser el agua que cae de un dique o, vapor producido en una caldera, que hace girar las aspas de una turbina.) Para simplificar la explicación supondremos que el campo magnético es uniforme en la región donde gira la espira.

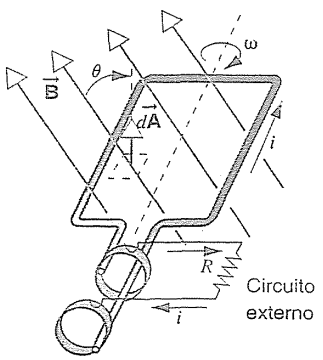


FIGURA 34-13. Generador simple. La rotación de la bobina induce una corriente cuya dirección cambia. Unos contactos deslizantes ("escobillas") suministran la corriente a un circuito externo en los anillos.

El flujo magnético a través de la espira está dado por la ecuación 34-2: $\Phi_B = BA\cos\theta$. Al girar ella, el ángulo θ entre las direcciones del campo magnético y los elementos de área $d\vec{A}$ dentro de la espira cambian con el tiempo de acuerdo con $\theta = \omega t$. La fuerza electromotriz inducida en la espira giratoria es

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BA\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = BA\omega\,\text{sen}\,\omega t. \quad (34\text{-}10)$$

Si la espira tiene N vueltas, el flujo total se multiplica por N; así, la fuerza electromotriz sería $\mathscr{E} = NBA\,\omega\,\text{sen}\,\omega t$.

La fuerza electromotriz inducida varía senoidalmente con el tiempo, según se aprecia en la figura 34-14. Si conectamos el generador a un circuito externo de resistencia R, una corriente inducida $i = \mathscr{E}/R$ aparece en el circuito; esta corriente fluye a través de la espira giratoria y de los alambres conectados al circuito.

La figura 34-14 indica que la corriente cambia de dirección conforme gira la espira. A este tipo de corriente se le llama *corriente alterna* (su abreviatura es CA). La fuerza electromotriz producida por este generador se conoce como fuerza electromotriz o voltaje de CA.

Examinamos en seguida la dirección de la corriente inducida en la espira. Cuando esta última está en la posición descrita en la figura 34-13, una pequeña rotación en dirección de ω disminuiría el flujo; por ello, la corriente inducida (de acuerdo con la ley de Lenz) en ella debe producir un campo en la misma dirección que el campo externo (y que, por lo mismo, se opone a la reducción del flujo). Así pues, la corriente inducida se desplaza en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, según se indica en la figura. A medida que el plano de la espira se vuelve paralelo al campo ($\theta = 90°$), el flujo empieza a cambiar con la mayor rapidez y la corriente en dirección de las manecillas del reloj alcanza su magnitud máxima. De $\theta = 90°$ a $\theta = 180°$, el flujo se torna cada vez más negativo y de ahí que la corriente deba continuar en dirección de las manecillas del reloj para oponerse a la alteración del flujo. La espira termina finalmente girando a través de $\theta = 180°$ y el flujo negativo comienza a aumentar hacia cero. Ahora, la corriente inducida debe moverse en dirección de las manecillas del reloj, originado un campo hacia abajo, dentro de la espiral que se opone al cambio de flujo. Prosiguiendo con este razonamiento llegamos a la siguiente conclusión: la corriente cambia de dirección siempre que la espira gira 180°.

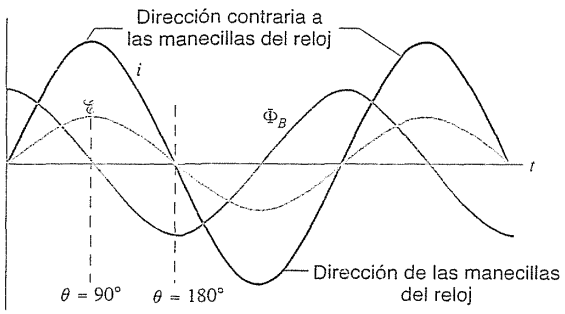


FIGURA 34-14. Flujo magnético, fuerza electromotriz inducida y corriente inducida del generador en la figura 34-13.

Se emplean los generadores de un diseño más complejo que el aquí indicado en las plantas eléctricas para producir el voltaje de corriente alterna que se usa en los hogares. Los automóviles están equipados con un dispositivo similar conocido como *alternador;* en él gira la fuente del campo magnético (un pequeño imán permanente), mientras que la espira donde se induce la corriente permanece fija.

Hasta ahora tenemos la impresión de que se puede conseguir electricidad "gratis" de un generador. Si pudiéramos diseñar una espira giratoria con cojinetes sin fricción, una vez que la hubiéramos hecho rotar con cierta velocidad angular, la corriente inducida debería proseguir indefinidamente en el circuito externo. El trabajo ilimitado debería efectuarse en el circuito externo sin invertir energía. Claro que algo anda mal con este razonamiento: viola la conservación de la energía.

Incluso sin fricción, existe un par que le impide girar a la espira. Cuando fluye corriente por ella, hay un par magnético, dado por la ecuación 32-34 ($\tau = NiAB$ sen θ). No importa si la batería o el movimiento producen corriente en el campo magnético: todavía existe un par en la espira con corriente. En la situación descrita en la figura 34-13, el par empuja el plano de la espira hacia $\theta = 0$, y al hacerlo se opone a la rotación. De hecho, el lector debe convencerse de que el par permanece en la misma dirección, aun cuando la espira atraviese $\theta = 180°$ y la corriente cambie de dirección. Para oponerse al par, el dispositivo que hace girar la espira habrá de continuar efectuando trabajo a medida que ella gire. El generador puede, pues, concebirse como un aparato que convierte el trabajo mecánico (la rotación de la espira) en trabajo eléctrico en el circuito. En última instancia, la energía eléctrica que produce proviene de la suministrada por el agente que mantiene girando a la espira.

Un motor eléctrico no es más que un generador que funciona en sentido inverso. Desconectamos la fuente externa que hace girar la espira y reemplazamos el circuito de la figura 34-13 por otro generador, el cual produce una fuerza electromotriz de corriente alterna $\mathscr{E}$ que origina una corriente $i = \mathscr{E}/R$ en la espira. En este caso hay, otra vez, un par magnético en ella que la hace girar. Del mismo modo que la espira pasa por $\theta = 180°$, donde el par es cero, la corriente procedente del exterior cambia de dirección, con lo cual mantiene el par en la misma dirección en que ella sigue girando. A pesar de que la corriente cambia de dirección cada medio ciclo, el par magnético conserva la misma dirección.

Una vez más, si suponemos que este dispositivo tiene cojinetes sin fricción, al parecer deberíamos ser capaces de obtener del motor algo a cambio de nada. Si hacemos muy pequeña la resistencia de los alambres, la corriente y el par resultante se vuelven muy grandes. Por lo visto, puede obtenerse una cantidad ilimitada de trabajo mecánico invirtiendo poca energía. Pero hemos olvidado que la espira giratoria genera una fuerza electromotriz inducida $\mathscr{E}_{ind}$ (conocida como "fuerza contraelectromotriz" en el caso de un motor) que está dada por la ecuación 34-10. Conforme a la ley de Lenz, esta fuerza se opone al efecto de la fuerza electromotriz aplicada $\mathscr{E}$. Cuando arranca el motor por primera vez, ω es pequeña, la fuerza contraelectromotriz también lo es y esta corriente equivale a $i = \mathscr{E}/R$. Conforme la rotación va adquiriendo rapidez, la fuerza aumenta y la corriente disminuye a $i = (\mathscr{E} - \mathscr{E}_{ind})/R$. A medida que la velocidad de rotación sigue creciendo, lo mismo sucede con la fuerza contraelectromotriz; cuando finalmente $\mathscr{E}_{ind} = \mathscr{E}$, no fluye corriente y el motor giratorio deja de suministrar un par. Si aplicamos un circuito al motor (por ejemplo, un peso a levantar), la rotación decrece un poco y, por lo mismo, $\mathscr{E}_{ind}$ disminuye y aumenta i: el generador de la fuente ha de proporcionar trabajo eléctrico adicional. Así pues, un motor puede considerarse como un dispositivo que convierte el trabajo eléctrico (procedente del generador activador) en trabajo mecánico.

Los generadores y los motores reales son un poco más complicados que los que acabamos de describir. Algunos generadores incorporan ingeniosos arreglos geométricos de devanados y están provistos de mecanismos que producen corrientes directas (cuya magnitud varía con el tiempo pero sin cambiar de dirección). Asimismo hay motores de corriente o voltaje directo. Con todo, los principios fundamentales de su funcionamiento se parecen a los de los ejemplos que acabamos de comentar.

PROBLEMA RESUELTO 34-5. Un generador eléctrico consta de una espira rectangular que mide 8.4 por 15.4 cm. Gira en un campo magnético uniforme de 0.126 T, con una frecuencia de 60.0 Hz, alrededor de un eje perpendicular a la dirección del campo. ¿Cuál es la fuerza electromotriz máxima generada por la espira?

Solución La fuerza electromotriz máxima estándar dada por la ecuación 34-10 cuando sen $\omega t = 1$:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{max} &= BA\omega \\ &= (0.126\ \text{T})(0.084\ \text{m} \times 0.154\ \text{m})(2\pi \times 60\ \text{s}^{-1}) \\ &= 0.61\ \text{V}.\end{aligned}$$

34-6 CAMPOS ELÉCTRICOS INDUCIDOS

Supóngase que colocamos una espira de un alambre conductor en un campo magnético externo (como en la Fig. 34-15*a*). El campo, que suponemos tiene una intensidad uniforme en la superficie de la espira, puede crearse por medio de un electroimán externo. Al modificar la corriente en este electroimán, podemos alterar la intensidad del campo magnético.

Al ir cambiando $\vec{B}$, el flujo magnético que pasa por la espira varía con el tiempo; basándonos en las leyes de Faraday y de Lenz podemos calcular la magnitud y la dirección de la fuerza electromotriz inducida, así como la corriente inducida en la espira. Antes que el campo comenzara a cambiar, no había corriente en la espira; fluye corriente por la espira mientras el flujo cambia. Las cargas no empezarán a moverse si no las acelera un campo eléctrico. De acuerdo con la ley de Faraday, este *campo eléctrico inducido* aparece junto con un campo magnético variable.

El campo eléctrico inducido es tan real como cualquiera generado por cargas estáticas; por ejemplo, ejerce una fuerza $q_0\vec{E}$ sobre una carga de prueba. Más aún, la presencia del campo eléctrico nada tiene que ver con la presencia de la espira

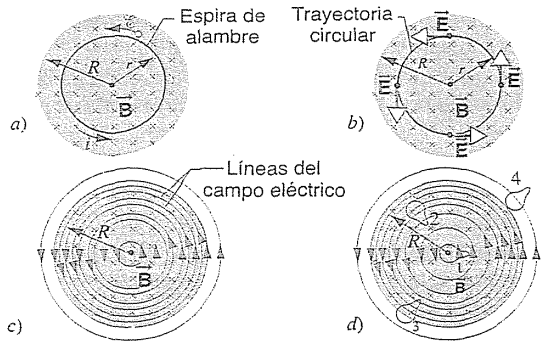


FIGURA 34-15. *a*) Si el campo magnético (que apunta al interior de la página) aumenta con velocidad uniforme, en la espira de alambre de radio r aparece una corriente constante como se indica en la figura. *b*) Existen en la región campos eléctricos inducidos, aun cuando se elimine el anillo. *c*) Representación completa de los campos eléctricos inducidos, mostrados como líneas del campo. *d*) Cuatro trayectorias cerradas similares alrededor de las cuales puede calcularse una fuerza electromotriz.

de alambre; si quisiésemos quitar por completo la espira, el campo eléctrico seguiría estando presente. Podríamos llenar el espacio con un "gas" de electrones o de átomos ionizados; estas partículas experimentarían el campo eléctrico inducido $\vec{E}$.

Reemplazamos, pues, la espira de alambre por una trayectoria de radio arbitrario r (Fig. 34-15*b*). Esta trayectoria, que tomaríamos en un plano perpendicular a la dirección de $\vec{B}$, encierra una región del espacio donde el campo magnético cambia con una rapidez $d\vec{B}/dt$. Suponemos que la rapidez es la misma en todos los puntos de la superficie delimitada por la trayectoria. La trayectoria circular encierra un flujo Φ_B, el cual se modifica con una rapidez $d\Phi_B/dt$ a causa de la variación del campo magnético. Una fuerza electromotriz inducida aparece alrededor de la trayectoria; así que en todos los puntos alrededor del círculo existe una fuerza electromotriz inducida. A partir de la simetría concluimos que $\vec{E}$ ha de poseer la misma magnitud en todos esos puntos, sin que haya una dirección preferencial en este espacio. Más aún, es posible que $\vec{E}$ no tenga un componente radial, conclusión que se extrae de la ley de Gauss: se construye una superficie cilíndrica imaginaria perpendicular al plano de la figura 34-15*b*. Si $\vec{E}$ tuviera un componente radial, un flujo *eléctrico* neto entraría o saldría de la superficie, lo cual exigiría que ésta encerrara una carga eléctrica neta. Y como no existe tal carga, el flujo ha de ser cero y también el componente radial de $\vec{E}$. En conclusión, el campo eléctrico es tangencial y sus líneas son círculos concéntricos, según se señala en la figura 34-15*c*.

Consideremos una carga de prueba q_0 que se mueve alrededor de la trayectoria circular de la figura 34-15*b*. El trabajo W que en una revolución realiza en ella el campo eléctrico inducido, es $\mathscr{E}q_0$. En forma equivalente, podemos expresarlo como la fuerza eléctrica q_0E multiplicada por el desplazamiento $2\pi r$ recorrido en una revolución. Al hacer esas dos expresiones de W iguales entre sí y al cancelar el factor q_0, obtenemos

$$\mathscr{E} = E(2\pi r). \tag{34-11}$$

El lado derecho de la ecuación anterior puede expresarse como una integral de línea de $\vec{E}$ alrededor del círculo y puede escribirse de la siguiente manera en casos más generales (por ejemplo, cuando $\vec{E}$ no es constante o cuando la trayectoria cerrada escogida no es un círculo):

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{34-12}$$

Nótese que la ecuación 34-12 se reduce directamente a la ecuación 34-11 en el caso especial de una trayectoria circular con un $\vec{E}$ tangencial constante.

Al reemplazar la fuerza electromotriz en la ecuación 34-12, la ley de inducción de Faraday ($\mathscr{E} = -d\Phi_B/dt$) puede escribirse así:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{34-13}$$

La ley de Faraday aparece en esta forma como una de las cuatro ecuaciones básicas del electromagnetismo propuestas por Maxwell. En esta forma, evidentemente significa que un campo magnético variable produce un campo eléctrico. La dirección de la integral de línea se relaciona con la dirección de $d\vec{A}$ en Φ_B según la misma regla de la mano derecha explicada al final de la sección 34-3: con los dedos en dirección de $d\vec{s}$ alrededor de una trayectoria cerrada de integración, el pulgar indicará la dirección de $d\vec{A}$.

En la figura 34-15 hemos supuesto que el campo magnético crece, es decir dB/dt y $d\Phi_B/dt$ son positivos. Conforme a la ley de Lenz, la fuerza electromotriz inducida se opone a este cambio y, en consecuencia, la corriente inducida produce un campo magnético que apunta hacia afuera del plano de la figura. Como las corrientes han de tener una dirección contraria a la de las manecillas del reloj, lo mismo debe ocurrir con las líneas del campo eléctrico inducido $\vec{E}$ (que causa la corriente). Por el contrario, si el campo magnético estuviera decreciendo ($dB/dt < 0$), las líneas del campo eléctrico inducido seguirán la dirección de las manecillas del reloj; por tanto, la corriente inducida se opondrá nuevamente al cambio de Φ_B.

La ley de Faraday en la forma de la ecuación 34-13 puede aplicarse a trayectorias de cualquier geometría, no sólo a la trayectoria circular especial que escogimos en la figura 34-15*b*. La figura 34-15*d* contiene cuatro de estas trayectorias, todas con la misma forma y área, pero situadas en diversas posiciones dentro del campo variable. En las trayectorias 1 y 2, la fuerza electromotriz inducida es la misma porque se hallan enteramente en el interior del campo magnético y, por eso, poseen el mismo valor de $d\Phi_B/dt$. Sin embargo, aunque la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ ($= \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$) es igual en ellas dos, la distribución de los vectores del campo eléctrico a su alrededor, es distinta, como lo indican las líneas del campo eléctrico. En la trayectoria 3, la fuerza electromotriz es menor porque Φ_B y $d\Phi_B/dt$ son más pequeñas y en la trayectoria 4 la fuerza electromotriz inducida es cero a pesar de que el campo eléctrico no lo es en ningún punto de ella.

Fuerza electromotriz inducida y diferencia de potencial

En el capítulo 26 explicamos los campos eléctricos producidos por las cargas. Los campos eléctricos inducidos no son

producidos por las cargas, sino por un flujo magnético variable. Ambas clases de campo son detectadas mediante las fuerzas que ejercen sobre ellas, pero se da una importante diferencia entre los campos: las líneas de $\vec{\mathbf{E}}$ asociadas al flujo magnético variable forman espiras cerradas; en cambio, las líneas de $\vec{\mathbf{E}}$ relacionadas con las cargas siempre comienzan en una positiva y terminan en una negativa.

Existe otra diferencia entre las dos clases de campo eléctrico: *los campos eléctricos producidos por cargas pueden representarse por medio de un potencial, pero el potencial no tiene significado en los producidos por un flujo magnético variable.* En el capítulo 28 demostramos que la diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico es (Ec. 28-15):

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}. \qquad (34\text{-}14)$$

Como la fuerza electrostática asociada a las cargas es conservativa, la diferencia de potencial no depende de la trayectoria recorrida entre los puntos a y b. Si éstos son el mismo punto, la trayectoria que los conecta será una espira cerrada y la ecuación 34-14 queda así

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0. \qquad (34\text{-}15)$$

Este concepto lo ilustra gráficamente la figura 34-16*a*. La aguja del voltímetro indicará cero si conectamos las dos puntas del voltímetro juntas en un campo producido por cargas.

Pongamos el caso contrario del campo eléctrico generado por un campo magnético variable. Entonces la integral de $\vec{\mathbf{E}}$ alrededor de la trayectoria cerrada *no* es cero: ahora $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ es $-d\Phi_B/dt$ de acuerdo con la ley de Faraday. En la figura 34-16*b*, las dos puntas del voltímetro, todavía conectadas entre sí, forman una espira que rodea al solenoide donde la corriente varía. En este caso la lectura del voltímetro *no* es cero y tampoco es posible servirse del concepto de potencial para describir esta situación. El campo eléctrico inducido proveniente de un campo magnético variable no es conservativo y ni puede representarse con un potencial. (Lo mismo sucede con el campo magnético producido por una corriente. Las líneas del campo magnético forman espiras cerradas, y el campo magnético tampoco puede describirse por medio de un potencial.)

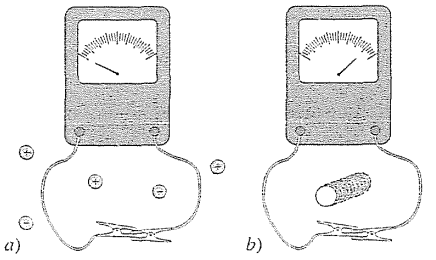


FIGURA 34-16. *a*) Las puntas de un voltímetro están conectadas en una región donde hay un campo eléctrico producido por las cargas. La integral $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ alrededor de la trayectoria cerrada constituida por los conductores y el voltímetro, da cero, por lo cual éste indica cero. *b*) Ahora los conductores rodean un solenoide donde la corriente está cambiando. La lectura del voltímetro no es cero, a pesar de estar conectadas las puntas.

PROBLEMA RESUELTO 34-6. En la figura 34-15*b* supóngase que $R = 8.5$ cm y que $dB/dt = 0.13$ T/s. *a*) ¿Qué magnitud tiene el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ cuando $r = 5.2$ cm? *b*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido si $r = 12.5$ cm?

Solución *a*) El flujo Φ_B que pasa por una trayectoria circular cerrada de radio r es (con $r < R$)

$$\Phi_B = B(\pi r^2),$$

así que la ley de Faraday (Ec. 34-13) nos da

$$E(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -(\pi r^2)\frac{dB}{dt}.$$

Al resolver para E y al tomar las magnitudes, obtenemos

$$E = \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right| r. \qquad (34\text{-}16)$$

Nótese que el campo eléctrico inducido E depende de dB/dt, pero no de B. Cuando $r = 5.2$ cm, en el caso de la magnitud de $\vec{\mathbf{E}}$ tenemos

$$E = \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right| r = \tfrac{1}{2}(0.13 \text{ T/s})(5.2 \times 10^{-2} \text{ m})$$

$$= 0.0034 \text{ V/m} = 3.4 \text{ mV/m}.$$

b) En este caso tenemos $r > R$, de modo que el flujo total del imán pasa por la trayectoria circular. Por tanto,

$$\Phi_B = B(\pi R^2).$$

Con base en la ley de Faraday (Ec. 34-13) obtenemos entonces

$$E(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -(\pi R^2)\frac{dB}{dt}.$$

Resolviendo para E y tomando otra vez las magnitudes, encontramos

$$E = \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right| \frac{R^2}{r}. \qquad (34\text{-}17)$$

Un campo eléctrico se induce en este caso, incluso en puntos que están muy por afuera del campo magnético (variable), resultado importante que permite construir transformadores (Sec. 37-5). Si $r = 12.5$ cm, la ecuación 34-17 nos da

$$E = \tfrac{1}{2}(0.13 \text{ T/s})\frac{(8.5 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{12.5 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

$$= 3.8 \times 10^{-3} \text{ V/m} = 3.8 \text{ mV/m}.$$

Como debe ser, las ecuaciones 34-16 y 34-17 dan el mismo resultado con $r = R$. La figura 34-17 incluye una gráfica de E (r) basada en las dos ecuaciones precedentes.

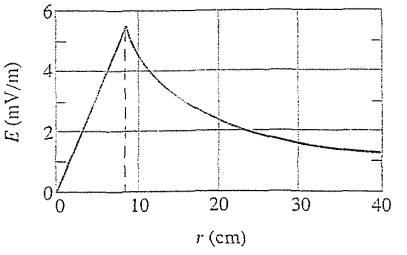


FIGURA 34-17. El campo eléctrico inducido que se encontró en el problema resuelto 34-6.

El betatrón*

El betatrón es un dispositivo que acelera electrones (llamados también partículas beta) hasta altas velocidades, sirviéndose para ello del campo magnético producido por un campo magnético variable. Las energías normales de ellos son 50 a 100 MeV. Estos electrones de alta energía se emplean en la investigación básica de la física, lo mismo que en la producción de rayos X, para la investigación aplicada en la industria y para fines médicos como el tratamiento del cáncer.

La figura 34-18*a* muestra una sección transversal de la estructura interna de una betatrón. El campo magnético, cuya forma depende de las piezas polares M hechas con material magnético, puede variarse modificando la corriente en las bobinas. Los electrones circulan en el tubo al vacío en forma de rosquilla.

Las bobinas transportan una corriente alterna y crean el campo magnético que aparece en la figura 34-18*b*. Para que los electrones circulen en la dirección señalada (en sentido contrario al de las manecillas del reloj visto desde arriba), es necesario que el campo magnético apunte hacia arriba (dirección que suponemos positiva). El campo variable debe tener $dB/dt > 0$, así que $d\Phi_B/dt > 0$ y se aceleran los electrones (en vez de desacelerarse) durante el ciclo. Así pues, sólo el primer cuarto de ciclo de la figura 34-18*b* es útil en el funcionamiento del betatrón. Los electrones entran en él cuando $t = 0$ y se extraen cuando $t = T/4$; el betatrón no produce haz alguno en los tres cuartos restantes del ciclo. El betatrón genera un pulso, en lugar de un haz continuo; emite estos pulsos normalmente cada 0.01 s.

PROBLEMA RESUELTO 34-17. En un betatrón de 100 MeV, el radio orbital r mide 84 cm. El campo magnético en la región delimitada por la órbita se eleva periódicamente (60 veces por segundo) de cero a un valor máximo promedio $B_{\text{pro.m}} = 0.80$ T en el intervalo de aceleración de un cuarto de periodo, o sea 4.2 ms. *a)* ¿Cuánta energía adquiere el electrón en un recorrido normal alrededor de su órbita en este flujo variable? *b)* ¿Cuál es la velocidad *promedio* de un electrón durante su ciclo de aceleración?

Solución *a)* Durante el intervalo de aceleración el flujo central pasa de cero a un máximo de

$$\Phi_B = (B_{\text{pro, m}})(\pi R^2)$$
$$= (0.80\ \text{T})(\pi)(0.84\ \text{m})^2 = 1.8\ \text{Wb}.$$

Así pues, el valor promedio de $d\Phi_B/dt$ durante el intervalo de aceleración es

$$\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{\text{pro}} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{1.8\ \text{Wb}}{4.2 \times 10^{-3}\ \text{s}} = 430\ \text{Wb/s}.$$

Según la ley de Faraday (Ec. 34-3), este valor es también la fuerza electromotriz promedio en volts. Por tanto, el electrón incrementa su energía en un promedio de 430 eV por revolución durante este flujo variable. Para alcanzar su energía final completa de 100 MeV, ha de efectuar unas 230,000 revoluciones dentro de su órbita, una longitud total de trayectoria de 1200 km aproximadamente.

b) La longitud del ciclo de aceleración está dada por 4.2 ms y la de la trayectoria antes calculada es de 1200 km. Por tanto, la velocidad promedio es

$$v_{\text{pro}} = \frac{1200 \times 10^3\ \text{m}}{4.2 \times 10^{-3}\ \text{s}} = 2.86 \times 10^8\ \text{m/s}.$$

Esta velocidad es 95% de la luz. La velocidad real de un electrón completamente acelerado es 99.9987% de la velocidad de la luz cuando alcanza su energía definitiva de 100 MeV.

34-7 LA INDUCCIÓN Y EL MOVIMIENTO RELATIVO (opcional)

En la sección 33-6 expusimos la idea de que la clasificación de los efectos electromagnéticos en puramente eléctricos o puramente magnéticos se basaba en el marco de referencia del observador. Por ejemplo, lo que parece ser un campo magnético en un marco de referencia quizá parezca una mezcla de campos eléctricos y magnéticos en otro. Debido a que

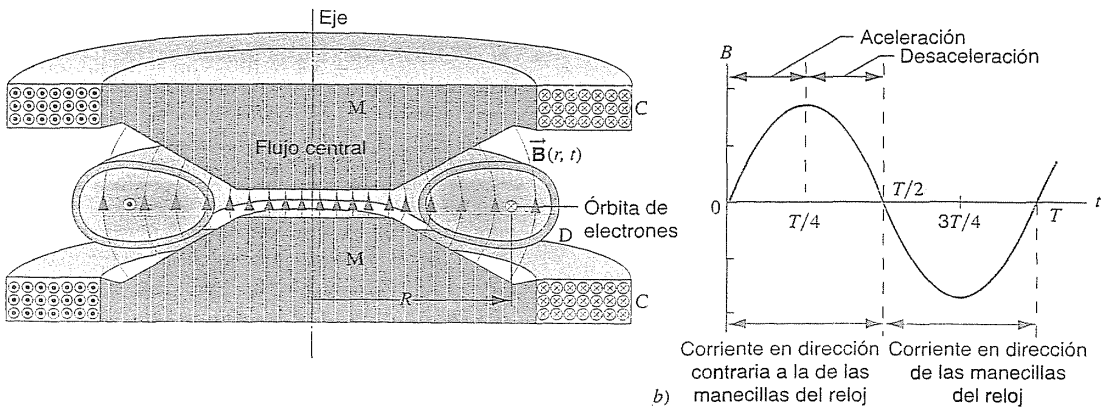


FIGURA 34-18. *a)* Sección transversal de un betatrón, que muestra la órbita de los electrones acelerados y una instantánea del campo magnético en cierto momento del ciclo. Las bobinas producen el campo magnético C y lo moldean las piezas de polo magnético M. Los electrones circulan dentro del tubo de cerámica D en forma de rosquilla y al vacío. Los electrones giran perpendicularmente al plano de la figura, entrando por la derecha y saliendo por la izquierda. *b)* Variación con el tiempo del campo magnético del betatrón durante un ciclo.

* Una reseña de los avances y de las aplicaciones de betatrones y de dispositivos similares se da en "Ultra-high-current Electron Induction Accelerators" de Chris A. Kapetanakos y Phillip Sprangle, *Physics Today,* febrero de 1985, p. 58.

la fuerza electromotriz de movimiento está determinada por la velocidad del objeto que se desplaza por el campo magnético, evidentemente depende del marco de referencia del observador. Otros observadores en distintos marcos medirán una velocidad y diferentes intensidades del campo magnético. Es, pues, indispensable calcular las fuerzas electromotrices y las corrientes inducidas para especificar el marco del observador.

En la figura 34-19*a* se ve una espira cerrada, que un agente externo (no mostrado) hace que se desplace a una velocidad $\vec{v}$ respecto al imán que produce un campo uniforme $\vec{B}$ en una región. Un observador S está en reposo respecto al imán con que se crea el campo $\vec{B}$. En este caso, la fuerza electromotriz inducida es una *fuerza electromotriz* de movimiento porque la espira conductora se desplaza en relación con el observador.

Supongamos un portador de carga positiva en el extremo izquierdo de la espira. Para el observador S, esta carga q se ve obligada a moverse por el campo $\vec{B}$, con una velocidad $\vec{v}$, hacia la derecha, a lo largo de la espira; experimenta una fuerza magnética dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (que no aparece en la Fig. 34-19*a*). Esta fuerza ocasiona que los portadores asciendan (en dirección y) a lo largo del conductor; con el tiempo adquieren la velocidad de deriva $\vec{v}_d$, como se indica en la figura 34-19*a*.

La velocidad resultante de equilibrio de los portadores es ahora $\vec{V}$, o sea la suma vectorial de $\vec{v}$ y $\vec{v}_d$. En esta situación la fuerza magnética es

$$\vec{F}_B = q\vec{V} \times \vec{B}, \tag{34-18}$$

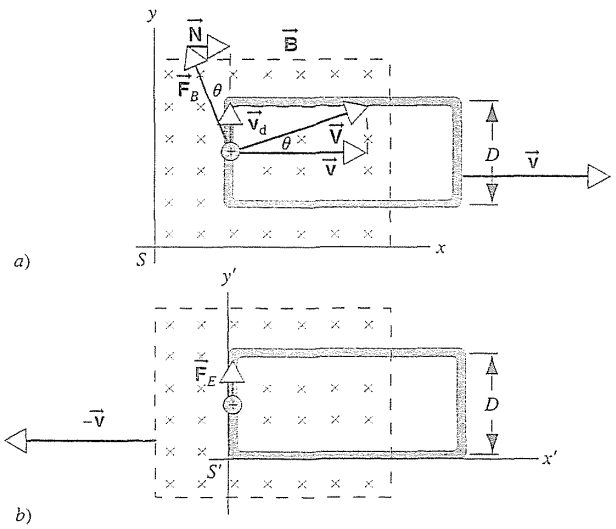


FIGURA 34-19. Una espira conductora cerrada está en movimiento respecto a un imán que produce el campo $\vec{B}$. *a*) Un observador S, fijo respecto al imán, ve la espira desplazarse a la derecha y la fuerza magnética $F_B \cos\theta$ actuar hacia arriba sobre los portadores de carga positiva. *b*) Un observador S' fijo respecto a la espira, ve el imán dirigirse hacia la izquierda y una fuerza que opera hacia arriba sobre los portadores de carga positiva. En ambas figuras hay fuerzas internas de colisión (no mostradas) que impiden acelerar a los portadores.

que (como de costumbre) actúa en ángulos rectos con la velocidad $\vec{v}$ resultante del portador, según se aprecia en la figura 34-19*a*.

Como opera sola, la fuerza $\vec{F}_B$ tendería a empujar los portadores a través de la pared izquierda del conductor. Como esto no sucede, la pared ha de ejercer una fuerza normal $\vec{N}$ sobre estos portadores (Fig. 34-19*a*) de magnitud tal que $\vec{v}_d$ es paralela al eje del alambre; en otras palabras, $\vec{N}$ cancela exactamente el componente horizontal de $\vec{F}_B$, dejando sólo el componente $F_B \cos\theta$ que se encuentra en la dirección del conductor. Este último componente de fuerza en el portador también es cancelado ahora por la fuerza F_i asociada a las colisiones internas que experimenta el portador al desplazarse con una velocidad (constante) v_d a través del alambre.

La energía cinética del portador de carga al desplazarse por el alambre no cambia. Esto concuerda con el hecho de que la fuerza resultante que opera sobre el portador de carga ($= \vec{F}_B + \vec{F}_i + \vec{N}$) es cero. El trabajo efectuado por $\vec{F}_B$ es cero porque las fuerzas magnéticas, las cuales operan en ángulos rectos con la velocidad de una carga en movimiento, no pueden realizar trabajo en ella. Así pues, el trabajo (positivo) efectuado en el portador por la fuerza $\vec{N}$ debe cancelar exactamente el trabajo (negativo) hecho en la portadora por la fuerza de colisión interna promedio $\vec{F}_i$. En última instancia, el agente que empuja la espira a través del campo magnético suministra $\vec{N}$; la energía mecánica entregada por este agente aparece como energía interna en la espira, según vimos en la sección 34-4.

Calculemos ahora el trabajo dW que la fuerza $\vec{N}$ efectúa en el portador durante el tiempo dt.

$$dW = N(v\,dt), \tag{34-19}$$

donde $v\,dt$ es la distancia que la espira (y el portador) ha recorrido a la derecha de la figura 34-19*a* en el tiempo dt. Podemos escribir para N (Ec. 34-18 y Fig. 34-19*a*)

$$N = F_B \operatorname{sen}\theta = (qVB)(v_d/V) = qBv_d. \tag{34-20}$$

Al sustituir la ecuación 34-20 en la ecuación 34-19, obtenemos

$$\begin{aligned} dW &= (qBv_d)(v\,dt) \\ &= (qBv)(v_d\,dt) = qBv\,ds, \end{aligned} \tag{34-21}$$

donde ds ($= v_d\,dt$) es la distancia que el portador se desplaza a lo largo del conductor en el tiempo dt.

El trabajo realizado en el portador cuando éste recorre un circuito completo de la espira se calcula integrando la ecuación 34-21 alrededor de la espira y es

$$W = \oint dW = qBvD. \tag{34-22}$$

Se llega a esta conclusión porque las contribuciones del trabajo en la parte superior e inferior de la espira presentan signo contrario y se cancelan, y no se realiza trabajo en las porciones que están fuera del campo magnético.

Un agente que efectúa trabajo en los portadores de carga, creando así una corriente en una espira conductora cerrada, puede considerarse como una fuerza electromotriz. Por medio de la ecuación 34-22 encontramos

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \frac{qBvD}{q} = BDv, \tag{34-23}$$

el mismo resultado que obtuvimos de la ley de inducción de Faraday (Ec. 34-6). Así pues, una fuerza electromotriz de movimiento está conectada estrechamente a la deflexión lateral de una partícula cargada que se desplaza a través de un campo magnético.

A continuación veremos cómo se vería la situación descrita en la figura 34-19*a* un observador S', que se halla *en reposo respecto a la espira.* Para él, el imán se dirige a la izquierda de la figura 34-19b con una velocidad $-\vec{v}$ y la carga q no se mueve en la dirección x' con la espira, sino que se desplaza en dirección de las manecillas del reloj alrededor de la espira. El observador S' mide una fuerza electromotriz $\mathscr{E}'$, la cual desde el punto de vista microscópico se explica postulando que un campo eléctrico $\vec{E}'$ se induce en esta espira por la acción de un imán en movimiento. La fuerza electromotriz $\mathscr{E}'$ se relaciona con $\vec{E}'$ por medio de la ecuación 34-12,

$$\mathscr{E}' = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{s}. \tag{34-24}$$

El campo inducido $\vec{E}'$, que tiene el mismo origen que los campos inducidos mencionados en la sección 34-6, ejerce una fuerza $\vec{E}'$ sobre el portador de carga.

El campo inducido $\vec{E}'$ que produce la corriente existe sólo en el extremo izquierdo de la espira. (Al resolver la integral de la Ec. 34-12 alrededor de ella, las contribuciones a la integral hechas por el componente x' de $\vec{E}'$ se cancelan en los lados superior e inferior, considerando que no existe una contribución de las partes de la espira que no se hallan en el campo magnético.) Así, por medio de la ecuación 34-12 obtenemos

$$\mathscr{E}' = E'D. \tag{34-25}$$

En el movimiento con velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, las fuerzas electromotrices dadas en las ecuaciones 34-23 y 34-25 han de ser idénticas, porque el movimiento relativo de la espira y del imán es idéntico en los dos casos que aparecen en la figura 34-19. Al igualar esas relaciones se obtiene

$$E'D = BDv,$$

o bien

$$E' = vB. \tag{34-26}$$

En la figura 34-19*b,* el vector $\vec{E}'$ apunta hacia arriba a lo largo del eje del extremo izquierdo de la espira conductora, por ser ésa la dirección en que se observa que las cargas positivas se desplazan. Las direcciones de $\vec{v}$ y $\vec{B}$ se observan claramente en esta figura. Vemos entonces que la ecuación 34-26 es compatible con la relación vectorial más general

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}. \tag{34-27}$$

No hemos probado la ecuación 34-27, salvo en el caso especial de la figura 34-19; pese a ello es verdad en general, sin que importe el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$.

Interpretamos la ecuación 34-27 de la siguiente manera. El observador S fijo respecto al imán se percata sólo de un campo magnético. Para este observador, la fuerza proviene del movimiento de las cargas a través de $\vec{B}$. También el observador S' fijo en el portador de carga advierte la presencia de un campo eléctrico $\vec{E}'$ y atribuye la fuerza en la carga (inicialmente en reposo respecto a S') al campo eléctrico. S dice que la fuerza es de origen magnético en su totalidad, en tanto que para S' es enteramente de origen eléctrico. Desde el punto de vista del observador S, la fuerza electromotriz inducida está dada por $\oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$. Desde el punto de vista de S', está dada por $\oint \vec{E}' \cdot d\vec{s}$, donde $\vec{E}'$ es el vector de campo eléctrico (inducido) que ve en los puntos a lo largo del circuito.

Para un tercer observador S'', respecto al cual se desplazan el imán y la espira, la fuerza que tiende a mover las cargas alrededor de la espira no es ni puramente eléctrica ni puramente magnética, sino un poco de ambas. En resumen, en la ecuación

$$\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B},$$

varios observadores hacen distintas evaluaciones de $\vec{E}$, $\vec{B}$ y de $\vec{v}$, pero cuando se combinan, todos ellos llegan a una misma evaluación de $\vec{F}/q$ y todos obtienen el mismo valor de la fuerza electromotriz inducida en la espira (que depende exclusivamente del movimiento *relativo*). Dicho de otra manera, la fuerza total (y, en consecuencia, la aceleración total) es la misma para todos los observadores, sólo que cada uno realiza una estimación propia de las fuerzas eléctricas y magnéticas separadas que constituyen una fuerza total idéntica.

He aquí el punto esencial: lo que a un observador le parece un campo magnético a otro puede parecerle una mezcla de campo eléctrico y magnético en otro marco de referencia inercial. Pero ambos observadores coinciden en el resultado global mensurable: la corriente en la espira en el caso de la figura 34-19. Nos vemos obligados a concluir que los campos magnético y eléctrico *no* son independientes entre sí y que no tienen existencia individual; dependen del marco inercial, conclusión a la que llegamos en la sección 33-6.

En todos los resultados de esta sección se supone que la velocidad relativa entre S y S' es pequeña comparada con la de la luz c. Si v tiende a c, hay que aplicar el conjunto apropiado de transformaciones relativistas. En este caso podríamos descubrir que las fuerzas electromotrices inducidas medidas por ambos observadores ya no son iguales y que el campo eléctrico inducido no está dado por la ecuación 34-27. Pero si definimos rigurosamente todas las magnitudes en una forma relativista adecuada, comprobaremos una vez más que las leyes básicas del electromagnetismo, entre ellas la de Faraday, se cumplen en todos los marcos de referencia inerciales.* En efecto, tales consideraciones impulsaron a Einstein a formular la teoría especial de la relatividad; en la terminología de ella, decimos que las ecuaciones de Maxwell son invariantes respecto a la transformación de Lorentz. ■

* Una explicación muy completa de las fuerzas electromotrices de movimiento en el caso de velocidades no necesariamente pequeñas comparadas con c se ofrece en "Application of Special Relativity to a Simple System in which a Motional emf Exists" de Murray D. Sirkis, *American Journal of Physics*, junio de 1986, p. 538. Un estudio más exhaustivo sobre la transformación relativista de los campos eléctrico y magnético se da en *Introduction to Special Relativity*, de Robert Resnick (Wiley, 1968), capítulo 4.

OPCIÓN MÚLTIPLE

34-1 Los experimentos de Faraday

34-2 La ley de inducción de Faraday

1. Un campo uniforme $\vec{B}$ perpendicular a una espira de alambre varía con el tiempo como se indica en la figura 34-20*a*. ¿Cuál de las gráficas de la figura representa mejor la corriente inducida en la espira en función del tiempo?

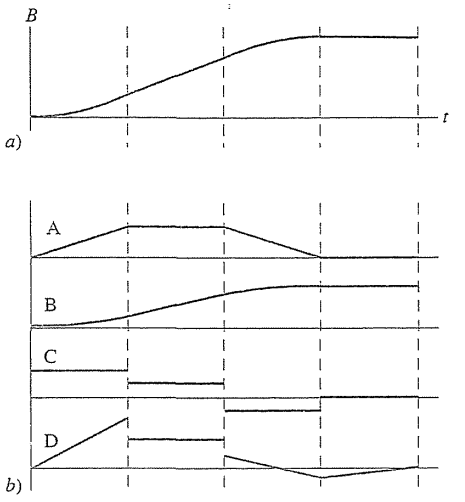


FIGURA 34-20. Pregunta de opción múltiple 1.

2. Una espira conductora flexible presenta la forma de un círculo con un radio variable. Esta espira se encuentra en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de ella. Para mantener una fuerza electromotriz constante $\mathscr{E}$ en ella, el radio r ha de variar con el tiempo conforme a
   A) $r(t) \propto \sqrt{t}$. B) $r(t) \propto t$. C) $r(t) \propto t^2$.
   D) r debe ser constante.

3. Una espira de alambre flexible en forma de círculo tiene un radio que crece linealmente con el tiempo. Hay un campo magnético perpendicular al plano de ella cuya magnitud es inversamente proporcional a la distancia de su centro, $B(r) \propto 1/r$. ¿Cómo varía con el tiempo la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$?
   A) $\mathscr{E} \propto t^2$ B) $\mathscr{E} \propto t$ C) $\mathscr{E} \propto \sqrt{t}$
   D) $\mathscr{E}$ es constante.

4. El flujo magnético que pasa a través de una espira de alambre cambia por $\Delta\Phi_B$ en un tiempo Δt. El cambio de flujo $\Delta\Phi_B$ es proporcional a
   A) la corriente del alambre.
   B) la resistencia del alambre.
   C) la carga neta que fluye por una sección transversal del alambre.
   D) la diferencia de potencial entre dos puntos fijos del alambre.

34-3 Ley de Lenz

5. Se deja caer un imán de barra a través de una espira de alambre. ¿Cuál gráfica de la figura 34-21 describe mejor cómo la corriente de la espira varía con el tiempo? Suponga que una corriente negativa se refiere a una corriente que fluye en dirección inversa.

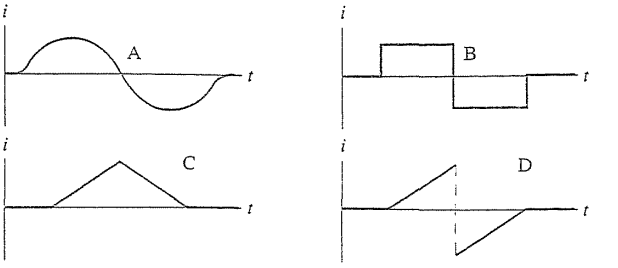


FIGURA 34-21. Pregunta de opción múltiple 5.

6. La corriente que pasa a la derecha de la figura 34-2 varía como se aprecia en la figura 34-22*a*. ¿Qué gráfica de la figura 34-22*b* describe mejor la lectura del amperímetro en función del tiempo?

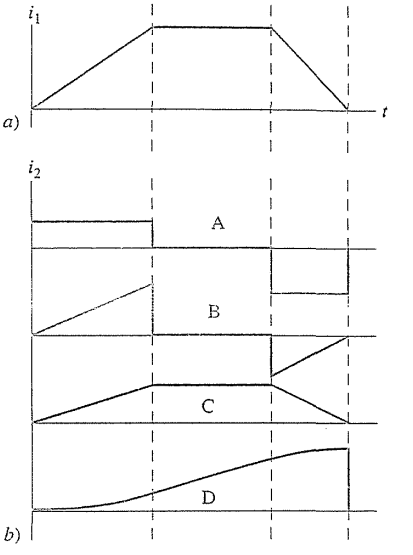


FIGURA 34-22. Pregunta de opción múltiple 6.

7. El alambre largo y recto de la figura 34-23 transporta una corriente i hacia la derecha. ¿Qué dirección sigue la corriente inducida en la espira de alambre?
   A) La dirección de las manecillas del reloj
   B) La dirección contraria a las manecillas del reloj
   C) No hay corriente inducida.

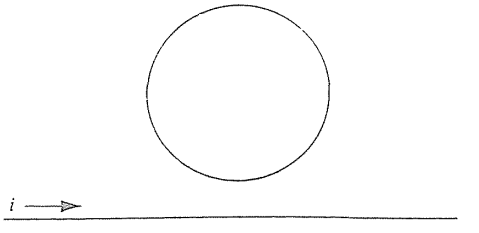


FIGURA 34-23. Preguntas de opción múltiple, 7, 8, 9 y 11.

8. El alambre largo y recto de la figura 34-23 lleva una corriente i hacia la derecha que crece con el tiempo. ¿Qué dirección tiene la corriente inducida en la espira de alambre?
   A) La dirección de las manecillas del reloj
   B) La dirección contraria a la de las manecillas del reloj
   C) No hay corriente inducida.
9. El alambre largo y recto de la figura 34-23 transporta una corriente i que disminuye linealmente con el tiempo. En el tiempo t la corriente es cero y luego empieza a aumentar linealmente en otra dirección. ¿Qué dirección sigue la corriente inducida en la espira del alambre?
   A) La dirección de las manecillas del reloj
   B) La dirección contraria a la de las manecillas del reloj
   C) La corriente inducida arranca en una dirección, pero en tiempo t se detiene y luego empieza a fluir en la otra dirección.
   D) No existe corriente inducida.
10. El alambre largo y recto de la figura 34-24 lleva hacia la derecha una corriente i que crece con el tiempo. ¿Qué dirección tiene la corriente inducida en la espira circular de alambre, que se halla en un plano perpendicular a él?
   A) La dirección de las manecillas del reloj vista desde la derecha
   B) La dirección contraria a la de las manecillas del reloj vista desde la derecha
   C) No hay corriente inducida

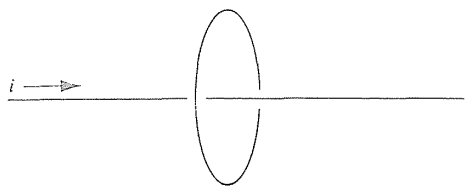


FIGURA 34-24. Pregunta de opción múltiple 10.

34-4 Fuerza electromotriz de movimiento

11. Considere de nuevo el alambre recto y la espira de la figura 34-23. Transporta una corriente i hacia la derecha.
   a) Una fuerza externa tira directamente de la espira hacia arriba. ¿Cuál es la dirección (si la hay) de la corriente inducida en la espira?
      A) La dirección de las manecillas del reloj
      B) La dirección contraria a la de las manecillas del reloj
      C) No existe corriente inducida.
   b) Mientras la fuerza externa tira de la espira hacia arriba, ¿qué dirección sigue (si la hay) la fuerza magnética en la espira?
      A) Hacia arriba B) Hacia abajo
      C) Hacia la izquierda
      D) No hay fuerza magnética.
   c) Si, en cambio, la fuerza externa jala de la espira hacia la izquierda, ¿cuál es la dirección (si la hay) de la corriente inducida en ella?
      A) La dirección de las manecillas del reloj
      B) La dirección contraria a la de las manecillas del reloj
      C) No existe corriente inducida.

34-5 Generadores y motores

12. Una persona utiliza un generador manual para encender una lámpara de resistencia constante. Al reducirse la rapidez con que gira la manivela, ¿cuál de las siguientes magnitudes disminuirá?
   A) La fuerza electromotriz B) La corriente
   C) La frecuencia D) Dos de las anteriores
   E) Todas las anteriores
13. Considere el generador de una bicicleta sujeto a una rueda y conectado a una lámpara de resistencia constante. Si se duplica la velocidad del pedaleo, la salida de su potencia
   A) no se alterará. B) se duplicará.
   C) aumentará en un factor de cuatro.
   D) aumentará en un factor de ocho.
14. ¿Tiene un motor eléctrico una resistencia efectiva mayor cuando está detenido o cuando gira?
   A) Cuando gira B) Cuando está detenido
   C) La resistencia efectiva es igual en ambos casos.
15. En igualdad de condiciones, ¿tenderá usted a "quemar" el motor de arranque de su automóvil, si el acumulador está sobrecargado o subcargado?
   A) Si el acumulador está sobrecargado
   B) Si el acumulador está subcargado
   C) En este caso no tiene importancia la carga del acumulador.

34-6 Campos eléctricos inducidos

16. El campo magnético en una región del espacio está dado por $\vec{B} = (0.001\ \mathrm{T/s^2})t^2\hat{i}$ cuando $-2\ \mathrm{s} \leq t \leq 2\ \mathrm{s}$. ¿Qué dirección tiene el campo eléctrico inducido cuando $t = 0$ s?
   A) Paralela al eje x B) Paralela al eje y
   C) El campo eléctrico está en círculos centrados en el eje x.
   D) No hay campo eléctrico inducido cuando $t = 0$ s.
17. La corriente en un solenoide infinitamente grande crece linealmente en función del tiempo.
   a) El campo eléctrico dentro del solenoide
      A) tiene la forma de círculos centrados en el eje del solenoide.
      B) es paralelo al eje del solenoide.
      C) se dirige radialmente hacia afuera del eje del cilindro.
      D) es cero.
   b) La magnitud del campo eléctrico fuera del solenoide
      A) Es uniforme y no cero.
      B) Es radialmente simétrica, disminuyendo con la distancia del solenoide.
      C) Es radialmente simétrica, aumentando con la distancia del solenoide.
      D) Es cero.
18. Un alambre largo y recto transporta una corriente que disminuye linealmente con el tiempo. ¿Qué dirección tiene fuera del campo la corriente eléctrica inducida?
   A) Paralelo a la corriente
   B) Opuesto a la corriente
   C) Apunta radialmente hacia afuera del alambre
   D) Apunta radialmente hacia dentro del alambre
   E) No existe campo eléctrico inducido fuera del alambre.

34-7 Inducción y el movimiento relativo

PREGUNTAS

1. Demuestre que 1 volt = 1 weber/segundo.
2. ¿Son en alguna forma las fuerzas electromotrices y las corrientes diferentes a las generadas por una batería conectada a una espira conductora?
3. ¿El tamaño del voltaje inducido en una bobina por donde se mueve un imán se ve afectado por la intensidad de éste? De ser así, explique de qué manera.
4. Con sus propias palabras explique la diferencia entre un campo magnético $\vec{B}$ y el flujo de un campo magnético Φ_B. ¿Son vectores o escalares? ¿En qué unidades pueden expresarse? ¿Cómo se relacionan sus unidades? ¿Son alguna o ambas (o ninguna) propiedades de un punto en el espacio?
5. ¿Puede la acción de un campo magnético poner en movimiento una partícula cargada y en reposo? Si la respuesta es negativa, explique por qué. Si la respuesta es afirmativa, explique cómo. Considere tanto un campo estático como uno variable con el tiempo.
6. En la ley de inducción de Faraday, ¿depende de la resistencia del circuito la fuerza electromotriz inducida? De ser así explique cómo.
7. Deja caer un imán de barra en el eje de un largo tubo de cobre. Describa el movimiento del imán y los intercambios de energía que se operan. No tenga en cuenta la resistencia del aire.
8. Está usted jugando con una espira de metal, haciéndola oscilar de atrás para delante en un campo magnético como se observa en la figura 34-9. ¿Cómo puede saber, sin una inspección minuciosa, si la espira tiene o no un pequeño corte de sierra que la convierte en una no conductora?
9. La figura 34-25 muestra un carril inclinado de madera que cruza un fuerte campo magnético en una parte de su extensión. Rueda usted un disco de cobre hacia abajo del carril. Describa el movimiento del disco al ir rodando hacia abajo.

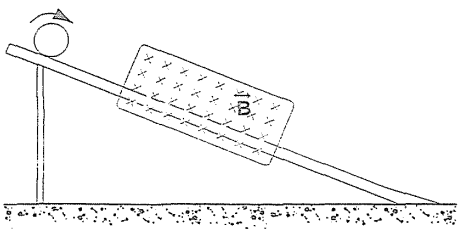


FIGURA 34-25. Pregunta 9.

10. La figura 34-26 muestra un anillo de cobre colgado del techo por medio de dos hilos. Describa en detalle cómo podría aprovechar al máximo un imán de barra para lograr que el anillo oscile de un lado al otro.

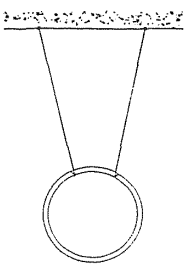


FIGURA 34-26. Pregunta 10.

11. En un solenoide largo, ¿una fuerza electromotriz es inducida por un imán de barra que se mueve en el interior a lo largo de un eje del solenoide? Explique su respuesta.
12. Dos espiras conductoras están una frente a otra, separadas por una distancia d, como se indica en la figura 34-27. Un observador está viendo en su eje común de izquierda a derecha. De repente, una batería, que no aparece en la figura genera una corriente i en dirección de las manecillas del reloj en la espira más grande. *a)* ¿Qué dirección sigue la corriente inducida en la espira más pequeña? *b)* ¿Cuál es la dirección de la fuerza (si la hay) que opera sobre esta última?

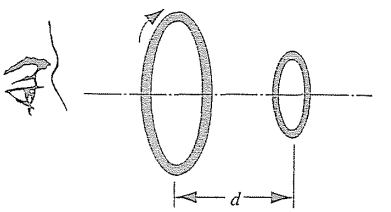


FIGURA 34-27. Pregunta 12.

13. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la bobina Y de la figura 34-28 *a*) cuando ésta se dirige hacia la bobina X? *b*) cuando la corriente en la bobina X disminuye sin ningún cambio en las posiciones relativas de las bobinas?

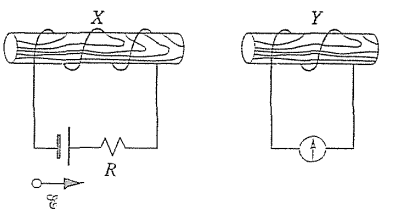


FIGURA 34-28. Pregunta 13.

14. Alejamos de un anillo de cobre el polo norte de un imán, como se muestra en la figura 34-29. ¿Qué dirección tiene la corriente en la parte del anillo más distante del lector?

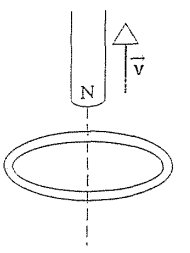


FIGURA 34-29. Pregunta 14.

15. Una espira circular se desplaza con velocidad constante por regiones donde campos magnéticos uniformes de la misma magnitud se dirigen hacia adentro y afuera del plano de la página, como se ve en la figura 34-30. ¿En cuál de las siete posiciones indicadas la corriente inducida *a*) estará en la dirección de la manecillas del reloj, *b*) en dirección contraria a ellas y *c*) será cero?

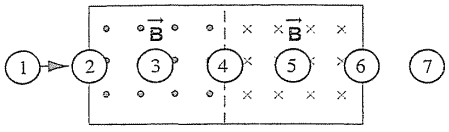


FIGURA 34-30. Pregunta 15.

16. Un solenoide corto que transporta una corriente estacionaria se dirige hacia una espira conductora según se muestra en la figura 34-31. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la espira cuando uno mira hacia ella como se indica?

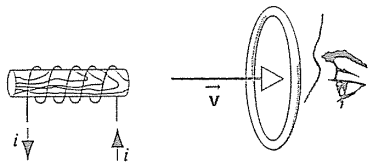


FIGURA 34-31. Pregunta 16.

17. Se está aumentado con rapidez constante la resistencia R en el circuito de la izquierda de la figura 34-32. ¿Qué dirección sigue la corriente inducida en el circuito de la derecha?

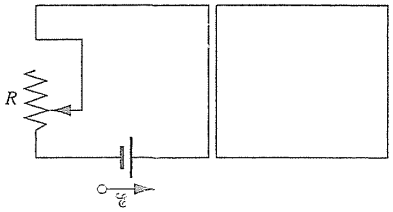


FIGURA 34-32. Pregunta 17.

18. ¿Qué dirección tiene la corriente inducida a través del resistor R en la figura 34-33 *a*) inmediatamente después de cerrar el interruptor S, *b*) un poco después de cerrarlo y *c*) inmediatamente después de abrirlo? *d*) Cuando se mantiene cerrado el interruptor, ¿por cuál extremo de la bobina larga salen las líneas de campo? Es este polo norte efectivo de la bobina. *e*) ¿Cómo los electrones de la bobina que contiene a R se enteran del flujo dentro de la bobina larga? ¿Qué es lo que realmente los mueve?

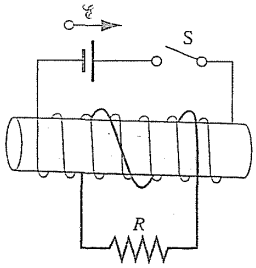


FIGURA 34-33. Pregunta 18.

19. ¿Puede alguna vez una corriente inducida crear un campo magnético $\vec{B}$ que siga la misma dirección que el que la induce? Fundamente su respuesta.

20. ¿Cómo puede sintetizar en un enunciado todas las formas de determinar la dirección de una fuerza electromotriz inducida?

21. La espira de alambre que se describe en la figura 34-34 gira con una velocidad angular constante alrededor del eje x. Hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$, cuya dirección es la del eje y positivo. ¿En qué partes de la rotación la corriente inducida *a*) se dirige de P a Q, *b*) de Q a P y *c*) ¿es cero? Repita la solución si se invierte la dirección de la rotación respecto a la que aparece en la figura.

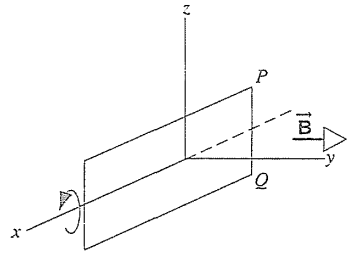


FIGURA 34-34. Pregunta 21.

22. En la figura 34-35, el segmento del alambre recto móvil se dirige a la derecha con una velocidad constante $\vec{v}$. Una corriente inducida aparece en la dirección señalada. ¿Cuál es la dirección del campo magnético uniforme (supuestamente constante y perpendicular a la página) en la región A?

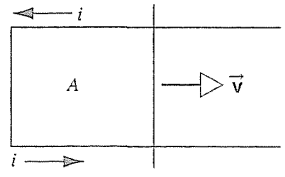


FIGURA 34-35. Pregunta 22.

23. Una espira conductora, la cual se muestra en la figura 34-36, se extrae de un imán permanente tirando de ella verticalmente hacia arriba. *a*) ¿Qué dirección tiene la corriente inducida? *b*) ¿Se requiere una fuerza para sacar la espira? *c*) La cantidad total de energía interna producida depende del tiempo necesario para sacarla?

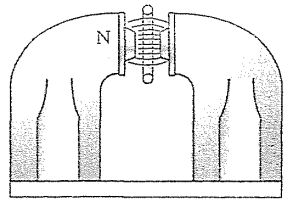


FIGURA 34-36. Pregunta 23.

24. Una espira plana cerrada se coloca en un campo magnético uniforme. ¿En qué formas podemos moverla sin inducir una fuerza electromotriz. Suponga movimientos de rotación y de traslación.
25. Una tira de cobre se monta en un péndulo alrededor de O en la figura 34-37. Puede oscilar libremente a través de un campo magnético normal a la página. Si la tira tiene ranuras como se muestra, podrá oscilar libremente en el campo. Si se sustituye por una tira sin ranuras, el movimiento queda muy amortiguado (*amortiguamiento magnético*). Explique estas observaciones. (Sugerencia: aplique la ley de Lenz; tenga en cuenta las trayectorias que los portadores de la tira han de seguir para poder oponerse al movimiento.)

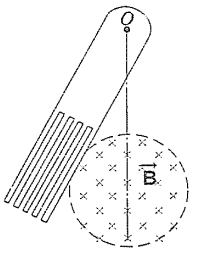


FIGURA 34-37. Pregunta 25.

26. Considere una hoja conductora situada en un plano perpendicular a un campo magnético $\vec{B}$, como se muestra en la figura 34-38. *a*) Si $\vec{B}$ cambia de pronto, el cambio total de $\vec{B}$ no se detecta de inmediato en los puntos cercanos a P (blindaje electromagnético). Explique esto. *b*) Si la resistividad de la hoja es cero, el cambio nunca se detectará en el punto P. *c*) Si $\vec{B}$ cambia periódicamente a alta frecuencia y si el conductor está hecho de un material de baja resistividad, la región cercana a P casi está blindada completamente contra las variaciones del flujo. Explique esto. *d*) ¿Por qué el conductor no tiene utilidad como blindaje contra los campos magnéticos estáticos?

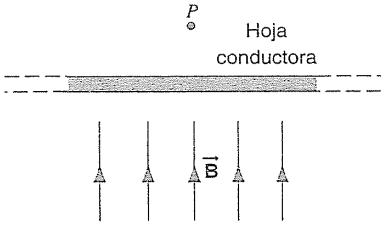


FIGURA 34-38. Pregunta 26.

27. *a*) En la figura 34-15*b*, ¿necesita el círculo de radio r ser una espira conductora a fin de que existan $\vec{E}$ y $\mathscr{E}$? *b*) Si el círculo de radio r no fuese concéntrico (desplazado un poco hacia la izquierda, por ejemplo), ¿cambiaría $\mathscr{E}$? ¿Se modificaría la configuración de $\vec{E}$ alrededor del círculo? *c*) En un círculo concéntrico de radio r, con $r > R$, ¿hay una fuerza electromotriz? ¿Existen campos eléctricos?
28. Un anillo de cobre y otro de madera, con las mismas dimensiones, se colocan de modo que en ambos se produzca el mismo flujo magnético cambiante. Compare los campos eléctricos inducidos en ellos.
29. Un avión cruza en vuelo plano sobre Alaska, donde el campo magnético de la Tierra cuenta con un gran componente hacia abajo. ¿Cuál de los extremos de sus alas (derecho o izquierdo) tiene más electrones?
30. En la figura 34-15*d*, ¿cómo pueden ser idénticas las fuerzas electromotrices inducidas alrededor de las trayectorias 1 y 2? Los campos eléctricos inducidos son mucho más débiles cerca de la trayectoria 1 que de la trayectoria 2, como se observa en el espaciamiento de las líneas de campo. Véase también la figura 34-17.
31. Demuestre que, en el betatrón de la figura 34-18, la dirección de las líneas de $\vec{B}$ está trazada correctamente para que coincida con la de la circulación mostrada de los electrones.
32. La figura 34-29*a* ofrece una visión desde arriba de la órbita de los electrones en un betatrón. Los electrones son acelerados en una órbita circular dentro del plano xy y luego son retirados para golpear el blanco T. El campo magnético $\vec{B}$ se encuentra en el eje z (el eje z positivo está hacia afuera de la página). El campo magnético B_z en ese eje varía senoidalmente como se indica en la figura 34-39*b*. Recuerde que el campo magnético debe i) guiar los electrones en su trayectoria circular y ii) generar el campo eléctrico que acelere los electrones. ¿Cuál cuarto o cuartos de ciclo en la figura 34-39*b* son idóneos *a*) de acuerdo con i), *b*) de acuerdo con ii) y *c*) en la operación del betatrón?

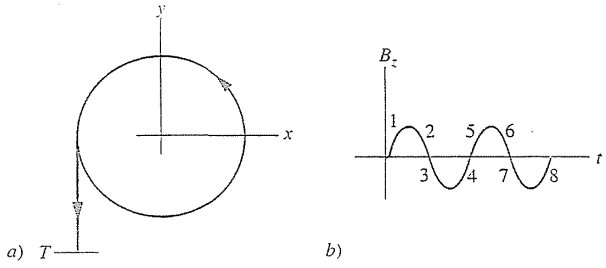


FIGURA 34-39. Pregunta 32.

33. En el betatrón de la figura 34-18, ¿por qué el núcleo de hierro del imán está hecho de hojas laminadas y no de un metal sólido como el ciclotrón de la sección 32-3?
34. En la figura 34-19*a* vemos que una fuerza ($F_B \cos \theta$) actúa sobre los portadores de carga en la rama izquierda de la espira. Pero para que haya una corriente continua en ella —y la hay—, alguna clase de fuerza ha de operar sobre los portadores en las tres ramas restantes si queremos mantener la misma velocidad de deriva v_d en ellas. ¿Cuál es su origen? (Sugerencia: suponga que la rama izquierda de la espira es el único elemento conductor y que los tres restantes no lo son. ¿No se acumularía una carga positiva en la parte superior de la mitad izquierda y una carga negativa en la parte inferior?)

EJERCICIOS

34-1 Los experimentos de Faraday

34-2 La ley de inducción de Faraday

1. En cierto lugar del hemisferio norte, el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de 42 μT y apunta hacia abajo a 57° con la vertical. Calcule el flujo que pasa por una superficie horizontal de 2.5 m^2 de área (Fig. 34-40).

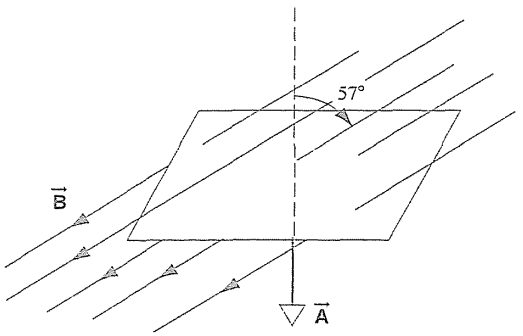


FIGURA 34-40. Ejercicio 1.

2. Una antena circular de televisión UHF tiene un diámetro de 11.2 cm. El campo magnético de una señal de televisión es normal al plano de la espira y en un instante su magnitud cambia con una rapidez de 157 mT/s. El campo es uniforme. Calcule la fuerza electromotriz de la antena.

34-3 Ley de Lenz

3. En la figura 34-41, el flujo magnético en la espira mostrada crece conforme a la relación

$$\Phi_B = (6\text{ m Wb/s}^2)t^2 + (7\text{ mWb/s})t.$$

a) ¿Qué valor absoluto tiene la fuerza electromotriz inducida en la espira cuando $t = 2.0$ s? *b)* ¿Cuál es la dirección de la corriente que pasa por el resistor?

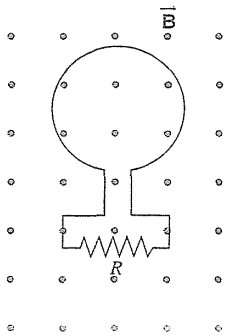


FIGURA 34-40. Ejercicios 3 y 11.

4. El campo magnético en una espira de una vuelta con 16 cm de radio y con 8.5 Ω de resistencia cambia con el tiempo según se muestra en la figura 34-42. Calcule la fuerza electromotriz de la espira en función del tiempo. Suponga intervalos de tiempo *a)* $t = 0$ a $t = 2$ s; *b)* $t = 2$ s a $t = 4$ s; *c)* $t = 4$ s a $t = 8$ s. El campo magnético (uniforme) es perpendicular al plano de la espira.

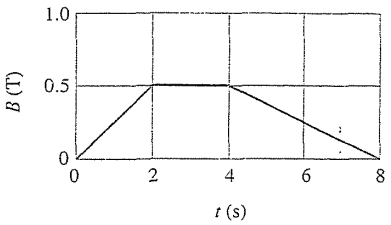


FIGURA 34-42. Ejercicio 4.

5. Un campo magnético uniforme es perpendicular al plano de una espira circular de 10.4 cm de diámetro, hecha de alambre de cobre (diámetro = 2.50 mm). *a)* Calcule la resistencia del alambre (Tabla 29-1). *b)* ¿A qué velocidad debe cambiar el campo magnético con el tiempo para que en la espira aparezca una fuerza inducida de 9.66 A?
6. Una antena de superficie A y de resistencia R es perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Éste disminuye linealmente a cero en el intervalo Δt. Encuentre una expresión de la energía interna total que se disipa en la espira.
7. Suponga que la corriente en el solenoide del problema resuelto 34-1 cambia ahora, no en ese problema, de acuerdo con $i = (3.0\text{ A/s})t + (1.0\text{ A/s}^2)t^2$. *a)* Grafique la fuerza electromotriz inducida en la bobina de $t = 0$ a $t = 4$ s. *b)* La resistencia de la bobina es 0.15 Ω. ¿Cuál es la corriente en la bobina en $t = 2.0$ s?
8. En la figura 34-43, una bobina de 120 vueltas con un radio de 1.8 cm y con una resistencia de 5.3 Ω se pone fuera de un solenoide como el del problema resuelto 34-1. Si la corriente en el solenoide se modifica como en el problema, *a)* ¿qué corriente aparece en la bobina mientras se modifica la corriente de él? *b)* ¿Cómo los electrones de conducción de la bobina "reciben el mensaje" del solenoide de que deben moverse para crear una corriente? Después de todo, el flujo magnético está confinado enteramente al interior del solenoide.

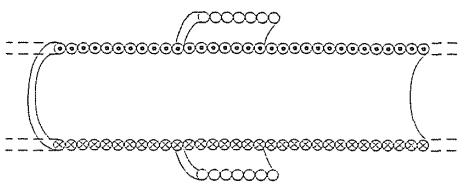


FIGURA 34-43. Ejercicio 8.

9. Recibe 52.5 cm de alambre de cobre (diámetro = 1.10 mm). El alambre forma una espira circular y se pone en ángulos rectos con un campo magnético uniforme que crece con el tiempo a una velocidad constante de 9.82 mT/s. ¿Con que rapidez se genera la energía interna en la espira?
10. Una espira cuadrada de alambre con 2.3 m de lado es perpendicular a un campo magnético uniforme, con la mitad del área de la espira perpendicular a él como se ve en la figura 34-44. La es-

pira contiene una batería de 2.0 V con una resistencia interna insignificante. Si la magnitud del campo varía con el tiempo según $B = (0.042\ \text{T}) - (0.87\ \text{T/s})t$, ¿cuál es la fuerza electromotriz total del circuito?

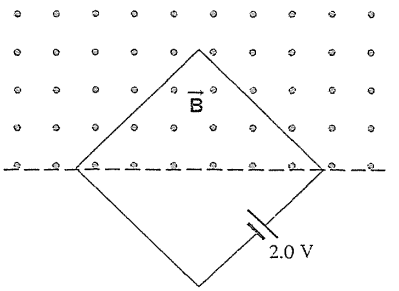


FIGURA 34-44. Ejercicio 10.

11. En la figura 34-41, supongamos que el flujo en la espira es $\Phi_B(0)$ en el tiempo $t = 0$. Después supongamos que la magnitud y la dirección del campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ varían en forma continua pero inespecífica; así que en el tiempo t, el flujo está presentado por $\Phi_B(t)$. *a*) Demuestre que la carga neta $q(t)$ que cruza por el resistor R en el tiempo t es

$$q(t) = \frac{1}{\mathrm{R}}\,[\Phi_B(0) - \Phi_B(t)],$$

independientemente de cómo haya cambiado $\vec{\mathbf{B}}$. *b*) Si $\Phi_B(t) = \Phi_B(0)$ en un caso particular, tendremos $q(t) = 0$. ¿Es necesariamente cero la corriente inducida en el intervalo de tiempo entre 0 y t?

12. Alrededor de un núcleo cilíndrico de 12.2 cm^2 de área transversal hay enrolladas 125 vueltas de alambre aislado de cobre. Las dos terminales están conectadas a un resistor. La resistencia total del circuito es 13.3 Ω. Un campo magnético uniforme y longitudinal aplicado externamente en el núcleo pasa de 1.57 T de una dirección a 1.57 T a la otra durante 2.88 ms. ¿Cuánta carga fluye a través del circuito? (Sugerencia: consulte el Ej. 11.)
13. En la situación mostrada en la figura 34-45, $a = 12$ cm, $b = 16$ cm. La corriente en el alambre largo y recto está dada por $i = (4.5\ \text{A/s}^2)t^2 - (10\ \text{A/s})t$. Determine la fuerza electromotriz en la espira cuadrada cuando $t = 3.0$ s.

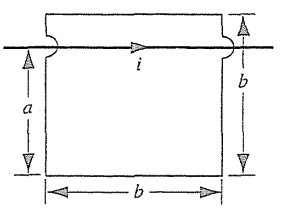


FIGURA 34-45. Ejercicio 13.

34-4 Fuerza electromotriz de movimiento

14. Un automóvil con una antena de radio de 110 cm de largo va a 90 km/h en una región donde el campo magnético es 55 μT. Calcule el valor máximo posible de la fuerza electromotriz inducida.
15. Una espira circular de alambre, con un diámetro de 10 cm, se coloca con su normal formando un ángulo de 30° con la dirección de un campo magnético uniforme de 0.50 T. Se tambalea de manera que su normal gira en un cono alrededor de la dirección del campo con una velocidad constante de 100 rev/min; el ángulo entre la normal y la dirección del campo (30°) permanece inalterada durante el proceso. ¿Qué fuerza electromotriz aparece en la espira?
16. La figura 34-46 muestra una varilla conductora de longitud L que es jalada en carriles conductores horizontales sin fricción, a una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}$. Un campo magnético uniforme y vertical $\vec{\mathbf{B}}$ llena la región donde se desplaza la varilla. Suponga que $L = 10.8$ cm, $v = 4.86$ m/s y $B = 1.18$ T. *a*) Determine la fuerza inducida en la varilla. *b*) Calcule la corriente en la espira conductora. Suponga que la resistencia de la varilla es 415 mΩ y que la resistencia de los carriles es insignificantemente pequeña. *c*) ¿A qué velocidad crece su energía interna? *d*) Encuentre la fuerza que ha de aplicar un agente externo a la varilla para mantenerla en movimiento. *e*) ¿Con qué velocidad esta fuerza efectúa trabajo en ella? Compare esta respuesta con la de *c*).

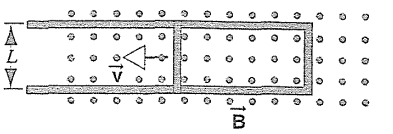


FIGURA 34-46. Ejercicio 16.

17. En la figura 34-47, una varilla conductora de masa m y de longitud L se desliza sin fricción por dos carriles horizontales largos. Un campo magnético uniforme vertical $\vec{\mathbf{B}}$ llena la región donde la varilla se mueve libremente. El generador G suministra una corriente i que fluye hacia abajo del carril, que atraviesa la varilla y retorna al generador a través del otro carril. Un estudiante lo vigila, ajustándolo continuamente para que la corriente producida sea constante sin importar la carga. Calcule la velocidad de la varilla en función del tiempo, suponiendo que ésta se encuentra en reposo en $t = 0$.

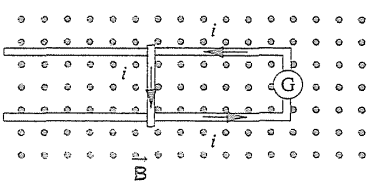


FIGURA 34-47. Ejercicios 17 y 18.

18. En el ejercicio 17 (Fig. 34-47), se reemplaza el generador G por una batería que aporta una fuerza electromotriz constante $\mathscr{E}$. *a*) Demuestre que ahora la velocidad de la varilla se aproxima al valor terminal constante $\vec{\mathbf{v}}$, dando su magnitud y su dirección. *b*) ¿Cuál es la corriente en la varilla cuando se alcanza esta velocidad terminal? *c*) Analice esta situación y la del ejercicio 17 desde el punto de vista de las transferencias de energía.
19. Se jala rápidamente un pequeño imán de barra a través de su espira conductora, a lo largo de su eje. Dibuje cualitativamente *a*) la corriente inducida y *b*) la rapidez con que se produce la energía interna en función de la posición del centro del imán. Suponga que su polo norte entra primero en la espira y que el imán se mueve con velocidad constante. Grafique como positiva la corriente inducida si sigue la dirección de las manecillas del reloj, vista en la trayectoria del imán.
20. En el arreglo del problema resuelto 34-4, haga $B = 1.2$ T y $R = 5.3$ cm. Si $\mathscr{E} = 1.4$ V, ¿qué aceleración presentará un punto en el extremo de la varilla giratoria?

21. En cierto lugar de la Tierra el campo magnético posee una magnitud $B = 59\ \mu T$ y está inclinado hacia abajo en un ángulo de 70° con la horizontal. Una bobina circular horizontal y plana de alambre con un radio de 13 cm tiene 950 vueltas y una resistencia total de 85 Ω. Se le gira media revolución alrededor de un diámetro de modo que vuelva a quedar horizontal. ¿Cuánta carga fluye por ella durante esta maniobra? (Sugerencia: consulte el Ej. 11.)
22. La figura 34-48 muestra una varilla de longitud L que hacemos moverse con una velocidad constante v a lo largo de carriles conductores. En este caso el campo magnético por donde se desplaza no es uniforme, sino que proviene de una corriente i en una alambre paralelo largo. Suponga que $v = 4.86$ m/s, $a = 10.2$ mm, $L = 9.83$ cm e $i = 110$ A. *a*) Calcule la fuerza electromotriz inducida en la varilla. *b*) ¿Cuál es la corriente que pasa por la espira conductora? Suponga que la resistencia de la varilla es 415 mΩ y que la resistencia de los rieles es insignificante. *c*) ¿A qué velocidad crece la energía interna de la varilla? *d*) ¿Qué fuerza debe aplicar a la varilla externa un agente externo para conservar su movimiento? *e*) ¿Con qué rapidez el agente realiza trabajo en la varilla? Compare esta respuesta con *c*).

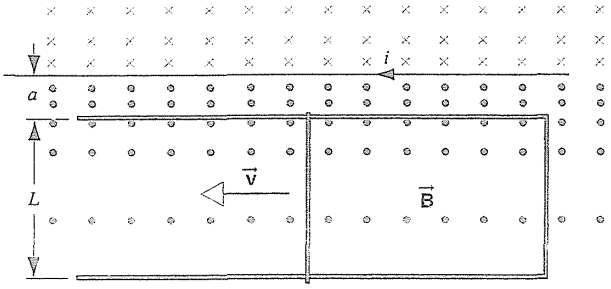


FIGURA 34-48. Ejercicio 22.

23. Una espira rectangular de alambre, con una longitud a, un ancho b y una resistencia R, se pone cerca de un alambre infinitamente largo que transporta la corriente i, como se muestra en la figura 34-49. La distancia entre él y la espira es D. Calcule *a*) el flujo magnético en la espira y *b*) la corriente en la espira a medida que se aleja del alambre con una velocidad v.

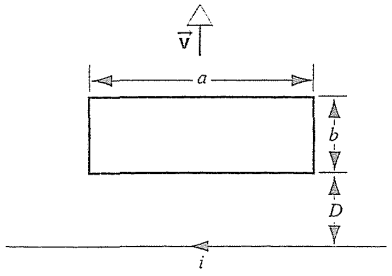


FIGURA 34-49. Ejercicio 23.

24. Dos carriles conductores rectos forman un ángulo θ donde se unen sus extremos. Una barra conductora que está en contacto con los carriles y que forma un triángulo isósceles con ellos arranca del vértice en el tiempo $t = 0$ y con velocidad constante $\vec{v}$ se dirige a la derecha, como se ve en la figura 34-50. Un campo magnético $\vec{B}$ apunta hacia afuera de la página. *a*) Determine en función del tiempo la fuerza electromotriz inducida. *b*) Si $\theta = 110°$, $B = 352$ mT y $v = 5.21$ m/s, ¿cuándo será igual a 56.8 V?

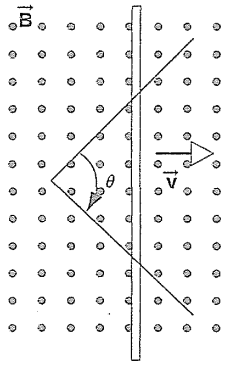


FIGURA 34-50. Ejercicio 24.

34-5 Generadores y motores

25. La armadura de un motor tiene 97 vueltas, cada una con una superficie de 190 cm^2 y gira en un campo magnético de 0.33T. Se aplica una diferencia de potencial de 24 V. Si no se incorpora a un circuito y si se desprecia la fricción, obtenga la velocidad de rotación en estado de equilibrio.
26. Un alambre rígido que se dobla para que forme un semicírculo de radio a se hace girar con una frecuencia f en un campo magnético uniforme, como se muestra en la figura 34-51. ¿Cuáles son *a*) la frecuencia y *b*) la amplitud de la fuerza electromotriz inducida en la espira?

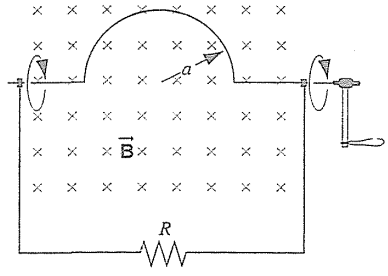


FIGURA 34-51. Ejercicio 26.

27. Un generador consta de 100 vueltas de alambre que forman una espira rectangular de 50 por 30 cm, colocada enteramente en un campo magnético uniforme con una magnitud $B = 3.5$ T. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza electromotriz producida cuando la espira se hace girar a 1000 revoluciones por minuto alrededor de un eje perpendicular a $\vec{B}$?
28. Le han asignado el trabajo de diseñar un generador que produzca una fuerza electromotriz de 150 V de amplitud, cuando gira a 60 rev/s en un campo magnético de 0.50 T. *a*) Si usara una espira de una sola vuelta, ¿qué tamaño debe tener la superficie? *b*) Si en cambio utilizara una espira de 100 vueltas, ¿qué superficie se requeriría?

34-6 Campos eléctricos inducidos

29. La figura 34-52 muestra dos regiones circulares R_1 y R_2 con los radios $r_1 = 21.2$ cm y $r_2 = 32.3$ cm, respectivamente. En R_1 hay un campo magnético uniforme $B_1 = 48.6$ mT que entra en la página y en R_2 hay un campo magnético uniforme $B_2 = 77.2$ mT que sale de ella (ignore los bordes de los campos). Ambos disminuyen con una velocidad de 8.50 mT/s. Calcule la integral $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ en la tres trayectorias señaladas.

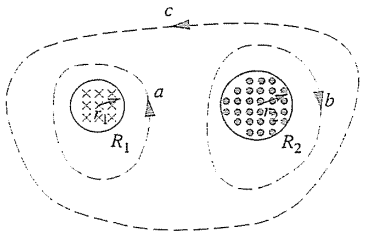


FIGURA 34-52. Ejercicio 29.

30. Un solenoide largo tiene un diámetro de 12.6 cm. Cuando se hace pasar una corriente i por sus devanados, en su interior aparece un campo magnético uniforme $B = 28.6$ mT. Al reducir i, se hace que el campo disminuya con una rapidez de 6.51 mT/s. Calcule la magnitud del campo eléctrico inducido *a*) a 2.20 cm y *b*) a 8.20 cm del eje del solenoide.

31. En la figura 34-53 se observa un campo magnético uniforme $\vec{B}$ encerrado en un volumen cilíndrico de radio R. La magnitud de $\vec{B}$ decrece con una rapidez constante de 10.7 mT/s. ¿Qué aceleración (dirección y magnitud) instantánea experimenta un electrón situado en a, b y c? Suponga que $r = 4.82$ cm. (Los bordes necesarios del campo más allá de R no cambiarán su respuesta, siempre que exista simetría radial alrededor del eje perpendicular a través de b.)

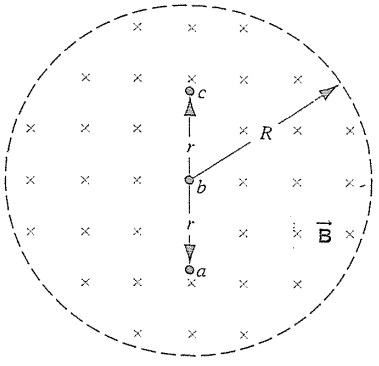


FIGURA 34-53. Ejercicio 31.

32. A comienzos de 1981, el Francis Bitter National Magnet Laboratory en el MIT inició la operación de un imán cilíndrico de 3.3 cm de diámetro que producía un campo de 30 T, en ese tiempo el campo de estado estacionario más grande del mundo. El campo puede variar senoidalmente entre los límites de 29.6 T y 30.0 T, con una frecuencia de 15 Hz. Cuando se hace esto, ¿cuál será el valor máximo del campo eléctrico inducido a una distancia radial de 1.6 cm del eje? Este imán se describe en *Physics Today,* agosto de 1984.

34-7 Inducción y el movimiento relativo

33. *a*) Calcule θ en la figura 34-19. Recuerde que $v_d = 4 \times 10^{-2}$ cm/s en un caso representativo. Suponga que $v = 15$ cm/s. *b*) es evidente que θ será pequeño. No obstante, ¿hay que tener $\theta \neq 0$ para que sean válidos los argumentos aducidos en relación con esta figura?

PROBLEMAS

1. La magnitud de un campo magnético uniforme $\vec{B}$ cambia con una velocidad constante dB/dt. Usted recibe una masa m de cobre que debe estirarse para hacer un alambre de radio r y formar una espira circular de radio R. Demuestre que la corriente inducida en ella, no depende del tamaño del alambre ni del de la espira y suponga que $\vec{B}$ es perpendicular a ella, está dada por

$$i = \frac{m}{4\pi\rho\sigma}\frac{dB}{dt},$$

donde ρ es la resistividad y δ la densidad del cobre.

2. Una espira cerrada de alambre consta de un par de semicírculos idénticos, de 3.7 cm de radio, que se hallan en planos mutuamente perpendiculares. Se obtuvo doblando una espira circular a lo largo de un diámetro hasta que las dos mitades estuvieron perpendiculares. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ de 76 mT de magnitud se dirige perpendicularmente al diámetro doblado y forma ángulos de 62° y 28° con los planos de los semicírculos como se observa en la figura 34-54. Durante un intervalo de 4.5 ms se reduce a cero el campo magnético con una velocidad uniforme. Calcule la fuerza electromotriz inducida.

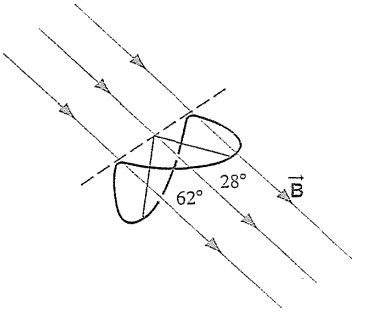


FIGURA 34-54. Problema 2.

3. Se dobla un alambre para formar tres segmentos circulares de radio $r = 10.4$ cm, como se observa en la figura 34-55. Cada segmento es un cuadrante de un círculo: ab se halla en el plano xy, bc, en el plano yz, y ca en el plano zx. *a*) Si un campo magnético uniforme $\vec{B}$ apunta en la dirección x positiva, obtenga la

fuerza electromotriz inducida en el alambre cuando B crece con una velocidad de 3.32 mT/s. *b*) ¿Qué dirección sigue la corriente en el segmento bc?

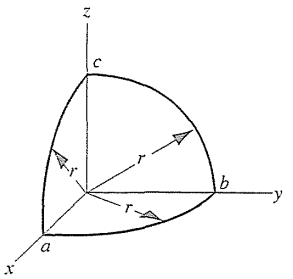


FIGURA 34-55. Problema 3.

4. Un alambre conductor de longitud fija L puede enrollarse para que forme N vueltas circulares y usarse como la armadura de un generador. ¿Qué valor de N seleccionaría usted para conseguir la máxima fuerza electromotriz?
5. En la figura 34-56, el cuadrado tiene lados de 2.0 cm de longitud. Un campo magnético apunta hacia afuera de la página; su magnitud está dada por $B = (4\ \text{T/m} \cdot \text{s}^2)t^2y$. Determine la fuerza electromotriz alrededor del cuadrado cuando $t = 2.5$ s e indique su dirección.

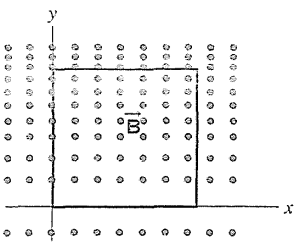


FIGURA 34-56. Problema 5.

6. La figura 34-57 muestra dos espiras paralelas de alambre que tienen un eje común. La más pequeña (radio r) está arriba de la más grande (radio R), con una distancia $x >> R$. En consecuencia, el campo magnético procedente de la corriente i en la espira más grande, es casi constante en toda la pequeña y tiene el mismo valor que en el eje. Supóngase que x aumenta con la rapidez constante $dx/dt = v$. *a*) Determine en función de x el flujo magnético en la superficie delimitada por la espira más pequeña. *b*) Calcule la fuerza electromotriz generada en ella. *c*) Determine la dirección de la corriente inducida que fluye en esta espira.

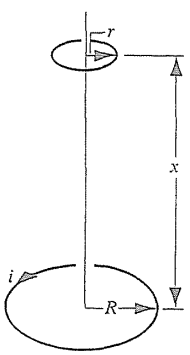


FIGURA 34-57. Problema 6.

7. Una espira circular hecha de material conductor elástico estirado tiene un radio de 1.23 m. Se pone en un plano formando ángulos rectos con un campo magnético uniforme de 785 mT. Cuando se suelta, su radio empieza a disminuir a una velocidad instantánea de 7.50 cm/s. Calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira en ese momento.
8. La figura 34-58 contiene un "generador homopolar", dispositivo con un disco conductor sólido como rotor. Puede producir más fuerza electromotriz que el que utiliza rotores de espiras de alambre, pues gira con mucho mayor velocidad angular antes que las fuerzas centrífugas alteren el rotor. *a*) Demuestre que la fuerza electromotriz producida está dada por

$$\mathcal{E} = \pi f B R^2,$$

donde f es la frecuencia del giro, R el radio del rotor y B el campo magnético uniforme perpendicular al rotor. *b*) Obtenga el par que debe suministrar el motor que lo hace girar cuando la corriente de salida es i.

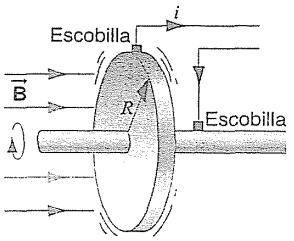


FIGURA 34-58. Problema 8.

9. Una varilla de longitud L, de masa m y de resistencia R se desliza sin fricción por carriles conductores paralelos de resistencia insignificante, según se aprecia en la figura 34-59. Los carriles están conectados entre sí en el fondo como se indica allí, formando una espira conductora con la varilla como miembro de la parte superior. El plano de ellos forma un ángulo θ con la horizontal y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ existe en toda la región. *a*) Demuestre que la varilla adquiere una velocidad terminal de estado estacionario cuya magnitud es

$$v = \frac{mgR}{B^2L^2} \frac{\text{sen } \theta}{\cos^2 \theta},$$

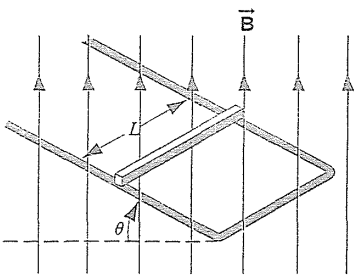


FIGURA 34-59. Problema 9.

b) Demuestre que la velocidad con que crece la energía interna de la varilla es igual a la velocidad con que se pierde la energía potencial gravitacional. *c*) Explique la situación si $\vec{B}$ se dirigiese hacia abajo y no hacia arriba.

10. Un alambre, cuya superficie transversal mide 1.2 mm^2 y cuya resistividad es 1.7×10^{-8} m se dobla para formar un arco circular de 24 cm de radio según se indica en la figura 34-60. Una longitud adicional de este alambre, *OP*, puede girar libremente alrededor de *O* y establecer un contacto deslizante con el arco en *P*. Finalmente, otra longitud recta de este alambre *OQ* completa el circuito. El arreglo está íntegramente situado en un campo magnético $B = 0.15$ T que se dirige hacia afuera del plano de la figura. El alambre recto *OP* parte del reposo con $\theta = 0$ y tiene una aceleración angular constante de 12 rad/s^2. *a*) Calcule la resistencia de la espira *OPQO* en función de θ. *b*) Encuentre el flujo magnético a través de la espira en función de θ. *c*) ¿Con que valor de θ se alcanza el valor máximo de la corriente inducida en la espira? *d*) ¿Cuál es el máximo valor de la corriente inducida en la espira?

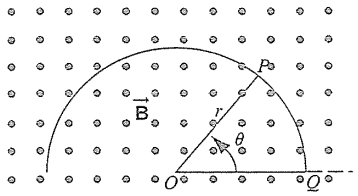


FIGURA 34-60. Problema 10.

11. El freno de una corriente electromagnética parásita es un disco de conductividad σ y de espesor t que gira alrededor de un eje que pasa por su centro, con un campo magnético $\vec{B}$ aplicado perpendicularmente al plano del disco en una superficie pequeña a^2 (Fig. 34-61). Si la superficie a^2 se halla a una distancia r del eje, obtenga una expresión aproximada del par que tiende a disminuir la velocidad del disco en el instante en que su velocidad angular es ω.

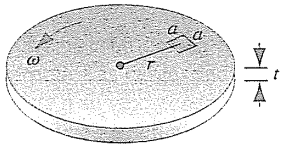


FIGURA 34-61. Problema 11.

12. Un alambre superconductor en forma de anillo de radio R no transporta inicialmente corriente alguna. Acercamos un imán a lo largo del eje del anillo y cambiamos en $\Delta\Phi_B$ el flujo que pasa por él. Demuestre que la corriente en el anillo está dada por

$$i = \frac{ne^2a^2}{2Rm_e}\,\Delta\Phi_B$$

donde $a << R$ es el radio del alambre, n la densidad de los electrones conductores, y e y m_e la carga y la masa de los electrones, respectivamente.

13. Pruebe que el campo eléctrico $\vec{E}$ en un capacitor de placas paralelas y con carga no puede disminuir abruptamente a cero al desplazarse en ángulos rectos con él, como lo indica la flecha en la figura 34-62 (vea el punto *a*). En los capacitores reales siempre hay efectos de bordes de las líneas de fuerza, lo cual significa que $\vec{E}$ se aproxima a cero en forma gradual y continua: compare esto con el problema 11 del capítulo 33. (Sugerencia: aplique la ley de Faraday la trayectoria rectangular señalada por las líneas punteadas.)

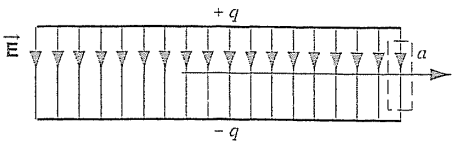


FIGURA 34-62. Problema 13.

14. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ llena un volumen cilíndrico de radio R. Una varilla metálica de longitud L se coloca como se ve en la figura 34-63. Si B varía a una velocidad dB/dt, demuestre que la fuerza electromotriz generada por el campo magnético variable que opera entre los extremos de la varilla, está dada por

$$\mathcal{E} = \frac{dB}{dt}\,\frac{L}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}.$$

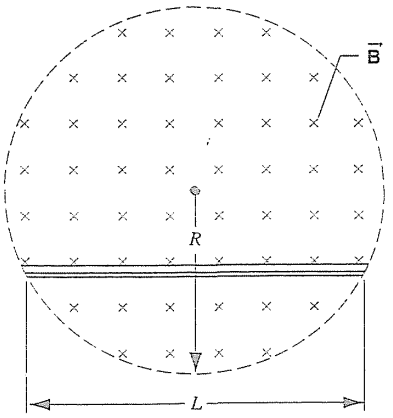


FIGURA 34-63. Problema 14.

15. En un betatrón, el radio de la órbita de un electrón mide 32 cm y el campo magnético en ella está dado por $B_{\text{órb}} = (0.28\text{ T})\,\text{sen}\,(120\pi\text{ s}^{-1})t$. En el betatrón, el valor promedio B_{pro} del campo encerrado por la órbita es el doble del valor de $B_{\text{órb}}$ en ella. *a*) Calcule el campo eléctrico inducido que experimentan los electrones cuando $t = 0$. *b*) Determine la aceleración de los electrones en este instante. No tenga en cuenta los efectos relativistas.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. He aquí algunas mediciones del campo magnético máximo en función del radio de un betatrón:

r (cm)	B (tesla)	r (cm)	B (tesla)
0	0.950	81.2	0.409
10.2	0.950	83.7	0.400
68.2	0.950	88.9	0.381
73.2	0.528	91.4	0.372
75.2	0.451	93.5	0.360
77.3	0.428	95.5	0.340

Demuestre por análisis gráfico que la relación $B_{\text{pro}} = 2B_{\text{órb}}$ mencionada en el problema 15 como esencial para el funcionamiento del betatrón se satisface en la órbita de radio $R = 84$ cm. (Sugerencia: note que

$$B_{\text{pro}} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R B(r) 2\pi r dr,$$

y evalúe la integral numéricamente.)

CAPÍTULO 35

PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LOS MATERIALES

Los materiales magnéticos tienen una importancia cada día mayor en nuestra vida diaria. Algunos, como el hierro, que son imanes permanentes a temperaturas ordinarias, se emplean comúnmente en los motores eléctricos y generadores, lo mismo que en ciertas clases de altavoces. Otros pueden "magnetizarse" o "desmagnetizarse" con relativa facilidad; sirven para almacenar información en las cintas magnetofónicas magnéticas (que se usan en las grabadoras y videocaseteras), los discos de computadoras y las tarjetas de crédito. Existen otros materiales que se asemejan a los dieléctricos en que adquieren un campo magnético inducido en respuesta a un campo magnético externo: el campo inducido desaparece al eliminar el campo externo.

En este capítulo examinamos la estructura interna de los materiales que da origen a las propiedades magnéticas de éstos. Mostramos que el comportamiento de diferentes materiales magnéticos se entiende a partir de los momentos dipolares magnéticos de los átomos individuales. Un conocimiento completo de las propiedades magnéticas exige un curso de mecánica cuántica, el cual está fuera del alcance de este libro, pero puede lograrse un conocimiento cualitativo basado en los principios expuestos en él. Por último, estudiamos una forma magnética de la ley de Gauss, la cual tiene en cuenta la inexistencia aparente de polos magnéticos aislados.

35-1 EL DIPOLO MAGNÉTICO

En los campos eléctricos estáticos, la carga individual aislada es la parte fundamental. Las cargas individuales *producen* un campo eléctrico y éste a su vez, generado por el grupo de cargas, es capaz de *influir* en el comportamiento de otras. Con base en esta interacción elemental entre cargas eléctricas, pueden explicarse muchos fenómenos comunes: la fuerza que ejerce el núcleo en los electrones, la cual los mantiene unidos; la fuerza ejercida por un átomo sobre otras moléculas iónicas y sólidos; las fuerzas elásticas y de fricción, etcétera.

En algunas moléculas neutras conviene suponer que la interacción fundamental se basa en el dipolo eléctrico (el cual, a su vez, puede analizarse como dos cargas puntuales). Hemos visto cómo el dipolo *produce* un campo eléctrico (Sec. 26-3) y también de qué manera otros campos *influyen* en este campo (Sec. 26-7).

En los campos magnéticos estacionarios, la parte fundamental son las cargas eléctricas que se mueven en un elemento de corriente; éstas no sólo *crean* un campo magnético, sino también pueden *verse afectadas* por el campo magnético proveniente de otros elementos. No obstante, cuando se intenta explicar las propiedades magnéticas de los materiales, esta explicación a partir de los elementos de corriente no es tan satisfactoria como la que se basa en el *dipolo* magnético. En definitiva, podemos considerar que lo causan las cargas en movimiento, producen un dipolo magnético, mientras que un dipolo eléctrico está formado por dos cargas estáticas. Pero cuando nos referimos a las propiedades magnéticas de los materiales, se logra un conocimiento mejor de éstas al tener en cuenta que son una colección de átomos con momentos individuales dipolares magnéticos.

Empezamos examinando el campo magnético generado por una espira circular de corriente (Sec. 33-2) en un punto del eje z:

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \qquad (35\text{-}1)$$

Si estamos lejos de la espira ($z \gg R$), esto se expresa así

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i\pi R^2}{z^3}. \qquad (35\text{-}2)$$

La expresión $i\pi R^2$ en la ecuación anterior puede escribirse como iA, donde $A = \pi R^2$ es el área de la espira circular. Se define esta parte como la magnitud del *momento dipolar magnético* μ de esta espira:

$$\mu = iA. \qquad (35\text{-}3)$$

El momento dipolar magnético de una espira con corriente es el producto de la magnitud de la corriente y del área de la espira. Aunque obtuvimos la ecuación 35-3 para una espira circular, ésa se aplica a las espiras de cualquier forma. Si la espira tiene N vueltas, $\mu = NiA$.

La ecuación 35-3 indica que las unidades de μ son $A \cdot m^2$ (ampere/metro^2). Más adelante, en esta sección, vemos que las unidades equivalentes son J/T (joules por tesla).

A semejanza del momento dipolar eléctrico, el momento dipolar magnético es una magnitud vectorial. La dirección de $\vec{\mu}$ es perpendicular al plano de la espira con corriente, esta dirección se determina con el uso de la regla de la mano derecha: si los dedos están en la dirección de la corriente, el pulgar indicará la dirección de $\vec{\mu}$ (Fig. 35-1). Con esta definición la ecuación 35-2 puede escribirse como una ecuación vectorial:

$$\vec{\mathbb{B}} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi z^3}. \qquad (35\text{-}4)$$

Nótese que $\vec{\mathbb{B}}$ y $\vec{\mu}$ son vectores que apuntan en la misma dirección, según se aprecia en la figura 35-1. En la ecuación 35-4, $\vec{\mathbb{B}}$ es el campo magnético *producido por* el momento dipolar magnético $\vec{\mu}$.

Analicemos ahora el efecto que un campo magnético tiene en un dipolo magnético. La figura 35-2 muestra una espira con corriente en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbb{B}}$. (Este

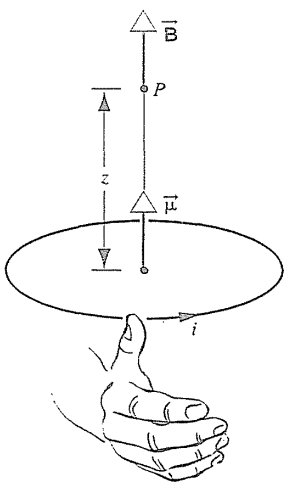


FIGURA 35-1. Momento dipolar magnético de una espira de corriente y el campo magnético en el punto P a una distancia z de la espira en su eje.

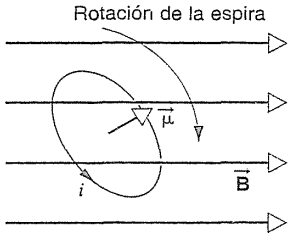


FIGURA 35-2. En un campo magnético externo, un momento dipolar magnético experimenta un par que gira $\vec{\mu}$ hasta alinearlo con $\vec{\mathbb{B}}$.

campo $\vec{\mathbb{B}}$ se debe a un agente externo, que no se incluye en la figura, acaso un solenoide grande). En la sección 32-6 abordamos un problema similar (Fig. 32-26) y concluimos que en un campo uniforme la espira no experimenta fuerza alguna, pero sí un par neto dado por $\vec{\tau} = iA\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbb{B}}$ (Ec. 32-35), donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario perpendicular a la espira en una dirección determinada por la regla de la mano derecha. Debido a que definimos las direcciones de $\vec{\mu}$ y de $\hat{\mathbf{n}}$ exactamente en la misma forma, podemos escribir $\vec{\mu} = iA\hat{\mathbf{n}}$, y entonces la ecuación 32-35 se convierte en

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{\mathbb{B}}. \qquad (35\text{-}5)$$

En otras palabras, el par tiende a girar la espira de modo que $\vec{\mu}$ se alinea con $\vec{\mathbb{B}}$. Nótese la semejanza de la ecuación 35-5 con el resultado del par que hace girar un dipolo eléctrico en un campo eléctrico: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$ (Ec. 26-27). La ecuación 35-5 es válida, sin importar la forma de la espira ni su orientación con el campo magnético.

Las ecuaciones 35-4 y 35-5 satisfacen nuestros dos objetivos: la primera indica cómo un dipolo magnético *produce* un campo magnético; la segunda, de qué manera un campo magnético aplicado *influye* en un dipolo magnético. Tener presentes estos dos conceptos nos servirá para entender el comportamiento magnético de los materiales.

Podemos continuar la analogía entre los campos eléctrico y magnético considerando el trabajo hecho para cambiar la orientación del dipolo magnético en un campo magnético y relacionando el trabajo con la energía potencial de un dipolo magnético en un campo magnético. La energía potencial puede escribirse así

$$U = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathbb{B}}, \qquad (35\text{-}6)$$

para un dipolo magnético cuyo momento $\vec{\mu}$ forma un ángulo θ con $\vec{\mathbb{B}}$. La ecuación anterior se parece a la ecuación que se utiliza para calcular la energía potencial de un dipolo eléctrico, $U = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$ (Ec. 26-32). En la ecuación 35-6, $U = 0$ cuando $\theta = 90°$ ($\vec{\mu}$ es perpendicular a $\vec{\mathbb{B}}$ o, en forma equivalente, $\vec{\mathbb{B}}$ es paralelo al plano de la espira). U tiene su valor más pequeño ($= -\mu B$) cuando $\vec{\mu}$ y $\vec{\mathbb{B}}$ son paralelos, y su valor más alto ($= +\mu B$) cuando $\vec{\mu}$ y $\vec{\mathbb{B}}$ son antiparalelos.

Como todas las fuerzas que dependen de la velocidad, la fuerza magnética *casi nunca* es conservativa y, por lo mismo, generalmente no puede representarse mediante una energía potencial. En este caso especial en que el par en un dipolo se basa

TABLA 35-1 Algunos valores de momentos dipolares magnéticos

Sistema	μ (J/T)
Núcleo de átomo de nitrógeno	2.04×10^{-28}
Protón	1.41×10^{-26}
Neutrón	9.65×10^{-27}
Electrón	9.28×10^{-24}
Átomo de nitrógeno	2.8×10^{-23}
Bobina típica[a] pequeña	5.4×10^{-6}
Imán de barra pequeño	5
Bobina superconductora	400
La Tierra	8.0×10^{22}

[a] Por ejemplo, la del problema resuelto 35-1.

en su posición respecto al campo, es posible definir la energía potencial de un *sistema* constituido por un dipolo en el campo. Adviértase que la energía potencial no caracteriza exclusivamente al campo, sino también al dipolo *en* él. Por lo regular, no puede definirse una "energía potencial magnética escalar" de una carga puntual ni un "potencial magnético" del campo, tal como lo hicimos con los campos eléctricos en el capítulo 28.

Muchos sistemas físicos tienen momentos dipolares magnéticos: la Tierra, los imanes de barra, las espiras de corriente, los átomos, los núcleos y las partículas elementales. La tabla 35-1 ofrece algunos valores comunes.

Obsérvese que la ecuación 35-6 sugiere las unidades para μ de energía dividida entre el campo magnético, o sea J/T. La ecuación 35-3 indica las unidades de la magnitud de la corriente por la superficie, es decir, $A \cdot m^2$. Puede demostrarse que las dos unidades son equivalentes; se elige la más adecuada para cada caso.

Como lo muestran los ejemplos del protón y del átomo de nitrógeno en la tabla 35-1, la magnitud de los momentos dipolares nucleares magnéticos suele ser tres o seis órdenes de magnitud más pequeños que la de los momentos dipolares magnéticos atómicos. De esta observación se deducen de inmediato varias conclusiones: 1) Los electrones no pueden ser elementos del núcleo, pues de lo contrario la magnitud de los momentos dipolares magnéticos nucleares sería casi igual a los del electrón. 2) Los efectos magnéticos ordinarios en los materiales dependen del magnetismo *atómico*, y no del magnetismo *nuclear*, que es mucho más débil. 3) Para aplicar el par necesario a fin de alinear los dipolos nucleares, se requiere que el campo magnético tenga una magnitud de tres a seis órdenes de magnitud más grandes que los que se requiere para alinear los dipolos atómicos.

PROBLEMA RESUELTO 35-1. *a*) Una bobina rectangular de 250 vueltas, que mide 2.10 cm de largo y 1.25 cm de ancho, transporta una corriente de 85 μA. ¿Cuál es su momento dipolar magnético? *b*) El momento dipolar magnético de la bobina está alineado con un campo magnético externo cuya fuerza es 0.85T. ¿Cuánto trabajo realizará un agente externo para hacerla girar 180°?

Solución *a*) La magnitud del momento dipolar magnético de la bobina, que tiene un superficie A (0.0210 m)(0.0125 m) = 2.52×10^{-4} m^2, es

$$\mu = NiA = (250)(85 \times 10^{-6}\ \text{A})(2.52 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)$$
$$= 5.36 \times 10^{-6}\ \text{A} \cdot \text{m}^2 = 5.36 \times 10^{-6}\ \text{J/T}.$$

b) El trabajo externo es igual al incremento de la energía potencial del sistema, que es

$$W = \Delta U = -\mu B \cos 180° - (-\mu B \cos 0°) = 2\mu B$$
$$= 2(5.36 \times 10^{-6}\ \text{J/T})(0.85\ \text{T}) = 9.1 \times 10^{-6}\ \text{J} = 9.1\ \mu\text{J}.$$

El resultado es aproximadamente igual al trabajo necesario para levantar una pastilla de aspirina a una altura de unos 3 mm.

El campo de un dipolo

Hasta ahora nos hemos ocupado del campo de un dipolo magnético (una espira con corriente) en puntos ubicados exclusivamente en el eje. A continuación vamos a concentrarnos en el campo completo del dipolo magnético. Tratándose del dipolo eléctrico, en la figura 26-12 se mostró un patrón completo de las líneas de campo. Unas cuantas líneas de un dipolo eléctrico se incluyen en la figura 35-3*a* y pueden compararse con las líneas del campo de una espira con corriente de la figura 35-3*b*. Se descubre una gran semejanza entre el patrón de las líneas del campo fuera de la espira. Otra semejanza entre los campos del dipolo eléctrico y magnético consiste en que varían como r^{-3}, cuando estamos lejos del dipolo. Una diferencia importante entre las líneas del campo magnético y eléctrico radica en que las líneas del campo eléctrico parten de las cargas positivas y terminan en las cargas negativas, mientras que las líneas del campo magnético siempre forman espiras cerradas.

En la figura 35-3*c* se muestran las líneas del campo de un imán de barra; ofrece el mismo patrón de líneas del campo que el de la espira con corriente; así que el imán de barra también puede considerarse un dipolo magnético. Es conveniente designar a sus dos extremos como polo norte (N) y polo sur (S): las líneas del campo salen del polo norte y convergen en el polo sur. A simple vista, los polos dan la impresión de comportarse como cargas positivas y negativas de un dipolo eléctrico. Pero al examinar más detenidamente la figura 35-3*c*, se observa que las líneas del campo no comienzan ni terminan en los polos, sino que prosiguen por el interior del imán, formando otra vez espiras cerradas. Los polos norte y sur no se comportan como cargas en un dipolo eléctrico y, según señalamos en la sección 35-37, los polos magnéticos aislados no parecen existir en la naturaleza.

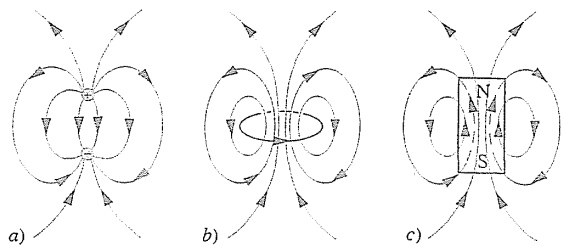


FIGURA 35-3. *a*) Campo eléctrico de un dipolo eléctrico. *b*) Campo de dipolo magnético de un imán de barra. *c*) Campo de dipolo magnético de un imán de barra. Las líneas punteadas representan las líneas de campo en el interior del imán.

35-2 LA FUERZA SOBRE UN DIPOLO EN UN CAMPO NO UNIFORME

En un campo eléctrico uniforme, las fuerzas sobre las dos cargas de un dipolo eléctrico tienen igual magnitud y siguen direcciones opuestas (Fig. 26-19). Si el campo es no uniforme, las fuerzas tienen distinta magnitud y, en consecuencia, una fuerza neta puede ejercer sobre el dipolo. La misma conclusión se aplica a los dipolos magnéticos: en un campo magnético uniforme puede haber un par neto en el dipolo, pero no existe una fuerza neta. Para que ésta se ejerza sobre él, es preciso que el campo magnético sea no uniforme.

Tomemos el par de espiras con corriente de la figura 35-4. Estas espiras se encuentran en un eje común y, vistas desde arriba, ambas llevan la corriente en dirección de las manecillas del reloj. La espira 1 produce un campo magnético $\vec{B}_1$, que luego interactúa con la espira 2. (Suponemos que ésta ya fue girada por el par producido por el campo de la espira 1, que alinea con este el momento dipolar de la espira con el campo de la espira 1.) En los puntos C y D, que son extremos opuestos de un diámetro de la espira 2, las fuerzas $d\vec{F} = i_2 d\vec{s} \times \vec{B}_1$ en los elementos $d\vec{s}$ presentan componentes hacia abajo y radialmente hacia afuera. Cuando sumamos las fuerzas en todos los pares de elementos, vemos que los componentes radiales se cancelan y que los componentes hacia abajo se suman para dar una fuerza neta descendente sobre la espira con corriente.

También es posible analizar esta fuerza a partir de los polos magnéticos. Las espiras con corriente pueden representarse como imanes cuyos polos norte y sur están orientados como se ve en la figura 35-4. La atracción de la espira 1 hacia la 2 se describe en función de la fuerza existente entre los polos magnéticos: el polo norte del imán que representa a la espira 1 atrae al polo sur del imán que representa a la espira 2. En la figura 35-4, existe también repulsión entre los dos polos N y los dos polos S, pero la fuerza de atracción N-S es la fuerza mayor porque los polos se encuentran más cerca uno del otro.

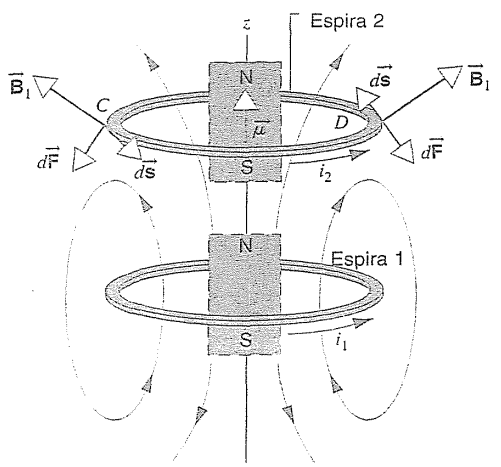


FIGURA 35-4. El campo magnético $\vec{B}_1$ producido por la espira 1 produce una fuerza neta descendente en la espira 2.

Al emplear la ecuación 35-6 para calcular la energía potencial del momento dipolar magnético de la espira 2 en el campo magnético producido por la espira 1 ($U = -\vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}_1$), se obtiene $U = -\mu_{2z} B_{1z}$ porque el momento magnético de la espira 2 tiene sólo un componente z. Éste componente de la fuerza $\vec{F}_2$ ejercida en la espira 2 por la espira 1, se relaciona con la energía potencial mediante $F_z = -dU/dz$; por tanto,

$$F_{21z} = -\frac{dU}{dz} = -\frac{d}{dz}(-\mu_{2z} B_{1z}) = \mu_{2z}\frac{dB_{1z}}{dz}. \quad (35\text{-}7)$$

En la figura 35-4, al tomar el eje z como positivo hacia arriba, se tiene $\mu_{2z} = > 0$ y $dB_{1z}/dz < 0$ (puesto que el componente z del campo disminuye conforme ascendemos); así que $F_{21z} < 0$. La fuerza en la espira 2 proveniente de la espira 1 se dirige hacia abajo, como ya lo determinamos.

Consideraciones similares a las anteriores revelan que la fuerza en la espira 1, producida por la espira 2, se dirige hacia arriba; de lo cual se deduce que las dos espiras se atraen entre sí.

Momentos dipolares magnéticos inducidos

En algunos materiales donde las moléculas no tienen un momento dipolar eléctrico permanente, según vimos en la sección 29-6, un campo eléctrico aplicado puede inducir un momento dipolar al causar la separación de las cargas positivas y negativas en la molécula. Un efecto semejante se presenta en los campos magnéticos: la aplicación de un campo magnético puede inducir un momento dipolar en los materiales que carecen de momentos dipolares magnéticos permanentes.

La figura 35-5 describe cómo podría suceder lo anterior. Supongamos una espira doble, constituida por dos espiras simples que transportan corrientes idénticas en direcciones contrarias, dentro de un campo no uniforme que pudo haber sido creado por un imán permanente. El momento magnético neto de la espira doble es cero, ya que dos espiras simples tie-

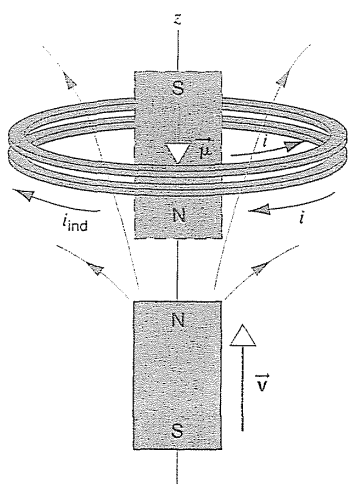


FIGURA 35-5. La espira doble no tiene un momento dipolar permanente magnético, pero adquiere un momento dipolar inducido cuando el imán se acerca a ella. La repele la fuerza en el momento inducido.

nen momentos magnéticos de igual magnitud pero con dirección contraria. Al acercar el imán a esta espira doble, el flujo de las espiras crece y ocasiona que la corriente inducida, de acuerdo con la ley de Lenz, siga la dirección de las manecillas del reloj (vista desde arriba). Esta corriente inducida, que se incorpora a las corrientes en las dos espiras, genera una corriente neta $i - i_{ind}$ en la espira de arriba e $i + i_{ind}$ en la de abajo. El resultado es un momento magnético inducido neto que se dirige hacia abajo. Se muestran los polos N y S del imán equivalente; se ve, así, que la fuerza en la espira doble proveniente del imán es una de repulsión (hacia arriba).

La ecuación 35-7 nos permite comprobar (suponiendo otra vez que el eje z sea positivo hacia arriba) $\mu_z < 0$ y $dB_z/dz < 0$, de modo que $F_z > 0$, correspondiente a una fuerza hacia arriba; esto coincide con la conclusión anterior.

En resumen, dentro de un campo magnético no uniforme, se giran los dipolos permanentes para alinearlos con el campo y son atraídos hacia la fuente de dicho campo; pero, los dipolos inducidos son repelidos por la fuente del campo.

35-3 MAGNETISMO ATÓMICO Y NUCLEAR

Las propiedades eléctricas volumétricas de una sustancia dieléctrica como el agua se basan en los momentos dipolos eléctricos individuales de sus moléculas. Cada una tiene un lado positivo y otro negativo, comportándose como un dipolo eléctrico. Si separamos las moléculas, podemos hacer lo mismo con las partes positiva y negativa.

También las propiedades magnéticas de los materiales dependen de los momentos de dipolo magnético de los átomos individuales; podemos suponer que los materiales magnéticos se componen de varios dipolos atómicos, que podrían alinearse al aplicar un campo magnético externo (Fig. 35-6). Sin embargo, a diferencia del dipolo eléctrico, no es posible separar los átomos en polos magnéticos individuales N y S. Por el contrario, los momentos magnéticos pueden ser diminutas espiras de corriente, causadas, por ejemplo, por la circulación de los electrones en las órbitas de un átomo. En esta sección explicamos el momento dipolar magnético relacionado con un electrón en una trayectoria circular.

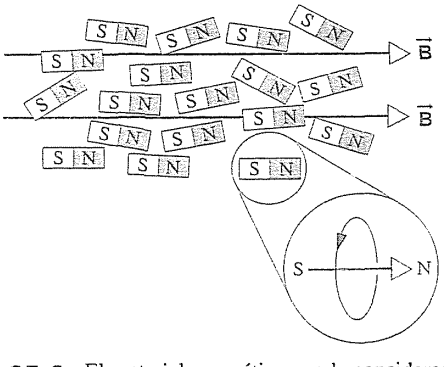


FIGURA 35-6. El material magnético puede considerarse como una serie de momentos dipolares magnéticos, cada uno con un polo norte y uno sur. Desde el punto de vista microscópico, los dipolos son en realidad una espira de corriente que no puede dividirse en polos individuales.

Estudiamos un modelo simple de un átomo donde un electrón describe una órbita circular de radio r y se desplaza con una velocidad v alrededor del núcleo. Podemos pensar que este electrón en movimiento es una espira de corriente, en la cual la corriente es la magnitud de la carga del electrón dividida entre el periodo T de una órbita:

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v}. \tag{35-8}$$

El momento dipolar magnético de la espira se obtiene por medio de la ecuación 35-3:

$$\mu = iA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right)(\pi r^2) = \frac{erv}{2}. \tag{35-9}$$

El momento dipolar magnético que hemos calculado aquí para los átomos se conoce como momento dipolar magnético *orbital*, porque se debe al movimiento orbital de los electrones alrededor del núcleo.

Al analizar las propiedades de los átomos, es útil reescribir la ecuación 35-9 como

$$\mu_l = \frac{erv}{2} = \frac{e}{2m}mvr = \frac{e}{2m}l, \tag{35-10}$$

donde m es la masa del electrón. La expresión mvr es el momento angular l del electrón que describe una órbita circular alrededor del núcleo del átomo. Hemos designado con μ_l el momento dipolar magnético orbital para indicar que se origina en el momento angular orbital l. En la teoría cuántica de los átomos, tema que se expone en los capítulos 47 y 48, el momento angular se mide en unidades de $h/2\pi$, donde h es la constante de Planck. Al sustituir esta unidad fundamental de momento angular en la ecuación 35-10, se obtiene una unidad fundamental del momento de dipolo magnético llamada *magnetón de Bohr* μ_B:

$$\mu_B = \frac{e}{2m}\frac{h}{2\pi} = \frac{eh}{4\pi m} = 9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T}, \tag{35-11}$$

cuyo valor numérico se obtiene insertando los valores numéricos e, h y m en la ecuación 35-11. Los momentos magnéticos atómicos suelen medirse en unidades de μ_B y normalmente tienen una magnitud de 1 μ_B, como se observa en el ejemplo del átomo de nitrógeno en la tabla 35-1.

Los momentos dipolares magnéticos de los átomos se miden pasando un haz de átomos por una región donde existe un campo magnético no uniforme. Como señalamos en la sección anterior, una fuerza neta opera sobre el dipolo magnético en un campo no uniforme; de ahí que los átomos sean desviados de su trayectoria original cuando pasan a través de la región del campo. En la década de 1920, los experimentos de este tipo demostraron que un campo magnético desviaba todavía los átomos sin momentos dipolares magnéticos orbitales. Este resultado revela la presencia de otra aportación a los momentos dipolares magnéticos, en este caso procedentes de los momentos de los electrones, denominados momento magnético *intrínseco* o "spín".

Los electrones en diversos estados de movimiento tienen distintos momentos dipolares magnéticos orbitales, pero todos presentan exactamente el mismo momento dipolar magnético intrínseco. El spín intrínseco del electrón y su efecto en la estructura del átomo se explica en los capítulos 47 y 48. En la tabla 35-1 se incluye el momento dipolar magnético intrínseco de un electrón. Su valor casi es igual a 1 μ_B.

Los momentos dipolares magnéticos orbitales de spín de los electrones miden aproximadamente lo mismo (del orden de 1 μ_B); de ahí que contribuyan mucho a determinar las propiedades magnéticas de los átomos. El momento magnético total de un átomo se obtiene mediante la suma vectorial de los momentos magnéticos orbital y de spín de todos sus electrones. Estas sumas vectoriales a veces se complican muchos en un átomo con muchos electrones. Pero en algunos átomos los momentos magnéticos totales orbitales y de spín resultan ser cero. Los materiales hechos de este tipo de átomos son prácticamente no magnéticos y presentan sólo un efecto inducido débil, denominado *diamagnetismo* (análogo al de la Fig. 35-5). En otros átomos, el momento magnético total orbital y de spín (o ambos) puede ser no cero; por consiguiente, los átomos se alinean en presencia de un campo magnético externo. A estos materiales se les llama *paramagnéticos*. El tipo más común de comportamiento magnético es el *ferromagnetismo,* en el cual debido a las interacciones de los átomos, su alineación se conserva aun cuando se elimine el campo externo. Más tarde en este capítulo estudiamos más a fondo las tres clases de materiales magnéticos.

Magnetismo nuclear

El núcleo, que se compone de protones y de neutrones en movimiento orbital y que está bajo la influencia de sus fuerzas mutuas, tiene un momento magnético constituido de dos partes: una parte orbital, debida al movimiento de los protones (los neutrones no llevan carga y, por ello, no contribuyen al momento magnético orbital, a pesar de que puede tener momento angular), y otra, intrínseca, debida a los momentos magnéticos intrínsecos de los protones y neutrones, que se incluyen en la tabla 35-1. (Quizá el lector se sorprenda al enterarse de que el neutrón sin carga, tiene un momento magnético intrínseco no cero. Si el neutrón fuera una partícula elemental verdaderamente sin carga eléctrica, no tendría, efectivamente, un momento de dipolo magnético. El momento no cero del neutrón nos indica su estructura interna y puede explicarse en forma bastante satisfactoria, suponiendo que el neutrón consta de tres quarks cargados.)

Los núcleos tienen momentos dipolares magnéticos orbitales de spín que pueden expresarse por medio de la ecuación 35-10. Sin embargo, la masa que aparece en esas ecuaciones (la del electrón) debe sustituirse por la del protón o la del neutrón, la cual es unas 1800 veces mayor que la del electrón. Los momentos nucleares típicos del dipolo magnético son más pequeños que los momentos atómicos del dipolo en un factor del orden de 10^{-3} (Tabla 35-1) y su contribución a las propiedades magnéticas de los materiales suele ser insignificante.

Los efectos del magnetismo nuclear cobran importancia en el caso de la *resonancia magnética nuclear*, en la cual al núcleo se le somete a una radiación electromagnética de una frecuencia rigurosamente definida que se requiere para que el momento magnético nuclear cambie de dirección. Podemos alinear los momentos magnéticos nucleares en una muestra de material por medio de un campo magnético estático; la dirección de los dipolos se invierte cuando absorben la radiación electromagnética que varía con el tiempo. Es fácil detectar la absorción de esta radiación. Este efecto constituye el fundamento de las imágenes de resonancia magnética (IRM), método de diagnóstico en que las imágenes de los órganos pueden obtenerse usando radiación mucho menos peligrosa para el cuerpo que los rayos X (Fig. 35-7).

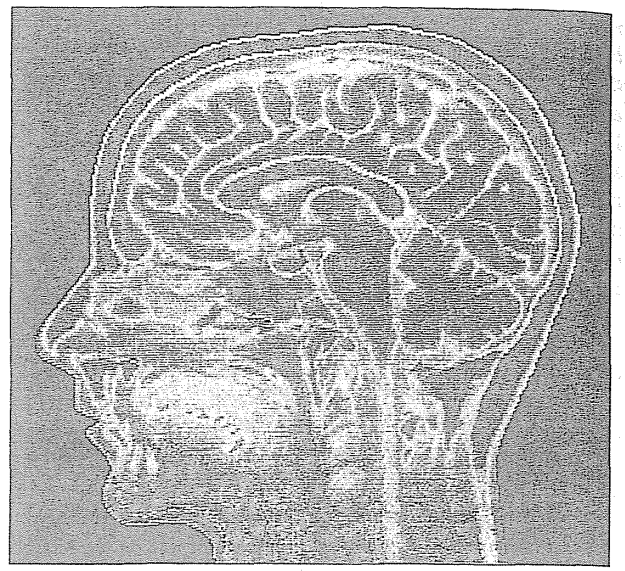


FIGURA 35-7. Perfil de una cabeza humana, tomado por método de imágenes de resonancia magnética (IRM). Muestra de manera detallada el cerebro y los tejidos faciales, invisibles en las radiografías, y no entraña riesgos médicos para el paciente.

PROBLEMA RESUELTO 35-2. Un protón se halla en un campo magnético de intensidad $B = 1.5$ T. El momento dipolar magnético del protón es inicialmente paralelo a la dirección de $\vec{B}$. ¿Cuánto trabajo externo se requiere para invertir la dirección del momento dipolar magnético del protón?

Solución La energía de interacción de un dipolo magnético con un campo magnético está dada por la ecuación 35-6, $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Cuando $\vec{\mu}$ es antiparalelo al campo como en el estado inicial del problema, la energía inicial U_i es

$$U_i = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu B,$$

porque el ángulo entre $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ es 180°. Cuando el momento dipolar magnético cambia de dirección (llamada "oscilación de spín"), el momento magnético se vuelve *paralelo* a $\vec{B}$ y la energía final es

$$U_f = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B.$$

El trabajo externo realizado en el sistema es igual al cambio de energía, o sea

$$\begin{aligned} W &= U_f - U_i = -\mu B - \mu B = -2\mu B \\ &= -2(1.41 \times 10^{-26}\ \text{J/T})(1.5\ \text{T}) \\ &= -4.23 \times 10^{-26}\ \text{J} = -0.26\ \mu\text{eV}. \end{aligned}$$

Como el ambiente efectúa trabajo *negativo* en el sistema, éste lleva a cabo trabajo *positivo* sobre su ambiente. Esta energía podría transmitirse al entorno en forma de radiación electromagnética, que se hallaría en el intervalo de radiofrecuencia del espectro y que tendría una frecuencia de 64 MHz, ligeramente por debajo del intervalo de sintonización de un radio de frecuencia modulada.

35-4 MAGNETIZACIÓN

En el capítulo 30 estudiamos el efecto de llenar el espacio entre las placas del capacitor con un material dieléctrico; descubrimos lo siguiente: al introducir el dieléctrico y conservar constante la carga en las placas, se reducía el campo eléctrico en la región entre ellas. En otras palabras, si $\vec{E}_0$ es el campo eléctrico sin dieléctrico, el campo $\vec{E}$ con él estará dado por la ecuación 29-23 que escribiremos en forma vectorial así

$$\vec{E} = \vec{E}_0/\kappa_e. \tag{35-12}$$

El efecto del dieléctrico se caracteriza por su constante dieléctrica κ_e, número absoluto con un valor mayor que 1 en los materiales (Tabla 29-2).

Consideremos ahora un medio magnético compuesto de átomos con los momentos dipolares magnéticos $\vec{\mu}_n$. En general, estos dipolos apuntan en varias direcciones del espacio. Calculemos el momento dipolar neto $\vec{\mu}$ en un volumen V del material, efectuando la suma *vectorial* de todos los dipolos del volumen: $\vec{\mu} = \Sigma\vec{\mu}_n$. Entonces definimos la *magnetización* $\vec{M}$ del material como el momento dipolar neto por unidad de volumen, o sea

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}}{V} = \frac{\Sigma\vec{\mu}_n}{V}. \tag{35-13}$$

Si queremos considerar la magnetización una magnitud microscópica, la ecuación 35-13 debe escribirse como el límite, a medida que el volumen se aproxima a cero. Ello nos permite suponer que el material presenta una magnetización *uniforme.*

Supóngase que este material se coloca en un campo uniforme $\vec{B}_0$. Este campo aplicado lo "magnetiza" y alinea los dipolos. Los dipolos alineados producen un campo magnético propio, en analogía con el campo *eléctrico* generado por los dipolos eléctricos en un medio dieléctrico (Sec. 29-6). En cualquier punto del espacio el campo magnético neto $\vec{B}$ es la suma del campo aplicado $\vec{B}_0$ y del producido por los dipolos, al que llamamos $\vec{B}_M$. Por tanto,

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M. \tag{35-14}$$

El campo $\vec{B}_M$ puede estar formado por las aportaciones de los dipolos permanentes en los materiales paramagnéticos (análogos a los dieléctricos polares) y de los dipolos inducidos en todos los materiales (como en los dieléctricos no polares).

El campo de magnetización $\vec{B}_M$ se relaciona con la magnetización $\vec{M}$, la cual, como se definió en la ecuación 35-13, se determina también mediante los dipolos del material. En los campos débiles, $\vec{M}$ es proporcional al campo aplicado $\vec{B}_0$. No obstante, suele ser difícil calcular $\vec{B}_M$ a menos que la magnetización sea uniforme y la forma sea muy simetríca. Como un ejemplo de este caso, consideramos un solenoide

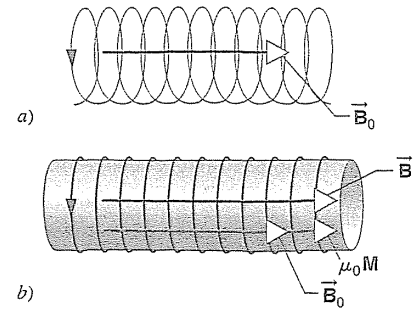


FIGURA 35-8. *a)* En un solenoide vacío, la corriente genera un campo $\vec{B}_0$. *b)* Cuando el solenoide se llena con material magnético, el campo total $\vec{B}$ incluye las contribuciones $\vec{B}_0$ procedentes de la corriente y $\mu_0\vec{M}$ provenientes del material magnético.

largo (ideal) de sección transversal circular, lleno con material magnético (Fig. 35-8). En este caso, el campo aplicado es uniforme en todo el interior; $\vec{B}_0$ y $\vec{M}$ son paralelos al eje, pudiendo demostrarse que $\vec{B}_M = \mu_0\vec{M}$ en el interior del solenoide. (Le recomendamos comprobar las dimensiones y demostrar que $\mu_0\vec{M}$ tiene las mismas dimensiones que $\vec{B}$.)

Podemos, pues, escribir el campo neto como

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M}, \tag{35-15}$$

como se ilustra en la figura 35-8*b*. En los campos débiles, $\vec{M}$ crece linealmente con el campo aplicado $\vec{B}_0$ y, por lo mismo, $\vec{B}$ debe ser proporcional a $\vec{B}_0$. En este caso, podemos escribir

$$\vec{B} = \kappa_m\vec{B}_0, \tag{35-16}$$

donde κ_m es la *permeabilidad* del material, que se define en relación con el vacío, para el cual $\kappa_m = 1$. La permeabilidad de la mayor parte de los materiales comunes (excepto los ferromagnéticos) tiene valores muy cercanos a 1, como veremos en la siguiente sección. Con respecto a otros materiales que no son ferromagnéticos, la permeabilidad puede depender de propiedades como la temperatura y la densidad del material, pero no del campo $\vec{B}_0$. En condiciones ordinarias, la ecuación 35-16 describe una relación lineal y el campo neto $\vec{B}$ crece linealmente conforme se aumenta el campo aplicado. Por el contrario, en los ferromagnéticos podemos suponer que la ecuación 35-16 define una κ_m particular que depende del campo aplicado $\vec{B}_0$; por tanto, la ecuación 35-16 deja de ser lineal.*

Al combinar las ecuaciones 35-15 y 35-16, podemos escribir así la magnetización inducida por el campo aplicado:

$$\mu_0\vec{M} = (\kappa_m - 1)\,\vec{B}_0. \tag{35-17}$$

La magnitud $\kappa_m - 1$ es casi siempre del orden de 10^{-3} a 10^{-6} en la mayor parte de los materiales no ferromagnéticos; así que

* Como de costumbre, hay una analogía entre los campos eléctrico y magnético. Existen materiales dieléctricos, denominados *ferroeléctricos,* donde la relación entre $\vec{E}$ y $\vec{E}_0$ no es lineal, esto es, κ_e depende del campo aplicado $\vec{E}_0$. Con estos materiales pueden construirse dipolos eléctricos cuasi permanentes, llamados, *electretos,* que se parecen a los imanes permanentes. La mayor parte de los materiales dieléctricos de uso común son lineales, en tanto que casi todos los materiales magnéticos de uso común son no lineales.

en general la contribución de la magnetización $\mu_0\vec{M}$ al campo total es mucho menor que $\vec{B}_0$. Ello contrasta mucho con el caso de los campos eléctricos, donde κ_e presenta los valores de los materiales típicos en el intervalo 3 a 100. El material dieléctrico modifica sustancialmente al campo eléctrico neto; en cambio, tratándose de no ferromagnéticos, el material magnético tiene un efecto muy pequeño en el campo magnético.

PROBLEMA RESUELTO 35-3. El campo magnético en el interior de cierto solenoide posee el valor 6.5×10^{-4} T cuando este último esta vacío. Si está lleno con hierro, el valor del campo es 1.4 T. *a*) Determine la permeabilidad relativa en tales condiciones. *b*) Obtenga el momento magnético promedio de un átomo de hierro en esas mismas circunstancias.

Solución *a*) A partir de la ecuación 35-16 tenemos (tomando las magnitudes solamente)

$$\kappa_m = \frac{B}{B_0} = \frac{1.4\ \text{T}}{6.5 \times 10^{-4}\ \text{T}} = 2200.$$

b) Con el uso de la ecuación 35-15 obtenemos

$$M = \frac{B - B_0}{\mu_0} = \frac{1.4\ \text{T} - 6.5 \times 10^{-4}\ \text{T}}{4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A}} = 1.11 \times 10^6\ \text{A/m}.$$

Nótese que las unidades de M pueden expresarse también como $A \cdot m^2/m^3$. Se representa así el momento magnético por unidad de volumen del hierro. Si queremos determinar el momento magnético por átomo, se requiere la densidad numérica n de átomos (número de átomos por unidad de volumen):

$$n = \frac{\text{átomos}}{\text{volumen}} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}\frac{\text{átomos}}{\text{masa}}$$

$$= \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}\frac{\text{átomos/mol}}{\text{masa/mol}} = \rho\frac{N_A}{m}.$$

Aquí ρ es la densidad del hierro, N_A es el número de Avogadro y m es la masa molar del hierro. Al introducir los valores, obtenemos

$$n = (7.87 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)\frac{6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}}{0.0558\ \text{kg/mol}}$$

$$= 8.49 \times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3.$$

El momento magnético promedio por átomo es

$$\mu = \frac{M}{n} = \frac{1.11 \times 10^6\ \text{A/m}}{8.49 \times 10^{28}/\text{m}^3} = 1.31 \times 10^{-23}\ \text{J/T} = 1.4\ \mu_B.$$

El resultado anterior concuerda muy bien con lo que se espera de un momento magnético atómico. El cálculo indica que cada átomo de la muestra de hierro aporta su momento completo de dipolo magnético a la magnetización del material, situación que caracteriza a los ferromagnéticos.

35-5 MATERIALES MAGNÉTICOS

Ahora estamos preparados para examinar algunas características de tres tipos de materiales magnéticos. Como veremos luego, en parte estas clasificaciones se basan, por una parte, en los momentos dipolares magnéticos de sus átomos y, por la otra, en las interacciones entre estos últimos.

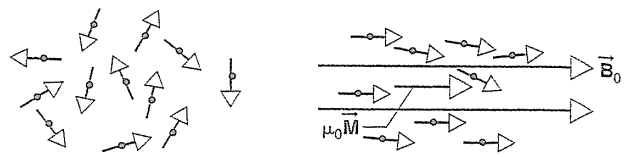


FIGURA 35-9. *a*) En un material no magnetizado los momentos magnéticos atómicos presentan una orientación aleatoria. *b*) Cuando se aplica un campo externo $\vec{B}_0$, los dipolos giran hasta alinearse con él y la suma vectorial de los momentos hace una contribución $\mu_0\vec{M}$ al campo del material.

Paramagnetismo

El paramagnetismo se observa en materiales cuyos átomos tienen momentos dipolares magnéticos permanentes; no importa si los momentos son del tipo orbital o del tipo spín.

En una muestra de material paramagnético a la que no se le aplica un campo magnético, al inicio los momentos dipolares atómicos se orientan aleatoriamente en el espacio (Fig. 35-9*a*). La magnetización, calculada de acuerdo con la ecuación 35-13, es cero porque las direcciones aleatorias de $\vec{\mu}_n$ hacen desaparecer la suma vectorial, del mismo modo que la suma de las velocidades con dirección aleatoria de las moléculas en la muestra de un gas da cero para la velocidad del centro de masa de toda la muestra.

Cuando al material se le aplica un campo magnético externo (quizá colocándolo dentro de los devanados de un solenoide), el par resultante en los dipolos tiende a alinearlos con el campo (Fig. 35-9*b*). La suma vectorial de los momentos dipolares individuales ya no es cero. El campo dentro del material tiene ahora dos componentes: el campo aplicado $\vec{B}_0$ y el campo inducido $\mu_0\vec{M}$ procedente de la magnetización de los dipolos. Adviértase que los dos campos son paralelos; los dipolos aumentan el campo aplicado, a diferencia de lo que ocurre en el caso eléctrico: el campo del dipolo se oponía al campo aplicado y reducía el campo eléctrico total en el material (Fig. 29-11). Con base en la ecuación 35-17, la razón de $\mu_0\vec{M}$ a $\vec{B}_0$ se determina por $\kappa_m - 1$, que es pequeña y positiva en los materiales paramagnéticos. La tabla 35-2 contiene algunos valores representativos.

TABLA 35-2 Permeabilidad relativa de algunos materiales paramagnéticos a temperatura ambiente

Material	$\kappa_m - 1$
Gd_2O_3	1.2×10^{-2}
$CuCl_2$	3.5×10^{-4}
Cromo	3.3×10^{-4}
Tungsteno	6.8×10^{-5}
Aluminio	2.2×10^{-5}
Magnesio	1.2×10^{-5}
Oxígeno (1 atm)	1.9×10^{-6}
Aire (1 atm)	3.6×10^{-7}

809

El movimiento térmico de los átomos tiende a alterar la alineación de los dipolos; de ahí que la magnetización disminuya al aumentar la temperatura. En 1895 Pierre Curie descubrió que la relación entre M y la temperatura, T, es inversa; se escribe así

$$M = C\frac{B_0}{T}, \tag{35-18}$$

a esta expresión se le conoce como *ley de Curie* y a la constante C se le llama constante de Curie. La unidad de la temperatura en la ecuación 35-18 que debe utilizarse es el kelvin. Esta ecuación es válida sólo cuando B_0/T es pequeña, o sea con campos pequeños o con temperaturas elevadas.

En campos aplicados grandes, la magnetización se acerca a su valor máximo, que ocurre cuando todos los dipolos son paralelos. Si hay N de ellos en el volumen V, el valor máximo de $\Sigma\vec{\mu}_n$ es $N\mu_n$, correspondiente a N vectores paralelos $\vec{\mu}_n$. En este caso la ecuación 35-13 da

$$M_{\text{máx}} = \frac{N}{V}\mu_n. \tag{35-19}$$

Cuando la magnetización alcanza este valor de *saturación*, los incrementos del campo aplicado $\vec{\mathbf{B}}_0$ dejan de tener efecto en la magnetización. La ley de Curie, la cual establece que M crece linealmente con B_0, es válida sólo cuando la magnetización está lejos de la saturación, esto es, cuando B_0/T es pequeña. La figura 35-10 muestra la magnetización medida M como una fracción del valor máximo $M_{\text{máx}}$ en función de B_0/T, en varias temperaturas para la sal paramagnética de alumbre crómico $\mathrm{CrK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O}$. (En esta sal, los iones cromo causan el paramagnetismo.) Nótese la aproximación a la saturación y que la ley de Curie es válida sólo en valores pequeños de B_0/T (correspondientes a campos aplicados pequeños o a temperaturas elevadas).

Cuando el campo magnético externo se retira de una muestra paramagnética, el movimiento térmico ocasiona que la dirección de los momentos dipolares magnéticos se vuelvan aleatorios otra vez: las fuerzas magnéticas entre átomos son demasiado débiles para mantener la alineación e impedir la aleatoriedad. Este efecto sirve para enfriar mediante un proceso que se conoce como *desmagnetización adiabática.* Se magnetiza una muestra a temperatura constante. Los dipolos entran en un estado de energía mínima y se alinean completa o parcialmente con el campo aplicado; al hacerlo estos dipolos deben liberar

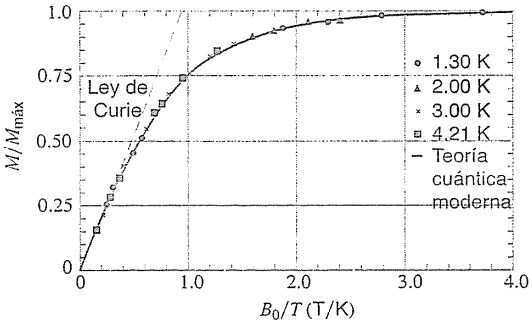


FIGURA 35-10. En un material paramagnético la razón de la magnetización M a su valor de saturación $M_{\text{máx}}$ varía con B_0/T

energía al material circundante. Esta energía fluye en forma de calor hacia el recipiente térmico del entorno. Ahora, la muestra está térmicamente aislada de su ambiente y se desmagnetiza en forma adiabática. Cuando la alineación de los dipolos se vuelve aleatoria, el aumento de la energía magnética de estos dipolos debe compensarse con una reducción correspondiente de la energía interna del sistema (ya que el calor no puede fluir hacia ni desde el sistema aislado en un proceso adiabático.) Así pues, la temperatura de la muestra debe descender. La temperatura más baja que puede conseguirse depende del campo residual causado por los dipolos. La desmagnetización de los dipolos magnéticos atómicos sirve para alcanzar temperaturas del orden de 0.001 K, en tanto que la desmagnetización de los dipolos magnéticos nucleares, mucho menores, permite obtener temperaturas por debajo de los 10^{-6} K.

Diamagnetismo

En 1847 Michael Faraday descubrió que una muestra de bismuto era *repelida* por un imán fuerte. A esa sustancia la llamó diamagnética. (En cambio, las sustancias paramagnéticas siempre son *atraídas* por un imán.) El diamagnetismo se observa en todos los materiales. Pero, generalmente es un efecto mucho más débil que el paramagnetismo; por ello puede observarse muy fácilmente sólo en los materiales no paramagnéticos. Esos materiales podrían ser los que presentan cero momentos dipolares magnéticos atómicos, acaso provenientes de átomos que tienen varios electrones en su órbita y sus momentos magnéticos orbitales y de spín dan una suma vectorial igual a cero.

El efecto del diamagnetismo se parece al efecto de los campos eléctricos inducidos en electrostática: un fragmento no cargado de material como el papel es atraído por una varilla cargada de una u otra polaridad. Las moléculas del papel no tienen momentos dipolares eléctricos permanentes, pero adquieren momentos dipolares *inducidos* procedentes de la acción del campo eléctrico; estos momentos inducidos pueden después ser atraídos por el campo (Fig. 25-5).

En los materiales diamagnéticos, los átomos que carecen de momentos dipolares magnéticos *permanentes* adquieren momentos dipolares *inducidos,* cuando se colocan en un campo magnético externo, como se comenta en la sección 35-2. Supongamos que los electrones que giran alrededor de un átomo se comportan como espiras de corriente. Cuando se aplica un campo externo $\vec{\mathbf{B}}_0$, cambia el flujo que pasa a través de dichas espiras. Conforme a la ley de Lenz, el movimiento debe cambiar de tal manera que el campo inducido se oponga al incremento del flujo. Un cálculo basado en las órbitas circulares (Prob. 7) muestra que el cambio de movimiento se logra acelerando ligeramente positiva o negativamente, el movimiento orbital, en forma tal que la frecuencia circular asociada a dicho momento se modifique en

$$\Delta\omega = \pm\frac{eB_0}{2m}, \tag{35-20}$$

donde B_0 es la magnitud del campo aplicado, y m la masa de un electrón. En efecto, este cambio de la frecuencia orbital

modifica el movimiento magnético orbital de un electrón (Ec. 35-8 y Prob. res. 35-5).

Si quisiéramos acercar al polo norte de un imán un sólo átomo individual de un material como el bismuto, el campo (que apunta alejándose del polo) tendería a incrementar el flujo que pasa a través de la espira de corriente, que representa un electrón circulante en el átomo de bismuto. La ley de Lenz establece que debe haber un campo inducido que apunte en dirección contraria (hacia el polo). El polo norte inducido se halla en el lado de la espira hacia el imán y los dos polos norte se repelen entre sí, como se ve en la figura 35-5.

Este efecto se presenta cualquiera que sea el sentido de la rotación de la órbita original; de ahí que la magnetización de un material diamagnético siempre se opone al campo aplicado. La razón entre la contribución de la magnetización al campo $\mu_0 M$, y el campo aplicado B_0, está dada por $\kappa_m - 1$ según la ecuación 35-17, es de unos -10^{-6} a -10^{-5} en los materiales diamagnéticos ordinarios. La tabla 35-3 contiene algunos de estos materiales, junto con sus permeabilidades.

Ferromagnetismo

El ferromagnetismo, igual que el paramagnetismo, se observa en materiales cuyos átomos tienen momentos dipolares magnéticos permanentes. Lo que los distingue de los materiales paramagnéticos es que los ferromagnéticos muestran una fuerte interacción entre los átomos cercanos que conservan alineados sus momentos dipolares, aun cuando se elimine el campo magnético externo. En todo caso, el que ocurra esto depende de la intensidad de los dipolos y, como el campo dipolar cambia con la distancia, también de la separación entre los átomos del material. Algunos átomos pueden ser ferromagnéticos en una clase de material pero no en otra, por ser distinto su espaciamiento. Entre los materiales ferromagnéticos comunes a temperatura ambiente se cuentan el hierro, el cobalto y el níquel. Los elementos ferromagnéticos menos comunes, algunos de los cuales muestran su ferromagnetismo sólo en temperaturas muy por debajo de la temperatura ambiente, son las tierras raras como el gadolinio y el disprosio. Los compuestos y las aleaciones pueden ser ferromagnéticas; por ejemplo, CrO_2, ingrediente básico de la cinta magnetofónica; esta sustancia pertenece a esta categoría a pesar de que el cromo ni el oxígeno son ferromagnéticos a temperatura ambiente.

TABLA 35-3 Permeabilidad relativa de algunas sustancias diamagnéticas a temperatura ambiente

Sustancia	$\kappa_m - 1$
Mercurio	-3.2×10^{-5}
Plata	-2.6×10^{-5}
Bismuto	-1.7×10^{-5}
Alcohol etílico	-1.3×10^{-5}
Cobre	-9.7×10^{-6}
Dióxido de carbono (1 atm)	-1.1×10^{-8}
Nitrógeno (1 atm)	-5.4×10^{-9}

Podemos disminuir la efectividad del acoplamiento entre átomos cercanos que causa el ferromagnetismo, elevando la temperatura de la sustancia. La temperatura a la cual un material ferromagnético se convierte en uno paramagnético se llama *temperatura de Curie*. Por ejemplo, la temperatura de Curie del hierro es de 770°C; por arriba de esta temperatura se vuelve paramagnético. La temperatura Curie del gadolinio es de 16°C; a temperatura ambiente es paramagnético y se transforma en ferromagnético a temperaturas menores que los 16°C.

El campo aplicado aumenta de modo considerable en los ferromagnéticos. La magnitud del campo magnético total $\vec{B}$ dentro de uno ferromagnético puede ser de 10^3 o 10^4 veces mayor que la magnitud del campo aplicado $\vec{B}_0$. La permeabilidad κ_m de un material ferromagnético no es constante; tampoco el campo $\vec{B}$ ni la magnetización $\vec{M}$ crecen linealmente con $\vec{B}_0$, ni siquiera con valores pequeños de $\vec{B}_0$.

Histéresis y dominios magnéticos. Introduzcamos un material ferromagnético como el hierro en un solenoide, según se observa en la figura 35-8*b*. Suponemos que la corriente es cero al inicio y que el hierro no está magnetizado, así que originalmente tanto B_0 como M son cero. Aumentamos B_0 incrementando la corriente en el solenoide. La magnetización aumenta rápidamente al valor de saturación como lo indica, en la figura 35-11, el segmento *ab*. Ahora reducimos la corriente a cero. La magnetización no recorre nuevamente su trayectoria original, sino que el hierro permanece magnetizado (en el punto *c*) a pesar de ser cero el campo aplicado B_0. Si invertimos después la dirección de la corriente en el solenoide, alcanzaremos una magnetización saturada en la dirección contraria (punto *d*); retornando a cero la corriente, descubriremos que la muestra mantiene una magnetización permanente en el punto *e*. Entonces podemos aumentar de nuevo la corriente para retornar a la magnetización saturada en la dirección original (punto *b*). La trayectoria *bcdeb* puede seguirse una y otra vez.

Al comportamiento descrito en la figura 35-11 se le conoce como *histéresis*. En los puntos *c* y *e*, el hierro está magnetizado, aun cuando el solenoide no tenga corriente. Más aún, el hierro "recuerda" cómo se magnetizó: una corriente negativa produce una magnetización distinta a la que produce una corriente positiva. Esta "memoria" es indispensable para que la información se almacene en forma magnética, como ocurre en las cintas de los casetes o en los discos de computadora.

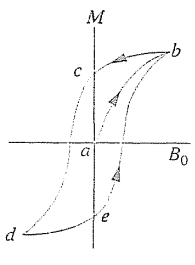


FIGURA 35-11. Variación de la magnetización de una muestra de material ferromagnético a medida que se modifica el campo aplicado. La trayectoria *bcdeb* se conoce como *curva de histéresis*.

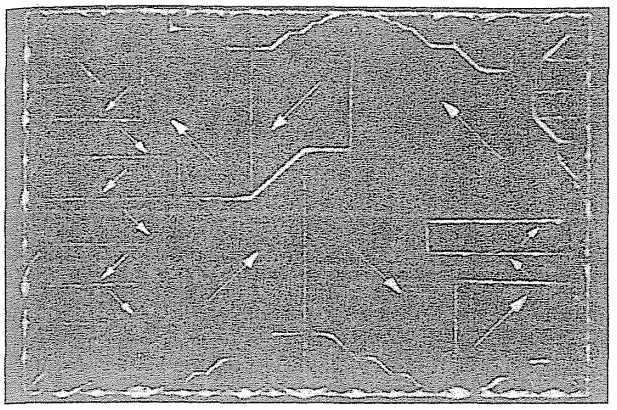


FIGURA 35-12. Patrones de dominio en un cristal simple de níquel. Las líneas blancas, que indican las fronteras de los dominios, son producidas por el polvo de óxido de hierro esparcido en la superficie. Las flechas señalan la orientación de los dipolos magnéticos dentro de los dominios.

Un material ferromagnético se acerca a la saturación a través de un mecanismo distinto al de un material paramagnético (que describimos sirviéndonos de la rotación de dipolos magnéticos individuales que los alinean con el campo aplicado). Un material como el hierro se compone de una gran cantidad de cristales microscópicos. En cada uno hay *dominios magnéticos*, regiones que miden aproximadamente 0.01 mm y en que el acoplamiento de los dipolos magnéticos atómicos produce esencialmente una alineación perfecta de todos los átomos. En la figura 35-12 se incluye un patrón de dominios en un cristal simple de níquel ferromagnético. Existen muchos dominios: sus dipolos apuntan hacia varias direcciones y el resultado neto de sumar estos momentos dipolares en un material ferromagnético no magnetizado da magnetización cero.

Cuando el ferromagnético se coloca en un campo externo, pueden presentarse dos efectos: 1) los dipolos fuera de las paredes de los dominios que se alinean con el campo pueden girar y alinearse, permitiendo con ello que tales dominios crezcan a expensas de los dominios cercanos; 2) los dipolos de los dominios no alineados pueden oscilar enteramente hasta alinearse con el campo aplicado. En uno y otro caso hay ahora más dipolos alineados con él y el material presenta gran magnetización. Cuando se elimina el campo, las paredes del dominio no recobran por completo su posición anterior y el material conserva una magnetización en dirección del campo aplicado.

PROBLEMA RESUELTO 35-4. Una sustancia paramagnética consta de átomos con un momento dipolar magnético de 3.3 μ_B. Se pone en un campo magnético de 5.2 T de intensidad. ¿A qué temperatura debe enfriarse esta sustancia para que la energía magnética de sus átomos alcance la magnitud de la energía cinética traslacional media por átomo?

Solución La energía magnética de un dipolo en un campo externo es $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, y la energía cinética traslacional media por átomo, $(3/2)kT$ (Sec. 22-4). Estas dos energías tienen la misma magnitud cuando la temperatura es

$$T = \frac{\mu B}{(3/2)k} = \frac{(3.3)(9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(5.2\ \text{T})}{(1.5)(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})} = 7.7\ \text{K}.$$

PROBLEMA RESUELTO 35-5. Calcule el cambio del momento magnético en un electrón que circula en un campo aplicado B_0 de 2.0 T que actúa perpendicularmente al plano de la órbita. Supongamos que $r = 5.29 \times 10^{-11}$ m para el radio de la órbita, correspondiente al estado normal de un átomo de hidrógeno.

Solución Podemos escribir así la ecuación 35-9:

$$\mu = \tfrac{1}{2} erv = \tfrac{1}{2} er^2\omega,$$

usando para ello $v = r\omega$. Entonces, el cambio $\Delta\mu$ del momento magnético correspondiente al de la frecuencia angular es

$$\Delta\mu = \tfrac{1}{2} er^2\,\Delta\omega = \tfrac{1}{2} er^2\left(\pm\frac{eB_0}{2m}\right) = \pm\frac{e^2B_0r^2}{4m}$$

$$= \pm\frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(2.0\ \text{T})(5.29 \times 10^{-11}\ \text{m})^2}{4(9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})}$$

$$= \pm 3.9 \times 10^{-29}\ \text{J/T},$$

donde hemos empleado la ecuación 35-20 para $\Delta\omega$.

En comparación con el valor del momento magnético $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$ J/T, comprobamos que este efecto representa apenas 4×10^{-6} aproximadamente del momento magnético. Ello coincide con el orden de magnitud previsto en los efectos diamagnéticos (Tabla 35-3).

35-6 EL MAGNETISMO DE LOS PLANETAS (opcional)

A pesar de que las brújulas magnéticas se han utilizado, por varios siglos, como instrumentos de navegación, no se sabía con exactitud el por qué funcionaban así hasta 1600, cuando Sir William Gilbert —más tarde físico oficial de la Reina Elizabeth I— propuso que la Tierra era un enorme imán con un polo magnético cerca de cada polo geográfico. Investigadores posteriores han descrito minuciosamente el campo magnético de la Tierra y las naves interplanetarias han estudiado los campos magnéticos de otros planetas.

El campo de la Tierra puede considerarse aproximadamente el de un dipolo magnético, con un momento $\mu = 8.0 \times 10^{22}$ J/T. El campo en la superficie tiene una magnitud que fluctúa entre 30 μT cerca del ecuador y unas 60 μT cerca de los polos. En un dipolo, cabe esperar que el campo magnético en el eje sea el doble del campo en la misma distancia a lo largo del bisector, como en el caso de un dipolo eléctrico (Sec. 26-3). Estos valores del campo magnético de la Tierra concuerdan con dichas expectativas.

El eje del dipolo forma un ángulo aproximado de 11.5° con el eje rotacional terrestre (que también forma un ángulo de 23.5° con la normal al plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, como se observa en la Fig. 35-13). Lo que llamamos comúnmente polo norte magnético, situado en el

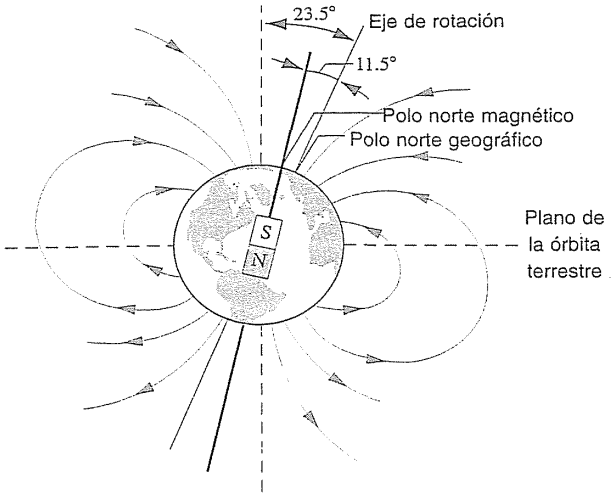


FIGURA 35-13. Representación simplificada del campo magnético de la Tierra cerca de la superficie. Nótese que el polo norte magnético es en realidad el polo sur del dipolo que representa al campo de la Tierra. El eje magnético se encuentra más o menos a la mitad entre el eje de rotación y la normal al plano de la órbita terrestre (línea punteada vertical).

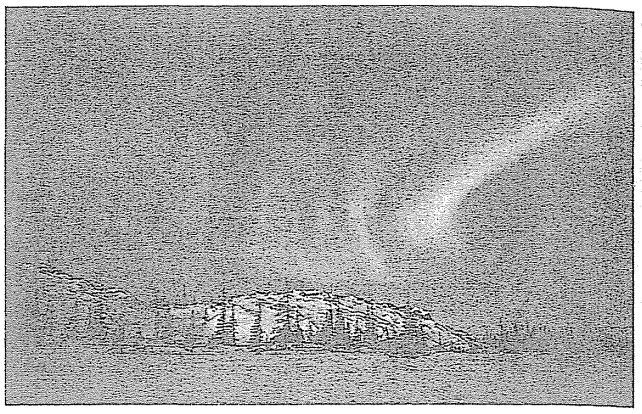


FIGURA 35-14. Aurora boreal muy impresionante, conocida también como "luces del Norte".

norte de Canadá, es en realidad el polo sur del dipolo terrestre, tal como lo definimos haciendo converger las líneas del campo magnético. Este polo, ubicado en el Antártico, se representa mediante el polo norte de un dipolo porque de él salen las líneas de $\vec{B}$. Dicho con otras palabras, cuando utilizamos una brújula magnética para determinar la dirección, el extremo que apunta al norte es un verdadero polo norte del imán suspendido en la brújula; lo atrae un polo sur verdadero, que se halla cerca del polo norte geográfico de la Tierra.

El campo magnético de la Tierra tiene importancia práctica no sólo en la navegación, sino también en la exploración y en las comunicaciones. De ahí que haya sido estudiado de modo exhaustivo desde hace muchos años, en la superficie mediante la medición de su magnitud y dirección y arriba de ella por medio de satélites. Entre sus efectos se encuentran los cinturones de radiación de Van Allen que rodean la Tierra (Fig. 35-15) y las llamadas "luces del Norte", el conocido fenómeno de la aurora boreal* (Fig. 35-14).

En virtud de que se encuentran rocas magnetizadas en el suelo, es tentador pensar que un núcleo de rocas magnetizadas permanentemente es la fuente del campo magnético de la Tierra. Pero la hipótesis no puede ser correcta, porque el núcleo tiene una temperatura mayor, de miles de grados, que la temperatura de Curie del hierro. En consecuencia, el hierro del núcleo terrestre no puede ser ferromagnético.

Más aún, las mediciones efectuadas en los últimos cientos de años indican que el polo norte magnético emigra en relación con el polo norte geográfico; basándonos en el registro geológico sabemos que los polos se invierten en una escala temporal de miles de años. (Más aún, como veremos más adelante, algunos planetas del sistema solar con composición parecida a la de la Tierra carecen de campo magnético; en cambio, otros que no contienen material magnético presentan campos muy grandes.) Tales observaciones son difíciles de explicar partiendo de la suposición de la existencia de un núcleo con magnetización permanente.

No se conoce bien la fuente exacta del magnetismo terrestre, pero quizá intervenga alguna especie de efecto *dínamo.* El núcleo externo contiene minerales en estado líquido, los cuales conducen la electricidad fácilmente. Un pequeño campo magnético inicial causa que las corrientes fluyan en este conductor móvil, de acuerdo con la ley de inducción de Faraday. Las corrientes pueden intensificar el campo magnético y es precisamente el campo intensificado lo que observamos en el campo terrestre. No obstante, el estudio de la inducción indica que un conductor al moverse en un campo magnético experimenta una fuerza de frenado. Todavía no se conoce la fuente de energía necesaria para contrarrestarla y mantener en movimiento el núcleo.

La Tierra contiene un registro de los cambios de dirección y de magnitud del campo. Por ejemplo, en los restos de cerámica antigua hay diminutas partículas de hierro que se magnetizaron en el campo terrestre al enfriarse la cerámica después de quemarse. A partir de la intensidad de la magnetización de estas partículas se deduce la intensidad del campo terrestre en el tiempo y en el sitio de la combustión. Un registro geológico de origen similar se conservó en el suelo del mar (Fig. 35-15). A medida que el magma fluye de un cerro y se solidifica, se magnetizan las partículas de hierro. La dirección de su magnetización indica la dirección del campo te-

* Consúltese "The Dynamic Aurora", de Syun-Ichi Akasofu, *Scientific American,* mayo de 1989, p. 90.

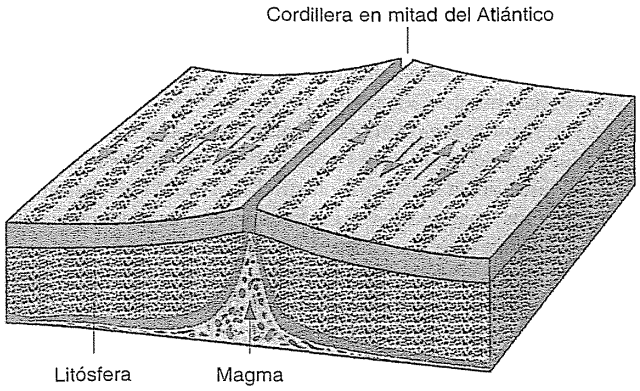


FIGURA 35-15. Al salir el material fundido por una cordillera en el fondo del mar y al enfriarse, conserva un registro de la dirección del campo magnético de la Tierra en ese momento (flechas). Cada segmento podría representar un tiempo de 100,000 a 1,000,000 de años.

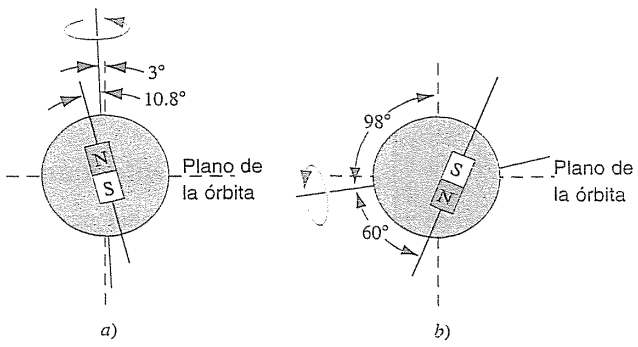


FIGURA 35-16. *a*) Alineación del eje del dipolo magnético de Júpiter en relación con su eje de rotación y con el plano de su órbita. Nótese que, en contraste con la Tierra, el polo norte magnético es un polo norte verdadero del campo dipolar. *b*) Alineación del eje del dipolo magnético de Urano.

rrestre. A partir de los patrones de magnetización podemos deducir que los polos de la Tierra se han invertido con gran regularidad a lo largo de la historia geológica. La inversión tiene lugar aproximadamente cada 100,000-1,000,000 años y su frecuencia ha aumentado últimamente. No se conocen las causas de esta inversión ni de su rapidez acelerada, pero al parecer el efecto dínamo interviene de alguna manera.*

En años recientes, las sondas espaciales interplanetarias han logrado medir la dirección y magnitud de los campos magnéticos de los planetas. Las observaciones corroboran el mecanismo de dínamo como fuente de esos campos. La tabla 35-4 ofrece los valores de los momentos de dipolo magnético y de los campos magnéticos superficiales de los planetas.

Venus, cuyo núcleo se asemeja al de la Tierra, carece de campo porque su rotación es demasiado lenta (una cada 244 días terrestres) para sostener el efecto dínamo. Marte, cuyo periodo rotacional dura casi lo mismo que el de la Tierra, tiene un campo diminuto porque, al parecer, su núcleo es muy pequeño; este hecho se deduce de la medición de la densidad del núcleo de Marte. Los planetas más lejanos (de Júpiter en adelante) se componen principalmente de hidrógeno y de helio, materiales que generalmente no se consideran magnéticos; no obstante, cerca de ellos, y a temperaturas y presiones elevadas, el hidrógeno y el helio pueden comportarse como metales; por tanto, muestran, en particular, una gran conductividad eléctrica, y esto permite el efecto dínamo.

La figura 35-16 muestra el alineamiento del eje rotacional y del eje del campo magnético de Júpiter y Urano; compárelo con el de la Tierra que se muestra en la figura 35-13. Nótese que el eje rotacional de Urano es casi paralelo al plano de su órbita, en contraste con otros planetas. Nótese asimismo que el eje magnético de Urano está mal alineado con su eje rotacional y que el dipolo está desplazado del centro del planeta. Por desgracia, la información obtenida mediante la observación sobre los planetas proviene de los vuelos espaciales que permanecieron cerca de Urano alrededor de un día. Si se pudiera examinar otras propiedades y sus registros geográficos, se conocería mucho mejor el origen del magnetismo de los planetas.*

* Véase "The Evolution of Earth's Magnetic Field", de Jeremy Bloxham y David Gubbins, *Scientific American,* diciembre de 1989, p. 68; y "The Source of the Earth's Magnetic Field", de Charles R. Carrigan y David Gubbins, *Scientific American,* febrero de 1979, p. 118.

TABLA 35-4 Campos magnéticos en el sistema solar

Planeta	$\mu(A \cdot m^2)$	*B en la superficie* (μT)
Mercurio	5×10^{19}	0.35
Venus	$< 10^{19}$	< 0.01
Tierra	8.0×10^{22}	30
Marte	1.5×10^{19}	0.04
Júpiter	1.6×10^{27}	430
Saturno	4.7×10^{25}	20
Urano	4.0×10^{24}	30
Neptuno	2.2×10^{24}	20

PROBLEMA RESUELTO 35-6. Una medición de la componente horizontal B_h del campo terrestre en Tucson (Arizona) dio un valor de 26 μT. Se suspende un imán pequeño como una brújula que oscila libremente en un plano vertical; se mide así el ángulo entre la dirección del campo y el plano horizontal, denominado *inclinación* o

* Consúltese "Magnetic Fields in the Cosmos", de E. N. Parker, *Scientific American,* agosto de 1983, p. 44; y "Uranus", de Andrew P. Ingersoll, *Scientific American,* enero de 1987, p. 38.

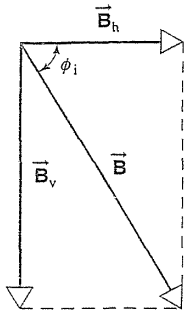


FIGURA 35-17. Problema resuelto 35-6. Los componentes horizontales y verticales del campo magnético de la Tierra cerca de Tucson (Arizona). El ángulo ϕ_i es el ángulo de inclinación.

ángulo inclinado ϕ_i. El que se midió en Arizona era de 59°. Calcule la magnitud del campo y su componente vertical en esa localidad.

Solución Como se aprecia en la figura 35-17, la magnitud del campo puede obtenerse de

$$B = \frac{B_h}{\cos \phi_i} = \frac{26\ \mu T}{\cos 59°} = 50\ \mu T.$$

La componente vertical está dada por

$$B_v = B_h \tan \phi_i = (26\ \mu T)(\tan 59°) = 43\ \mu T.$$

Como se espera en un campo dipolar (Fig. 35-13), los valores medidos del ángulo inclinado fluctúan entre 0° cerca del ecuador (en realidad, el ecuador *magnético*) y 90° cerca de los polos magnéticos.

35-7 LEY DE GAUSS APLICADA AL MAGNETISMO

En la figura 35-18*a* se describe gráficamente el campo relacionado con una varilla aislante que tiene iguales cantidades de cargas positiva y negativa colocadas en los extremos opuestos. Esto es un ejemplo de un dipolo eléctrico. La figura 35-18*b* muestra el caso análogo del dipolo magnético, como el conocido imán de barra, con un polo norte en un extremo y un polo sur en el otro. En este nivel los casos eléctrico y magnético se asemejan mucho. (Compare la figura 26-14*b* con la figura 32-6 y verá otro ejemplo de esta semejanza.) De hecho, estamos tentados a postular la existencia de polos magnéticos individuales parecidos a las cargas eléctricas; si existieran, producirían campos magnéticos (similares a los creados por las cargas) proporcionales a la fuerza del polo e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia de él. Como veremos luego, esta hipótesis no concuerda con el experimento.

Cortemos a la mitad los objetos de la figura 35-18 y separemos las dos mitades. En la figura 35-19 se ve que los casos eléctrico y magnético ya no son similares. En el primero hay dos objetos que, al ser separados por una distancia bastante grande, podrían considerarse cargas puntuales de polaridad opuesta, produciendo cada una un campo representativo de una carga puntual. En cambio, en el caso magnético no se obtienen polos norte y sur aislados, sino un par de imanes con sus propios polos norte y sur.

La diferencia anterior parece ser importante entre los dipolos eléctricos y magnéticos: un dipolo eléctrico puede dividirse en sus cargas simples constitutivas (o "polos"), no así el dipolo magnético. Cada vez que intentamos dividir un dipolo magnético en polos norte y sur individuales, creamos un nuevo par de polos. Este proceso ocurre microscópicamente, es decir a nivel de los átomos individuales. Cada átomo se comporta como un dipolo magnético con un polo norte y sur; por lo que hasta ahora conocemos, el dipolo no aparece como uno solo aislado, sino como la unidad fundamental más pequeña de la estructura magnética.

Esta diferencia entre los campos eléctrico y magnético tiene una expresión matemática en la ley de Gauss. En la figura 35-18*a*, el flujo del campo eléctrico que pasa a través de las superficies gaussianas depende de la carga neta encerrada

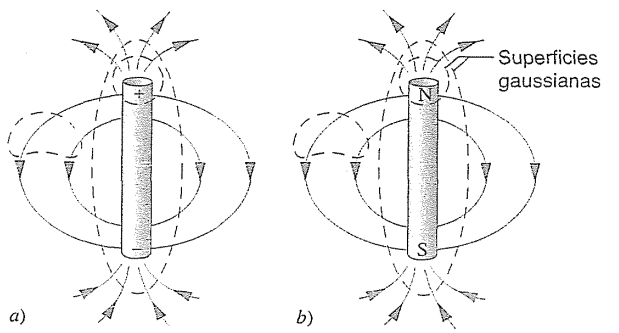


FIGURA 35-18. *a)* Dipolo eléctrico, que consta de una varilla aislante con una carga positiva en un extremo y con una carga negativa en el otro. Se muestran varias superficies gaussianas. *b)* Dipolo magnético, constituido por un imán de barra con un polo norte en un extremo y con un polo sur en el otro.

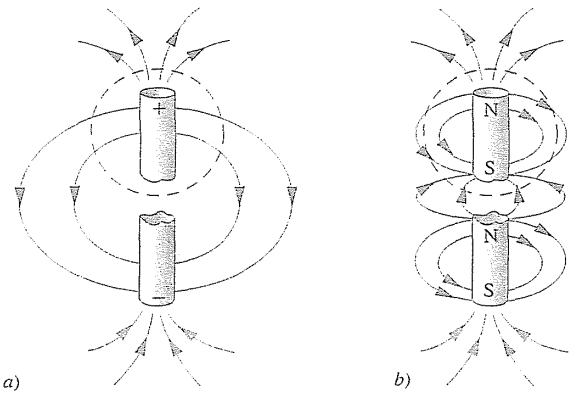


FIGURA 35-19. *a)* Cuando el dipolo eléctrico de la figura 37-18*a* se corta a la mitad, se aísla la carga positiva en un trozo y la carga negativa en el otro. *b)* Cuando el dipolo magnético de la figura 35-18*b* se corta a la mitad, aparece un nuevo par. Obsérvese la diferencia en los patrones del campo.

por ellas. Si la superficie no engloba una carga ni una carga neta (es decir, magnitudes iguales de carga positiva y negativa como el dipolo entero), el flujo del campo eléctrico a través de la superficie es cero. Si la superficie atraviesa el dipolo y encierra una carga neta q, el flujo Φ_E del campo eléctrico está dado por la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q/\epsilon_0. \qquad (35\text{-}21)$$

También podemos construir superficies gaussianas para el campo magnético, como se señala en la figura 35-18*b*. Si la superficie gaussiana no contiene una "carga magnética" neta, el flujo Φ_B del campo magnético a través de ella será cero. No obstante, como hemos visto, inclusive esas superficies gaussianas que cruzan el imán de barra no encierran una carga magnética, pues todos los cortes a través del imán producen una pieza que tiene polo norte y sur. La ley de Gauss en su forma magnética se escribe así

$$\Phi_B = \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0. \qquad (35\text{-}22)$$

El flujo neto del campo magnético que pasa a través de cualquier superficie cerrada es cero.

La figura 35-20 muestra una representación más detallada de los campos magnéticos de un imán de barra y de un solenoide, pudiéndose considerar ambos como dipolos magnéticos. Adviértase en la figura 35-20*a* que las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ entran en la superficie gaussiana dentro del imán y salen de él. El flujo total hacia adentro es igual al flujo total hacia afuera; y es cero el flujo neto Φ_B por la superficie. Lo mismo sucede con la superficie gaussiana que cruza el solenoide de la figura 35-20*b*. En ninguno de los dos casos hay un punto de donde partan las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ o hacia el cual converjan, es decir, *no existe una carga magnética aislada.*

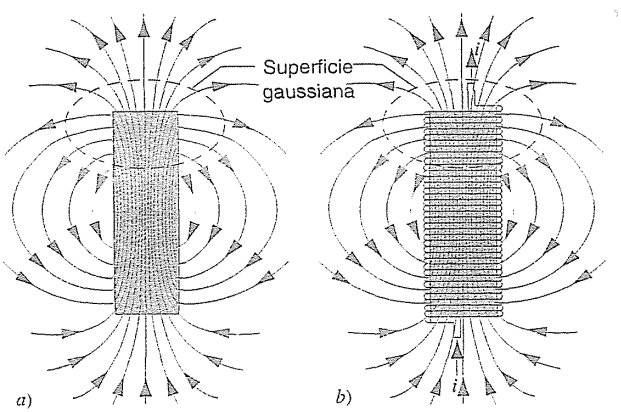


FIGURA 35-20. Las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ de *a*) un imán de barra y *b*) de un solenoide corto. En ambos casos el polo norte está en la parte superior de la figura. Las líneas punteadas representan las superficies gaussianas.

Monopolos magnéticos

En el capítulo 27 mostramos que la ley de Gauss aplicada a los campos eléctricos equivale a la de Coulomb, ésta se basa en la observación experimental de la fuerza entre cargas puntuales. La ley de Gauss aplicada al magnetismo también se basa en una observación experimental, que es imposible ver los polos magnéticos aislados, como un solo polo norte o sur.

En 1931 el físico teórico Paul Dirac propuso que existían cargas magnéticas aisladas, basándose para ello en argumentos que incluían la mecánica cuántica y la simetría. A esas cargas las llamó *monopolos magnéticos* y predijo algunas propiedades básicas esperadas de dichos mopolos, entre ellas la magnitud de la "carga magnética (análogo a la carga electrónica e). Después de la predicción de Dirac, se empezó a buscar los monopolos magnéticos utilizando grandes aceleradores de partículas y analizando muestras de materia terrestre e interplanetaria. Ninguna de las primeras investigaciones aportó pruebas en favor de la existencia de monopolos magnéticos.

El interés por los monopolos magnéticos ha decaído ante los intentos recientes por unificar las leyes de la física, integrando las fuerzas débiles, fuertes y electromagnéticas en un solo modelo. Estas teorías predicen la existencia de monopolos magnéticos extremadamente masivos, unas 10^{16} veces la masa del protón. Se trata de un volumen demasiado grande para cualquier acelerador existente en la Tierra; de hecho, las únicas condiciones conocidas en que esos monopolos pudieron haberse construido ocurrieron en la materia densa y caliente de los primeros años del universo. La búsqueda de monopolos magnéticos prosigue, pero sin que hasta la fecha se haya conseguido evidencia convincente acerca de su existencia.* En el momento actual suponemos que los monopolos no existen y que, por lo mismo, la ecuación 35-22 es exacta y universalmente válida, o que, si existen, son tan raros que la ecuación es una aproximación muy precisa. La ecuación 35-25 se convierte entonces en una descripción fundamental del comportamiento de los campos magnéticos en la naturaleza y se incluye como una de las cuatro ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell.

*Véase "Searches for Magnetic Monopoles and Fractional Electric Charges", de Susan B. Felch, *The Physics Teacher*, marzo de 1984, p. 142. Véase también "Superheavy Magnetic Monopoles", de Richard A. Carrigan, Jr. y W. Peter Trower, *Scientific American*, abril de 1982, p. 106.

OPCIÓN MÚLTIPLE

35-1 El dipolo magnético

1. Un dipolo magnético está orientado en un campo magnético uniforme, de modo que la energía potencial tiene su nivel máximo. La magnitud de su par sobre el dipolo
   A) será máxima. B) será mínima.
   C) dependerá de la fuente del dipolo magnético.
2. Un imán simple de barra cuelga de una cuerda como se ve en la figura 35-21*a*. Se crea entonces un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido horizontalmente a la derecha. ¿Cuál de las imágenes de la figura 35-21*b* muestra la orientación de equilibrio del imán?

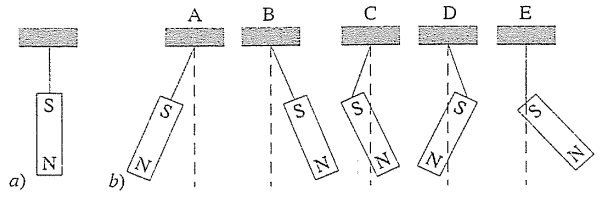


FIGURA 35-21. Pregunta de opción múltiple 2.

35-2 La fuerza sobre un dipolo en un campo no uniforme

3. Un dipolo magnético se halla en un campo magnético no uniforme. El dipolo
   A) siempre será atraído a la región con un campo magnético más fuerte.
   B) siempre será repelido de la región con un campo magnético más fuerte.
   C) podría ser repelido, pero finalmente caerá y será atraído a la región con un campo magnético más fuerte.
   D) podría ser atraído, pero caerá y luego será repelido de la región con un campo magnético más fuerte.
4. Con distancias d mucho mayores que las dimensiones de los dipolos magnéticos, la fuerza entre dos dipolos será proporcional a
   A) d^{-6}. B) d^{-4}. C) d^{-3}. D) d^{-2}.

35-3 Magnetismo atómico y nuclear

5. ¿Cuál de las siguientes opciones no contribuye mucho a las propiedades magnéticas de una sustancia?
   A) Los momentos magnéticos orbitales de los electrones
   B) Los momentos magnéticos de spín de los electrones
   C) Los momentos magnéticos de protones y de neutrones
   D) Todos contribuyen igual.

35-4 Magnetización

6. ¿Cuál de las siguientes son unidades de magnetización $\vec{M}$?
   A) T B) T/m^3 C) $C/m \cdot s$ D) $C \cdot m/s$

35-5 Materiales magnéticos

7. ¿Qué tipo de sustancia tiene los momentos más grandes de dipolo magnético?
   A) Paramagnética B) Diamagnética
   C) Ferromagnética
   D) Las sustancias paramagnéticas y ferromagnéticas tienden a ser más o menos iguales, en tanto que las diamagnéticas no tienen un momento magnético permanente.
   E) Los tres tipos son más o menos iguales.
8. ¿Qué sucede cuando ponemos una sustancia paramagnética en un campo magnético externo?
   A) Los momentos dipolares atómicos se debilitan un poco, pero tienden a alinearse con el campo externo.
   B) Los momentos dipolares atómicos se fortalecen un poco y tienden a alinearse con el campo externo.
   C) Los momentos dipolares atómicos se debilitan un poco y tienden a alinearse contra el campo externo.
   D) Los momentos dipolares atómicos se fortalecen un poco, pero tienden a alinearse contra el campo externo.
9. Un pequeño imán de barra cilíndrico tiene un diámetro de 1 cm, una longitud de 2 cm y un momento dipolar de 5 J/T. Suponiendo que el campo magnético fuera producido por una espira de corriente alrededor del imán, ¿qué magnitud tendría esta corriente?
   A) 0.7 mA B) 0.7 A C) 70 A D) 70,000 A

35-6 El magnetismo de los planetas

10. Suponga que el momento dipolar magnético terrestre se debe a un anillo de carga en el ecuador y a la rotación de la Tierra alrededor de su eje.
    a) ¿Qué signo tendrá esta carga?
    A) Positivo B) Negativo
    C) Cualquiera de las dos respuesta producirá el mismo momento dipolar.
    b) ¿Qué estimación se aproxima más a la cantidad de carga requerida?
    A) 10^{15} C B) 10^{5} C C) 10^{-5} C D) 10^{-15} C

35-7 Ley de Gauss aplicada al magnetismo

11. ¿Cuáles serían las unidades apropiadas para que existiese un monopolo magnético?
    A) Wb/T B) T/m^3 C) $C \cdot m/s$ D) C/T
    E) La carga del monopolo exigiría introducir una nueva unidad.
12. Un monopolo magnético (¿hipotético?) pasa por una espira de alambre. ¿Cuál de las gráficas de la figura 35-22 muestra la corriente en función del tiempo que tarda en cruzarla?

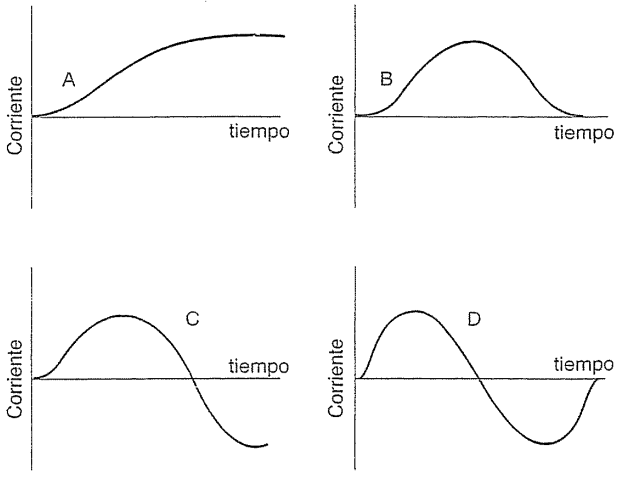


FIGURA 35-22. Pregunta de opción múltiple 12.

PREGUNTAS

1. En el problema resuelto 35-1 demostramos que $2\mu B$ es el trabajo requerido para girar una espira de corriente, extremo por extremo en un campo magnético externo. ¿Es válido este resultado sin importar la orientación original que tenía la espira?
2. El par ejercido por un campo magnético sobre un dipolo magnético sirve para medir la intensidad del campo. En una medición minuciosa, ¿importa si el momento dipolar era pequeño o no? Recuerde que, en el caso de la medición de un campo eléctrico, la carga de prueba debía ser lo más pequeña posible para no perturbar la fuente del campo.
3. Recibe una esfera sin fricción del tamaño de una bola de ping pong y le dicen que contiene un dipolo magnético. ¿Qué experimentos realizará para conocer la magnitud y la dirección de su momento dipolar magnético?
4. ¿Cómo podría medir el momento dipolar magnético de la aguja de una brújula?
5. Una espira circular de alambre está en el piso de un cuarto donde está usted sentado. Transporta una corriente constante i en dirección de las manecillas del reloj, vista desde arriba. ¿Qué dirección tiene el momento dipolar magnético de esta espira de corriente?
6. Dos barras de hierro tienen aspecto idéntico. Una es un imán, y la otra no. ¿Cómo las distinguiría? No se le permite suspender ninguna de ellas como aguja de brújula ni utilizar un aparato que no sean las dos barras.
7. Dos barras de hierro siempre se atraen, cualquier que sea la combinación en que acerquemos sus extremos. ¿Puede concluirse que una de ellas ha de estar no magnetizada?
8. ¿En qué se parecen o se distinguen los siguientes fenómenos? *a*) Una varilla cargada puede atraer pequeñas piezas de aislantes sin carga. *b*) un imán permanente puede atraer una muestra no magnetizada de material ferromagnético.
9. ¿Cómo puede determinarse la polaridad de un imán no marcado?
10. Demuestre que por lo regular una carga positiva que gira tendrá un momento magnético de spín que apunta en la misma dirección que su momento angular de spín.
11. El neutrón, partícula sin carga, tiene un momento dipolar magnético. Según el electromagnetismo clásico, ¿es posible eso o esta prueba por sí misma indica que se ha violado el electromagnetismo clásico?
12. ¿Deben todos los imanes permanentes tener polos norte y sur identificables? Considere formas distintas a las de un imán de barra y a la de una herradura de caballo.
13. Suponga dos situaciones: *a*) con una velocidad constante un monopolo magnético (hipotético) se jala a través de una espira conductora de una vuelta a lo largo de su eje; *b*) lo mismo se hace con un imán corto de barra (un dipolo magnético). Compare cualitativamente las cantidades netas de carga transferidas en una sección transversal de la espira durante los dos procesos. Los experimentos destinados a detectar posibles monopolos magnéticos aprovechan esas diferencias.
14. Mediante una prueba se descubre que una varilla corta de hierro tiene un polo norte en cada extremo. Usted esparce limaduras de hierro en ella. ¿Dónde (en el caso más simple) se adherirán? Haga un dibujo aproximado de qué aspecto deben presentar las líneas de $\vec{B}$, tanto dentro de la varilla como fuera de ella.
15. Comenzando con $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ en las posiciones y orientaciones de la figura 35-23, con $\vec{X}$ fijo y con $\vec{Y}$ que gira libremente, ¿qué sucede si *a*) $\vec{X}$ es un dipolo eléctrico y si $\vec{Y}$ es un dipolo magnético; *b*) si $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ son dipolos magnéticos; *c*) si $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ son dipolos eléctricos? Conteste las mismas preguntas si $\vec{Y}$ está fijo y si $\vec{X}$ gira libremente.

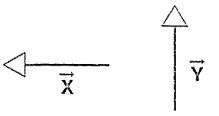


FIGURA 35-23. Pregunta 15.

16. Es usted un fabricante de brújulas. *a*) Describa cómo podría magnetizar las agujas. *b*) El extremo de la aguja que apunta al norte suele pintarse en un color típico. Sin suspender la aguja en el campo de la Tierra, ¿cómo podría averiguar cuál extremo pintar? *c*) ¿Es el extremo pintado un polo magnético norte o sur?
17. ¿Esperaría usted que la magnetización de saturación en una sustancia paramagnética fuera muy distinta a la de una sustancia ferromagnética más o menos del mismo tamaño? Explique su respuesta afirmativa o negativa.
18. ¿Puede dar una razón del hecho de que los materiales ferromagnéticos se vuelvan puramente paramagnéticos a profundidades mayores que unos 20 km debajo de la superficie terrestre?
19. Se quiere desmagnetizar una muestra de material ferromagnético que retiene el magnetismo adquirido cuando se pone en un campo externo. ¿Para lograrlo debe elevarse la temperatura de la muestra hasta que alcance la temperatura de fusión?
20. La magnetización inducida en una esfera diamagnética por un campo varía con la temperatura, en gran contraste con la situación en el paramagnetismo. Explique este comportamiento basándose en la descripción que dimos del origen del diamagnetismo.
21. Explique por qué un imán atrae un objeto no magnetizado de hierro; por ejemplo, un clavo.
22. ¿Una fuerza neta o par actúa *a*) sobre una barra de hierro no magnetizada o *b*) sobre un imán permanente de barra cuando se pone en un campo magnético uniforme?
23. Ponemos en reposo un anillo sobre una mesa sin fricción cerca de un imán fuerte. Lo liberamos y lo atrae el imán. ¿Cuál es la fuente de la energía cinética que tiene poco antes que choque contra el imán?
24. Se dice que los superconductores son perfectamente diamagnéticos. Explique esto.
25. Explique por qué un pequeño imán de barra que se coloca verticalmente arriba de un tazón hecho de plomo superconductor no necesita fuerzas de contacto que lo sostengan.
26. Compare las curvas de magnetización de una sustancia paramagnética (Fig. 35-10) y de una sustancia ferromagnética (Fig. 35-11). ¿Qué aspecto tendrá una curva similar de una sustancia diamagnética?

27. ¿Por qué las limaduras de hierro se alinean con un campo magnético? Después de todo, no tienen magnetización intrínseca?
28. El campo magnético terrestre puede representarse muy bien mediante el de un dipolo magnético situado en el centro de la Tierra o cerca de él. Podemos concebir los polos magnéticos de ella como *a*) los puntos donde el eje de este dipolo cruza la superficie terrestre o *b*) como los puntos de la superficie donde una aguja inclinada apuntaría verticalmente. ¿Se trata necesariamente de los mismos puntos?
29. ¿Existen lugares de Estados Unidos donde una brújula magnética apunte al polo norte geográfico?
30. Un "amigo" le pide prestada su brújula favorita y pinta de rojo toda la aguja. Cuando usted descubre esto, está perdido en una cueva y lleva dos linternas, unos cuantos metros de alambre y, desde luego, este libro. ¿Cómo podría descubrir cuál extremo de la aguja de la brújula apunta al norte?
31. ¿Cómo puede magnetizar una barra de hierro si la Tierra es el único imán disponible?
32. ¿Cómo protegería cierto volumen del espacio contra los campos magnéticos externos? Si piensa que no es posible, explique por qué.
33. Los rayos cósmicos son partículas cargadas que chocan contra la atmósfera provenientes de una fuente externa. Comprobamos que más rayos cósmicos de poca energía llegan a ella cerca de los polos magnéticos norte y sur que al ecuador (magnético). Explique a qué se debe eso.
34. Los campos magnéticos repelen sustancias diamagnéticas. ¿Por qué una sustancia diamagnética no "brinca" y se ve atraída como cualquier otro dipolo magnético?
35. ¿Cómo podría medirse el momento dipolar magnético de la Tierra?
36. Dé tres razones para creer que el flujo Φ_B del campo magnético terrestre es mayor en los confines de Alaska que en los de Texas.
37. La aurora se observa con mayor frecuencia no en el polo norte ni en el sur, sino en latitudes magnéticas de unos 23° de los polos (que cruzan la Bahía de Hudson —por ejemplo— en el hemisferio geomagnético norte). ¿Se le ocurre alguna razón cualitativa por la cual la actividad de la aurora no debería alcanzar su máxima intensidad en ellos?
38. ¿Se le ocurre un mecanismo por el cual una tormenta magnética —es decir— una gran perturbación del campo magnético de la Tierra, interfiere con la comunicación por radio?

EJERCICIOS

35-1 El dipolo magnético

1. El momento dipolar magnético de la Tierra es 8.0×10^{22} J/T. Suponga que esto se debe a las cargas que fluyen en el núcleo externo fundido de la Tierra. Si el radio de la trayectoria circular es 3500 km, calcule la corriente requerida.
2. Una bobina circular de 160 vueltas tiene un radio de 1.93 cm. *a*) Calcule la corriente que crea un momento magnético de 2.33 A · m^2. *b*) Determine el par máximo que la bobina que lleva esta corriente puede experimentar en un campo magnético uniforme de 34.6 mT.
3. En el plano *xy* dos espiras circulares concéntricas, de 20.0 y 30.0 cm de radio, transportan una corriente de 7.00 A en dirección de las manecillas del reloj, como se indica en la figura 35-24. *a*) Calcule el momento magnético neto de este sistema. *b*) Repita el ejercicio si se invierte la corriente externa.

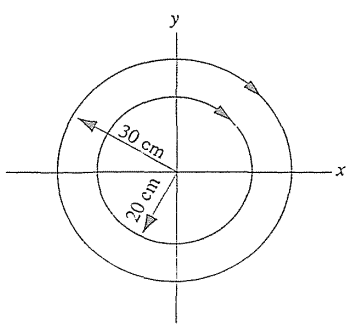


FIGURA 35-24. Ejercicio 3.

4. Una espira circular de alambre, cuyo radio mide 16.0 cm, lleva una corriente de 2.58 A. La colocamos de modo que la normal a su plano forme un ángulo de 41.0°, con un campo magnético uniforme de 1.20 T. *a*) Calcule su momento dipolar magnético. *b*) Determine el par de la espira.
5. El campo magnético B en varios puntos del eje de una espira cuadrada de corriente de lado a se obtuvo en el problema 4 del capítulo 33. *a*) Demuestre que el campo axial de la esfera con $z >> a$ es el de un dipolo magnético. *b*) Determine el momento dipolar magnético de la espira.
6. Una espira circular de alambre que tiene un radio de 8.0 cm transporta una corriente de 0.20 A. Un vector unitario paralelo al momento dipolar $\vec{\mu}$ está dado por $0.60\hat{i} - 0.80\hat{j}$. Si la espira se encuentra en un campo magnético dado por $\vec{B} = (0.25\hat{i} + 0.30\hat{k})$ T, obtenga *a*) el par en ella y *b*) la energía potencial magnética de la espira.
7. Recibe un circuito cerrado de radios a y b, como se indica en la figura 35-25, que lleva una corriente i. Determine el momento de dipolo magnético del circuito.

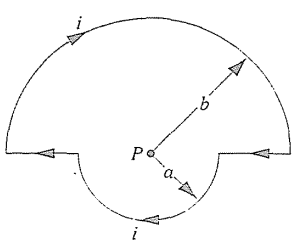


FIGURA 35-25. Ejercicio 7.

8. Considere la espira rectangular que transporta la corriente i de la figura 35-26. El punto P se halla a una distancia x del centro

de ella. Encuentre una expresión del campo magnético en P debido a la espira de corriente, suponiendo que P está muy lejos. Con $\mu = iA = iab$, obtenga una expresión similar a la ecuación 35-4 para el campo producido por un dipolo distante en los puntos del plano de la espira (perpendiculares al eje). (Sugerencia: los lados opuestos del rectángulo pueden tratarse juntos, pero examine detenidamente las direcciones de $\vec{B}$ producidas por cada lado.)

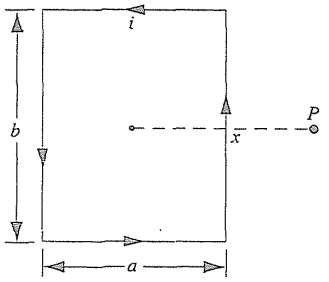


FIGURA 35-26. Ejercicio 8.

35-2 La fuerza sobre un dipolo en un campo no uniforme

35-3 Magnetismo atómico y nuclear

9. En el estado de energía mínima del átomo de hidrógeno, la distancia más probable entre el electrón individual que gira y el protón central es 5.29×10^{-11} m. Calcule *a*) el campo eléctrico y *b*) el campo magnético creado por el protón en esta distancia y que se mide a lo largo del eje de spín del protón. Vea en la tabla 35-1 el momento magnético de este último.
10. Suponga que los núcleos de hidrógeno (protones) en 1.50g de agua podrían estar alineados todos. Calcule el campo magnético que producirían a 5.33 m de la muestra a lo largo del eje de alineación.
11. Una carga q se distribuye uniformemente alrededor de un anillo delgado de radio r. El anillo gira alrededor de un eje por su centro y perpendicularmente a su plano con una velocidad angular ω. *a*) demuestre que el momento magnético procedente de la carga en rotación es

$$\mu = \tfrac{1}{2} q\omega r^2.$$

b) Si L es el momento angular del anillo, demuestre que

$$\mu/L = q/2m.$$

35-4 Magnetización

12. El momento dipolar asociado a un átomo de hierro en una barra de hierro es 3.22 μ_B. Suponga que todos los átomos de la barra, cuya superficie transversal mide 1.31 cm^2, tienen alineado su momento dipolar. *a*) ¿Cuál es el momento dipolar de la barra? *b*) ¿Qué par debe ejercerse para mantener este imán en ángulos rectos con un campo externo de 1.53 T?
13. Un imán en forma de varilla cilíndrica tiene una longitud de 4.8 cm y un diámetro de 1.1 cm. Tiene una magnetización uniforme de 5.3 kA/m. Calcule su momento dipolar magnético.
14. Un solenoide con 16 vueltas/cm transporta una corriente de 1.3 A. *a*) ¿Cuánto aumenta el campo magnético dentro del solenoide cuando se introduce una varilla de cromo de ajuste estrecho? *b*) Determine la magnetización de la varilla (Tabla 35-2).

35-5 Materiales magnéticos

15. Un campo magnético de 0.50 T se aplica a un gas paramagnético, cuyos átomos tienen un momento dipolar magnético intrínseco de 1.2×10^{-23} J/T. ¿A qué temperatura la energía cinética media de traslación de átomos del gas es igual a la energía requerida para invertir el dipolo extremo por extremo en este campo magnético?
16. Las mediciones en minas y en taladros indican que la temperatura en la Tierra aumenta con la profundidad a una rapidez promedio de 30 C°/km. Suponiendo una temperatura superficial de 20°C, ¿a qué profundidad el hierro deja de ser ferromagnético? (La temperatura del hierro varía muy poco con la presión.)
17. Una muestra de sal paramagnética a la que se aplica la curva de magnetización de la figura 35-10 se mantiene a una temperatura ambiente (300 K). ¿A qué campo magnético aplicado el grado de saturación magnética de la muestra será *a*) 50%? *b*) 90%? *c*) ¿Pueden obtenerse estos campos en el laboratorio?
18. Una muestra de sal paramagnética a la que se aplica la curva de magnetización de la figura 35-10 está inmersa en un campo magnético de 1.8 T. ¿A qué temperatura su grado de saturación magnética será *a*) 50% y *b*) 90%?
19. Sometemos a prueba la sal paramagnética a la que se aplica la curva de magnetización de la figura 35-10 para comprobar si obedece la ley de Curie. La colocamos en un campo magnético de 0.50 T que permanece constante durante todo el experimento. La magnetización M se mide después a temperaturas que fluctúan entre 10 y 300 K. ¿Será válida la ley de Curie en tales condiciones?
20. La magnetización de saturación del níquel, un metal ferromagnético, es 511 kA/m. Calcule el momento magnético de un átomo de níquel. (Consiga los datos necesarios en el Ap. D.)
21. El acoplamiento mencionado en la sección 35-5 como causa del ferromagnetismo no es la energía de interacción magnética mutua entre dos dipolos magnéticos elementales. Para probar esto calcule *a*) el campo magnético a una distancia de 10 nm, a lo largo del eje dipolar de un átomo con el momento de dipolo magnético 1.5×10^{-23} J/T (cobalto) y *b*) la energía mínima requerida para girar en este campo un segundo dipolo idéntico extremo por extremo. Compare estos resultados con los del problema resuelto 35-4. ¿A qué conclusión llega?

35-6 El magnetismo de los planetas

22. En el problema resuelto 35-6, se comprobó que el componente vertical del campo magnético de la Tierra en Tucson (Arizona) es 43 μT. Suponga que éste es el valor promedio en todo el estado, cuya superficie mide de 295,000 km cuadrados, y calcule el flujo magnético neto en el resto de la superficie terrestre (sin incluir Arizona). ¿Se dirige hacia adentro o hacia afuera?
23. El momento dipolar magnético de la Tierra es 8.0×10^{22} J/T. *a*) ¿Cuál sería el radio si el origen de este magnetismo fuera una esfera magnetizada de hierro en el centro de la Tierra? *b*) ¿Qué fracción del volumen de la Tierra ocuparía la esfera? La densidad del núcleo interno de la Tierra es 14 g/cm^3. El momento dipolar magnético de un átomo de hierro es 2.1×10^{-23} J/T.
24. Utilice el resultado mencionado en el problema 9 y prediga el valor del campo magnético de la Tierra (magnitud e inclinación) en *a*) el ecuador magnético; *b*) un punto en la latitud magnética 60°; *c*) en el polo norte magnético.

25. Determine la altitud arriba de la superficie de la Tierra donde su campo magnético posee una magnitud de una mitad del valor de la superficie en la misma latitud magnética. (Utilice la aproximación del campo dipolar dada en el Prob. 9.)
26. Mediante la aproximación del campo dipolar al campo magnético de la Tierra (Prob. 9), calcule la intensidad máxima de este último en la frontera núcleo-manto, que está 2900 km debajo de la superficie.
27. Utilice las propiedades del campo dipolar mencionadas en el problema 9 para calcular la magnitud y el ángulo de inclinación del campo magnético de la Tierra en el polo norte geográfico. (Sugerencia: el ángulo entre el eje magnético y el eje rotacional de la Tierra es 11.5°.) ¿Por qué los valores calculados probablemente no coincidirán con los medidos?

35-7 Ley de Gauss aplicada al magnetismo

28. Una superficie gaussiana en forma de un cilindro circular recto tiene un radio de 13 cm y una longitud de 80 cm. Por un extremo pasa un flujo magnético de 25 μWb que se desplaza hacia el interior. En el otro extremo hay un campo magnético uniforme de 1.6 mT, normal a la superficie y dirigido hacia afuera. Calcule el flujo magnético neto que pasa por la superficie curva.
29. El flujo magnético en las cinco caras de un miembro de un par de dados está dado por $\Phi_B = \pm N$ Wb, donde N (=1 a 5) es el número de puntos de la cara. El flujo es positivo (hacia afuera) con N par y negativo (hacia adentro) con N impar. ¿Cuál es el flujo que cruza la sexta cara?
30. La figura 35-27 muestra cuatro arreglos de pares de pequeñas agujas de brújula, creados en un espacio donde no existe un campo magnético externo. En los cuatro identifique el equilibrio como estable o inestable. En cada par considere solamente el par que opera sobre una aguja y que proviene del campo magnético generado por la otra. Explique sus respuestas.

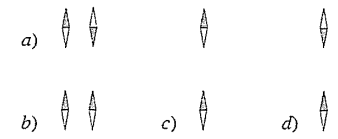


FIGURA 35-27. Ejercicio 30.

31. Dos alambres, paralelos al eje z y separados por una distancia $4r$, transportan corrientes iguales i en direcciones opuestas, según se indica en la figura 35-28. Un cilindro circular de radio r y de longitud L tiene su eje en el eje z, a la mitad entre los alambres. Utilice la ley del magnetismo de Gauss para calcular el flujo magnético neto hacia afuera que cruza la mitad de la superficie cilíndrica sobre el eje x. (Sugerencia: determine el flujo en esa parte del plano xz que se halla dentro del cilindro.)

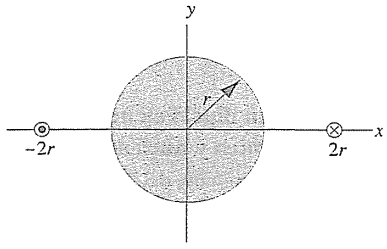


FIGURA 35-28. Ejercicio 31.

PROBLEMAS

1. Un delgado disco de plástico con radio R tiene una carga q distribuida uniformemente en su superficie. Si gira con una frecuencia angular ω alrededor de su eje, demuestre que su momento dipolar magnético es

$$\mu = \frac{\omega q R^2}{4}.$$

(Sugerencia: el disco giratorio equivale a un sistema de espiras de corriente.)

2. *a*) Calcule el momento magnético de una esfera giratoria y cargada uniformemente. *b*) Demuestre que el momento puede escribirse como $\mu = qL/2m$, donde L es el momento angular de la esfera y m su masa. *c*) Demuestre que éste no es un buen modelo de la estructura de un electrón. (Sugerencia: la esfera con carga uniforme ha de dividirse en espiras infinitesimales de corriente y obtener por medio de integración una expresión del momento magnético.)
3. Un electrón con energía cinética K_e describe una trayectoria circular que es perpendicular a un campo magnético uniforme, sometido sólo a la fuerza de este último. *a*) Demuestre que el momento dipolar magnético a causa de su movimiento orbital tiene la magnitud $\mu = K_e/B$ y que sigue la dirección contraria a la de $\vec{\mathbf{B}}$. *b*) ¿Cuál es la magnitud y la dirección del momento dipolar magnético de un ion positivo con energía cinética K_i en las mismas circunstancias? *c*) Un gas ionizado tiene 5.28×10^{21} electrones/m^3 e igual número de iones/m^3. Suponga que la energía cinética promedio de los electrones es 6.21×10^{-20} J y que la energía cinética de los iones es 7.58×10^{-21} J. Calcule la magnetización del gas en un campo magnético de 1.18 T.
4. Una sustancia paramagnética es atraída (débilmente) hacia un polo de un imán. La figura 35-29 muestra un modelo de este fenómeno. La sustancia es una espira de corriente L, que se pone en el eje de un imán de barra más cerca de su polo norte que sur. A causa del par $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{\mathbf{B}}$ ejercido sobre la espira por el campo $\vec{\mathbf{B}}$ del imán, el momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ de la espira se alineará paralelamente a $\vec{\mathbf{B}}$. *a*) Haga un bosquejo que muestre las líneas del campo $\vec{\mathbf{B}}$ procedentes del imán de barra. *b*) Indique la dirección de la corriente i en la espira. *c*) Por medio de $d\vec{\mathbf{F}}_B = i\, d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}}$, demuestre a partir de *a*) y *b*) que la fuerza neta en L se dirige hacia el polo norte del imán de barra.

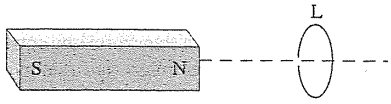


FIGURA 35-29. Problemas 4 y 5.

5. Un polo de un imán repele (débilmente) una sustancia diamagnética. En la figura 35-29 se incluye un modelo de este fenómeno. La sustancia es una espira de corriente L que se coloca en el eje de un imán de barra más cercano al polo norte que al polo sur. Por tratarse de una sustancia diamagnética, el momento magnético $\vec{\mu}$ de la espira se alineará antiparalelamente al campo $\vec{\mathbf{B}}$ del imán de barra. *a*) Haga un boceto que muestre las líneas del campo $\vec{\mathbf{B}}$ procedentes del imán. *b*) Indique la dirección de la corriente i en la espira. *c*) Por medio de $d\vec{\mathbf{F}}_B = i\, d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}}$, demuestre a partir de *a*) y *b*) que la fuerza neta en L se aleja del polo norte del imán de barra.
6. Considere un sólido que contiene N átomos por unidad de volumen, cuyo momento dipolar magnético es $\vec{\mu}$. Suponga que la dirección de $\vec{\mu}$ sólo puede ser paralela o antiparalela a un campo magnético aplicado externamente $\vec{\mathbf{B}}$ (esto sucedería si $\vec{\mu}$ proviniera del spín de un electrón individual). De acuerdo con la mecánica estadística, puede demostrarse que la probabilidad de que un átomo se halle en un estado con la energía U es proporcional a $e^{-U/kT}$, donde T es la temperatura y k es la constante de Boltzmann. Por tanto, como $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathbf{B}}$, la fracción de los átomos cuyo momento dipolar es paralelo a $\vec{\mathbf{B}}$ es proporcional a $e^{\mu B/kT}$ y la de los átomos cuyo momento dipolar es antiparalelo a $\vec{\mathbf{B}}$ es proporcional a $e^{-\mu B/kT}$. *a*) Demuestre que la magnetización de este sólido es $M = N\mu \tanh(\mu B/kT)$. Aquí tanh es la función tangente hiperbólica: $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. *b*) Demuestre que *a*) se reduce a $M = N\mu^2 B/kT$ para $\mu B << kT$. *c*) Demuestre que *a*) se reduce a $M = N\mu$ para $\mu B >> kT$. *d*) Demuestre que *b*) y *c*) coinciden cualitativamente con la figura 35-10.
7. Considere un átomo donde un electrón describe una órbita circular de radio r y de frecuencia angular ω_0. Se aplica un campo magnético perpendicularmente al plano de la órbita. A consecuencia de la fuerza magnética, el electrón circula en ella con el mismo radio r, pero con una nueva frecuencia angular $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. *a*) Demuestre que, cuando se aplica el campo, el cambio de la aceleración centrípeta del electrón es $2\, r\omega_0\, \Delta\omega$. *b*) Demuestre la ecuación 35-20, suponiendo que el campo de la aceleración centrípeta se deba enteramente a la fuerza magnética.
8. La Tierra tiene un momento dipolar magnético de 8.0×10^{22} J/T. *a*) ¿Qué corriente habrá de transportar en una vuelta de alambre que esté alrededor de ella en su ecuador magnético, si quisiéramos crear ese dipolo? *b*) ¿Podría emplearse este arreglo para cancelar el magnetismo terrestre en puntos del espacio muy por arriba de la superficie? *c*) ¿Y en ésta?
9. El campo magnético de la Tierra puede aproximarse como un campo magnético dipolar, con componentes horizontales y verticales, en un punto situado a una distancia r del centro de la Tierra, dado por

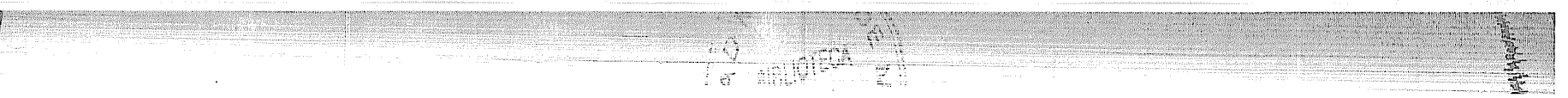
$$B_h = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \cos L_m, \qquad B_v = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r^3} \operatorname{sen} L_m,$$

donde L_m es la latitud magnética (medida del ecuador magnético hacia el polo norte o sur magnético). El momento dipolar magnético μ es 8.0×10^{22} A · m^2. *a*) Demuestre que la intensidad en la latitud L_m está dada por

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \operatorname{sen}^2 L_m}.$$

b) Demuestre que la inclinación ϕ_i del campo magnético se relaciona con la latitud magnética L_m dada por

$$\tan \phi_i = 2 \tan L_m.$$



CAPÍTULO 36

INDUCTANCIA

En el capítulo 30 estudiamos el comportamiento de los capacitores, éstos almacenan carga y, al hacerlo, crean un campo eléctrico, donde se almacena energía. En este capítulo vamos a analizar un dispositivo denominado inductor, *donde se guarda energía en el campo magnético que rodea sus alambres portadores de corriente.*

Determinamos la inductancia de un inductor aplicando la ley de Faraday, en la cual una corriente cambiante produce una fuerza electromotriz. La inductancia mide la capacidad de un inductor para almacenar energía en el campo magnético producido por una corriente. En un circuito, un inductor suministra "inercia" que se opone al cambio de corriente. Analizamos también los circuitos que contienen sólo un capacitor y un inductor; en éstos, la energía almacenada puede ir y venir entre los dos elementos.

36-1 INDUCTANCIA

El *inductor* es un elemento de un circuito que guarda energía en el campo magnético que rodea a sus alambres portadores de corriente, del mismo modo que un capacitor guarda dicha energía en el campo eléctrico formado entre sus placas cargadas. El inductor se caracteriza por su *inductancia*, la cual depende de la forma de dicho inductor; de modo parecido, en el capítulo 30 caracterizamos un capacitor por su capacitancia, la cual depende también de la forma del capacitor.

En la figura 36-1 se muestra un inductor, por ejemplo, un solenoide ideal, que lleva una corriente i productora de un campo magnético $\vec{B}$ en su interior. Si modificamos la corriente cambiando así $\vec{B}$ y el flujo magnético que pasa a través del solenoide, la ley de Faraday indica que se genera una fuerza electromotriz en el inductor. La inductancia L se define* como la constante de proporcionalidad que relaciona la rapidez del cambio de la corriente con la fuerza electromotriz inducida:

$$\mathscr{E}_L = L\frac{di}{dt}. \qquad (36\text{-}1)$$

Esta ecuación se parece a la que define la capacitancia ($\Delta V_C = q/C$). Al igual que la capacitancia, la inductancia es siempre una magnitud positiva.

La ecuación 36-1 muestra que la unidad de la inductancia en el SI es volt · segundo/ampere. Esta combinación de unidades recibe el nombre especial de *henry* (cuya abreviatura es H); así que

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ volt} \cdot \text{segundo/ampere}$$

Esta unidad se llama así en honor de Joseph Henry (1797-1878), físico norteamericano y contemporáneo de Faraday. En el diagrama de un circuito eléctrico, el inductor se representa con el símbolo $-\!\!\!

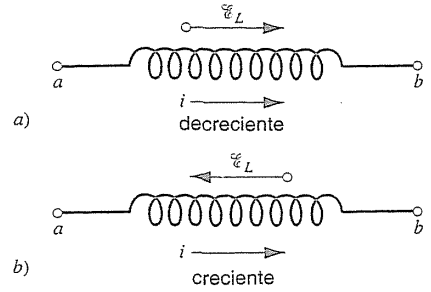


FIGURA 36-2. *a*) Una corriente *decreciente* induce en el inductor una fuerza electromotriz que se opone a la disminución de esta corriente. *b*) Una corriente *creciente* induce en el inductor una fuerza electromotriz que se opone al incremento.

triz inducida debe generar una corriente adicional en la *misma* dirección que i.

Si, por el contrario, aumentamos la corriente, la ley de Lenz indica que el incremento se opone a la inductancia a través de una corriente adicional en una dirección *contraria* a i.

En todos los casos, la fuerza electromotriz inducida se opone al *cambio* de corriente. La figura 36-2 resume la relación entre el signo de di/dt y el de $\mathscr{E}_L$. En la figura 36-2*a*, las diferencias de potencial inducidas son tales que V_b es mayor que V_a, de manera que $V_b - V_a = |L\, di/dt|$. Puesto que i empieza a disminuir, di/dt es negativa, por lo cual podemos escribir esto como

$$V_b - V_a = -L\, di/dt. \tag{36-2}$$

En la figura 36-2*b*, di/dt es positiva y V_a es mayor que V_b; por consiguiente, la ecuación 36-2 se aplica también en este caso. Esta ecuación es de gran utilidad cuando recurrimos al teorema de la espira para analizar los circuitos que contienen inductores.

36-2 CÁLCULO DE LA INDUCTANCIA

Por medio de la ecuación 36-1 obtenemos la inductancia de un inductor de cualquier tamaño o forma. Nuestro método consistirá en emplear el campo magnético del inductor portador de corriente para encontrar el flujo que pasa por él y, luego, la ley de Faraday para calcular la fuerza electromotriz correspondiente a una corriente cambiante. La ecuación 36-1 nos da entonces la inductancia. Con un método similar, determinamos la capacitancia en la sección 30-3, al calcular la diferencia de potencial entre las dos placas cargadas y, después, al utilizar la proporcionalidad entre ΔV_C y q para obtener C.

Supóngase que la corriente del inductor origina a un campo magnético $\vec{B}$, que podemos calcular partiendo del tamaño y de la forma del inductor, así como de la distribución de la corriente. Esto permite obtener el flujo magnético Φ_B en cada vuelta de la bobina. En los casos que veremos, el flujo posee en mismo valor en cada una de las vueltas N; por lo cual, el flujo total será $N\Phi_B$. A esta cantidad se le conoce como número de *conexiones de flujo* del inductor.

La fuerza electromotriz puede obtenerse a partir de la ley de Faraday.

$$\mathscr{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}. \tag{36-3}$$

Las ecuaciones 36-1 y 36-3 relacionan la fuerza electromotriz de un inductor con la derivada de la corriente (Ec. 36-1) o con la derivada de una propiedad proporcional a la corriente (Φ_B en la Ec. 36-3). Al comparar las dos ecuaciones (y al tomar la magnitud de todas las cantidades), se obtiene

$$L\frac{di}{dt} = \frac{d(N\Phi_B)}{dt}.$$

Si integramos respecto al tiempo (y si suponemos que $\Phi_B = 0$ cuando $i = 0$), encontramos que

$$Li = N\Phi_B,$$

o bien

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}. \tag{36-4}$$

La ecuación 36-4, que se basa en la ley de Faraday, permite determinar directamente la inductancia del número de conexiones de flujo. Nótese que, por ser Φ_B proporcional a la corriente i, la razón de la ecuación 36-4 *no depende* de i y, por consiguiente, la inductancia (como la capacitancia) depende sólo de la forma del dispositivo.

La inductancia de un solenoide

Apliquemos la ecuación 36-4 para calcular L en una sección de longitud l de un solenoide largo con una superficie transversal A. Suponemos que la sección se encuentra cerca del centro de este solenoide, por lo cual no es necesario tener en cuenta los efectos del borde. En la sección 33-5 se demostró que el campo magnético B dentro del solenoide que transporta una corriente i es

$$B = \mu_0 ni, \tag{36-5}$$

donde n es el número de vueltas por unidad de longitud. El número de conexiones de flujo en la longitud l es

$$N\Phi_B = (nl)(BA),$$

que tras sustituir para B, se convierte en

$$N\Phi_B = \mu_0 n^2 liA. \tag{36-6}$$

Entonces la ecuación 36-4 nos da directamente la inductancia:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 n^2 liA}{i} = \mu_0 n^2 lA. \tag{36-7}$$

La inductancia por unidad de longitud del solenoide puede escribirse así

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A. \tag{36-8}$$

La expresión anterior incluye exclusivamente factores geométricos: la superficie transversal y el número de vueltas por unidad de longitud. La inductancia *no* depende de la corriente ni del campo magnético. Se espera que la proporcionalidad con n^2; si

duplicamos el número de vueltas por unidad de longitud, no sólo se duplica el número N de vueltas, sino también el flujo Φ_B en *cada vuelta*; al mismo tiempo el número de conexiones de flujo se incrementa en un factor de 4, lo mismo que la inductancia.

Las ecuaciones 36-7 y 36-8 son válidas con un solenoide de longitud mucho mayor que su radio. Hemos despreciado la dispersión de las líneas del campo magnético cerca del extremo de un solenoide, tal como lo hicimos con los bordes del campo eléctrico cerca de los bordes de las placas de un capacitor.

La inductancia de un toroide

A continuación vamos a calcular la inductancia de un toroide de sección transversal rectangular, como se muestra en la figura 36-3. El campo magnético B de un toroide está dado por la ecuación 33-36:

$$B = \frac{\mu_0 iN}{2\pi r}, \tag{36-9}$$

donde N es el número total de vueltas del toroide. Nótese que el campo magnético no es constante dentro del toroide, sino que varía con el radio r.

El flujo Φ_B que pasa por la sección transversal del toroide es

$$\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_a^b B(h\,dr) = \int_a^b \frac{\mu_0 iN}{2\pi r} h\,dr$$

$$= \frac{\mu_0 iNh}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 iNh}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

donde $h\,dr$ es la superficie de la tira elemental de ancho dr que aparece en la figura 36-3. Entonces podemos obtener directamente la inductancia de la ecuación 36-4:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \tag{36-10}$$

Una vez más, L depende exclusivamente de factores geométricos.

Inductores con materiales magnéticos

En la sección 30-6 dijimos que la capacitancia aumenta al llenar un capacitor con una sustancia dieléctrica. Esto permite al capacitor almacenar más carga en sus placas o más energía en su campo eléctrico. Asimismo, la inductancia aumenta cuando se llena un inductor con un material magnético.

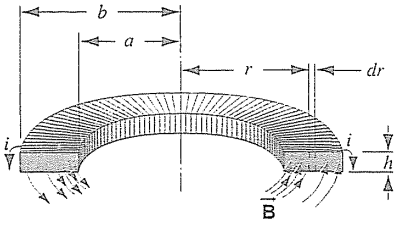


FIGURA 36-3. Sección transversal de un toroide; ésta muestra la corriente que pasa a través de los devanados y el campo magnético en el interior.

La ecuación 35-16 indica que la presencia de un material magnético cambia el campo magnético en el material del campo aplicado $\vec{\mathbf{B}}_0$ a $\vec{\mathbf{B}} = \kappa_m \vec{\mathbf{B}}_0$ donde κ_m, es la permeabilidad del material. El campo magnético en el interior de inductor está contenido en el factor Φ_B de la ecuación 36-4. Si el campo magnético en el solenoide se multiplica en todas partes por el factor κ_m entonces Φ_B también será multiplicado por ese mismo factor; así, concluimos que

$$L = \kappa_m L_0, \tag{36-11}$$

donde L es la inductancia del inductor con el material magnético, y L_0 la inductancia del inductor vacío.

En virtud de que las permeabilidades de las sustancias paramagnéticas o diamagnéticas no difieren mucho de 1, los valores de las inductancias de los inductores llenos con ellas son casi iguales a los valores que tienen cuando están vacíos; por tanto, no se consigue un cambio importante en las propiedades del inductor cuando se llena con un material paramagnético o uno diamagnético. Pero, en el caso de un material ferromagnético pueden aparecer cambios importantes. Aunque, en general, la permeabilidad no se define para materiales ferromagnéticos (porque el campo total no crece en proporción lineal con el campo aplicado), en ciertas circunstancias B puede ser miles de veces mayor que B_0. Por tanto, la permeabilidad "efectiva" de un material ferromagnético puede tener valores en el intervalo de 10^3 a 10^4 y la inductancia de un inductor lleno con material ferromagnético (es decir, aquel cuyos devanados están hechos en un núcleo de un material como el hierro) puede ser mayor que la inductancia de un grupo similar devanados en un núcleo vacío por un factor de 10^3 a 10^4. Los núcleos ferromagnéticos ofrecen los medios para obtener grandes inductancias, del mismo modo que los materiales dieléctricos en los capacitores permiten obtener capacitancias más grandes.

PROBLEMA RESUELTO 36-1. Una sección de un solenoide con una longitud $l = 12$ cm y con una superficie circular transversal de diámetro $d = 1.6$ cm transporta una corriente estacionaria de $i = 3.80$ A. La sección contiene 75 vueltas a lo largo de su extensión. *a*) ¿Qué inductancia tiene el solenoide cuando el núcleo está vacío? *b*) Se reduce la corriente con una rapidez de 3.20 A en un tiempo de 15 s. ¿Cuál es la fuerza electromotriz resultante que produce el solenoide y en qué dirección opera?

Solución *a*) La inductancia del solenoide se obtiene de la ecuación 36-7:

$$L = \mu_0 n^2 l A$$
$$= (4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m})(75\ \text{vueltas}/0.12\ \text{m})^2(0.12\ \text{m})(\pi)(0.008\ \text{m})^2$$
$$= 1.2 \times 10^{-5}\ \text{H} = 12\ \mu\text{H}.$$

Nótese que hemos expresado μ_0 en unidades de H/m. Una inductancia siempre puede expresarse como μ_0 multiplicada por una cantidad con la dimensión de longitud. Una solución parecida se aplica a la capacitancia (Sec. 30-3).

b) La rapidez con que cambia la corriente es

$$\frac{di}{dt} = \frac{3.20\ \text{A} - 3.80\ \text{A}}{15\ \text{s}} = -0.040\ \text{A/s},$$

y la fuerza electromotriz correspondiente tiene la magnitud dada por la ecuación 36-1:

$$\mathcal{E}_L = |L\,di/dt| = (12\ \mu\text{H})(0.040\ \text{A/s}) = 0.48\ \mu\text{V}.$$

Como la corriente está disminuyendo, la fuerza electromotriz inducida debe actuar en la misma dirección que la corriente; por eso, la fuerza electromotriz inducida se opone a las reducciones de la corriente.

PROBLEMA RESUELTO 36-2. El núcleo del solenoide del problema resuelto 36-1 se llena con hierro mientras mantenemos constante la corriente a 3.20 A. Saturamos la magnetización del hierro de modo que $B = 1.4$ T. ¿Cuál es la inductancia resultante?

Solución La permeabilidad "efectiva" del núcleo sujeto a este campo aplicado se obtiene por medio de

$$\kappa_m = \frac{B}{B_0} = \frac{B}{\mu_0 ni}$$

$$= \frac{1.4\text{ T}}{(4\pi \times 10^{-7}\text{ T}\cdot\text{m/A})(75\text{ vueltas}/0.12\text{ m})(3.20\text{ A})} = 557.$$

La inductancia está dada por la ecuación 36-11 como

$$L = \kappa_m L_0 = (557)(12\ \mu\text{H}) = 6.7\text{ mH}.$$

36-3 CIRCUITOS *LR*

En esta sección vamos a estudiar el comportamiento de los circuitos que contienen un resistor y un inductor en serie. En varios aspectos, este tema nos recuerda el análisis de los circuitos *RC*, el cual se estudió en la sección 31-7. Allí vimos que, cuando una batería está conectada a una combinación en serie de un resistor y de un capacitor, la carga en este último se aproxima exponencialmente a su máximo con una constante de tiempo $\tau_C = RC$. En forma similar, la descarga de un capacitor a través de un resistor también es exponencial, con la misma constante de tiempo.

La figura 36-4 muestra un circuito donde un resistor y un inductor L están conectados en serie. Se cuenta con dispositivos adecuados para medir las diferencias de voltaje a través del resistor (ΔV_R) y el inductor (ΔV_L). Un interruptor S puede conectar una batería de fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ dentro del circuito. En un principio, no fluye corriente por él. Cuando el interruptor se pone en a, la corriente del resistor empieza a elevarse. Si el inductor no estuviera presente, la corriente aumentaría rápidamente hasta alcanzar un valor estacionario $\mathscr{E}/R$. Sin embargo, el inductor produce una fuerza electromotriz inducida $\mathscr{E}_L$, que, según la ley de Lenz, se opone al incremento de la corriente. En otras palabras, se opone a la polaridad de la fuerza electromotriz de la batería. La corriente del circuito depende de dos fuerzas electromotrices: una constante $\mathscr{E}$ proveniente de la batería y otra variable $\mathscr{E}_L$ de signo contrario procedente de la inductancia. Mientras exista esta segunda fuerza, la corriente del circuito será menor que $\mathscr{E}/R$.

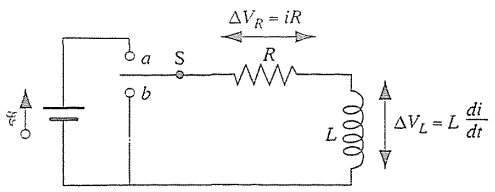


FIGURA 36-4. Un circuito *LR*.

Con el transcurso del tiempo, la corriente crece con menor rapidez y la fuerza electromotriz inducida, proporcional a di/dt, se vuelve más pequeña. Cuanto más aumenta la corriente, más lento será su crecimiento y más se reducirá la fuerza electromotriz inducida. Al disminuir esta última a un tamaño insignificante, la corriente se aproximará a su valor máximo $\mathscr{E}/R$.

En un circuito como este, podemos suponer que el inductor se comporta como una resistencia infinita poco después de conectar la batería al circuito. Mucho más tarde el inductor se comporta como una resistencia de valor cero, a medida que la corriente se acerca a su valor estacionario.

Analicemos ahora este circuito cuantitativamente. Cuando el interruptor se encuentra en a, se crea una corriente que fluye en la dirección de las manecillas del reloj en el circuito y la regla de la malla (Sec. 31-3) nos da

$$\mathscr{E} - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

o bien

$$\mathscr{E} = iR + L\frac{di}{dt}, \qquad (36\text{-}12)$$

donde hemos utilizado la ecuación 36-2 con la diferencia de potencial en el inductor.

La solución de la ecuación 36-12 es una función $i(t)$ escogida de modo que, cuando ella y su primera derivada sean sustituidas en la ecuación 36-12, satisfagan ésta. Esta ecuación tiene exactamente la misma forma que la ecuación 31-25 con el circuito *RC* y no debería sorprendernos que su solución también presente la misma forma (Ec. 31-27):

$$i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}), \qquad (36\text{-}13)$$

donde

$$\tau_L = \frac{L}{R}. \qquad (36\text{-}14)$$

La *constante de tiempo inductiva* τ_L indica la rapidez con que la corriente se aproxima a su valor estacionario, en analogía con la constante capacitiva de tiempo τ_C. Nótese que la ecuación 36-13 da $i = 0$ cuando $t = 0$ e $i \to \mathscr{E}/R$ como $t \to \infty$, según lo previsto.

Al tomar la derivada de la ecuación 36-13 y al reemplazar i y di/dt en la ecuación 36-12, deberá verificar que la ecuación 36-13 sea efectivamente la solución de la ecuación 36-12.

Para demostrar que la magnitud $\tau_L = L/R$ presenta la dimensión de tiempo, tenemos

$$[\tau_L] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{\text{henry}}{\text{ohm}} = \frac{\text{volt}\cdot\text{segundo/ampere}}{\text{ohm}}$$

$$= \left(\frac{\text{volt}}{\text{ampere}\cdot\text{ohm}}\right)\text{segundo} = \text{segundo},$$

donde la cantidad entre paréntesis es igual a 1 porque 1 ohm = 1 volt/ampere (como en $R = V/i$).

El significado físico de τ_L se deduce de la ecuación 36-13. Si introducimos $t = \tau_L$ en ella, se reducirá a

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-1}) = (1 - 0.37)\frac{\mathscr{E}}{R} = 0.63\frac{\mathscr{E}}{R}.$$

La constante τ_L es el tiempo en que la corriente del circuito es menor que su valor estacionario final $\mathscr{E}/R$ en un factor de $1/e$ (alrededor de 37%).

En la figura 36-5 se muestra la diferencia de potencial ΔV_R [$= i(t)R$] a través del resistor R y la diferencia de potencial ΔV_L [$= L(di/dt)$] en el inductor ideal. Por medio de la ecuación 36-13 obtenemos

$$\Delta V_R = iR = \mathscr{E}(1 - e^{-t/\tau_L}) \quad \text{y} \quad \Delta V_L = L\frac{di}{dt} = \mathscr{E}e^{-t/\tau_L}, \tag{36-15}$$

que son las cantidades graficadas en la figura 36-5. A partir de la ecuación 36-15 obtenemos $\Delta V_R + \Delta V_L = \mathscr{E}$, que podríamos calcular aplicándole al circuito la regla de la malla. Este resultado también se consigue sumando las gráficas de las figuras 36-5*a* y 36-5*b*.

Si movemos el interruptor de la figura 36-4 de *a* a *b* cuando la corriente tiene algún valor i_0, quitaremos el efecto de la batería del circuito. Ahora, la regla de la malla nos da

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0. \tag{36-16}$$

Por sustitución o integración directa se comprueba que la solución de esta ecuación es

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau_L}, \tag{36-17}$$

donde i_0 es la corriente cuando $t = 0$ (que ahora significa el tiempo que tardamos en mover el interruptor de *a* a *b*). La caída de la corriente a cero y su incremento ocurren con la misma constante exponencial de tiempo $\tau_L = L/R$.

La figura 36-6 muestra las diferencias de potencial ΔV_R y ΔV_L a través del resistor y del inductor en el caso en que dejamos el interruptor en *a* por un tiempo muy largo comparado con τ_L; por tanto, podemos suponer que la corriente ha alcanzado su valor máximo $\mathscr{E}/R$ cuando lo ponemos en *b*.

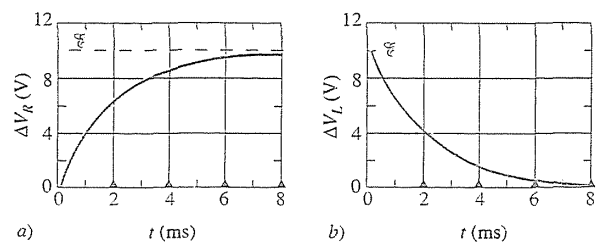


FIGURA 36-5. Variación de *a*) ΔV_R con el tiempo, la diferencia de potencial en el resistor dentro del circuito de la figura 36-4 y *b*) ΔV_L, la diferencia de potencial en el inductor de ese circuito. Las curvas se trazan con $R = 2000\ \Omega$, $L = 4.0$ H y $\mathscr{E} = 10$ V. La constante inductiva de tiempo τ_L es 2 ms; los intervalos sucesivos iguales a τ_L están marcados por triángulos en el eje horizontal.

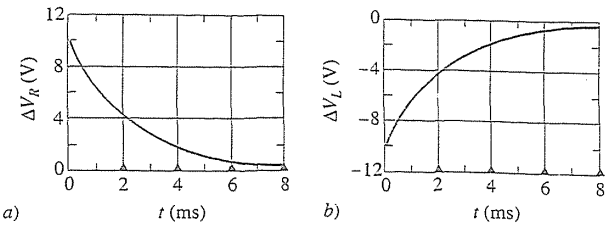


FIGURA 36-6. Lo mismo que la figura 36-5 en el circuito de la figura 36-4, con el interruptor puesto en *b* luego de haber permanecido en *a* largo tiempo.

Si con la ecuación 36-17 el lector obtiene ΔV_R y ΔV_L en forma similar a la ecuación 36-15, deberá ser capaz de demostrar que $\Delta V_R + \Delta V_L = 0$, que también puede verse directamente con sólo sumar las gráficas de las figuras 36-6*a* y 36-6*b*.

Para construir el circuito de la figura 36-4, debemos utilizar un tipo especial de interruptor denominado interruptor de "contacto antes de ruptura". Este interruptor completa la conexión en *b* antes de suspender la conexión en *a*. Si no utilizáramos este tipo de interruptor, la corriente trataría de seguir fluyendo con la terminal del interruptor entre *a* y *b*, salvando la separación entre *a* y la terminal, con una chispa que podría contener toda la energía almacenada en el inductor.

PROBLEMA RESUELTO 36-3. Un solenoide tiene una inductancia de 53 mH y una resistencia de 0.37 Ω. Si lo conectamos a una batería, ¿cuánto tardará la corriente en alcanzar la mitad de su valor final en el estado estacionario?

Solución El valor en el estado estacionario de la corriente, que se logra en $t \to \infty$, es $\mathscr{E}/R$ según la ecuación 36-13. Si la corriente tiene la mitad de este valor en un tiempo particular, esta ecuación queda así

$$\frac{1}{2}\frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}),$$

o

$$e^{-t/\tau_L} = \tfrac{1}{2}.$$

Al resolver para t, rearreglando y tomando el logaritmo (natural) de cada lado, obtenemos

$$t = \tau_L \ln 2 = \frac{L}{R}\ln 2 = \frac{53 \times 10^{-3}\ \text{H}}{0.37\ \Omega}\ln 2 = 0.10\ \text{s}.$$

36-4 ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

En el capítulo 28 vimos que un conjunto de cargas eléctricas puede describirse mediante su energía potencial. En forma equivalente, podemos decir que la energía se almacena en el campo eléctrico producido por las cargas. Por ejemplo, el trabajo efectuado al separar dos cargas de signo contrario se guarda en la energía del campo eléctrico producido por las cargas; la energía podrá recuperarse al permitir que las cargas vuelvan a juntarse.

De modo similar, hay energía almacenada en la región que rodea un alambre portador de corriente, donde existe un campo magnético. Así, dos alambres que llevan corrientes paralelas se atraen entre sí; el trabajo realizado para separar los alambres se guarda en la energía de su campo magnético. Podríamos recobrar esta energía dejando que los alambres vuelvan a atraerse.

En el capítulo 30 explicamos cómo la energía se almacena en un capacitor. Generalizamos esa exposición suponiendo que la energía está guardada en el campo eléctrico de un capacitor; por inferencia calculamos la energía de *cualquier* campo eléctrico. Aquí nos ocuparemos de la energía de un inductor, lo cual nos llevará a calcular la energía almacenada en *cualquier* campo magnético.

Volvamos al circuito de la figura 36-4, con el interruptor en *a*. Con el uso de la regla de la malla (Sec. 31-3) obtenemos la ecuación 36-12: $\mathscr{E} = iR + L\,di/dt$. En el capítulo 31 dijimos que esta regla de la malla es esencialmente una formulación de la conservación de energía en el circuito. Esto lo vemos más claramente al multiplicar ambos lados de la ecuación 36-12 por la corriente *i*:

$$\mathscr{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt}, \tag{36-18}$$

la cual tiene la siguiente interpretación física en función del trabajo y la energía:

1. Si una carga dq pasa por la batería, en la figura 36-4, durante el tiempo dt, la batería realiza trabajo sobre dicha carga en la cantidad $\mathscr{E}\,dq$. La *rapidez* con que se realiza este trabajo es $(\mathscr{E}\,dq)/dt$ o $\mathscr{E}i$. Así pues, el lado izquierdo de la ecuación 36-18 es la *rapidez con que el dispositivo de fuerza electromotriz suministra energía al circuito.*

2. El segundo término de la ecuación 36-18, i^2R, es la *rapidez con que se disipa la energía en el resistor.* Esta energía aparece como energía interna relacionada con los movimiento atómicos del resistor.

3. La energía suministrada al circuito, pero que no se disipa en el resistor deberá, conforme a nuestra hipótesis, guardarse en el campo magnético. Como la ecuación 36-18 es una formulación de la conservación de energía en los circuitos *LR,* el último término debe representar la *rapidez con que se almacena la energía en el campo magnético.*

Representemos con U_B la energía guardada en el campo magnético; entonces la rapidez con que se guarda esta energía es dU_B/dt. Al igualar la rapidez con que se almacena la energía con el último término de la ecuación 36-18, obtenemos

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt} \tag{36-19}$$

o bien

$$dU_B = Li\,di. \tag{36-20}$$

Supóngase que el inductor no tiene corriente ($i = 0$) y que no se guarda energía en su campo magnético. Gradualmente intensificamos la corriente hasta que alcance su valor final *i*. La energía U_B almacenada en el campo magnético puede calcularse al integrar la ecuación 36-20, lo cual nos da

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Li\,di$$

o

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2, \tag{36-21}$$

que representa la energía total almacenada en una inductancia *L* que transporta una corriente *i*.

Si en la figura 36-4 pasamos el interruptor de *a* a *b* después de crear una corriente i_0, la energía almacenada en el inductor se disipa, con el calentamiento Joule, en el resistor.

Una situación parecida se da cuando se carga y descarga un capacitor. Si el capacitor ha acumulado una carga *q*, la energía que se guarda en el campo eléctrico es

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

Esta expresión la obtuvimos en la sección 30-5, al hacer la energía almacenada igual al trabajo que debe realizarse al crear el campo. El capacitor puede descargarse a través de un resistor, y entonces la energía almacenada vuelve a disiparse con el calentamiento Joule.

PROBLEMA RESUELTO 36-4. Una bobina tiene una inductancia de 53 mH y una resistencia de 0.35 Ω. *a*) Si se le aplica una fuerza electromotriz de 12V, ¿cuánta energía se almacena en el campo magnético después que la corriente se haya incrementado hasta alcanzar su valor máximo? *b*) En función de τ_L, ¿cuánto tarda la energía almacenada en alcanzar la mitad de su valor máximo?

Solución *a*) Conforme a la ecuación 36-13, la corriente máxima es

$$i_m = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{12\text{ V}}{0.35\ \Omega} = 34.3\text{ A}.$$

Al sustituir la corriente anterior en la ecuación 36-21, obtenemos la energía almacenada:

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li_m^2 = \tfrac{1}{2}(53 \times 10^{-3}\text{ H})(34.3\text{ A})^2$$
$$= 31\text{ J}.$$

b) Sea *i* la corriente en el instante en que la energía almacenada tiene la mitad de su valor máximo. Entonces

$$\tfrac{1}{2}Li^2 = (\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}Li_m^2$$

o bien

$$i = i_m/\sqrt{2}.$$

Sin embargo, *i* está dada por la ecuación 36-13 e i_m (véase arriba) es $\mathscr{E}/R$; así que

$$\frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{2}R}.$$

Esto puede escribirse así

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - 1/\sqrt{2} = 0.293,$$

que nos da

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln 0.293 = -1.23$$

o

$$t = 1.23\tau_L.$$

La energía almacenada alcanza la mitad de su valor máximo después de 1.23 veces constante de tiempo.

PROBLEMA RESUELTO 36-5. Un inductor de 3.56 H se pone en serie con un resistor de 12.8 Ω y repentinamente se aplica a la combinación una fuerza electromotriz de 3.25 V. Transcurridos 0.278 s (que es una constante inductiva de tiempo) después de haber cerrado el contacto, calcule *a*) la rapidez P con que la batería entrega energía, *b*) la rapidez P_R con que la energía interna aparece en el resistor y *c*) la rapidez P_B con que se almacena energía en el campo magnético.

Solución *a*) La corriente está dada por la ecuación 36-13. Cuando $t = \tau_L$, obtenemos

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{3.25\text{ V}}{12.8\ \Omega}(1 - e^{-1}) = 0.1605\text{ A}.$$

Entonces, la rapidez P con que la batería entrega energía es

$$P = \mathscr{E}i = (3.25\text{ V})(0.1605\text{ A}) = 0.522\text{ W}.$$

b) La rapidez P_R con que se disipa la energía en el resistor está dada por

$$P_R = i^2R = (0.1605\text{ A})^2(12.8\ \Omega) = 0.330\text{ W}.$$

c) La rapidez P_B ($= dU_B/dt$) con que se guarda energía en el campo magnético está dada por la ecuación 36-19. Al diferenciar la ecuación 36-13 y al emplear $t = \tau_L = L/R$, obtenemos

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{L}e^{-t/\tau_L} = \frac{3.25\text{ V}}{3.56\text{ H}}e^{-1} = 0.3358\text{ A/s}.$$

A partir de la ecuación 36-19, la rapidez deseada es

$$P_B = \frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$

$$= (3.56\text{ H})(0.1605\text{ A})(0.3358\text{ A/s}) = 0.192\text{ W}.$$

Nótese que, como lo exige la conservación de la energía,

$$P = P_R + P_B,$$

o bien

$$P = 0.330\text{ W} + 0.192\text{ W} = 0.522\text{ W}.$$

La densidad de energía y el campo magnético

Ahora obtendremos una expresión de la *densidad de energía* (energía por unidad de volumen) u_B en un campo magnético. Pensemos en un solenoide muy largo, de superficie transversal A, cuyo interior no contiene material. Una porción de longitud l lejos de ambos extremos delimita un volumen Al. La energía magnética guardada en esa parte del solenoide debe estar enteramente dentro de este volumen, porque el campo magnético fuera del solenoide es esencialmente cero. Más aún, la energía almacenada debe distribuirse uniformemente en el volumen del solenoide, ya que el campo magnético es uniforme en todo el interior. Así pues, la densidad de energía puede escribirse como

$$u_B = \frac{U_B}{Al}$$

o, puesto que

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2,$$

tenemos

$$u_B = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{Al}.$$

donde L es la inductancia del solenoide de longitud l. Si queremos expresar lo anterior en función del campo magnético, podemos resolver la ecuación 36-5 ($B = \mu_0 in$) para i y sustituir en esta ecuación. También podemos sustituir L utilizando la relación $L = \mu_0 n^2 lA$ (Ec. 36-7). Al hacerlo se obtiene finalmente

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2. \qquad (36\text{-}22)$$

Con esta ecuación se puede calcular la densidad de energía almacenada en cualquier punto (en el vacío o en una sustancia no magnética), donde el campo magnético es $\vec{B}$. Esta ecuación es verdadera con todas las configuraciones del campo magnético, a pesar de que la obtuvimos tomando un caso especial, el del solenoide. Debemos comparar la ecuación 36-22 con la ecuación 30-28,

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \qquad (36\text{-}23)$$

que contiene la densidad de energía (en el vacío) en cualquier punto de un campo eléctrico. Observe que u_B y u_E son proporcionales al cuadrado de la magnitud de campo apropiada, B o E.

La función del solenoide en los campos magnéticos se parece a la del capacitor de placas paralelas en los campos eléctricos. En ambos casos, hay un dispositivo simple que sirve para crear un campo uniforme en una región bien definida del espacio y para deducir con facilidad las propiedades de estos campos.

PROBLEMA RESUELTO 36-6. Un largo cable coaxial (Fig. 36-7) consta de dos conductores cilíndricos concéntricos con radios a y b, donde $b >> a$. Su conductor central transporta una corriente estacionaria i y el conductor externo ofrece la trayectoria de retorno. *a*) Calcule la energía almacenada en el campo magnético que rodea al cable de longitud l. *b*) ¿Qué inductancia tiene una longitud l de dicho cable?

Solución *a*) Suponemos que el conductor interno es tan delgado que podemos despreciar de la energía magnética almacenada en su inte-

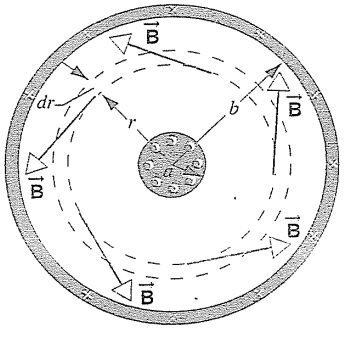


FIGURA 36-7. Problema resuelto 36-6. Sección transversal de un cable coaxial, que transporta corrientes estacionarias, iguales, pero opuestas en sus conductores interno y externo. Las líneas de $\vec{B}$ forman círculos en la región comprendida entre los conductores.

rior. Hacemos la misma suposición respecto al conductor externo. Si construimos una espira amperiana en forma de círculo con un radio mayor que el radio externo del conductor, la corriente neta que cruza la superficie acotada por la espira será cero (porque los conductores interno y externo llevan igual corriente en dirección contraria); podemos, pues, concluir que $B = 0$ en todos los puntos más allá del conductor externo.

En consecuencia, la energía magnética quedará confinada a la región entre los dos conductores. El campo magnético en ella es idéntico al de un alambre recto, que se calculó en las secciones 33-2 y 33-5. Podemos demostrar esto construyendo la espira amperiana que aparece en la figura 36-7 y observando que la corriente en el conductor externo no pasa por la superficie delimitada por la espira, de manera que no contribuye a la ley de Ampère. Por tanto, suponemos que $B = \mu_0 i/2\pi r$ (Ec. 33-13) en la región entre los conductores.

De acuerdo con la ecuación 36-22, la densidad de energía en esos puntos es

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Considere un elemento de volumen dV constituido por una capa cilíndrica cuyos radios son r y $r + dr$ y cuya longitud (perpendicular al plano de la Fig. 36-7) es l. La energía dU_B contenida en él es

$$dU_B = u_B\, dV = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}(2\pi r l)(dr) = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\frac{dr}{r}.$$

La energía magnética total almacenada se calcula por integración:

$$U_B = \int dU_B = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

b) Podemos obtener la inductancia L a partir de la ecuación 36-21 ($U_B = \frac{1}{2}Li^2$) que nos da

$$L = \frac{2U_B}{i^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

También debería obtener la expresión anterior directamente de la definición de inductancia, sirviéndose de los procedimientos de la sección 36-2 (Prob. 5).

PROBLEMA RESUELTO 36-7. Compare la energía requerida para crear, en un cubo $l = 10$ cm de lado, *a*) un campo eléctrico uniforme de 1.0×10^5 V/m y *b*) un campo magnético uniforme de 1.0 T. Ambos campos son bastante grandes, pero es fácil producirlos en el laboratorio.

Solución *a*) en el caso eléctrico tenemos, con l^3 el volumen del cubo,

$$\begin{aligned} U_E &= u_E l^3 = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 l^3 \\ &= (0.5)(8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(10^5\ \mathrm{V/m})^2(0.1\ \mathrm{m})^3 \\ &= 4.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

b) En el caso magnético, conforme a la ecuación 36-22 tenemos

$$\begin{aligned} U_B = u_B l^3 = \frac{B^2}{2\mu_0} l^3 &= \frac{(1.0\ \mathrm{T})^2(0.1\ \mathrm{m})^3}{(2)(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})} \\ &= 400\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

Respecto a los campos normalmente disponibles en el laboratorio, pueden guardarse cantidades de energía mucho mayores en un campo magnético que en uno eléctrico; en este ejemplo la proporción es aproximadamente 10^7. Por el contrario, se necesita mucha más energía para generar un campo magnético de magnitud razonable en el laboratorio que para producir un campo eléctrico de magnitud semejante.

36-5 OSCILACIONES ELECTROMAGNÉTICAS: CUALITATIVAS

Ahora vamos a estudiar las propiedades de los circuitos que contienen un capacitor C y un inductor L. Estos circuitos forman un *oscilador electromagnético*, donde la corriente varía senoidalmente con el tiempo, en forma muy parecida a como lo hace el desplazamiento de un oscilador mecánico. De hecho, como veremos luego, hay varias analogías entre los osciladores electromagnéticos y los mecánicos, las cuales simplifican nuestra explicación de las oscilaciones electromagnéticas, pues nos permiten referirnos al análisis anterior de las oscilaciones mecánicas (Cap. 17).

Por ahora, supondremos que el circuito no tiene una resistencia. El circuito *con* resistencia, que examinaremos en la sección 36-7, se parece al oscilador amortiguado que vimos en la sección 17-7. Supondremos asimismo que no existe una fuente de fuerza electromotriz en el circuito; los circuitos osciladores con la fuerza electromotriz presente, de los cuales también nos ocuparemos en la sección 36-7, se parecen a los osciladores mecánicos forzados, como los de la sección 17-8.

Cuando no existe una fuente de fuerza electromotriz, la energía del circuito se origina de la energía que inicialmente estaba almacenada en uno o dos de los componentes de dicho circuito. Supongamos que el capacitor C está cargado (por alguna fuente externa que aquí no nos interesa); por tanto, contiene una carga q_m, al momento en que se separa de la fuente externa y se conecta al inductor L. El circuito LC aparece en la figura 36-8*a*. Al inicio, la energía U_E guardada en el capacitor es

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}, \qquad (36\text{-}24)$$

mientras que la energía $U_B = \frac{1}{2}Li^2$ (Ec. 36-21) almacenada en el inductor es cero al inicio, porque también lo es la corriente.

Ahora el capacitor empieza a descargarse a través del inductor, y la carga positiva se mueve en dirección contraria a la de las manecillas del reloj como se aprecia en la figura 36-8*b*. Una corriente $i = dq/dt$ fluye ahora por el inductor, incrementando desde cero su energía almacenada. Al mismo tiempo, con la descarga del capacitor se disminuye su energía almacenada. Si el circuito no tiene resistencia, no se disipa energía y la disminución de la energía almacenada en el capacitor se compensa exactamente por un incremento de la almacenada en el inductor, de manera que la energía total permanece constante. En efecto, el campo eléctrico disminuye y el campo magnético aumenta, transfiriéndose durante este proceso energía de uno a otro campo.

En el tiempo t de la figura 36-8*c*, el capacitor está completamente descargado y la energía almacenada en él es cero. La corriente en el inductor ha alcanzado su valor máximo y toda la energía del circuito está almacenada en el campo mag-

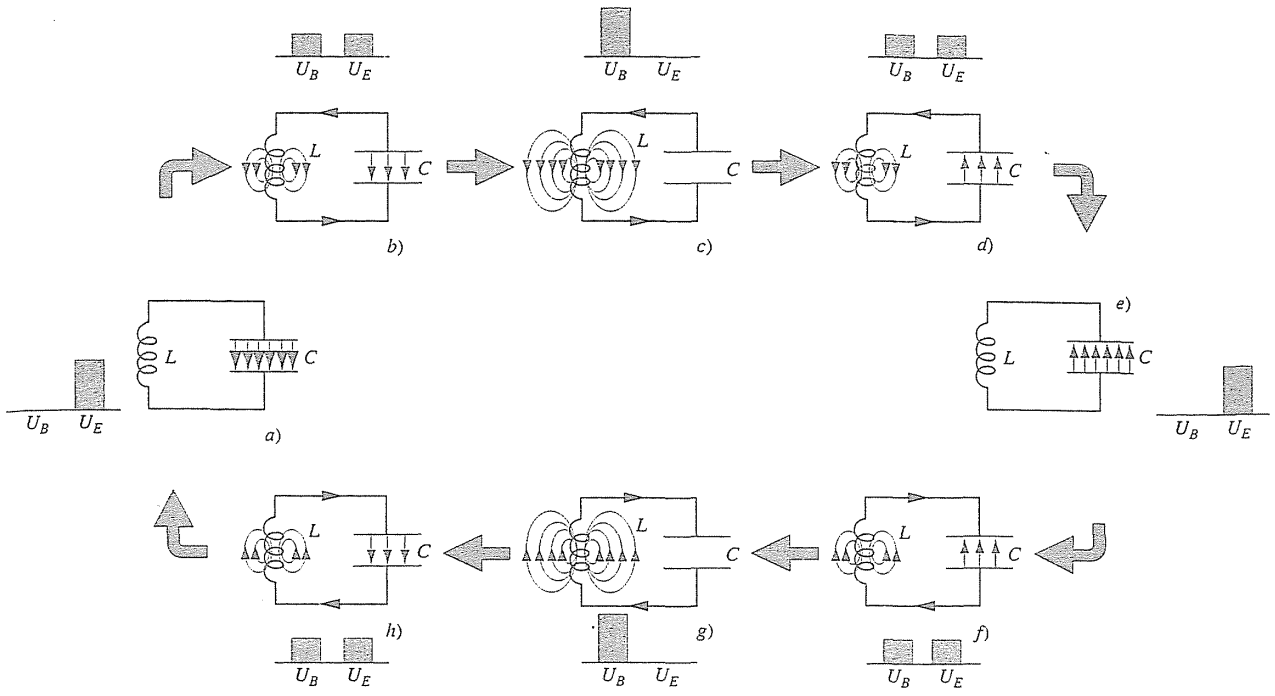


FIGURA 36-8. Ocho etapas de un ciclo de oscilación en un circuito *LC* sin resistencia. Las gráficas de barras muestran las energías magnética y eléctrica almacenadas.

nético del inductor. Observe que, aunque $q = 0$ en este instante, dq/dt difiere de cero porque la carga está fluyendo.

La corriente en el inductor continúa transportando carga de la placa de la parte superior del capacitor a la placa de la parte inferior, como en la figura 36-8*d*; ahora la energía regresa del inductor al capacitor, mientras vuelve a formarse el campo eléctrico. Con el tiempo (Fig. 36-8*e*), toda la energía se ha transferido de nuevo al capacitor, el cual está ahora cargado totalmente pero en sentido contrario a la figura 36-8*a*. La situación continúa a medida que el capacitor se va descargando hasta que toda la energía se halla otra vez en el inductor: el campo magnético y la energía correspondiente alcanzan entonces su valor máximo (Fig. 36-8*g*). Finalmente, la corriente en el inductor carga al capacitor una vez más hasta que éste está por completo cargado y el circuito recobra su condición original (Fig. 36-8*a*). En ese momento, el proceso se reanuda y el ciclo se repite de modo indefinido. Cuando no existe resistencia, que haría disiparse la energía, la carga y la corriente recobran su valor máximo en cada ciclo.

El circuito *LC* oscila con una frecuencia definida f (medida en Hz), correspondiente a una frecuencia angular ω ($= 2\pi f$ medida en rad/s). Como veremos en la siguiente sección, ω está determinada por L y C. Con selecciones adecuadas de L y C, podemos construir circuitos oscilantes con frecuencias que incluyen desde frecuencias por debajo del audio (10 Hz) hasta frecuencias por arriba de las microondas (10 Ghz).

Si queremos determinar la carga q en función del tiempo, podemos medir la diferencia de potencial variable $\Delta V_C(t)$ que existe en el capacitor C, que se relaciona con la carga q mediante

$$\Delta V_C = \frac{1}{C} q.$$

Podemos determinar la corriente introduciendo en el circuito un resistor R tan pequeño que su efecto en él sea insignificante. La diferencia de potencial $\Delta V_R(t)$ a través de R es proporcional a la corriente, en conformidad con

$$\Delta V_R = iR.$$

Si quisiéramos mostrar $\Delta V_C(t)$ y $\Delta V_R(t)$ como en la pantalla de un osciloscopio, el resultado podría ser similar al de la figura 36-9.

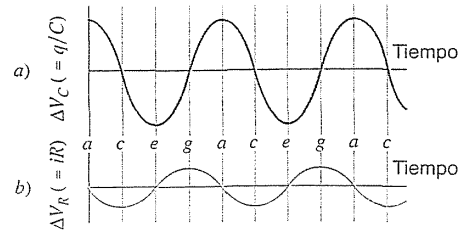


FIGURA 36-9. *a*) Diferencia de potencial a través del capacitor en el circuito de la figura 36-8 en función del tiempo. Esta magnitud es proporcional a la carga del capacitor. *b*) Diferencia de potencial que pasa por un resistor pequeño introducido en el circuito de la figura 36-8. Esta magnitud es proporcional a la corriente. Las letras indican las etapas correspondientes de oscilación de la figura 36-8.

PROBLEMA RESUELTO 36-8. Se carga con 57 V un capacitor de 1.5 μF. A continuación desconectamos la batería de carga y conectamos una bobina de 12 mH al capacitor, de modo que se produzcan oscilaciones LC. ¿Cuál es la corriente máxima en la bobina? Suponga que el circuito no contiene resistencia.

Solución Con base en el principio de conservación de la energía, la energía máxima almacenada en el capacitor debe ser igual a la energía máxima guardada en el inductor (pero recuerde que los dos máximos *no* ocurren al mismo tiempo). Por medio de las ecuaciones 36-21 y 36-24 obtenemos

$$\frac{q_m^2}{2C} = \tfrac{1}{2} L i_m^2,$$

donde i_m es la corriente máxima y q_m es la carga máxima. Obsérvese que ninguna de las dos ocurren simultáneamente, sino con un intervalo de un cuarto de ciclo (Figs. 36-8 y 36-9). Resolvemos para i_m y sustituimos q_m por CV; de ese modo obtenemos

$$i_m = V\sqrt{\frac{C}{L}} = (57\text{ V})\sqrt{\frac{1.5 \times 10^{-6}\text{ F}}{12 \times 10^{-3}\text{ H}}} = 0.64\text{ A}.$$

Analogía con el movimiento armónico simple

La figura 12-5 indica que en un sistema oscilatorio de masa-resorte, lo mismo que en un circuito oscilatorio LC, hay dos clases de energía: la energía potencial del resorte comprimido o extendido y la energía cinética de la masa en movimiento. Nos las dan las conocidas fórmulas de la primera columna de la tabla 36-1. Vemos en ella que, en cierto modo, un capacitor se parece a un resorte; un inductor, a un objeto masivo (la masa), y ciertas magnitudes electromagnéticas "corresponden" a algunas mecánicas, a saber:

$$\begin{aligned} &q \text{ corresponde a } x, \qquad && i \text{ corresponde a } v, \\ &1/C \text{ corresponde a } k, \qquad && L \text{ corresponde a } m. \end{aligned} \tag{36-25}$$

La gran correspondencia se detecta al comparar la figura 36-8, que muestra las oscilaciones de un circuito LC sin resistencia, con la figura 12-5, que muestra las oscilaciones en un sistema de masa-resorte sin fricción. Nótese cómo v e i corresponden en las dos figuras, lo mismo que x y q. Nótese asimismo cómo en ambos casos la energía alterna entre dos formas: magnética y eléctrica en los sistemas LC, y la cinética y potencial en el sistema de masa-resorte.

En la sección 17-3 vimos que la frecuencia angular natural de un oscilador mecánico armónico simple es

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

TABLA 36-1 Energía en sistemas oscilatorios

Mecánicos		*Electromagnéticos*	
Resorte	$U_s = \frac{1}{2}kx^2$	Capacitor	$U_E = \frac{1}{2}C^{-1}q^2$
Masa	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Inductor	$U_B = \frac{1}{2}Li^2$
	$v = dx/dt$		$i = dq/dt$

La correspondencia entre los dos sistemas significa que, para encontrar la frecuencia de oscilación de un circuito LC (sin resistencia), habría que reemplazar k por $1/C$ y m por L, y esto nos da

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{36-26}$$

La fórmula anterior también puede obtenerse de un análisis riguroso de la oscilación electromagnética, como veremos en la siguiente sección.

36-6 OSCILACIONES ELECTROMAGNÉTICAS: CUANTITATIVAS

Ahora vamos a obtener una expresión de la frecuencia de oscilación para un circuito LC (sin resistencia), aplicando el principio de conservación de la energía. La energía total U presente en un instante cualquiera en un circuito oscilatorio LC es

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}, \tag{36-27}$$

esto indica que en un tiempo arbitrario cualquiera una parte de la energía se almacena en el campo magnético del inductor y la otra en el campo eléctrico del capacitor. Si suponemos que la resistencia del circuito es cero, no se disipa energía y U permanece constante con el tiempo, aunque varíen i y q. En un lenguaje más formal dU/dt debe ser cero. Ello nos lleva a

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0. \tag{36-28}$$

La q representa la carga en una placa particular del capacitor (por ejemplo, la placa de la parte superior en la Fig. 36-8), y la i, la rapidez con que la carga fluye hacia el interior de esa placa (así que $i > 0$ cuando una carga positiva fluye a través de la placa). En este caso

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2},$$

y al sustituir en la ecuación 36-28 obtenemos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{36-29}$$

La ecuación 36-29 describe las oscilaciones de un circuito LC (sin resistencia). Si desea resolver esta ecuación, nótese la semejanza con la ecuación (17-4),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{36-30}$$

que describe la oscilación mecánica de una partícula fija a un resorte. En lo esencial, las correspondencias de la ecuación 36-25 se logran comparando estas dos ecuaciones.

La solución a la ecuación 36-30, obtenida en el capítulo 17, fue

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

donde x_m es la amplitud del movimiento, y ϕ una constante arbitraria de fase. Dado que q corresponde a x, podemos escribir así la solución de la ecuación 36-29

$$q = q_m \cos(\omega t + \phi), \tag{36-31}$$

donde ω es la frecuencia angular, todavía desconocida, de las oscilaciones electromagnéticas.

Podemos probar si la ecuación 36-31 es en realidad una solución de la ecuación 36-29, con sólo sustituirla junto con su segunda derivada en ella. Para encontrar la segunda derivada escribimos

$$\frac{dq}{dt} = i = -\omega q_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{36-32}$$

y

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q_m \cos(\omega t + \phi). \tag{36-33}$$

La sustitución de q y de d^2q/dt^2 en la ecuación 36-29 nos da

$$-\omega^2 q_m \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{LC} q_m \cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Al cancelar $q_m \cos(\omega t + \phi)$ y al rearreglarla queda

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{36-34}$$

Por tanto, si a ω se le asigna el valor $1/\sqrt{LC}$, la ecuación 36-31 es, efectivamente, una solución de la ecuación 36-29. Esta expresión de ω coincide con la ecuación 36-26, a la que llegamos en virtud de la correspondencia entre las oscilaciones mecánicas y electromagnéticas.

La constante de fase ϕ en la ecuación 36-31 se determina mediante las condiciones en $t = 0$. Si la condición inicial es la representada por la figura 36-8*a*, ponemos $\phi = 0$ a fin de que la ecuación 36-31 prediga $q = q_m$ en $t = 0$. ¿Qué condición física inicial se supone en $\phi = 90°$? ¿$180°$? ¿$270°$? ¿Cuál de los estados que aparecen en la figura 36-8 corresponden a estos dos valores de ϕ?

Por medio de la ecuación 36-31 se obtiene la energía eléctrica almacenada en el circuito LC

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi), \tag{36-35}$$

y, empleando la ecuación 36-32, la energía magnética es

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}L\omega^2 q_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi).$$

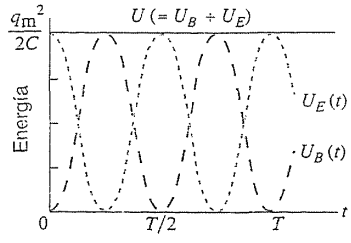


FIGURA 36-10. Energías magnética y eléctrica almacenadas y su suma en un circuito LC en función del tiempo. $T\ (= 2\pi/\omega)$ es el periodo de oscilación.

Al sustituir ω de la ecuación 36-34 en esta última ecuación se obtiene

$$U_B = \frac{q_m^2}{2C}\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi). \tag{36-36}$$

La figura 36-10 muestra las gráficas de $U_E(t)$ y $U_B(t)$ en el caso de $\phi = 0$. Nótese que 1) los valores máximos de U_E y U_B son iguales $(= q_m^2/2C)$; 2) la suma de U_E y U_B es una constante $(= q_m^2/2C)$; 3) cuando U_E tiene su valor máximo, U_B es cero y a la inversa; 4) U_B y U_E alcanzan su valor máximo *dos veces* durante cada ciclo. Este análisis corrobora el análisis cualitativo de la sección 36-5. Compare esta explicación con la de la sección 17-4 respecto a las transferencias de energía en un oscilador mecánico armónico simple.

PROBLEMA RESUELTO 36-9. *a*) En un circuito oscilatorio LC, ¿qué valor de carga expresado en función de la carga máxima existe en el capacitor cuando la energía se comparte en cantidades iguales entre el campo eléctrico y el magnético? *b*) ¿En qué tiempo t se presentará esta condición, suponiendo que el capacitor está inicialmente cargado por completo? Suponga que $L = 12$ mH y que $C = 1.7$ μF.

Solución *a*) La energía almacenada U_E y la energía *máxima* U_m guardada en el capacitor son, respectivamente,

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \quad \text{y} \quad U_m = \frac{q_m^2}{2C}.$$

La sustitución de $U_E = \frac{1}{2}U_m$ nos da

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{2C}$$

o bien

$$q = \frac{q_m}{\sqrt{2}}.$$

b) Como $\phi = 0$ en la ecuación 36-31 porque $q = q_m$ en $t = 0$, tenemos

$$q = q_m \cos \omega t = \frac{q_m}{\sqrt{2}},$$

que produce

$$\omega t = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

o, utilizando $\omega = 1/\sqrt{LC}$,

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = \frac{\pi\sqrt{(12 \times 10^{-3}\ \text{H})(1.7 \times 10^{-6}\ \text{F})}}{4}$$

$$= 1.1 \times 10^{-4}\ \text{s} = 110\ \mu\text{s}.$$

36-7 OSCILACIONES AMORTIGUADAS Y FORZADAS

Siempre hay una resistencia R en cualquier circuito real LC. Cuando la tenemos en cuenta, descubrimos que la energía electromagnética total U no es constante, sino que disminuye conforme se disipa la energía interna en el resistor. Como veremos luego, es exacta la analogía con el oscilador amortigua-

do del sistema masa-resorte de la sección 17-7. Igual que antes, tenemos ahora

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}. \qquad (36\text{-}37)$$

U ya no es constante sino que

$$\frac{dU}{dt} = -i^2R, \qquad (36\text{-}38)$$

el signo negativo significa que la energía almacenada U disminuye con el tiempo, convirtiéndose en energía interna en el resistor con una rapidez i^2R. Al derivar la ecuación 36-37 y al combinar el resultado con la ecuación 36-38, obtenemos

$$-i^2R = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}.$$

Si sustituimos dq/dt para i y d^2q/dt^2 para di/dt y si dividimos entre i, tras arreglar los términos nos queda

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0, \qquad (36\text{-}39)$$

que describe las oscilaciones amortiguadas LC. Si hacemos $R = 0$, la ecuación 36-39 se transforma, como debe ser, en la ecuación 36-29; ésta describe las oscilaciones no amortiguadas.

Sin prueba afirmamos que la solución general de la ecuación 38-39 puede escribirse en la forma

$$q = q_m e^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi), \qquad (36\text{-}40)$$

donde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}. \qquad (36\text{-}41)$$

Por medio de las analogías de la ecuación 36-25, vemos que la ecuación 36-40 es el equivalente exacto de la 17-39, la ecuación del desplazamiento en función del tiempo en un movimiento armónico simple amortiguado. Cuando comparamos la ecuación 36-41 con la ecuación 17-40, comprobamos que la resistencia R corresponde a la constante de amortiguamiento b en el oscilador mecánico amortiguado.

La figura 36-11 muestra, en función del tiempo, la corriente en un circuito LC (compárela con la Fig. 17-16*b*). La corriente oscila senoidalmente con la frecuencia ω' y su amplitud disminuye de manera exponencial con el tiempo. En rigor, la frecuencia ω' es menor que la frecuencia ($\omega = 1/\sqrt{LC}$) de las oscilaciones no amortiguadas, pero en la mayor parte de los casos de interés podemos hacer $\omega' = \omega$, con un error insignificante.

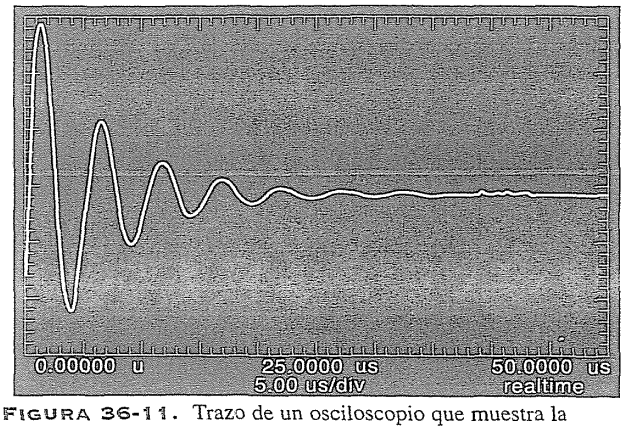


FIGURA 36-11. Trazo de un osciloscopio que muestra la oscilación de un circuito LC amortiguado. La amplitud de oscilación disminuye porque se disipa energía en la resistencia del circuito.

PROBLEMA RESUELTO 36-10. Un circuito tiene $L = 12$ mH, $C = 1.6$ μF y $R = 1.5\ \Omega$. *a*) ¿Después de cuánto tiempo t la amplitud de las oscilaciones de carga se reducirán a una mitad de su valor inicial? b) ¿A cuántos periodos de oscilación corresponde esto?

Solución *a*) Esto ocurrirá cuando el factor de amplitud $e^{-Rt/2L}$ en la ecuación 36-40 tenga el valor 1/2, o sea

$$e^{-Rt/2L} = \tfrac{1}{2}.$$

Al tomar el logaritmo natural en ambos lados, se obtiene

$$-Rt/2L = \ln\tfrac{1}{2} = -\ln 2,$$

o, al resolver para t,

$$t = \frac{2L}{R}\ln 2 = \frac{(2)(12\times10^{-3}\text{ H})}{1.5\ \Omega}\ln 2 = 0.011\text{ s}.$$

b) El número de oscilaciones es el tiempo transcurrido dividido entre el periodo, que se relaciona con la frecuencia angular ω por $T = 2\pi/\omega$. La frecuencia angular es

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(12\times10^{-3}\text{ H})(1.6\times10^{-6}\text{ F})}} = 7200\text{ rad/s}.$$

Entonces, el periodo de oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7200\text{ rad/s}} = 8.7\times10^{-4}\text{ s}.$$

Así que el tiempo transcurrido, expresado en función del periodo de oscilación, es

$$\frac{t}{T} = \frac{0.011\text{ s}}{8.7\times10^{-4}\text{ s}} \approx 13.$$

La amplitud se reduce a la mitad al cabo de unos 13 ciclos de oscilación. En cambio, el amortiguamiento en este ejemplo es menos drástico que el de la figura 36-11, donde la amplitud disminuye a la mitad en un ciclo aproximadamente.

En el problema resuelto, hemos empleado ω en vez de ω'. Con base en la ecuación 36-41, calculamos $\omega - \omega' = 0.27$ rad/s, de esta manera cometemos un error insignificante al utilizar ω.

Oscilaciones forzadas y la resonancia

Pensemos en un circuito LC amortiguado que contiene una resistencia R. Si el amortiguamiento es pequeño, el circuito oscilará con una frecuencia $\omega = 1/\sqrt{LC}$, que llamamos *frecuencia natural* del sistema.

Ahora supóngase que aplicamos al circuito una fuerza electromotriz variable en el tiempo y dada por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m\cos\omega'' t, \qquad (36\text{-}42)$$

usando para ello un generador externo. Aquí ω'', que puede hacerse variar a discreción, es la frecuencia de esta fuente externa. Calificamos de *forzadas* a este tipo de oscilaciones. Cuando la fuerza electromotriz, descrita en la ecuación 36-42, se aplica

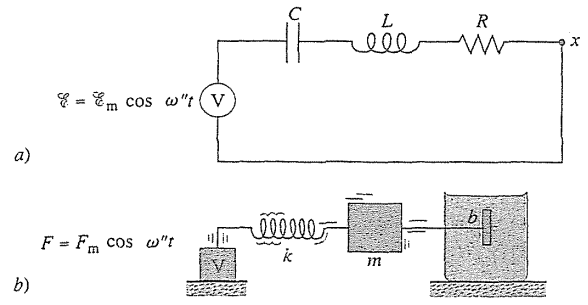


FIGURA 36-12. *a)* Las oscilaciones electromagnéticas de un circuito se mantienen a una frecuencia angular ω''. *b)* Las oscilaciones mecánicas de un sistema mesa-resorte se mantienen a una frecuencia angular ω''. Los elementos correspondientes de los dos sistemas se dibujan opuestos cada uno.

primero, en el circuito aparecen corrientes transitorias variables con el tiempo. Sin embargo, ahora nos interesan las corrientes senoidales que existen en este circuito una vez que se han extinguido estos transitorios iniciales. Cualquiera que sea la frecuencia natural ω, *estas oscilaciones de carga, de corriente o de diferencia de potencial en el circuito deben ocurrir en la frecuencia impulsora externa* ω''.

En la figura 36-12 se compara el sistema electromagnético oscilatorio con un sistema mecánico correspondiente. Un vibrador V, que impone una fuerza alterna externa, corresponde al generador V, éste impone una fuerza electromotriz alterna externa. Otras magnitudes "corresponden" como antes (Tabla 36-1): el desplazamiento a la carga y la velocidad a la corriente. La inductancia L, que se opone a los cambios de corriente, corresponde a la masa (inercial) m, que se opone a los cambios de velocidad. La constante de resorte k y la capacitancia inversa C^{-1} representan la "rigidez" de sus sistemas y producen, respectivamente, la respuesta (desplazamiento) del resorte ante la fuerza y la respuesta (carga) del capacitor ante la fuerza electromotriz.

En el capítulo 37 obtuvimos la solución para la corriente en el circuito de la figura 36-12*a*, que puede escribirse en la forma

$$i = i_m \operatorname{sen}(\omega'' t - \phi). \tag{36-43}$$

La amplitud de corriente i_m en la ecuación 36-43 es una medida de la respuesta del circuito de la figura 36-12*a* a la fuerza electromotriz de excitación. Es lógico suponer (de la experiencia en empujar columpios, por ejemplo) que i_m es grande cuando la frecuencia de excitación ω'' se aproxima a la frecuencia natural ω del sistema. En otras palabras, esperamos que una gráfica de i_m en función de ω'' alcance su valor

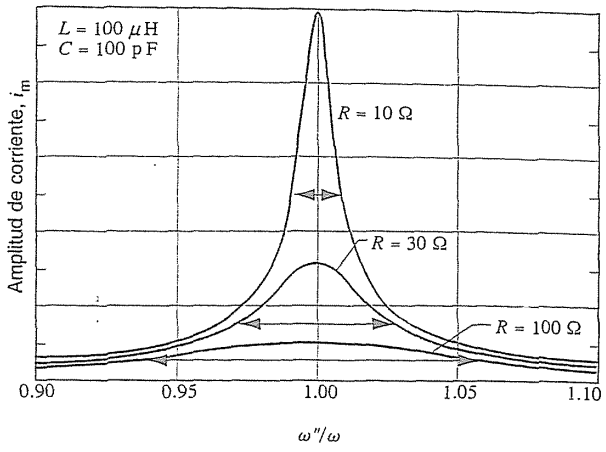


FIGURA 36-13. Curvas de resonancia para el circuito oscilatorio forzado de la fig. 36-12*a*. Las tres curvas corresponden a diferentes valores de la resistencia del circuito. Las flechas horizontales indican el ancho de la "agudeza" de cada resonancia.

máximo cuando

$$\omega'' = \omega = 1/\sqrt{LC}, \tag{36-44}$$

que llamamos condición de *resonancia.*

En la figura 36-13 se incluyen tres gráficas de i_m en función de la razón ω''/ω, cada una corresponde a un valor distinto de la resistencia R. Vemos que los picos poseen en realidad un valor máximo cuando se cumple la condición de resonancia de la ecuación 36-44. Nótese que, conforme se disminuye R, el pico de resonancia se vuelve más pronunciado, como lo indican las tres flechas horizontales dibujadas en el nivel de la mitad máxima de cada curva.

La figura 36-13 refleja la experiencia común de sintonizar un radio. Al girar la perilla de sintonización, estamos ajustando la frecuencia natural ω de un circuito interno LC para acoplar la frecuencia de excitación ω'' de la señal transmitida por la antena de la estación; buscamos la resonancia. La nitidez de la sintonización cobra importancia en una zona metropolitana, donde hay muchas señales cuyas frecuencias están a menudo cercanas.

La figura 36-13 se parece a la figura 17-19; ésta contiene los picos de resonancia en las oscilaciones forzadas de un oscilador mecánico como los de la figura 36-12*b*. También, en este caso, la respuesta máxima tiene lugar cuando $\omega'' = \omega$ y los picos de resonancia se vuelven más pronunciados al disminuir el factor de amortiguación (el coeficiente b). Nótese que las curvas de las figuras 36-13 y 17-19 no son exactamente iguales. La primera es una gráfica de amplitud de corriente, y la segunda, de la amplitud de desplazamiento. La variable mecánica correspondiente a la corriente no es el desplazamiento, sino la velocidad. Pese a ello, ambos conjuntos de curvas ejemplifican el fenómeno de resonancia.

OPCIÓN MÚLTIPLE

36-1 Inductancia

36-2 Cálculo de la inductancia

1. Dos inductores idénticos de inductancia L están conectados en serie.
   a) Si los inductores están *muy distantes* entre sí, la inductancia efectiva del sistema será
   A) $L/2$. B) $L/\sqrt{2}$. C) $\sqrt{2}L$. D) $2L$.
   b) Si acercamos los dos inductores, la inductancia efectiva
   A) aumentará. B) disminuirá.
   C) no se alterará.
   D) cambiará, pero la respuesta depende de la orientación de los inductores.
2. Dos inductores idénticos de inductancia L están conectados en paralelo.
   a) Si están *muy* distantes entre sí, la inductancia efectiva del sistema será
   A) $L/2$. B) $L/\sqrt{2}$. C) $\sqrt{2}L$. D) $2L$.
   b) Si acercamos los dos inductores, la inductancia efectiva
   A) aumentará. B) disminuirá.
   C) no se alterará.
   D) cambiará, pero la respuesta depende de la orientación de los inductores.
3. Una espira simple de alambre tiene una inductancia L_0. Si arriba de ella ponemos otra, la nueva inductancia será
   A) $4L_0$. B) $2L_0$. C) $\sqrt{2}L_0$. D) L_0^2.
4. ¿Qué relación hay entre la inductancia por unidad de longitud en un solenoide real cercano a su centro y la cercana a sus extremos?
   A) La inductancia por unidad de longitud es más grande cerca del centro.
   B) La inductancia por unidad de longitud está más grande cerca de los extremos.
   C) La inductancia por unidad de longitud es la misma en todas partes.
5. Puede hacer un inductor con un metal "elástico", que es fundamentalmente un solenoide flexible. Si lo alargamos hasta que alcance el doble de su longitud original, la inductancia
   A) se convertirá en $L_0/2$. B) se convertirá en $L_0/4$.
   C) se convertirá en $\sqrt{L_0}$. D) no se alterará.
6. Un inductor tiene una inductancia L_0. Un segundo inductor es idéntico al primero, salvo que tiene el doble de tamaño; crece en un factor de dos. ¿Cuál es la razón de la inductancia del inductor agrandado al inductor original?
   A) 4 B) 2 C) 1 D) 1/2
   E) la respuesta depende de la geometría del inductor.

36-3 Circuitos *LR*

7. Un resistor, un inductor, un interruptor y una batería están en serie. Al inicio el interruptor está abierto. Luego se cierra y se permite que fluya la corriente.
   a) Antes que el sistema alcance un estado estable, la diferencia de potencial en el resistor
   A) aumenta. B) disminuye. C) permanece fija.
   b) Antes que el sistema alcance un estado estable, la diferencia de potencial en el inductor
   A) aumenta. B) disminuye. C) permanece fija.
8. Un inductor ideal está conectado en serie con un resistor y una batería ideal. Ésta suministra energía con una rapidez $P(t)$, el resistor disipa esta energía con una rapidez $P_R(t)$ y, el inductor la almacena con una rapidez $P_L(t)$. ¿Qué puede concluirse respecto a la relación entre $P_R(t)$ y $P_L(t)$?
   A) $P_R(t) > P_L(t)$ en todos los tiempos t mientras carga.
   B) $P_R(t) = P_L(t)$ en todos los tiempos t mientras carga.
   C) $P_R(t) < P_L(t)$ en todos los tiempos t mientras carga.
   D) $P_R(t) > P_L(t)$ sólo cerca del inicio de la carga.
   E) $P_R(t) < P_L(t)$ sólo cerca del inicio de la carga.

36-4 Almacenamiento de energía en un campo magnético

9. Considere otra vez los dos inductores de la pregunta de opción múltiple 6 y suponga que llevan la misma corriente.
   a) ¿Cuál es la razón de energía total almacenada del inductor agrandado a la del inductor original?
   A) 1/4 B) 1/2 C) 2 D) 4
   b) ¿Cuál es la razón de la densidad de energía total almacenada del inductor agrandado a la del inductor original?
   A) 1/4 B) 1/2 C) 2 D) 4

36-5 Oscilaciones electromagnéticas: cualitativas

10. Un circuito simple LC consta de un inductor L y de un capacitor C en serie. Este circuito oscila con una frecuencia f_0. Un segundo inductor idéntico y un segundo capacitor también idéntico se incorporan en serie al circuito; suponga que los inductores están lo bastante separados para que sus campos magnéticos no interfieran. ¿Cuál es la nueva frecuencia de oscilación en este sistema?
    A) $4f_0$ B) $2f_0$ C) f_0
    D) $f_0/2$ B) $f_0/4$
11. La frecuencia de un oscilador LC es f_0. Después separamos las placas del capacitor de placas paralelas el doble de la distancia original. ¿Cuál es la nueva frecuencia de oscilación?
    A) $2f_0$ B) $\sqrt{2}f_0$ C) $f_0/\sqrt{2}$ D) $f_0/2$
12. ¿Cuál de los siguientes cambios aumentará la frecuencia de un oscilador LC? (*Puede haber más de una respuesta correcta.*)
    A) Introducir una lámina dieléctrica en el capacitor.
    B) Introducir una sustancia paramagnética en el inductor.
    C) Introducir una sustancia ferromagnética en el inductor.
    D) Introducir una sustancia diamagnética en el inductor.

36-6 Oscilaciones electromagnéticas: cuantitativas

13. Un circuito LC oscila con una frecuencia f. Cuando la corriente que pasa a través del inductor es $i = i_{máx}/2$, la carga del capacitor es
    A) $q = q_{máx}$. B) $q = \sqrt{3}q_{máx}/2$.
    C) $q = \sqrt{2}q_{máx}/2$. D) $q = q_{máx}/2$.
14. Al inicio, un circuito LC oscila con una frecuencia f y con una corriente máxima $i_{máx}$. Si su energía total se duplica,
    a) el periodo de oscilación aumentará en un factor de
    A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
    E) 1 (no se altera).
    b) la carga máxima que se acumule en el capacitor aumentará en un factor de
    A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
    E) 1 (no se altera).

c) la corriente máxima que se produzca en el circuito aumentará en un factor de

A) 4. B) $\sqrt{8}$. C) 2. D) $\sqrt{2}$.
E) 1 (no se altera).

36-7 Oscilaciones amortiguadas y forzadas

15. ¿Cuándo la energía de un circuito *LRC* disminuye con la mayor rapidez?

A) Cuando la carga en el capacitor es máxima.
B) Cuando la carga en el capacitor es mínima.
C) Mientras la fuerza electromotriz inducida en el inductor es máxima.
D) Cuando el calentamiento Joule en el resistor es mínimo.

PREGUNTAS

1. Demuestre que las dimensiones de las dos expresiones de L, $N\Phi_B/i$ (Ec. 36-4) y $\mathscr{E}L/(di/dt)$ (Ec. 36-1) son iguales.

2. Si el flujo que pasa por las vueltas de una bobina es el mismo, la inductancia de ella puede calcularse a partir de $L = N\Phi_B/i$ (Ec. 36-4). ¿Cómo podríamos comparar L en una bobina donde esta suposición no es válida?

3. Dé ejemplos de cómo el flujo conectado por una bobina puede cambiar a causa del estiramiento o compresión de la bobina.

4. Quiere enrollar una bobina de modo que tenga resistencia, pero prácticamente no inductancia. ¿Cómo lo lograría?

5. Un largo cilindro se enrolla de izquierda a derecha con una capa de alambre, dándole n vueltas por unidad de longitud, con una inductancia L_1, como el cilindro de la figura 36-14*a*. ¿Qué valor tendrá la inductancia si ahora se continúa el embobinado en el mismo sentido, sólo que retornando de derecha a izquierda como se indica en la figura 36-14*b*, para obtener una segunda capa de n vueltas por unidad de longitud? Explique su respuesta.

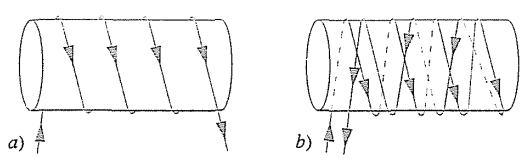


FIGURA 36-14. Pregunta 5.

6. Explique por qué se espera que la inductancia de un cable coaxial aumente cuando incrementamos el radio del conductor externo, mientras el del conductor interno permanece fijo.

7. Le dan un alambre de cobre de longitud l. ¿Cómo lo arreglaría para obtener la inductancia máxima?

8. Explique cómo un alambre recto puede mostrarnos los efectos de la inducción. ¿Qué haría para detectarlos?

9. Se crea una corriente estacionaria en una bobina con una constante inductiva de tiempo muy grande. Cuando se interrumpe, con un interruptor, un arco grande tiende a aparecer en las hojas del interruptor. Explique por qué. (Nota: la interrupción de corrientes en circuitos con gran inducción puede resultar destructiva y peligrosa.)

10. Suponga que conecta una bobina ideal (es decir, esencialmente sin resistencia) a una batería ideal (también sin resistencia). Se podría pensar que, como el circuito no tiene resistencia, la corriente alcanzaría de inmediato un valor muy grande. Por otra parte, se podría pensar que la corriente se elevaría con mucha lentitud si es que se eleva, pues la constante inductiva del tiempo ($= L/R$) es muy grande. ¿Qué es lo que sucede en realidad?

11. En un circuito *LR* como el de la figura 36-4, ¿puede alguna vez la fuerza electromotriz inducida ser más grande que la de la batería?

12. En un circuito *LR* como el de la figura 36-6, ¿es la corriente del resistor siempre la misma que la corriente que pasa a través del inductor?

13. En el circuito de la figura 36-4, la fuerza electromotriz inducida alcanza su valor máximo en el instante en que se cierra el interruptor en *a*. ¿A qué se debe esto, pues en ese momento no pasa corriente por el inductor?

14. ¿Depende del valor de la fuerza electromotriz constante aplicada el tiempo requerido para que la corriente de un circuito *LR* se acumule y produzca una parte de su valor de equilibrio?

15. Si la corriente en una fuente de fuerza electromotriz sigue la dirección de esta última, disminuirá la energía de la fuente; si tiene una dirección contraria a la fuerza electromotriz (como sucede cuando se carga una batería), aumentará la energía de la fuente. ¿Se aplican estas afirmaciones al inductor de la figura 36-2?

16. ¿Puede la fuerza electromotriz de un inductor seguir la misma dirección que la de la fuente; ésta le suministra al inductor su energía magnética?

17. Se pone en *b* el interruptor de la figura 36-4, que ha sido cerrado en *a* durante "largo" tiempo. ¿Qué sucede con la energía almacenada en el inductor?

18. Una bobina tiene una inductancia (medida) L y una resistencia (también medida) R. ¿Está la constante inductiva de tiempo dada necesariamente por $\tau_L = L/R$? Recuerde que obtuvimos esa ecuación (Fig. 36-4) para una situación donde los elementos inductivos y resistivos estuviesen físicamente separados. Explique su respuesta.

19. Las figuras 36-5*a* y 31-21*b* son gráficas de $\Delta V_R(t)$ para los circuitos *LR* y *RC*, respectivamente. ¿Por qué estas dos curvas son tan distintas? Justifique para cada una en términos de los procesos físicos que tienen lugar en el circuito apropiado.

20. Dos solenoides, *A* y *B*, tienen el mismo diámetro y longitud y contienen sólo una capa de devanados de cobre; las vueltas continuas que se tocan y el espesor del aislamiento son insignificantes. El solenoide *A* tiene muchas vueltas de alambre delgado, y el solenoide *B*, menos vueltas de alambre grueso. *a*) ¿Cuál solenoide presenta la mayor inductancia? *b*) ¿Cuál solenoide tiene la mayor constante inductiva de tiempo? Fundamente sus respuestas.

21. ¿Puede presentar un argumento basado en la manipulación de los imanes de barra para indicar que la energía puede almacenarse en un campo magnético?

22. Trace todas las analogías formales que se le ocurran entre un capacitor de placas paralelas (en campos eléctricos) y un solenoide de largo (en campos magnéticos).

23. Se consume energía en las siguientes operaciones. Parte de ella puede recuperarse (reconvertirse) transformándola en energía eléctrica con la cual puede realizarse trabajo útil o se desperdicia en otras formas. ¿En cuál caso habrá por lo menos una fracción de energía eléctrica recuperable: *a*) carga de un capacitor,

b) carga de una batería de almacenamiento, *c)* envío de una corriente a través del resistor, *d)* creación de un campo magnético y *e)* desplazamiento de un conductor en un campo magnético?

24. Se invierte la corriente de un solenoide. ¿Qué cambios produce esto en el campo magnético $\vec{B}$ y la densidad de energía u_B en varios puntos a lo largo del solenoide?

25. Algunos aparatos comerciales como los motores y generadores que intervienen en la transformación de energía entre formas eléctricas y mecánicas no contienen campos eléctricos, sino magnéticos. ¿A qué se debe ello?

26. ¿Por qué el circuito *LC* de la figura 36-8 no deja simplemente de oscilar cuando se descarga por completo el capacitor?

27. ¿Cómo podría hacer que un circuito *LC* empezara a oscilar aplicando la condición inicial que se representa en al figura 36-8*c*? Diseñe un esquema de interruptor para lograrlo.

28. La curva de la parte inferior *b* de la figura 36-9 es proporcional a la derivada de la curva de la parte superior *a*. Explique por qué.

29. En un circuito oscilatorio *LC*, supuestamente sin resistencia, ¿qué determina *a)* la frecuencia y *b)* la amplitud de las oscilaciones?

30. En relación con las figuras 36-8*c* y 36-8*g*, explique por qué puede haber una corriente en el inductor, aunque no la haya en el capacitor.

31. En la figura 36-8, ¿qué cambios se requieren para que las oscilaciones se realicen en dirección contraria a la de las manecillas del reloj alrededor de ella?

32. En la figura 36-8, ¿qué constantes de fase ϕ de la ecuación 36-31 permitirían que las ocho situaciones de circuito descritas en ella sirvan a su vez de condiciones iniciales?

33. ¿Qué problemas de construcción encontraría si intentara construir un circuito *LC* como el de la figura 36-8 para que oscilara *a)* a 0.01 Hz o *b)* a 10 Ghz?

34. Dos inductores L_1 y L_2 y dos capacitores C_1 y C_2 pueden conectarse en serie conforme al arreglo de la figura 36-15*a* o de la figura 36-15*b*. ¿Son iguales las frecuencias de los dos circuitos oscilatorios? Considere los dos casos: *a)* $C_1 = C_2$, $L_1 = L_2$ y *b)* $C_1 \neq C_2$, $L_1 \neq L_2$.

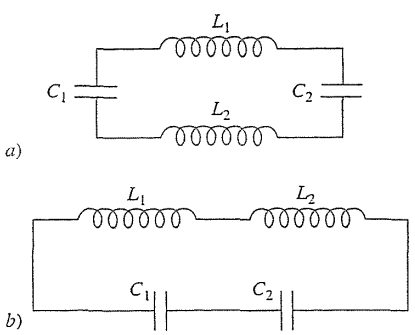


FIGURA 36-15. Pregunta 34.

35. En la analogía mecánica con el circuito oscilatorio *LC*, ¿qué magnitud mecánica corresponde a la diferencia de potencial?

36. Al comparar el sistema electromagnético oscilatorio con un sistema mecánico también oscilatorio, ¿a qué propiedades mecánicas se parecen las siguientes propiedades electromagnéticas: capacitancia, resistencia, carga, energía del campo eléctrico, energía del campo magnético, inductancia y corriente?

37. Se unen y se conectan dos resortes a un objeto de masa *m*; el sistema puede oscilar libremente en una superficie horizontal sin fricción, como se ve en la figura 36-16. Dibuje el análogo electromagnético de este sistema mecánico oscilatorio.

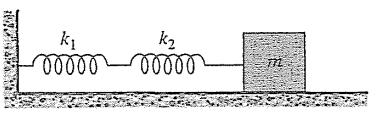


FIGURA 36-16. Pregunta 37.

38. Explique por qué no es posible tener *a)* un circuito real *LC* sin resistencia, *b)* un inductor real sin capacitancia intrínseca o *c)* un capacitor real sin inductancia intrínseca. Explique la validez práctica del circuito *LC* de la figura 36-8, donde se desprecian las realidades anteriores.

39. Todos los circuitos prácticos *LC* deben contener alguna resistencia. Sin embargo, puede comprarse un oscilador de audio empacado, en que la salida conserve indefinidamente una amplitud constante sin que decaiga, como se advierte en la figura 36-11. ¿A qué se debe esto?

40. ¿Qué aspecto tendría una curva de resonancia cuando $R = 0$, si se grafica en la figura 36-13?

41. ¿Existe alguna razón física para suponer que *R* es "pequeña" en las ecuaciones 36-40 y 36-41? (Sugerencia: considere lo que podría ocurrir si la *R* de amortiguamiento fuera tan grande que la ecuación 36-40 ni siquiera pudiera recorrer un ciclo de oscilación antes que *q* fuese reducida esencialmente a cero. ¿Podría suceder eso? En caso de una respuesta afirmativa, ¿qué aspecto se imagina que tendría la figura 36-11?

42. ¿Qué diferencia hay entre los circuitos oscilatorios libres, los amortiguados y los forzados?

43. Tabule el mayor número posible de sistemas mecánicos o eléctricos que posean una frecuencia natural, junto con la fórmula de ella si se da en el texto.

44. ¿Conviene que un circuito oscilatorio receptor de radio tenga un factor *Q* alto o bajo? Explique su respuesta (Prob. 15).

EJERCICIOS

36-1 Inductancia

36-2 Cálculo de la inductancia

1. La inductancia de una bobina compacta de 400 vueltas es 8.0 mH. Calcule el flujo magnético en la bobina cuando la corriente es 5.0 mA.

2. Una bobina circular tiene un radio de 10.3 cm y consta de 34 vueltas de alambre muy compactas. Un campo magnético producido externamente de 2.62 mT es perpendicular a dicha bobina. *a)* Si no hay corriente en la bobina, ¿cuál es el número de conexiones de flujo? *b)* Cuando la corriente de la bobina es 3.77 A en cierta dirección, se observa que desaparece el flujo neto a través de ella. Calcule la inductancia de la bobina.

3. Un solenoide se enrolla con una sola capa de alambre aislado de cobre (diámetro, 2.52 mm). Mide 4.10 cm de diámetro y 2.0 m de largo. ¿Cuál es la inductancia por metro en el solenoide cerca de su centro? Suponga que los alambres contiguos se tocan y que el espesor del aislamiento es insignificante.
4. En cierto momento, la corriente y la fuerza electromotriz inducida son las que se indican en la figura 36-17. *a*) ¿Aumenta o disminuye la corriente? *b*) La fuerza electromotriz es 17 V y la rapidez de cambio de la corriente es 25 kA/s; ¿qué valor tiene la inductancia?

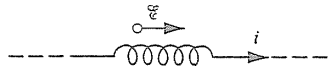


FIGURA 36-17. Ejercicio 4.

5. La inductancia de una bobina de N vueltas enrollada compactamente es tal que una fuerza electromotriz de 3.0 mV se induce cuando la corriente cambia con una rapidez de 5.0 A/s. Una corriente estacionaria de 8.0 A produce un flujo magnético de 40 μWb. *a*) Calcule la inductancia de la bobina. *b*) ¿Cuántas vueltas tiene?
6. Un toroide con una sección transversal de 5.20 cm^2 y un radio interno de 15.3 cm tiene 536 vueltas de alambre y transporta una corriente de 810 mA. Calcule el flujo magnético que pasa por la sección.
7. Un solenoide de 126 cm de largo se forma con 1870 vueltas que transportan una corriente de 4.36 A. Su núcleo está lleno con hierro y la constante de permeabilidad efectiva es 968. Calcule la inductancia del solenoide, suponiendo que puede tratarse como ideal, con un diámetro de 5.45 cm.
8. La corriente i a través de un inductor varía con el tiempo t como se muestra en la gráfica de la figura 36-18. Calcule la fuerza electromotriz inducida durante los intervalos de tiempo *a*) $t = 0$ a $t = 2$ ms, *b*) $t = 2$ ms a $t = 5$ ms y *c*) $t = 5$ ms a $t = 6$ ms. (No tenga en cuenta el comportamiento en los extremos de los intervalos.)

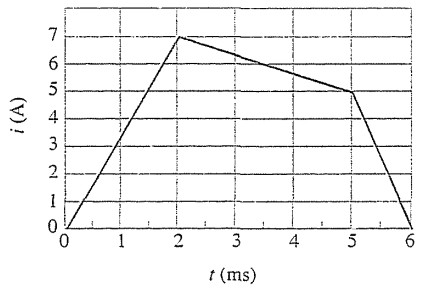


FIGURA 36-18. Ejercicio 8.

9. Dos inductores L_1 y L_2 están conectados en paralelo y separados por una gran distancia. *a*) Demuestre que la inductancia equivalente se obtiene de

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

b) ¿Por qué debe su separación ser grande para que se mantenga esta relación?

10. Dos inductores L_1 y L_2 están conectados en serie y separados por una gran distancia. *a*) Demuestre que la inductancia equivalente está dada por

$$L_{eq} = L_1 + L_2.$$

b) ¿Por qué su separación debe ser grande para conservar esta relación?

36-3 Circuios *LR*

11. La corriente en un circuito *LR* se reduce de 1.16 A a 10.2 mA en los 1.5 s inmediatamente después de sacar la batería del circuito. Si L es 9.44 H, calcule la resistencia R del circuito.
12. Considere el circuito *LR* de la figura 36-4. *a*) En función de la fuerza electromotriz de la batería $\mathscr{E}$, cuál es la fuerza electromotriz inducida $\mathscr{E}_L$ cuando se acaba de cerrar el circuito en *a*? *b*) ¿Cuál es $\mathscr{E}_L$ después de dos constantes de tiempo? *c*) ¿Tras cuantas constantes de tiempo $\mathscr{E}_L$ será justo una mitad de la fuerza electromotriz de la batería $\mathscr{E}$?
13. El número de conexiones de flujo en cierta bobina con una resistencia 745 mΩ es 26.2 mWb cuando tiene una corriente de 5.48 A. *a*) Calcule su inductancia. *b*) Si de repente conectamos una batería de 6.00 V en ella, ¿cuánto tardará la corriente en aumentar de 0 a 2.53 A?
14. *a*) Demuestre que la ecuación 36-12 puede escribirse

$$\frac{di}{i - \mathscr{E}/R} = -\frac{R}{L}\,dt.$$

b) Integre esta ecuación para obtener la ecuación 36-13.

15. Suponga que la fuerza electromotriz de la batería en el circuito de la figura 36-4 (el interruptor cerrado en *a*) varía con el tiempo t de manera que la corriente está dada por $i(t) = (3.0\text{ A}) + (5.0\text{ A/s})t$. Suponga que $R = 4.0\ \Omega$, $L = 6.0$ H y encuentre una expresión de la fuerza electromotriz de la batería en función del tiempo. (Sugerencia: aplique la regla de la malla.)
16. En 5.22 s, la corriente en un circuito *LR* se eleva hasta alcanzar una tercera parte de su valor. Calcule la constante inductiva de tiempo.
17. Se aplica repentinamente una diferencia de potencial de 45 V a una bobina de $L = 50$ mH y $R = 180\ \Omega$. ¿Con qué rapidez crece la corriente al cabo de 1.2 ms?
18. En $t = 0$ se conecta una batería a un inductor y a un resistor conectados en serie. En la siguiente tabla se incluyen la diferencia de potencial, en volts, en el inductor en función del tiempo, en ms, después de conectada la batería. Deduzca *a*) la fuerza electromotriz de la batería y *b*) la constante de tiempo del circuito.

t(ms)	ΔV_L (V)	t(ms)	ΔV_L(V)
1.0	18.24	5.0	5.98
2.0	13.8	6.0	4.53
3.0	10.4	7.0	3.43
4.0	7.90	8.0	2.60

19. En la figura 36-19, $\mathscr{E} = 100$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ y $L = 2.0$ H. Determine los valores de i_1 e i_2, *a*) inmediatamente después de cerrar el interruptor S, *b*) mucho tiempo

después de hacerlo, *c*) inmediatamente después de volver a abrirlo y *d*) mucho tiempo más tarde.

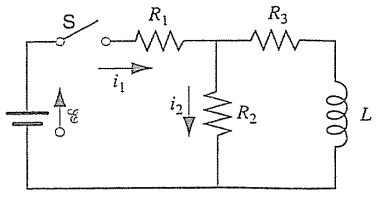


FIGURA 36-19. Ejercicio 19.

20. Un núcleo toroidal de madera, con una sección transversal cuadrada, tiene un radio interno de 10 cm y un radio externo de 12 cm. Está enrollado con una capa de alambre (diámetro, 0.96 mm; resistencia por unidad de longitud, 21 mΩ/m. Calcule *a*) la inductancia y *b*) la constante inductiva de tiempo. No tenga en cuenta el espesor del aislamiento.

21. En el circuito de la figura 36-20, $\mathscr{E} = 10$ V, $R_1 = 5.0\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ y $L = 5.0$ H. En dos condiciones separadas, (I) el interruptor S acabado de cerrar y (II) cerrado durante largo tiempo, calcule *a*) la corriente i_1 a través de R_1, *b*) la corriente i_2 a través de R_2, *c*) la corriente i en el interruptor, *d*) la diferencia de potencial en R_2, *e*) la diferencia de potencial en L y *f*) di_2/dt.

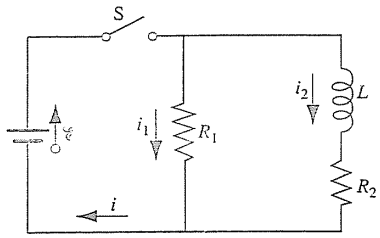


FIGURA 36-20. Ejercicio 21.

36-4 Almacenamiento de energía en un campo magnético

22. Un inductor toroidal de 92 mH encierra un volumen de 0.022 m^3. Si su densidad promedio de energía es 71 J/m^3, calcule la corriente.

23. La energía magnética almacenada en un conductor es 25.3 mJ cuando la corriente es 62.0 mA. *a*) Calcule la inductancia. *b*) ¿Qué corriente se requiere para que la energía magnética cuadruplique esa cantidad?

24. Un solenoide de 85.3 cm de largo tiene una superficie transversal de 17.2 cm^2. Hay 950 vueltas de alambre que llevan una corriente de 6.57 A. *a*) Calcule la densidad de energía del campo magnético dentro del solenoide. *b*) Determine la energía total almacenada en el campo magnético dentro de este solenoide. (Prescinda de los efectos de extremos.)

25. Calcule, en el átomo de hidrógeno, la densidad de energía magnética en el centro de la trayectoria de un electrón circulante (Prob. res. 33-2).

26. El campo magnético en el espacio interestelar de nuestra galaxia tiene una magnitud de 100 pT aproximadamente. *a*) Calcule en eV/cm^3 la densidad correspondiente de energía. *b*) ¿Cuánta energía se guarda en este campo en un cubo de 10 años luz de lado? (Recuerde que la estrella más cercana después del Sol está a una distancia de 4.3 años luz y que el "radio" de nuestra galaxia es de unos 80,000 años luz.)

27. ¿Cuál debe ser la magnitud de un campo eléctrico uniforme para que tenga la misma densidad de energía que la de un campo magnético de 0.50 T?

28. Suponga que la constante inductiva de tiempo en el circuito de la figura 36-4 es 37.5 ms y que su corriente es cero en el tiempo $t = 0$, cuando el interruptor está en *a*. ¿En qué tiempo la rapidez con que la energía interna aumenta en el resistor es igual a la que se almacena en el inductor?

29. Se conecta una bobina en serie con un resistor de 10.4 kΩ. Cuando una batería de 55.0 V se aplica a ambos, la corriente alcanza un valor de 1.96 mA al cabo de 5.20 ms. *a*) Determine la inductancia de la bobina. *b*) ¿Cuanta energía se guarda en ella en este mismo momento?

30. En el circuito de la figura 36-4, suponga que $\mathscr{E} = 12.2$ V, $R = 7.34\ \Omega$ y que $L = 5.48$ H. Se conecta la batería en el tiempo $t = 0$. *a*) ¿Cuánta energía suministra durante los primeros 2.00 s? *b*) ¿Qué parte de ella se guarda en el campo magnético del inductor? *c*) ¿Cuánta apareció en el resistor?

31. El campo magnético de la superficie terrestre tiene una intensidad aproximada de 60 μT. Calcule la energía guardada en una capa entre la superficie terrestre y 16 km arriba de ella, suponiendo que sea relativamente constante en distancias radiales pequeñas en comparación con el radio de la Tierra y despreciando las variaciones cerca de los polos magnéticos.

32. Una longitud de un alambre de cobre transporta una corriente de 10 A, distribuida uniformemente. Calcule *a*) la densidad de energía magnética y *b*) la densidad de energía eléctrica en su superficie. El diámetro del alambre mide 2.5 mm y su resistencia por unidad de longitud es 3.3 Ω/km.

36-5 Oscilaciones electromagnéticas: cualitativas

33. Un inductor de 1.48 mH en un circuito *LC* contiene una energía máxima de 11.2 μJ. ¿Cuál es la corriente pico?

34. ¿Cuál es la capacitancia de un circuito *LC* si la carga máxima del capacitor es 1.63 μC y si la energía total es 142 μJ?

35. Se emplean los osciladores *LC* en circuitos conectados a altavoces para crear algunos de los sonidos de "música electrónica". ¿Qué inductancia ha de usarse con un capacitor de 6.7 μF si quiere obtenerse una frecuencia de 10 kHz, cerca del extremo superior del intervalo de frecuencias audible?

36. En un circuito oscilatorio *LC*, $L = 1.13$ mH y $C = 3.88\ \mu$F. La carga máxima del capacitor es 2.94 μC. Obtenga la corriente máxima.

37. Examine detenidamente el circuito de la figura 36-21. Con el interruptor S_1 cerrado y con los otros dos interruptores abiertos, el circuito tiene una constante de tiempo τ_C. Con el interruptor S_2 cerrado y con los dos restantes abiertos, tiene una constante de tiempo τ_L. Cuando el interruptor S_3 está cerrado y los otros dos están abiertos, el circuito oscila con un periodo T. Demuestre que $T = 2\pi\sqrt{\tau_C\tau_L}$.

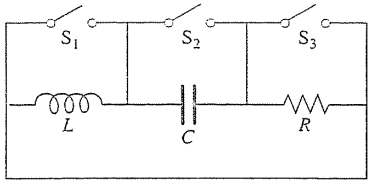


FIGURA 36-21. Ejercicio 37.

38. Recibe un inductor de 10.0 mH y dos capacitores, cuya capacitancia es de 5.00 μF y 2.00 μF. Anote las frecuencias resonantes que pueden generarse conectando estos elementos en diversas combinaciones.
39. Un cuerpo de 485 g oscila en un resorte que, cuando se extiende 2.10 mm del equilibrio, posee una fuerza restauradora de 8.13 N. *a*) Calcule la frecuencia angular de oscilación. *b*) ¿Cuál es su periodo de oscilación? *c*) ¿Cuál es la capacitancia del sistema *LC* análogo si se decide que *L* sea 5.20 H?

36-6 Oscilaciones electromagnéticas: cuantitativas

40. En un circuito *LC* con $L = 52.2$ mH y $C = 4.21$ μF, al inicio la corriente presenta su nivel máximo. ¿Cuánto tardará un capacitor en cargarse totalmente por primera vez?
41. En cierto circuito *LC*, se convierte la energía total dentro del capacitor de energía eléctrica en energía magnética dentro del inductor durante 1.52 μs. *a*) ¿Cuál es el periodo de oscilación? *b*) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación? *c*) ¿Cuánto tiempo después volverá a obtener su máximo la energía magnética una vez que lo haya alcanzado?
42. Un circuito oscilatorio *LC*, que se compone de un capacitor de 1.13 nF y de una bobina de 3.17 mH, tiene una reducción máxima de potencial de 2.87 V. Calcule *a*) la carga máxima del capacitor, *b*) la corriente pico del circuito y *c*) la energía máxima almacenada en el campo magnético de la bobina.
43. Un circuito oscilatorio *LC* está diseñado para operar con una corriente máxima de 31 mA. La inductancia de 42 mH permanece fija y se varía la frecuencia cambiando *C*. *a*) Si el capacitor tiene un voltaje máximo de 50 V, ¿puede el circuito funcionar sin peligro con una frecuencia de 1.0 MHz? *b*) ¿Cuál es la frecuencia máxima de operación segura? *c*) ¿Cuál es la capacitancia mínima?
44. En el circuito de la figura 36-22, el interruptor lleva largo tiempo en la posición *a*. Ahora lo ponemos en *b*. *a*) Calcule la frecuencia de la corriente oscilatoria resultante. *b*) ¿Cuál será la amplitud de sus oscilaciones?

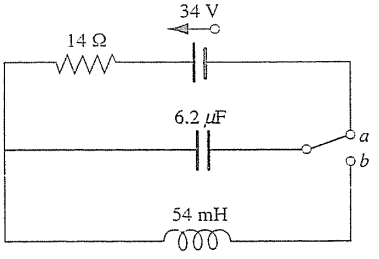


FIGURA 36-22. Ejercicio 44.

45. Un circuito *LC* tiene una inductancia de 3.0 mH y una capacitancia de 10 μF. Calcule *a*) la frecuencia angular y *b*) el periodo de oscilación. *c*) En el tiempo $t = 0$ el capacitor está cargado a 200 μC y la corriente es cero. Bosqueje la carga del capacitor en función del tiempo.
46. Se conecta un inductor a través de un capacitor cuya capacitancia puede modificarse girando una perilla. Queremos hacer que la frecuencia de las oscilaciones *LC* varíe linealmente con el ángulo de rotación de la perilla, pasando de 200 a 400 kHz al girar la perilla 180°. Si $L = 1.0$ mH, grafique *C* en función del ángulo en una rotación de 180°.
47. *a*) En un circuito oscilatorio *LC*, en función de la carga máxima del capacitor, ¿qué valor tiene la carga cuando la energía del campo eléctrico es la mitad de la del campo magnético? *b*) ¿Qué fracción de un periodo debe transcurrir después que el capacitor esté completamente cargado para que se realice esta condición?
48. En un circuito *LC*, $L = 24.8$ mH y $C = 7.73$ μF. En el tiempo $t = 0$, la corriente es 9.16 mA, la carga del capacitor es 3.83 μC y el capacitor está cargando. *a*) ¿Qué energía total tiene el circuito? *b*) ¿Cuál es la carga máxima del capacitor? *c*) ¿Cuál es la corriente máxima? *d*) Si la carga del capacitor está dada por $q = q_m \cos(\omega t + \phi)$, ¿cuál es el ángulo de fase ϕ? *e*) Suponga que los datos son iguales, salvo que el capacitor está descargando en $t = 0$. ¿Cuál será entonces el ángulo de fase ϕ?
49. Un capacitor variable con un intervalo de 10 a 365 pF se emplea con una bobina para constituir un circuito *LC* de frecuencia variable que sintonice la entrada de un radio. *a*) ¿Qué razón de frecuencias máximas a mínimas puede sintonizarse con él? *b*) Si este capacitor debe sintonizarse de 0.54 a 1.60 MHz, la razón calculada en *a*) resultará demasiado grande. El intervalo puede ajustarse agregando un capacitor en paralelo al capacitor variable. ¿Qué tamaño debe tener este capacitor y qué inductancia habrá de escogerse a fin de sintonizar la gama deseada de frecuencias?
50. En la figura 36-23, el capacitor 900 μF está inicialmente cargado a 100 V, y el capacitor de 100 μF, descargado. Describa de modo pormenorizado cómo podríamos cargar el segundo a 300 V manipulando los interruptores S_1 y S_2.

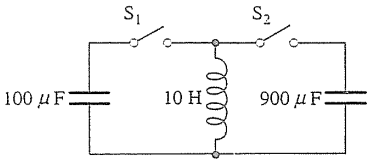


FIGURA 36-23. Ejercicio 50.

51. En un circuito oscilatorio *LC*, $L = 3.0$ mH y $C = 2.7$ μF. En el tiempo $t = 0$, la carga en el capacitor es cero, y la corriente es 2.0 A. *a*) ¿Cuál es la carga máxima que aparecerá en el capacitor? *b*) Atendiendo al periodo *T* de oscilación, ¿cuánto tiempo transcurrirá después que $t = 0$, antes que la energía almacenada en el capacitor crezca con la mayor rapidez? *c*) ¿Cuál es la rapidez máxima con que la energía fluye al interior de este capacitor?

36-7 Oscilaciones amortiguadas y forzadas

52. Un circuito de malla simple consta de un resistor de 7.22 Ω, de un inductor de 12.3 H y de un capacitor de 3.18 μF. Al inicio este último tiene una carga de 6.31 μC y la corriente es cero. Calcule la carga en el capacitor al cabo de *N* ciclos y para $N = 5$, 10 y 100.
53. En un circuito *LC* amortiguado, encuentre el tiempo requerido para que la energía máxima existente en el capacitor durante una oscilación disminuya a la mitad de su valor inicial. Suponga que $q = q_m$ en $t = 0$.

54. ¿Qué resistencia R debería conectarse a un inductor $L = 220$ mH y a un capacitor $C = 12$ μF en serie, a fin de que la carga máxima en el capacitor disminuya al 99% de su valor inicial en 50 ciclos?

55. Un circuito tiene $L = 12.6$ mH y $C = 1.15$ μF. ¿Qué resistencia ha de introducirse en él para reducir en 0.01% la frecuencia resonante (no amortiguada)?

PROBLEMAS

1. Puede doblarse un solenoide largo y delgado para formar un toroide. Demuestre que, si es lo bastante largo y delgado, la ecuación de su inductancia (Ec. 36-10) equivale a la de un solenoide de longitud apropiada (Ec. 36-7).
2. Una ancha tira de cobre con W de ancho se dobla para obtener un trozo de tubo delgado de radio R, con dos extensiones planas como se aprecia en la figura 36-24. Por ella fluye una corriente i, distribuida uniformemente por todo su ancho. De este modo se ha formado una "solenoide de una vuelta". *a*) Obtenga una expresión de la magnitud del campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ en la parte tubular (muy lejos de los bordes). (Sugerencia: suponga que el campo fuera del solenoide es insignificantemente pequeño.) *b*) Determine también la inductancia del solenoide, sin tener en cuenta las dos extensiones planas.

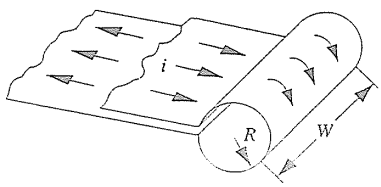


FIGURA 36-24. Problema 2.

3. Dos largos alambres paralelos, con un radio a, cuyos centros están a una distancia d transportan una corriente igual en dirección contraria. Demuestre que, despreciando del flujo en su interior, la inductancia de una longitud l del par está dada por

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d - a}{a}.$$

Consúltese el problema resuelto 33-4. (Sugerencia: calcule el flujo que pasa por un rectángulo donde los alambres forman dos lados opuestos.)

4. Dos largos alambres paralelos de cobre (diámetro = 2.60 mm) llevan corrientes de 11.3 A en dirección contraria. *a*) Si 21.8 mm separan sus centros, calcule el flujo por metro de alambre que existe en el espacio entre sus ejes. *b*) ¿Qué fracción del flujo se encuentra dentro de los alambres y, por tanto, qué error fraccional se comete al ignorarlo cuando se determina la inductancia de los dos alambres paralelos? (Prob. 3.) *c*) Repita los cálculos de *a*) para corriente paralelas.
5. Calcule la inductancia del cable coaxial de la figura 36-7 directamente de la ecuación 36-4. (Sugerencia: determine el flujo que cruza una superficie rectangular, perpendicularmente a $\vec{\mathbf{B}}$, cuya longitud es l y cuyo ancho es $b - a$.)
6. En la figura 36-25, el componente de la rama superior es un fusible ideal de 3.0 A. Tiene resistencia cero mientras la corriente en él sea menor que 3.0 A. Si alcanza ese valor, "se quema" y en lo sucesivo tiene una resistencia infinita. El interruptor S está cerrado en el tiempo $t = 0$. *a*) ¿Cuándo se quema el fusible? *b*) En función del tiempo dibuje una gráfica de la corriente i que pasa por el inductor. Marque el tiempo en que se quema el fusible.

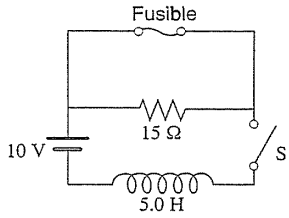


FIGURA 36-25. Problema 6.

7. Demuestre que la constante inductiva de tiempo τ_L puede definirse además como el tiempo necesario para que la corriente del circuito LR alcance su valor de equilibrio, si continúa creciendo con su rapidez inicial.
8. La bobina de un electroimán superconductor, utilizado en las investigaciones de la resonancia magnética tiene una inductancia de 152 H y transporta una corriente de 32 A. Está bobina está sumergida en helio líquido, cuyo calor latente de vaporización es 85 J/mol. *a*) Calcule la energía de su campo magnético. *b*) Obtenga la masa de helio que se evapora por ebullición si el superconductor se agota y repentinamente adquiere una resistencia finita.
9. *a*) Encuentre una expresión de la densidad de energía en función de la distancia radial r en un toroide de sección transversal rectangular. *b*) Integre primero la densidad de energía en el volumen del toroide y calcule luego la energía total almacenada en su campo. *c*) Por medio de la ecuación 36-10, evalúe directamente de la inductancia la energía contenida en un toroide y compárela con *b*).
10. Demuestre que, tras pasar de a a b el interruptor S de la figura 36-4, toda la energía almacenada en el inductor aparece finalmente como energía interna en el resistor.
11. Un alambre largo transporta una corriente i uniformemente distribuida en una sección transversal de este alambre. *a*) Demuestre que la energía magnética en una longitud l contenida en su interior es $\mu_0 i^2 l/16\,\pi$. (¿Por qué no depende del diámetro del alambre?) *b*) Demuestre que la inductancia de una longitud l del alambre relacionada con el flujo de su interior es $\mu_0 l/8\,\pi$.
12. La frecuencia resonante de un circuito en serie que contiene la inductancia L_1 y la capacitancia C_1 es ω_0. Un segundo circuito también en serie, que contiene la inductancia L_2 y la capacitancia C_2, presenta la misma frecuencia resonante. Respecto a ω_0, ¿cuál es la frecuencia de un circuito en serie que incluya los cuatro elementos anteriores? Desprecie la resistencia. (Sugerencia: utilice las fórmulas de la capacitancia y de la inductancia equivalentes.)

13. Tres inductores L y dos capacitores C idénticos están conectados en un circuito de dos espiras como el de la figura 36-26. *a*) Suponga que las corrientes son iguales a las de la figura 36-26*a*. ¿Qué corriente pasa por el inductor situado en medio? Escriba las ecuaciones de las mallas y pruebe que las satisface siempre que la corriente oscile con una frecuencia angular $\omega = 1/\sqrt{LC}$. *b*) Ahora, suponga que las corrientes son como las de la figura 36-26*b*. ¿Cuál es la corriente del inductor intermedio? Escriba las ecuaciones de las mallas y pruebe que las satisface a condición de que la corriente oscile con una frecuencia angular $\omega = 1/\sqrt{3LC}$. *c*) Dado que el circuito puede oscilar en dos frecuencias distintas, demuestre la imposibilidad de reemplazar este circuito de dos mallas por un equivalente LC de una malla.

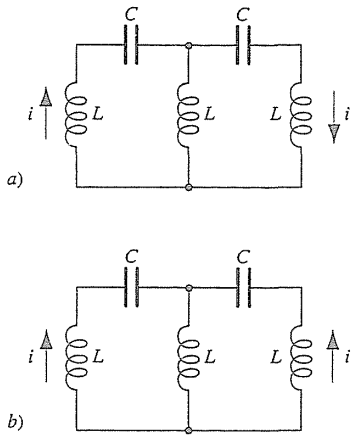


FIGURA 36-26. Problema 13.

14. *a*) Demuestre que $\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}$ sustituyendo directamente la ecuación 36-40 en la ecuación 36-39. *b*) ¿En qué fracción cambia la frecuencia de oscilación, cuando aumentamos la resistencia de 0 a 100 Ω en un circuito donde $L = 4.4$ H y $C = 7.3$ μF?

15. En un circuito amortiguado LC, demuestre que la fracción de la energía perdida por ciclo de oscilación, $\Delta U/U$, está dada con gran aproximación por $2\pi R/\omega L$. A la magnitud $\omega L/R$ también se le llama Q (calidad) del circuito. Un circuito con "Q alta" tiene baja resistencia y pierde poca energía fraccional por ciclo ($= 2\pi/Q$).

16. Suponga que en un circuito amortiguado LC la amplitud de las oscilaciones de carga disminuye a la mitad de su valor inicial tras n ciclos. Demuestre que la reducción fraccional en la frecuencia de resonancia, causada por la presencia del resistor, está dada con gran aproximación por

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{0.0061}{n^2},$$

que no depende de L, C ni de R.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Un solenoide cilíndrico real tiene una longitud l, un diámetro $d = 0.10l$ y n vueltas por unidad de longitud. Suponiendo que dentro del solenoide el campo magnético en los puntos fuera del eje se describen con mucha precisión mediante la expresión exacta a lo largo del eje (Ec. 33-27). Calcule numéricamente la inductancia del solenoide. Compare su respuesta con la aproximación ideal del solenoide. En este resultado numérico no se incluyó la variación del campo en los puntos fuera del eje. ¿Produce ello una respuesta demasiado grande o pequeña?

2. Calcule la inductancia de una espira plana de alambre con radio R. Suponga que el alambre tiene un radio $r = 0.010R$ y que es insignificante la contribución a la inductancia proveniente del campo magnético en su interior.

Withdrawn

CAPÍTULO 37

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Los circuitos que contienen corrientes alternas *(abreviados generalmente como CA) se emplean en los sistemas de distribución de energía eléctrica, en los radios, en los televisores y en otros aparatos de comunicación, así como en una gran variedad de motores eléctricos. La designación "alterna" significa que la corriente cambia de dirección, alternando periódicamente de una dirección a otra. Casi siempre trabajamos con corrientes que varían senoidalmente con el tiempo; sin embargo, como vimos en páginas anteriores al tratar el tema del movimiento ondulatorio, las formas de onda complejas pueden verse como una combinación de ondas senoidales (mediante el análisis de Fourier), y por analogía se puede entender el comportamiento de los circuitos que tienen corrientes de dependencia arbitraria de tiempo, si antes conocemos el comportamiento de los circuitos que tienen corrientes que varían senoidalmente con el tiempo.*

En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento de los circuitos simples que contienen resistores, inductores y capacitores, cuando existe una fuente de fuerza electromotriz que varía en forma senoidal.

37-1 CORRIENTES ALTERNAS

En la sección 36-7 examinamos un circuito *RLC* en serie, concentrándonos en su comportamiento cuando está en resonancia; en esta situación, la frecuencia de la fuerza electromotriz de excitación es igual a la frecuencia natural del oscilador *LC*. Aquí vamos a examinar el mismo circuito, donde la fuerza de excitación puede estar lejos de la resonancia. Por lo regular, los circuitos *LC* tienen frecuencias de resonancia en el intervalo de kHz a Mhz; en estos casos, la fuerza electromotriz de excitación suministrada por las compañías eléctricas de Estados Unidos, suele ser de 60 Hz. Nuestro enfoque general en este capítulo es válido con cualquier frecuencia de excitación e incluye la resonancia como un caso especial.

Puede suponerse que la fuerza electromotriz de excitación se origina en un generador del tipo descrito en el capítulo 34 (Fig. 34-13). El generador produce una fuerza electromotriz que varía senoidalmente (Fig. 34-14); ésta puede escribirse así

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_m \operatorname{sen} \omega t, \qquad (37\text{-}1)$$

donde $\mathscr{E}_m$ es la amplitud de la fuerza electromotriz variable, y ω, su frecuencia angular (en rad/s), relacionada con la frecuencia f (en Hz) mediante $\omega = 2\pi f$. En un circuito el símbolo de esta fuente de fuerza electromotriz variable con el tiempo es ——⊙——. A medida que dicha fuerza varía entre los valores positivo y negativo en cada ciclo, la corriente en este circuito cambia de dirección. A este circuito lo llamaremos circuito de *corriente alterna* (CA).

En este capítulo nos proponemos entender cuál es el efecto de aplicar una fuerza electromotriz alterna, como la de la ecuación 37-1, a un circuito que contiene resistores, inductores y capacitores. Existen muchas formas de conectar estos elementos en un circuito; a manera de ejemplo, para llevar a cabo el análisis de los circuitos de corriente alterna, vamos a describir en este capítulo el circuito *RLC* en serie que aparece en la figura 37-1, donde un resistor *R*, un inductor *L* y un capacitor *C* están conectados en serie a través de una fuerza electromotriz alterna como la de la figura 37-1.

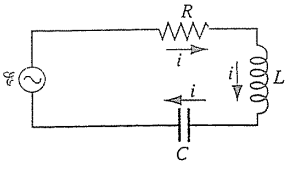


FIGURA 37-1. Circuito de una malla, que consta de un resistor, un inductor y un capacitor. Un generador suministra una fuente de fuerza electromotriz alterna que crea una corriente también alterna.

La corriente varía de manera irregular con el tiempo durante un pequeño intervalo, después de aplicar inicialmente la fuerza electromotriz al circuito. Estas variaciones, denominadas *transitorias,* desaparecen pronto, tras lo cual descubrimos que *la corriente varía senoidalmente con la misma frecuencia angular que la fuente de fuerza electromotriz.* Suponemos que examinamos el circuito una vez establecida esta condición, donde la corriente puede escribirse como

$$i = i_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi), \qquad (37\text{-}2)$$

donde i_m es la *amplitud de la corriente* (su magnitud máxima) y ϕ es una constante o ángulo de fase que indica la relación de fase entre $\mathscr{E}$ e i. (Nótese que hemos supuesto una constante de fase de 0 en la Ec. 37-1, para la fuerza electromotriz. Nótese asimismo que escribimos la constante en la Ec. 37-2 con un signo negativo; es la opción habitual cuando se habla de la relación de fase entre la corriente y la fuerza electromotriz.) La frecuencia angular ω en la ecuación 37-2 es igual a la de la ecuación 37-1.

Suponemos que se conocen $\mathscr{E}_m$, ω, R, L y C. El objetivo del cálculo es encontrar i_m y ϕ, a fin de que la ecuación 37-2 caracterice completamente la corriente. Nos servimos de un método general con el circuito *RLC* en serie; puede usarse un procedimiento similar para analizar otros circuitos más complicados (que contienen elementos en varias combinaciones en serie y en paralelo). También puede aplicarse a fuerzas electromotrices no senoidales, porque fuerzas electromotrices más complejas se escriben a veces en función de fuerzas electromotrices senoidales, por medio de las técnicas del análisis de Fourier (Sec. 18-7), y la corriente resultante puede considerarse, asimismo, como la superposición de muchos términos de la forma de la ecuación 37-2. Por tanto, es indispensable entender el circuito *RLC* en serie, excitado por una fuerza electromotriz senoidal, si queremos comprender el comportamiento dependiente del tiempo en todos los circuitos.

37-2 TRES ELEMENTOS SEPARADOS

Antes de analizar el circuito de la figura 37-1, conviene explicar el efecto individual de los tres elementos frente a una corriente alterna como la de la ecuación 37-2. Supondremos que se trata de elementos ideales; por ejemplo, el inductor sólo tiene inductancia y no resistencia ni capacitancia.

Un elemento resistivo

En la figura 37-2*a* vemos un resistor en una sección de un circuito, donde la corriente i (dada por la Ec. 37-2) ha sido producida por medios que no aparecen en esta figura. Definimos ΔV_R $(= V_a - V_b)$ como la diferencia de potencial en el resistor y entonces podemos escribir

$$\Delta V_R = iR = i_m R \operatorname{sen}(\omega t - \phi). \qquad (37\text{-}3)$$

La comparación de las ecuaciones 37-2 y 37-3 muestra que las magnitudes ΔV_R que varían con el tiempo e i *están en fase*: alcanzan su valor máximo simultáneamente. Esta relación se indica gráficamente en la figura 37-2*b*.

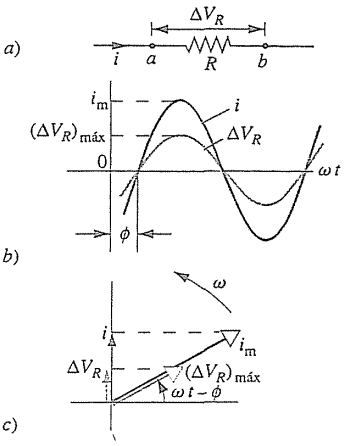


FIGURA 37-2. *a*) Un resistor en un circuito de corriente alterna. *b*) La corriente y la diferencia de potencial en el resistor se hallan en fase. *c*) Diagrama de fasores que representa la corriente y la diferencia de potencial.

La figura 37-2*c* ofrece otra manera de observar la situación. Se le llama *diagrama de fasores*: los fasores, representados por flechas abiertas, giran en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, con una frecuencia angular ω alrededor del origen. Los fasores tienen las siguientes propiedades: 1) su longitud es proporcional al valor *máximo* de la magnitud alternante en cuestión, es decir, $(\Delta V_R)_{máx} = i_m R$ para la diferencia de potencial según la ecuación 37-3 e i_m para la corriente según la ecuación 37-2; 2) la proyección de un fasor en el eje vertical nos da el valor *instantáneo* de la magnitud alternante en cuestión. Las flechas en el eje vertical representan las magnitudes ΔV_R y la i que varían con el tiempo, como en las ecuaciones 37-2 y 37-3, respectivamente. Se deduce que ΔV_R e i están en fase, del hecho de que sus fasores se hallan a lo largo de la misma línea en la figura 37-2*c*.

El diagrama de fasores se parece mucho al de la figura 17-4, donde hicimos la conexión entre el movimiento circular uniforme y el movimiento armónico simple. El lector recordará que, en cualquier eje, la proyección de una partícula que describe un movimiento circular uniforme origina un desplazamiento que varía senoidalmente, en analogía con el movimiento armónico simple. Aquí, a medida que los fasores giran, su proyección en el eje vertical produce una corriente o voltaje de variación senoidal. Siga la rotación de los fasores en la figura 37-2*c* y se convencerá de que este diagrama describe en forma completa y correcta las ecuaciones 37-2 y 37-3.

Un elemento inductivo

La figura 37-3*a* muestra parte de un circuito que contiene solamente un inductor. La diferencia de potencial ΔV_L $(= V_a - V_b)$ en el inductor está relacionada con la corriente mediante la ecuación 36-2:

$$\Delta V_L = L\frac{di}{dt} = Li_m\omega \cos(\omega t - \phi), \qquad (37\text{-}4)$$

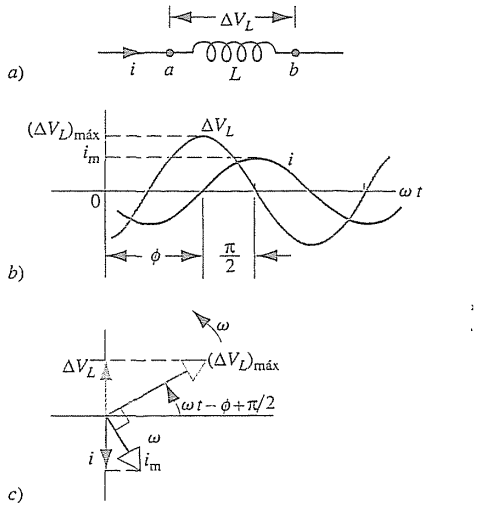


FIGURA 37-3. *a*) Un inductor en un circuito de corriente alterna. *b*) La corriente se rezaga 90° con la diferencia de potencial en el inductor. *c*) Diagrama de fasores que representa la corriente y la diferencia de potencial.

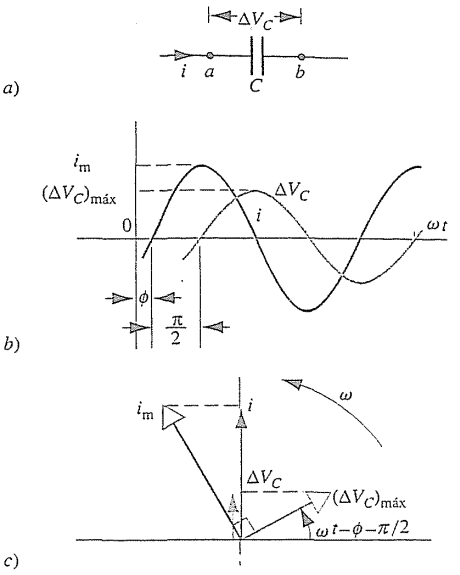


FIGURA 37-4. *a*) Capacitor en un circuito de corriente alterna. *b*) La corriente aventaja 90° la diferencia de potencial en el capacitor. *c*) Diagrama de fasores que representa la corriente y la diferencia de potencial.

la cual obtenemos al derivar la corriente en la ecuación 37-2. La identidad geométrica $\cos\theta = \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)$ nos permite escribir la ecuación 37-4 así

$$\Delta V_L = Li_m\omega \operatorname{sen}(\omega t - \phi + \pi/2). \qquad (37\text{-}5)$$

La comparación de las ecuaciones 37-2 y 37-5 indica que las magnitudes que varían con el tiempo ΔV_L e i no están en fase; se hallan un cuarto de ciclo fuera de fase, con *i detrás de* ΔV_L. Comúnmente se dice que la corriente *se encuentra rezagada* 90° en un inductor respecto a la diferencia de potencial. Esto lo vimos en la figura 37-3*b*, que es una gráfica de las ecuaciones 37-2 y 37-5. Nótese que, con el transcurso del tiempo, i alcanza su valor máximo un cuarto de ciclo *después* de ΔV_L.

Esta relación de fase entre i y ΔV_L se indica en el diagrama de fasores de la figura 37-3*c*. Conforme el fasor gira en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, se observa que el fasor i sigue (es decir, *se rezaga*) al fasor ΔV_L en un cuarto de ciclo.

Al analizar los circuitos de corriente alterna, conviene definir la *reactancia inductiva* X_L:

$$X_L = \omega L, \qquad (37\text{-}6)$$

en función de lo cual la ecuación 37-5 puede reescribirse como

$$\Delta V_L = i_m X_L \operatorname{sen}(\omega t - \phi + \pi/2). \qquad (37\text{-}7)$$

Al comparar las ecuaciones 37-3 y 37-7 vemos que las unidades de X_L en el SI deben de ser las mismas que las de R, o sea el ohm. Esto se aprecia fácilmente al comparar la ecuación 37-6 con la expresión de la constante inductiva de tiempo $\tau_L = L/R$. Pese a que ambas se miden en ohms, la reactancia y la resistencia no son idénticas.

De acuerdo con la ecuación 37-7, el valor máximo de ΔV_L es

$$(\Delta V_L)_{máx} = i_m X_L. \qquad (37\text{-}8)$$

Un elemento capacitivo

La figura 37-4*a* muestra una parte de un circuito que contiene solamente un capacitor. Una vez más, la corriente i dada por la ecuación 37-2 se ha creado con medios que no aparecen en la figura.* Supongamos que la carga de la placa de la izquierda es q, de manera que una corriente positiva que entra produce un incremento en q, es decir, $i = dq/dt$ significa que $dq > 0$ cuando $i > 0$. La diferencia de potencial ΔV_C ($= V_a - V_b$) en el capacitor está dada por

$$\Delta V_C = \frac{q}{C} = \frac{\int i\,dt}{C}. \qquad (37\text{-}9)$$

Al integrar la corriente i dada por la ecuación 37-2, tenemos

$$\Delta V_C = -\frac{i_m}{\omega C}\cos(\omega t - \phi)$$

$$= \frac{i_m}{\omega C}\operatorname{sen}(\omega t - \phi - \pi/2), \qquad (37\text{-}10)$$

donde hemos utilizado la identidad trigonométrica $\cos\theta = -\operatorname{sen}(\theta - \pi/2)$.

* Al principio tal vez sea difícil concebir el capacitor como parte de un circuito portador de corriente; claro que la carga no fluye por este capacitor. Conviene considerar el flujo de carga en esta forma: la corriente i lleva la carga q a la placa de la izquierda del capacitor; así que una carga $-q$ debe fluir hacia la placa de la derecha del circuito que esté más allá del capacitor a la derecha. Este flujo de carga $-q$ de derecha a izquierda equivale enteramente a un flujo de carga $+q$ de izquierda a derecha, que es idéntico al flujo de corriente en la izquierda del capacitor. Así pues, la corriente en un lado del capacitor puede aparecer en el otro, aun cuando no haya una trayectoria conductora entre las dos placas.

TABLA 37-1 Relaciones de fase y de amplitud para las corrientes y los voltajes alternos

Elemento del circuito	*Símbolo*	*Impedancia*[a]	*Fase de la corriente*	*Relación de amplitud*
Resistor	R	R	En fase con ΔV_R	$(\Delta V_R)_{máx} = i_m R$
Inductor	L	X_L	Se rezaga 90° con ΔV_L	$(\Delta V_L)_{máx} = i_m X_L$
Capacitor	C	X_C	Se adelanta 90° respecto a ΔV_C	$(\Delta V_C)_{máx} = i_m X_C$

[a]Muchos estudiantes norteamericanos memorizan las relaciones de fase mediante el mnemónico "ELI the ICE man", donde L y C indican la inductancia y la capacitancia; E, el voltaje; I, la corriente. Así, en un circuito inductivo (ELI) la corriente (I) se rezaga con el voltaje (E) y en un circuito capacitivo (ICE) la corriente (I) se adelanta al voltaje (E).

[a]*Impedancia* es el término genérico que abarca la resistencia y la reactancia

La comparación de las ecuaciones 37-2 y 37-10 nos permite ver que i y ΔV_C están 90° fuera de fase, con *i adelante de* ΔV_C. La figura 37-4*b* muestra a i y a ΔV_C graficados fuera de fase, en función del tiempo; obsérvese que i alcanza su máximo un cuarto de ciclo o 90° *antes* que ΔV_C. En forma equivalente, podemos decir que la corriente *va adelante* 90° de la diferencia de potencial en un capacitor.

La relación de fase se indica en el diagrama de fasores de la figura 37-4*c*. A medida que los fasores giran en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, es evidente que el fasor i va delante del fasor ΔV_C un cuarto de ciclo.

En analogía con la reactancia inductiva, conviene definir la *reactancia capacitiva* X_C:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \tag{37-11}$$

y a partir de esta expresión podemos reescribir la ecuación 37-10 como

$$\Delta V_C = i_m X_C \operatorname{sen}(\omega t - \phi - \pi/2). \tag{37-12}$$

Al comparar las figuras 37-3 y 37-12, vemos que la unidad de X_C también es el ohm. A esta conclusión se llega también comparando la ecuación 37-11 con la expresión $\tau_C = RC$ referentes a la constante capacitiva de tiempo.

Conforme a la ecuación 37-12, el valor máximo de ΔV_C es

$$(\Delta V_C)_{máx} = i_m X_C. \tag{37-13}$$

La tabla 37-1 resume el resultado individual obtenido de los tres elementos del circuito.

PROBLEMA RESUELTO 37-1. En la figura 37-3*a*, supongamos que $L = 230$ mH, $f = 60$ Hz y $(\Delta V_L)_{máx} = 36$ V. *a*) Calcule la reactancia inductiva X_L. *b*) Obtenga la amplitud de la corriente del circuito.

Solución *a*) Con base en la ecuación 37-6,

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = (2\pi)(60\text{ Hz})(230 \times 10^{-3}\text{ H}) = 87\ \Omega.$$

b) Según la ecuación 37-8, la amplitud de la corriente es

$$i_m = \frac{(\Delta V_L)_{máx}}{X_L} = \frac{36\text{ V}}{87\ \Omega} = 0.41\text{ A}.$$

Vemos que, aunque una reactancia no es una resistencia, la reactancia inductiva desempeña la misma función en un inductor que la resistencia en un resistor. Nótese que si duplicáramos la frecuencia, la reactancia inductiva también se duplicaría y la amplitud de la corriente se reduciría a la mitad. También entendemos lo anterior con un razonamiento físico: para conseguir el mismo valor de ΔV_L debemos modificar la corriente con la misma rapidez ($\Delta V_L = L\, di/dt$). Si la frecuencia se duplica, se corta a la mitad el tiempo de cambio, a fin de hacer lo mismo con la corriente máxima. En síntesis: cuanto mayor sea la frecuencia en los inductores, más grande será la reactancia.

PROBLEMA RESUELTO 37-2. En la figura 37-4*a*, supongamos que $C = 15\ \mu$F, $f = 60$ Hz y $(\Delta V_C)_{máx} = 36$ V. *a*) Determine la reactancia capacitiva X_C. *b*) Calcule la amplitud de la corriente en este circuito.

Solución *a*) A partir de la ecuación 37-11 tenemos

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{(2\pi)(60\text{ Hz})(15 \times 10^{-6}\text{ F})} = 177\ \Omega.$$

b) Conforme a la ecuación 37-13, en el caso de la amplitud de la corriente tenemos

$$i_m = \frac{(\Delta V_C)_{máx}}{X_C} = \frac{36\text{ V}}{177\ \Omega} = 0.20\text{ A}.$$

Adviértase que, si duplicáramos la frecuencia, la reactancia capacitiva disminuiría a la mitad de su valor y la amplitud de corriente se duplicaría. Podemos entender esto con un razonamiento físico: para conseguir el mismo valor de ΔV_C, debemos aplicarle la misma carga al capacitor ($\Delta V_C = q/C$). Si la frecuencia se duplica, se dispondrá de la mitad del tiempo para suministrar la carga que duplique el valor máximo de la corriente. En síntesis: cuanto más alta sea la frecuencia en los capacitores, menor será la reactancia.

37-3 EL CIRCUITO *RLC* DE UNA MALLA SIMPLE

Una vez concluido el estudio de los elementos individuales R, L y C, retomamos el análisis del circuito de la figura 37-1, donde se encuentran los tres. La fuerza electromotriz está dada por la ecuación 37-1,

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \operatorname{sen} \omega t,$$

y la corriente del circuito tiene la forma de la ecuación 37-2,

$$i = i_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi).$$

Nuestro propósito es determinar i_m y ϕ.

Comenzamos aplicando la regla de la malla (Sec. 31-3) al circuito de la figura 37-1; de ese modo obtenemos $\mathscr{E} - \Delta V_R - \Delta V_L - \Delta V_C = 0$, o sea

$$\mathscr{E} = \Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C. \tag{37-14}$$

La ecuación 37-14 puede resolverse para calcular la amplitud de la corriente i_m y la fase ϕ, aplicando varias técnicas: un análisis trigonométrico, un análisis gráfico por medio de fasores y un análisis diferencial.

Análisis trigonométrico

Hemos obtenido ya la relación entre la diferencia de potencial en cada elemento y la corriente que fluye por ellos. Ahora vamos a sustituir las ecuaciones 37-3, 37-7 y 37-12 en la ecuación 37-14; con ello obtendremos

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_m \operatorname{sen}\omega t &= i_m R \operatorname{sen}(\omega t - \phi)\\ &\quad + i_m X_L \operatorname{sen}(\omega t - \phi + \pi/2)\\ &\quad + i_m X_C \operatorname{sen}(\omega t - \phi - \pi/2),\end{aligned} \tag{37-15}$$

donde hemos sustituido la fuerza electromotriz por la ecuación 37-1. Empleando las identidades trigonométricas, la ecuación 37-15 puede escribirse

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_m \operatorname{sen}\omega t &= i_m R \operatorname{sen}(\omega t - \phi) + i_m X_L \cos(\omega t - \phi)\\ &\quad - i_m X_C \cos(\omega t - \phi)\\ &= i_m[R \operatorname{sen}(\omega t - \phi)\\ &\quad + (X_L - X_C)\cos(\omega t - \phi)].\end{aligned} \tag{37-16}$$

que se reduce a (Ej. 12)

$$\mathscr{E}_m \operatorname{sen}\omega t = i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\,\operatorname{sen}\omega t \tag{37-17}$$

a condición de que escojamos

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \tag{37-18}$$

La amplitud de la corriente se obtiene directamente de la ecuación 37-17:

$$i_m = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \tag{37-19}$$

Con esto se termina el análisis del circuito *RLC* en serie, porque hemos logrado el objetivo de expresar la amplitud de la corriente i_m y la fase ϕ a partir de los parámetros del circuito ($\mathscr{E}_m$, ω, R, L y C). Nótese que la fase ϕ no depende de la amplitud $\mathscr{E}_m$ de la fuerza electromotriz aplicada. Al modificar $\mathscr{E}_m$ se cambia i_m, pero no ϕ, la *escala* del resultado cambia, no así su *naturaleza*.

A la magnitud en el denominador de la ecuación 37-19 se le llama *impedancia* Z del circuito *RLC* en serie:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \tag{37-20}$$

y, por ello, la ecuación 37-19 se puede escribir

$$i_m = \frac{\mathscr{E}_m}{Z}, \tag{37-21}$$

lo cual nos recuerda la relación $i = \mathscr{E}/R$ en redes resistivas de malla simple, con fuerza electromotriz estacionaria. La unidad de impedancia en el SI es naturalmente el ohm.

La ecuación 37-19 da la amplitud de corriente de la ecuación 36-43, y la figura 36-13 es una gráfica de la ecuación 37-19. La corriente i_m alcanza su valor máximo cuando la impedancia Z tiene su valor mínimo R, lo cual sucede cuando $X_L = X_C$, o sea

$$\omega L = 1/\omega C,$$

así que

$$\omega = 1/\sqrt{LC}, \tag{37-22}$$

que es la condición de *resonancia* dada en la ecuación 36-44. Aunque la ecuación 37-19 es un resultado general válido con cualquier frecuencia de excitación, incluye como caso especial, la condición de resonancia.

Análisis gráfico

Es muy ilustrativo utilizar un diagrama de fasores para analizar el circuito *RLC* en serie. En la figura 37-5*a* se incluye un fasor que representa la corriente. Su longitud es i_m, y su proyección en el eje vertical, $i_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$; ésta es la corriente i que varía con el tiempo. En la figura 37-5*b* se dibujaron los fasores que representan diferencias de potencial individuales en R, L y C. Nótese su valor máximo y sus proyecciones que varían con el tiempo en el eje vertical. Asegúrese de observar que las fases coinciden con las conclusiones extraídas de la sección 37-2: ΔV_R se halla en fase con la corriente, ΔV_L *se adelanta* 90° a ella y ΔV_C *se rezaga* 90°.

De acuerdo con la ecuación 37-14, la suma *algebraica* de las proyecciones (instantáneas) de ΔV_R, ΔV_L y ΔV_C en el eje vertical da el valor máximo (también instantáneo) de $\mathscr{E}$. Por otra parte, afirmamos que la suma *vectorial* de las amplitudes

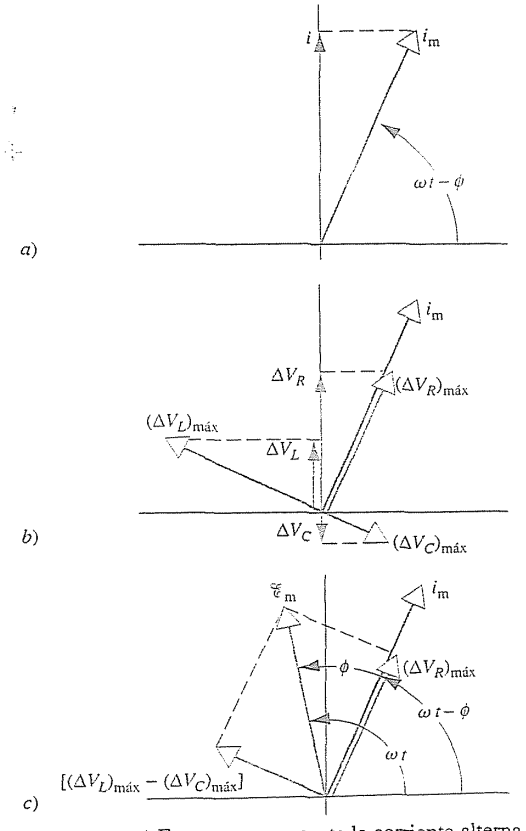


FIGURA 37-5. *a)* Fasor que representa la corriente alterna en el circuito *RLC* de la figura 37-1. *b)* Fasores que representan las diferencias de potencial en el resistor, capacitor e inductor. Nótense sus diferencias de fase respecto a la corriente. *c)* Se incluyó un fasor que representa la fuerza electromotriz interna.

de los fasores $(\Delta V_R)_{máx}$, $(\Delta V_L)_{máx}$, y $(\Delta V_C)_{máx}$, producen un fasor cuya amplitud es la $\mathscr{E}_m$ de la ecuación 37-1. La proyección de $\mathscr{E}_m$ sobre el eje vertical es la variación con el tiempo de $\mathscr{E}$ de la ecuación 37-1, es decir, es $\Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C$, tal como lo señala la ecuación 37-14. En las operaciones con vectores, la suma (algebraica) de las proyecciones de cualquier número de vectores sobre una línea recta es igual a la proyección sobre ella de la suma (vectorial) de dichos vectores.

En la figura 37-5*c* hemos formado primero la suma vectorial de $(\Delta V_L)_{máx}$ y $(\Delta V_C)_{máx}$, que es el fasor $(\Delta V_L)_{máx} - (\Delta V_C)_{máx}$. A continuación formamos la suma de este fasor con $(\Delta V_R)_{máx}$. Como los dos fasores están en ángulo recto, la amplitud de su suma, que es la del fasor $\mathscr{E}_m$, es

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_m &= \sqrt{[(\Delta V_R)_{máx}]^2 + [(\Delta V_L)_{máx} - (\Delta V_C)_{máx}]^2} \\ &= \sqrt{(i_m R)^2 + (i_m X_L - i_m X_C)^2} \\ &= i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \end{aligned} \tag{37-23}$$

utilizando las ecuaciones 37-3, 37-8 y 37-13 para reemplazar la amplitud de los fasores. La ecuación 37-23 es idéntica a la ecuación 37-19, la cual obtuvimos mediante el análisis trigonométrico.

Como se aprecia en la figura 37-5*c*, ϕ es el ángulo entre los fasores i_m y $\mathscr{E}_m$, y comprobamos a partir de esa figura

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{(\Delta V_L)_{máx} - (\Delta V_C)_{máx}}{(\Delta V_R)_{máx}} \\ &= \frac{i_m(X_L - X_C)}{i_m R} = \frac{X_L - X_C}{R}, \end{aligned} \tag{37-24}$$

la cual es idéntica a la ecuación 37-18.

Hemos trazado arbitrariamente la figura 37-5*b* con $X_L > X_C$, esto es, supusimos que el circuito de la figura 37-1 es más inductivo que capacitivo. En esta suposición, i_m *se rezaga de* $\mathscr{E}_m$ (aunque no por un cuarto de ciclo, como en el caso del elemento puramente inductivo de la Fig. 37-3). El ángulo de fase ϕ en la ecuación 37-23 (y, por tanto, también en la Ec. 37-2) es positivo, pero menor que + 90°.

Por el contrario, si tuviéramos $X_C > X_L$, el circuito sería más capacitivo que inductivo e i_m se adelantaría a $\mathscr{E}_m$ (aunque no por un cuarto de ciclo, como en el caso del elemento puramente capacitivo de la Fig. 37-4). En conformidad con esta transición de rezago a adelantamiento, el ángulo ϕ de la ecuación 37-23 (y, por lo mismo, en la Ec. 37-2) se volvería automáticamente negativo.

Otra forma de interpretar la condición de resonancia aprovecha el diagrama de fasores de la figura 37-5. En resonancia, $X_L = X_C$ y, conforme a la ecuación 37-24, $\phi = 0$. En este caso los fasores $(\Delta V_L)_{máx}$ y $(\Delta V_C)_{máx}$ de la figura 37-5 son iguales y opuestos; así que i_m está en fase con $\mathscr{E}_m$.

Recuerde una vez más que, aunque las técnicas que hemos expuesto aquí son válidas con *cualquier* circuito de corriente alterna, lo resultados se aplican *exclusivamente* al circuito *RLC* en serie. Más aún, no olvide que estamos examinando el circuito sólo en el estado estacionario, una vez desaparecidas las variaciones transitorias de corta duración.

PROBLEMA RESUELTO 37-3. En la figura 37-1, supongamos que $R = 160\ \Omega$, $C = 15\ \mu F$, $L = 230$ mH, $f = 60$ Hz y $\mathscr{E}_m = 36$ V. Calcule *a*) la reactancia inductiva X_L, *b*) la reactancia capacitiva X_C, *c*) la impedancia Z del circuito, *d*) la amplitud de la corriente i_m y *e*) la constante de fase ϕ.

Solución *a*) $X_L = 87\ \Omega$, como en el problema resuelto 37-1. *b*) $X_C = 177\ \Omega$, como en el problema resuelto 37-2. Nótese que $X_C > X_L$, de manera que el circuito es más capacitivo que inductivo. *c*) De acuerdo con la ecuación 37-20,

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{(160\ \Omega)^2 + (87\ \Omega - 177\ \Omega)^2} = 184\ \Omega. \end{aligned}$$

d) De acuerdo con la ecuación 37-21,

$$i_m = \frac{\mathscr{E}_m}{Z} = \frac{36\text{ V}}{184\ \Omega} = 0.196\text{ A}.$$

e) De acuerdo con la ecuación 37-24 tenemos

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{87\ \Omega - 177\ \Omega}{160\ \Omega} = -0.563.$$

Así pues, obtenemos

$$\phi = \tan^{-1}(-0.563) = -29.4°.$$

Una constante de fase negativa es adecuada para un circuito capacitivo, como se infiere de la tabla 37-1 y de la figura 37-5.

PROBLEMA RESUELTO 37-4. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia en Hz del circuito del problema resuelto 37-3? *b*) ¿Cuál es la amplitud de la corriente en resonancia?

Solución *a*) Con base en la ecuación 37-22,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.23\text{ H})(15 \times 10^{-6}\text{ F})}} = 538\text{ rad/s}.$$

Entonces

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 86\text{ Hz}.$$

b) En resonancia, $X_L = X_C$ y por tanto $Z = R$. Según la ecuación 37-21,

$$i_m = \frac{\mathscr{E}_m}{R} = \frac{36\text{ V}}{160\ \Omega} = 0.23\text{ A}.$$

La frecuencia de 60 Hz del problema resuelto 37-3 se aproxima bastante a la resonancia.

Análisis diferencial (opcional)

Con $\Delta V_C = q/C$ y $\Delta V_L = L\,di/dt$, la ecuación 37-14 puede escribirse así

$$\mathscr{E} = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}, \tag{37-25}$$

o, utilizando $i = dq/dt$, junto con la ecuación 37-1, para sustituirla por la fuerza electromotriz,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathscr{E}_m \operatorname{sen}\omega t. \tag{37-26}$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la del oscilador mecánico forzado que se describió en la sección 17-8 (Ec. 17-42).

Haciendo las analogías

$$x \rightarrow q, \quad m \rightarrow L, \quad b \rightarrow R \quad \text{y} \quad k \rightarrow 1/C,$$

que también empleamos en las secciones 36-5 a 36-7, inmediatamente podemos adaptar al oscilador electromagnético (resistivo) el resultado de la ecuación 17-43 al oscilador mecánico amortiguado forzado:

$$q = -\frac{\mathscr{E}_m}{\omega Z}\cos(\omega t - \phi), \tag{37-27}$$

donde, como debería demostrar el lector, ωZ es G tal como se define en la ecuación 17-44. Al diferenciar la ecuación 37-27 para calcular la corriente, obtenemos la ecuación 37-1, $i = i_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$, con $i_m = \mathscr{E}_m/Z$. También debería demostrar que la fase β, dada por la ecuación 17-45, se reduce a la ecuación 37-18, cuando reemplazamos las magnitudes mecánicas por sus análogos electromagnéticos.

La búsqueda de analogías, tal como lo hemos hecho entre la resonancia mecánica y la electromagnética, es un método útil que no sólo permite conocer mejor los fenómenos nuevos, sino que ahorra trabajo en su análisis, pues los resultados matemáticos conseguidos con un sistema pueden adaptarse para el análisis de otro. Reconocemos las características comunes de los dos sistemas: un elemento senoidal de excitación; un elemento inercial; éste resiste los cambios de movimiento (m, que resiste los cambios de v y L, que resiste los cambios de i); un elemento disipativo (b y R, cada parte de los términos lineales en la rapidez de cambio de la coordenada), y un elemento restaurador (k y $1/C$, cada parte de los términos lineales en la coordenada). Los rasgos comunes de ambas soluciones son una oscilación senoidal estacionaria con una frecuencia de excitación, tras un periodo inicial de transitorios de decaimiento rápido; una diferencia de fase entre la coordenada oscilatoria y de excitación que no depende de la amplitud de excitación, y una resonancia a cierta frecuencia, cuyo valor se determina sólo mediante los elementos inerciales y restauradores. ■

37-4 POTENCIA EN LOS CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

En un circuito eléctrico, la energía es suministrada por la fuente de fuerza electromotriz, almacenada en los elementos capacitivos e inductivos y disipada en los elementos resistivos. La conservación de energía requiere lo siguiente: en un momento particular, la rapidez con que la fuente de fuerza electromotriz genera energía ha de ser igual a la rapidez con que se almacena esta energía en los capacitores e inductores, más la rapidez con que se disipa en los resistores. (Suponemos elementos capacitivos e inductivos ideales que no tengan resistencia interna.)

Supongamos que un resistor está aislado (como en la Fig. 37-2) en un circuito de corriente alterna, donde la corriente está dada por la ecuación 37-2. (Lo examinamos en su estado estacionario, bastante tiempo después de conectarlo a la fuente de fuerza electromotriz.) Igual que en un circuito de corriente directa, la rapidez con que se disipa la energía (calentamiento Joule) en un resistor de un circuito de corriente alterna está dada por

$$P = i^2R = i_m^2 R \operatorname{sen}^2(\omega t - \phi). \tag{37-28}$$

La energía disipada en el resistor fluctúa con el tiempo, lo mismo que la energía almacenada en los inductores y capacitores. En la generalidad de los casos en que intervienen corriente alternas, no interesa cómo varía la potencia durante cada ciclo; el interés se centra en la potencia *promedio* disipada durante cualquier ciclo. La energía *promedio* guardada en los inductores y capacitores permanece constante a lo largo de un ciclo completo; en efecto, la energía se transfiere de la fuente de fuerza electromotriz a los resistores, donde se disipa.

Por ejemplo, la compañía eléctrica suministra a nuestros hogares una fuente de CA o una fuerza electromotriz de corriente alterna que varía con una frecuencia de $f = 60$ Hz. Nos cobra la potencia *promedio* que consumimos; no le interesa si tenemos un aparato totalmente resistivo cuya potencia máxima se disipa en fase con la fuente de fuerza electromotriz o un aparato parcialmente capacitivo o inductivo como un motor, donde la corriente máxima (y, por tanto, la potencia máxima) podría ocurrir fuera de fase con la fuerza electromotriz). Si la compañía midiera la energía que utilizamos en un tiempo menor que $\frac{1}{60}$ s, descubriría variaciones en la rapidez con que la consumimos, pero al medirla en un tiempo mayor que $\frac{1}{60}$ s, sólo la rapidez promedio del consumo tiene importancia.

Escribimos la potencia promedio P_{pro} tomando el valor promedio de la ecuación 37-28, por un tiempo largo, en comparación con el periodo de un ciclo. En cada ciclo completo, el valor promedio de sen^2 es $\frac{1}{2}$. Si el número de ciclos incluidos en el promedio es grande, las fracciones de un ciclo carecen de importancia y podemos obtener la potencia promedio sustituyendo sen^2 en la ecuación 37-28 por el valor $\frac{1}{2}$. Entonces la potencia promedio es

$$P_{pro} = \tfrac{1}{2} i_m^2 R, \tag{37-29}$$

que también podemos escribir como

$$P_{pro} = (i_m/\sqrt{2})^2 R. \tag{37-30}$$

La magnitud $i_m/\sqrt{2}$ es igual al valor de la *raíz cuadrada media* de (rcm) de la corriente:

$$i_{rcm} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}. \tag{37-31}$$

Es el resultado que obtendríamos si primero eleváramos al cuadrado la corriente y luego tomásemos su promedio (o media) en un número entero de ciclos y a continuación la raíz cuadrada. (En el Cap. 22 definimos de la misma manera la rapidez molecular rcm.) Conviene escribir la potencia rcm, porque la corriente alterna y los medidores de voltaje están diseñados para indicar los valores rcm. Los 120 V comunes de una instalación eléctrica casera es un valor de este tipo: el voltaje máximo es $\mathscr{E}_m = \sqrt{2}\mathscr{E}_{rcm} = \sqrt{2}(120\text{ V}) = 170\text{ V}$.

A partir de i_{rcm}, la ecuación 37-30 puede escribirse así

$$P_{pro} = i_{rcm}^2 R. \tag{37-32}$$

La ecuación anterior se parece a la expresión $P = i^2R$, que describe la potencia disipada en un resistor dentro de un circuito de corriente directa. Si reemplazamos las corrientes y los voltajes de corriente directa por los valores rcm de las corrientes y voltajes de corriente alterna, las expresiones de es-

ta última referentes a la disipación de energía sirven para obtener la disipación promedio de la corriente alterna.

Potencia en el circuito *RLC* en serie

Hasta ahora hemos examinado la potencia disipada en un resistor aislado que está en un circuito de corriente alterna. A continuación vamos a analizar un circuito completo de corriente alterna desde el punto de vista de la disipación de potencia. Para ello volvemos a escoger como ejemplo el circuito *RLC* en serie.

El trabajo dW efectuado por una fuente de fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ sobre una carga está dado por $dW = \mathscr{E}\, dq$. Entonces, la potencia P $(= dW/dt)$ suministrada por la fuente de fuerza electromotriz es $\mathscr{E}\, dq/dt = \mathscr{E}i$ o, usando las ecuaciones 37-1 y 37-2,

$$P = \mathscr{E}i = \mathscr{E}_m i_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t - \phi). \qquad (37\text{-}33)$$

Rara vez nos interesa esta potencia instantánea, que suele ser una función rápidamente fluctuante del tiempo. Si queremos calcular la potencia *promedio,* recurrimos primero a una identidad trigonométrica a fin de desarrollar el factor sen $(\omega t - \phi)$:

$$\begin{aligned} P &= \mathscr{E}_m i_m \operatorname{sen} \omega t (\operatorname{sen} \omega t \cos \phi - \cos \omega t \operatorname{sen} \phi) \\ &= \mathscr{E}_m i_m (\operatorname{sen}^2 \omega t \cos \phi - \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t \operatorname{sen} \phi). \end{aligned} \qquad (37\text{-}34)$$

Cuando ahora calculamos el promedio en un ciclo completo, el término $\operatorname{sen}^2 \omega t$ nos da el valor $\frac{1}{2}$, en tanto que el término sen ωt cos ωt nos da 0, cosa que el lector debe demostrar (Ej. 16). Así pues, la potencia promedio es

$$P_{pro} = \tfrac{1}{2} \mathscr{E}_m i_m \cos \phi. \qquad (37\text{-}35)$$

Al reemplazar $\mathscr{E}_m$ e i_m por sus valores rcm ($\mathscr{E}_{rcm} = \mathscr{E}_m/\sqrt{2}$ e $i_{rcm} = i_m/\sqrt{2}$), la ecuación 37-35 puede escribirse como

$$P_{pro} = \mathscr{E}_{rcm} i_{rcm} \cos \phi. \qquad (37\text{-}36)$$

A la magnitud cos ϕ en la ecuación 37-36 se le llama *factor de potencia* del circuito de corriente alterna. Evaluémoslo ahora en el circuito *RLC* en serie. Con base en la ecuación 37-18, tan $\phi = (X_L - X_C)/R$, podemos demostrar que

$$\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{Z}. \qquad (37\text{-}37)$$

Según la ecuación 37-36, la potencia suministrada al circuito por la fuente de fuerza electromotriz alcanza su nivel máximo cuando cos $\phi = 1$; esto sucede cuando el circuito es enteramente resistivo, sin que contenga inductores ni capacitores, o está en resonancia cuando $X_L = X_C$; por tanto, $Z = R$. En este caso la potencia promedio es

$$P_{pro} = \mathscr{E}_{rcm} i_{rcm} \text{ (circuito resistivo)}. \qquad (37\text{-}38)$$

Si el circuito es fuertemente inductivo, como sucede frecuentemente con los motores, con los compresores y aparatos afines, la potencia suministrada al circuito puede maximizarse aumentando la capacitancia del circuito. Para ello las compañías eléctricas a menudo ponen capacitores en todo su sistema de transmisión.

PROBLEMA RESUELTO 37-3. Examinemos de nuevo el circuito de la figura 37-1, utilizando los mismos parámetros que en el problema resuelto 37-3: $R = 160\ \Omega$, $C = 15\ \mu$F, $L = 230$ mH, $f = 60$ Hz y $\mathscr{E}_m = 36$ V. Determine *a)* la fuerza electromotriz rcm, *b)* la corriente en rcm, *c)* el factor de potencia y *d)* la potencia promedio disipada en el resistor.

Solución a)

$$\mathscr{E}_{rcm} = \mathscr{E}_m/\sqrt{2} = (36\text{ V})/\sqrt{2} = 25.5\text{ V}.$$

b) En el problema resuelto 37-3 encontramos $i_m = 0.196$ A. Tenemos entonces

$$i_{rcm} = i_m/\sqrt{2} = (0.196\text{ A})/\sqrt{2} = 0.139\text{ A}.$$

c) En el problema resuelto 37-3 comprobamos que la constante de fase ϕ era $-29.4°$. Así pues,

$$\text{factor de potencia} = \cos(-29.4°) = 0.871.$$

d) A partir de la ecuación 37-32 tenemos

$$P_{pro} = i_{rcm}^2 R = (0.139\text{ A})^2(160\ \Omega) = 3.1\text{ W}.$$

Por su parte, la ecuación 37-36 nos da

$$\begin{aligned} P_{pro} &= \mathscr{E}_{rcm} i_{rcm} \cos \phi \\ &= (25.5\text{ V})(0.139\text{ A})(0.871) = 3.1\text{ W}, \end{aligned}$$

en concordancia perfecta. En otras palabras, la potencia promedio disipada en el resistor es igual a la suministrada por la fuerza electromotriz. En efecto, se transfiere energía de esta fuerza electromotriz al circuito resistivo, donde se disipa. Nótese lo siguiente: para concordar los resultados anteriores con dos cifras significativas hubimos de usar tres de ellas con las corrientes y los voltajes. Las ecuaciones 37-32 y 37-36 ofrecen resultados idénticos, sin considerar estos errores numéricos de redondeo.

37-5 EL TRANSFORMADOR (opcional)

En los circuitos de corriente directa, la disipación de potencia en un circuito resistivo está dada por la ecuación 31-21 ($P_R = i\,\Delta V_R = i^2R$). Con determinada exigencia de potencia, podemos escoger una corriente relativamente grande i y una diferencia de potencial relativamente pequeña ΔV_R, o todo lo contrario, a condición de que su producto permanezca constante. Asimismo, en circuitos de corriente alterna totalmente resistivos (en los cuales el factor de potencia, cos ϕ en la Ec. 37-36, es igual a 1), la disipación promedio de la potencia está dada por la ecuación 37-38 ($P_{pro} = i_{rcm}\mathscr{E}_{rcm}$); disponemos de la misma opción respecto a los valores relativos de i_{rcm} y $\mathscr{E}_{rcm}$.

En los sistemas de distribución de energía eléctrica conviene, por razones de seguridad y de un diseño eficiente del equipo, contar con voltajes relativamente bajos en el extremo generador (la planta de energía eléctrica) y en el extremo receptor (el hogar o la fábrica). Por ejemplo, nadie querrá que una tostadora eléctrica o el tren eléctrico de un niño opere a, digamos, 10 kV.

Por el contrario, en la transmisión de energía eléctrica de una planta al consumidor deseamos la corriente práctica *más baja* (y , por tanto, la diferencia de potencial *más grande*), con el fin de minimizar la disipación de energía i^2R en la línea de transmisión. Los valores como $\mathscr{E}_{rcm} = 350$ kV son típicos. Existe, pues, discrepancia entre las exigencias de una transmisión eficientes, por una parte, y la generación y consumos seguros, por la otra.

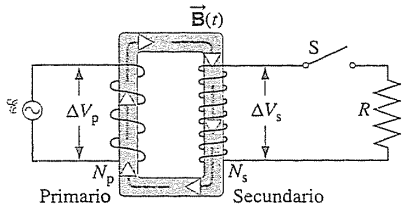


FIGURA 37-6. Un transformador ideal, que muestra dos devanados de bobina en un núcleo de hierro.

Para resolver el problema anterior, se necesita un dispositivo que, tal como lo requieren las consideraciones de diseño, aumente (o disminuya) la diferencia de potencial en un circuito, manteniendo esencialmente constante el producto $i_{rcm}\mathcal{E}_{rcm}$. Nos referimos al *transformador* de corriente alterna de la figura 37-6. Funciona basándose en la ley de inducción de Faraday, el transformador no cuenta con un equivalente de corriente directa de igual simplicidad; por esta razón, los sistemas de distribución de corriente directa, propugnados decididamente por Edison, fueron sustituidos por los sistemas de corriente alterna, que con tanta firmeza defendieron Tesla y otros expertos.*

En la figura 37-6 se incluyen dos bobinas enrolladas alrededor de un núcleo de hierro. El devanado *primario* de N_p vueltas, está conectado a un generador de corriente alterna cuya fuerza electromotriz está dada por $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$ sen ωt. El devanado *secundario*, de N_s vueltas, es un circuito abierto mientras el interruptor S esté abierto, cosa que suponemos por ahora. No fluye corriente por el devanado secundario. Además suponemos la posibilidad de despreciar a todos los elementos disipativos, como la resistencia de los devanados primario y secundario. En realidad, los transformadores bien diseñados y de alta capacidad pueden sufrir pérdidas de apenas 1%; así que nuestra suposición de un transformador ideal es verosímil.

En las condiciones anteriores, el devanado primario es una inductancia pura, como en la figura 37-3*a*. La corriente primaria (muy pequeña), denominada *corriente de magnetización* $i_{mag}(t)$ se rezaga 90° con la diferencia de potencial primaria $\Delta V_p(t)$; el factor de potencia (= cos ϕ en la Ec. 37-36) es cero, por lo cual el generador no suministra potencia alguna al transformador.

Sin embargo, la pequeña corriente alterna primaria $i_{mag}(t)$ induce un flujo magnético alterno $\Phi_B(t)$ en el núcleo de hierro; suponemos que todo este flujo conecta las vueltas de los devanados secundarios. (Es decir, suponemos que todas las líneas del campo magnético forman espiras cerradas dentro del núcleo de hierro y ninguna "escapa" hacia el ambiente.) Conforme a la ley de inductancia de Faraday, la fuerza electromotriz *por vuelta* $\mathcal{E}_T$ (igual a $-d\Phi_B/dt$) es la misma en los devanados primarios y secundarios, por ser iguales los flujos primarios y secundarios. Con base en la raíz cuadrada media podemos escribir

$$\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{\text{primario}} = \left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{\text{secundario}} \qquad (37\text{-}39)$$

o bien

$$(\mathcal{E}_T)_{\text{rcm, primario}} = (\mathcal{E}_T)_{\text{rcm, secundario}}. \qquad (37\text{-}40)$$

En cada devanado, la fuerza electromotriz por vuelta es igual a la diferencia de potencial dividida entre el número de vueltas de él; entonces la ecuación 37-40 puede escribirse así

$$\frac{\Delta V_p}{N_p} = \frac{\Delta V_s}{N_s}. \qquad (37\text{-}41)$$

Aquí ΔV_p y ΔV_s se refieren a las magnitudes raíz cuadrada media (rcm). Al resolver para ΔV_s, obtenemos

$$\Delta V_s = \Delta V_p(N_s/N_p). \qquad (37\text{-}42)$$

Si $N_s > N_p$ (y entonces, $\Delta V_s > \Delta V_p$), estamos refiriéndonos a un *transformador elevador;* si $N_s < N_p$, estaremos refiriéndonos a un *transformador reductor.*

En la exposición anterior, hemos supuesto un circuito abierto secundario, de modo que no se transmite potencia a través del transformador. En cambio, si ahora cerramos el interruptor S, en la figura 37-6, y una situación más práctica: el devanado secundario está conectado a un circuito resistivo R. En el caso general, el circuito incluirá, además, elementos inductivos y capacitivos; pero, por ahora, nos limitaremos a este caso especial de un circuito puramente resistivo.

Ocurren varias cosas cuando cerramos el interruptor S: 1) una corriente rcm i_s aparece en el circuito secundario, con una disipación correspondiente promedio de potencia i_s^2R en el circuito resistivo. 2) La corriente secundaria alterna induce su propio flujo magnético alterno en el núcleo de hierro, flujo que según las leyes de Faraday y de Lenz produce una fuerza electromotriz opuesta en los devanados primarios. 3) Sin embargo, ΔV_p no puede cambiar en respuesta a esta fuerza electromotriz opuesta, pues siempre debe ser igual a la que aporta el generador; el cierre del interruptor S no puede modificar este hecho. 4) Para garantizar esto, una nueva corriente alterna i_p debe aparecer en el circuito primario, siendo magnitud y su constante de fase exactamente la que se requiere para cancelar la fuerza electromotriz contraria que i_s genera en los devanados primarios.

En vez de analizar a fondo el proceso anterior tan complejo, aprovechemos la idea global que nos ofrece el principio de conservación de la energía. En un transformador ideal con un circuito resistivo,

$$i_p\,\Delta V_p = i_s\,\Delta V_s. \qquad (37\text{-}43)$$

Dado que la ecuación 37-42 es válida, esté o no cerrado el interruptor S de la figura 37-6, tenemos entonces

$$i_s = i_p(N_p/N_s) \qquad (37\text{-}44)$$

como la relación de transformación de las corrientes.

Por último, sabiendo que $i_s = \Delta V_s/R$, con las ecuaciones 37-42 y 37-44, se obtiene

$$i_p = \frac{\Delta V_p}{(N_p/N_s)^2 R}, \qquad (37\text{-}45)$$

La ecuación anterior indica que, desde el punto de vista del circuito primario, la resistencia equivalente del circuito secundario no es R sino

$$R_{eq} = (N_p/N_s)^2 R. \qquad (37\text{-}46)$$

* Véase "The Transformer", de John W. Coltman, *Scientific American,* enero de 1988, p. 86.

La ecuación 37-46 sugiere una función más del transformador. Hemos visto que, con una transferencia máxima de energía proveniente de un sitio de fuerza electromotriz ante un circuito resistivo, la resistencia del generador y la del circuito secundario han de ser iguales (Ej. 14 del Cap. 31). La misma relación se da en los circuitos de corriente alterna, salvo que la *impedancia* (y no la resistencia) del generador debe corresponder a la del circuito. Sucede a menudo, como cuando queremos conectar un altavoz a un amplificador, que esta condición no se cumple en absoluto, pues el amplificador tiene gran impedancia y el altavoz una pequeña impedancia. Las impedancias de ambos aparatos puede igualarse acoplándolos mediante un transformador con una razón adecuada de vueltas.

PROBLEMA RESUELTO 37-6. Un transformador en un poste eléctrico opera con $\Delta V_p = 8.5$ kV en el lado primario y suministra energía eléctrica a varias casas cercanas con $\Delta V_s = 120$ V; ambas cantidades se dan en valores de raíz cuadrada media. La rapidez del consumo promedio de energía en las casas a que da servicio el transformador en un momento dado es de 78 kW. Suponga un transformador ideal, un circuito resistivo y un factor unitario de potencia. *a)* ¿Cuál es la razón de vueltas N_p/N_s de este transformador reductor? *b)* ¿Cuáles son las corrientes raíz cuadrada media en los devanados primario y secundario? *c)* ¿Cuál es el circuito resistivo equivalente en el circuito secundario? *d)* ¿Cuál es la carga resistiva equivalente en el circuito primario?

Solución *a)* Con base en la ecuación 37-42 tenemos

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_s} = \frac{8.5 \times 10^3 \text{ V}}{120 \text{ V}} = 70.8.$$

b) Según la ecuación 37-38,

$$i_p = \frac{P_{pro}}{\Delta V_p} = \frac{78 \times 10^3 \text{ W}}{8.5 \times 10^3 \text{ V}} = 9.18 \text{ A}$$

e

$$i_s = \frac{P_{pro}}{\Delta V_s} = \frac{78 \times 10^3 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 650 \text{ A}.$$

c) En el circuito secundario,

$$R_s = \frac{\Delta V_s}{i_s} = \frac{120 \text{ V}}{650 \text{ A}} = 0.185 \ \Omega.$$

d) Aquí tenemos

$$R_p = \frac{\Delta V_p}{i_p} = \frac{8.5 \times 10^3 \text{ V}}{9.18 \text{ A}} = 930 \ \Omega.$$

Esto podemos verificarlo en la ecuación 37-46, que escribimos así

$$R_p = (N_p/N_s)^2 R_s = (70.8)^2(0.185 \ \Omega) = 930 \ \Omega.$$

OPCIÓN MÚLTIPLE

37-1 Corrientes alternas

37-2 Tres elementos separados

1. ¿Cuál de las siguientes magnitudes *aumenta* al incrementar la frecuencia?
   A) R B) L C) C D) X_L E) X_C
2. ¿Cuál elemento de circuito sería el mejor filtro en serie para impedir que las señales de alta frecuencia crucen un altavoz de tono bajo?
   A) Un capacitor. B) Un inductor.
   C) Un resistor. D) Un transformador.
3. Una corriente alterna fluye por un capacitor de derecha a izquierda, como se ve en la figura 37-7. La corriente de la derecha es i_1, y la de la izquierda, i_2. Al disminuir la frecuencia, ¿qué sucede con i_1 e i_2?
   A) i_1 permanece constante e i_2 disminuye.
   B) i_1 disminuye, pero i_2 disminuye con mayor rapidez.
   C) Aumenta la diferencia $i_1 - i_2$.
   D) No se altera la diferencia $i_1 - i_2$.

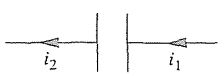


FIGURA 37-7. Pregunta de opción múltiple 3.

4. ¿Qué tipo de material al ser introducido en un inductor causará el máximo incremento en la reactancia inductiva?
   A) Dieléctrico B) Diamagnético
   C) Paramagnético D) Ferromagnético

37-3 El circuito *RLC* de una malla simple

5. El circuito *RLC* en serie energizado por una fuente $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \operatorname{sen} \omega t$ opera a una frecuencia menor que la resonante. Se introduce una lámina dieléctrica entre las placas del capacitor. ¿Cómo se altera i_m?
   A) aumenta i_m. B) disminuye i_m.
   C) i_m no se altera.
   D) i_m podría aumentar o disminuir, pero no permanece inalterado.
   E) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.
6. Una estudiante construye un circuito *RLC* en serie. Mientras éste opera con una frecuencia f, la estudiante utiliza un voltímetro de corriente alterna y mide la diferencia de potencial en cada elemento, obteniendo $(\Delta V_R)_{máx} = 8.8$ V, $(\Delta V_L)_{máx} = 2.6$ V y $(\Delta V_C)_{máx} = 7.4$ V. *a)* El circuito está construido de modo que el inductor esté al lado del capacitor. ¿Qué resultado debería el estudiante prever al medir la diferencia de potencial combinada $(\Delta V_L + \Delta V_C)_{máx}$ en el inductor y en el capacitor?
   A) 10.0 V B) 7.8 V C) 7.4 V D) 4.8 V

   b) ¿Qué resultado debería esperar al medir la amplitud $\mathcal{E}_m$ de la diferencia de potencial en la fuente de alimentación?
   A) 18.8 V B) 13.6 V C) 10.0 V D) 4.0 V
7. Un estudiante construye un circuito *RLC* en serie. Mientras lo opera a una frecuencia f, se sirve de un voltímetro de corriente

alterna y mide la diferencia de potencial en cada dispositivo obteniendo $(\Delta V_R)_{máx} = 4.8$ V, $(\Delta V_L)_{máx} = 29$ V y $(\Delta V_C)_{máx} = 20$ V. *a)* ¿Cómo hay que modificar la frecuencia del circuito para *aumentar* la corriente i_m que pasa por él?

A) Aumentar f. B) Disminuir f.
C) La corriente ya alcanzó su valor máximo.
D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

b) ¿Qué sucederá con el valor de $(\Delta V_L)_{máx}$ si ajustamos la frecuencia para aumentar la corriente que pasa por el circuito?

A) $(\Delta V_L)_{máx}$ aumentará.
B) $(\Delta V_L)_{máx}$ disminuirá.
C) $(\Delta V_L)_{máx}$ no se alterará sin importar los cambios de f.
D) La corriente ya alcanzó su valor máximo.
E) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

8. ¿Cuál de los siguientes casos nunca se dará en un circuito *RLC* en serie?

A) $(\Delta V_R)_{máx} > \mathcal{E}_m$ B) $(\Delta V_L)_{máx} > \mathcal{E}_m$
C) $(\Delta V_C)_{máx} > \mathcal{E}_m$ D) $(\Delta V_L)_{máx} > (\Delta V_C)_{máx}$

37-4 Potencia en los circuitos de corriente alterna

9. ¿Qué sucede con la potencia "faltante" en la ecuación 37-35 cuando $\phi > 0$?

A) Se pierde en el capacitor.
B) Se pierde en el inductor.
C) Se pierde en el resistor.
D) No hay potencia "faltante"; la ecuación 37-35 lo explica todo.

37-5 El transformador

10. ¿Qué efecto se obtiene en la resistencia equivalente de un transformador cuando se duplica el número de vueltas en la bobina primaria, mientras se reduce a la mitad el de las vueltas de la bobina secundaria?

A) La resistencia equivalente aumenta 64 veces.
B) La resistencia equivalente aumenta 16 veces.
C) La resistencia equivalente aumenta 4 veces.
D) La resistencia equivalente disminuye 1/4 del valor anterior.

PREGUNTAS

1. En la relación $\omega = 2\pi f$, cuando se usan las unidades del SI medimos ω en radianes por segundo y f en hertz o ciclos por segundo. El radián es una medida del ángulo. ¿Qué conexiones tienen los ángulos con la corriente alterna?

2. Si la salida de un generador de corriente alterna como el de la figura 34-13 se conecta a un circuito *RLC* como el de la figura 37-1, ¿cuál es el sitio final de la energía que se disipa en el resistor?

3. ¿Por qué los sistemas de distribución de potencial son menos eficaces sin corriente alterna?

4. En el circuito de la figura 37-1, ¿por qué puede suponerse con seguridad que *a)* la corriente alterna de la figura 37-2 tiene la misma frecuencia angular ω que la fuerza electromotriz alterna de la figura 37-1 y *b)* suponiendo que el ángulo de fase ϕ en la ecuación 37-2 no varía con el tiempo, ¿qué sucedería si fuera falsa (verdadera) una de las dos afirmaciones?

5. ¿En qué difiere un fasor de un vector? Sabemos, por ejemplo, que ni las fuerzas electromotrices ni las diferencias de potencial y tampoco las corrientes son vectores. ¿Cómo, entonces, justificar las construcciones como las de la figura 37-5?

6. En el elemento puramente resistivo de la figura 37-2, ¿varía el valor máximo i_m de la corriente alterna con la frecuencia angular de la fuerza electromotriz aplicada?

7. ¿Sería inválida alguna explicación de la sección 37-3, si los diagramas de fasores girasen en dirección de las manecillas del reloj en vez de hacerlo en sentido contrario, como se supuso allí?

8. Suponga que, en un circuito *RLC* en serie, se modificara la frecuencia del voltaje aplicado de un valor muy bajo a un valor muy alto. ¿De qué manera cambiará la constante de fase?

9. ¿Podría depender de la frecuencia la resistencia de corriente alterna de un dispositivo?

10. El análisis de un circuito *RLC* nos permite determinar el comportamiento de un circuito *RL* (sin capacitor) haciendo $C = \infty$, en tanto que hacemos $L = 0$ para determinar el comportamiento de un circuito *RC* (sin inductor). Explique la diferencia.

11. Durante la Segunda Guerra Mundial, un generador de corriente alterna fue colocado a aproximadamente una milla del edificio de laboratorios a los que suministraba energía. Un técnico aumentó la rapidez del generador para compensar lo que calificó de "pérdida de frecuencia en la línea de transmisión" que conectaba el generador con el edificio. Comente este procedimiento.

12. A medida que a partir de cero se aumenta la rapidez de las hojas de un ventilador, se observa una serie de patrones estacionarios cuando son iluminadas por la luz procedente de una fuente de corriente alterna. El efecto resulta más pronunciado cuando se usa un tubo fluorescente o una lámpara de neón que una lámpara de filamento de tungsteno. Explique las observaciones anteriores.

13. Suponga que en la figura 37-1, suponemos $\omega \to 0$. ¿Se aproxima la ecuación 37-19 a un valor esperado? ¿Cuál es ese valor? Comente su respuesta.

14. Con sus propias palabras explique lo que queremos decir al señalar que una corriente alterna "se adelante" o "se rezaga" con una fuerza electromotriz alterna.

15. Si, como vimos en la sección 37-3, un circuito es "más inductivo que capacitivo", es decir $X_L > X_C$, *a)* significa que en una frecuencia angular fija L es relativamente "grande " y C relativamente "pequeña" o que ambas son relativamente "grandes"? *b)* Con valores fijos de L y de C, ¿significa que ω es relativamente "grande" o relativamente "pequeña"?

16. ¿En qué forma podríamos determinar, en un circuito *RLC* en serie, si su frecuencia está por arriba o por debajo de la resonancia?

17. Critique la afirmación: "Si $X_L > X_C$, debemos tener $L > 1/C$".

18. ¿Cómo hay que modificar (si fuera posible) las reglas de Kirchhoff (las de la malla y de la unión [nodo]) para modificar los circuitos de corriente cuando se apliquen a circuitos de corriente alterna?

19. ¿Se aplican las reglas de la malla y del nodo a circuitos multimallas de corriente directa?

20. En el problema resuelto 37-5, ¿cuál sería el efecto en P_{pro} si aumentásemos *a)* R, *b)* C y *c)* L? *d)* ¿De qué manera cambiaría ϕ de la ecuación 37-36 en los tres casos?

21. Si $R = 0$ en el circuito de la figura 37-1, no puede haber disipación de potencia en el circuito. Sin embargo, sigue habiendo una

fuerza electromotriz alterna y una corriente también alterna. Explique el flujo de energía que presenta en tales condiciones.

22. ¿Tiene un circuito de corriente alterna una potencia raíz cuadrada media?
23. ¿Desean los ingenieros de estaciones eléctricas comerciales tener un factor bajo o alto de potencia o les es indiferente? ¿Entre qué valores puede oscilar el factor? Lo que lo determina, ¿es característico del generador, de la línea de transmisión, del circuito al que está conectada la línea o alguna combinación de éstos?
24. ¿Alguna vez puede ser negativa la potencia instantánea suministrada por una fuente de corriente alterna? ¿Puede alguna vez ser negativo el factor de potencia? Si la respuesta es afirmativa, explique el significado de los valores negativos.
25. En un circuito *RLC* en serie, la fuerza electromotriz se adelanta a la corriente en determinada frecuencia de operación. En seguida reducimos un poco la frecuencia. ¿Disminuye, aumenta o permanece inalterada la impedancia total del circuito?
26. Si conocemos el factor de potencia (= cos ϕ en la Ec. 37-36) de un circuito *RLC*, ¿puede indicar si la fuerza electromotriz alterna aplicada va antes o después de la corriente? Si la respuesta es afirmativa, indique cómo. Si es negativa, indique por qué no.
27. ¿Cuál es el dominio permisible de valores del ángulo de fase ϕ en la ecuación 37-2? ¿Y del factor de potencia en la ecuación 37-36?
28. ¿Por qué es útil utilizar la notación raíz cuadrada media con corrientes y voltajes alternos?
29. Quiere ahorrar en el consumo de energía eléctrica. ¿Espera un factor de potencia pequeño o grande o esto no importa? Si la respuesta es afirmativa, ¿puede hacer algo al respecto? Explique su respuesta.
30. En la ecuación 37-36, ¿es ϕ el ángulo de fase entre $\mathscr{E}(t)$ e $i(t)$ o entre $\mathscr{E}_{rcm}$ e i_{rcm}. Explique su respuesta.
31. El transformador de un timbre de puerta está diseñado para una entrada primaria de 120 V raíz cuadrada media y para una salida secundaria de 6 V. ¿Qué sucedería si las dos conexiones se intercambiaran accidentalmente durante la instalación? ¿Tendría usted que esperar para averiguarlo a que alguien lo oprimiese? Comente su respuesta.
32. Le dan un transformador dentro de una caja de madera; sus terminales primaria y secundaria están disponibles en dos caras opuestas de ella. ¿Cómo podría calcular su razón de vueltas sin abrirla?
33. En el transformador de la figura 37-6, en que el secundario es un circuito abierto, ¿cuál es la relación de fase entre *a*) la fuerza electromotriz aplicada y la corriente primaria, *b*) la fuerza electromotriz aplicada y el campo magnético en el núcleo del transformador y *c*) la corriente primaria y el campo magnético en el núcleo del transformador?
34. ¿Cuáles son algunas aplicaciones de un transformador elevador? ¿Y de un transformador reductor?
35. ¿Qué determina cuál devanado de un transformador es el primario y cuál el secundario? ¿Puede un transformador tener un solo devanado primario y dos secundarios? ¿Un solo secundario y dos primarios?
36. En vez de la corriente de 120 V, 60 Hz típica de Estados Unidos, en Europa se emplean corrientes alternas de 240 V, 50 Hz. Mientras vacacione en Europa, le gustaría usar sus electrodomésticos norteamericanos: un reloj, una rasuradora eléctrica y un secador de cabello. ¿Puede hacerlo con sólo enchufar un transformador elevador de 2:1? Explique por qué esta maniobra tan simple tal vez no baste.

EJERCICIOS

37-1 Corrientes alternas

37-2 Tres elementos separados

1. Supongamos que la ecuación 37-1 describe la fuerza electromotriz efectiva en una toma ordinaria de corriente alterna de 60 Hz. ¿A qué frecuencia angular ω corresponde eso? ¿De qué manera la compañía eléctrica fija tal frecuencia?
2. Un inductor de 45.2 mH tiene una reactancia de 1.28 kΩ. *a*) Calcule la frecuencia. *b*) ¿Qué capacitancia tiene un capacitor con la misma reactancia en esa frecuencia? *c*) Si se duplica la frecuencia, ¿cuáles son las reactancias del inductor y del capacitor?
3. *a*) ¿A qué frecuencia angular tendrían la misma reactancia un inductor de 6.23 mH y un capacitor de 11.4 μF? *b*) ¿Cuál sería su reactancia? *c*) Demuestre que esta frecuencia sería igual a la frecuencia natural de oscilaciones libres *LC*.
4. La salida de un generador de corriente alterna es $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m$ sen ωt con $\mathscr{E}_m$ = 25.0 V y ω = 377 rad/s. *a*) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente? *b*) Cuando alcanza su nivel máximo, ¿qué fuerza electromotriz tiene el generador? *c*) Cuando su fuerza electromotriz es −13.8V y su magnitud crece, ¿cuál es la corriente? *d*) En las condiciones de la parte *c*), ¿está el generador suministrando energía al resto del circuito o recibiéndola de él?
5. El generador de corriente alterna del ejercicio 4 está conectado a un capacitor de 4.1 μF. *a*) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente? *b*) Cuando la corriente presenta su nivel más alto, ¿cuál es la fuerza electromotriz del generador? *c*) Cuando la fuerza electromotriz del generador es −13.8 V y su magnitud crece, ¿cuál es la corriente? *d*) En las condiciones de la parte *c*), ¿está el generador suministrando energía al resto del circuito o recibiéndola de él?

37-3 El circuito *RLC* de una malla simple

6. Una bobina de 88.3 mH de inductancia y de resistencia desconocida y un capacitor de 937 nF están conectados en serie a un oscilador de 941 Hz de frecuencia. El ángulo de fase ϕ entre la fuerza electromotriz y la corriente aplicada es de 75.0°. Obtenga la resistencia de la bobina.
7. Vuelva a dibujar (aproximadamente) las figuras 37-5*b* y 37-5*c* para los casos de $X_C > X_L$ y $X_C = X_L$.
8. *a*) Vuelva a calcular todas las cantidades que se piden en el problema resuelto 37-3 cuando C = 70 μF, permaneciendo inalterados los otros parámetros allí señalados. *b*) Dibuje a escala un diagrama de fasores, como el de la figura 37-5*c*, para esta nueva situación y compare detenidamente los dos diagramas.
9. Considere las curvas de resonancia de la figura 36-13. *a*) Demuestre que para las frecuencias por arriba de la resonancia el circuito es predominantemente inductivo y para las frecuencias por debajo de ella es predominantemente capacitivo. *b*) ¿Cómo se comporta el circuito en la resonancia? *c*) Dibuje un diagrama de fasores, como el de la figura 37-5*c*, para las condiciones a una frecuencia mayor que la de resonancia, en la de resonancia y para frecuencias más bajas que la de resonancia.

10. Verifique matemáticamente que la siguiente construcción geométrica proporciona en forma correcta la impedancia Z y la constante de fase ϕ. En relación con la figura 37-8, 1) dibuje una flecha en la dirección $+y$ de magnitud X_C, 2) dibuje una flecha en la dirección $-y$ de magnitud X_L y 3) dibuje una flecha de magnitud R en la dirección $+x$. Entonces la magnitud de la "resultante" de las flechas será Z, y el ángulo (medido por debajo del eje x) de esta resultante, ϕ.

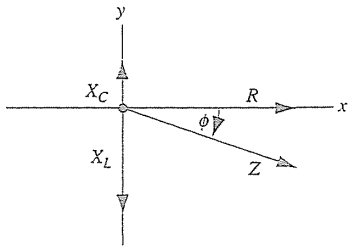


FIGURA 37-8. Ejercicio 10.

11. ¿Puede la amplitud del voltaje en un inductor ser mayor que la amplitud de la fuerza electromotriz del generador en un circuito *RLC*? Considere un circuito con $\mathscr{E}_m = 10$ V, $R = 9.6\ \Omega$, $L = 1.2$ H y $C = 1.3\ \mu$F. Calcule la amplitud del voltaje en un inductor en resonancia.

12. Por medio de la ecuación 37-18 obtenga las relaciones de sen ϕ y cos ϕ en función de R, X_L y X_C. Después sustituya estas expresiones en la ecuación 37-16 para obtener la ecuación 37-17.

13. Cuando la fuerza electromotriz del generador del problema resuelto 37-3 presenta su valor máximo, ¿cuál es el voltaje en *a*) el generador, *b*) el resistor, *c*) el capacitor y *d*) el inductor? *e*) Al sumarlos con los signos correspondientes, verifique que se cumple la regla de la malla.

14. Cierta combinación *RLC*, R_1, L_1 y C_1, tiene una frecuencia resonante que es igual a la de otra combinación, R_2, L_2 y C_2. En seguida conecta usted las dos combinaciones en serie. Demuestre que este nuevo circuito presenta la misma frecuencia resonante que los circuitos individuales.

15. En un circuito *RLC* la máxima fuerza electromotriz del generador es 125 V y la corriente máxima es 3.20 A. Si la corriente antecede 56.3° al generador, *a*) ¿cuál es la impedancia y *b*) la resistencia del circuito? *c*) ¿Es el circuito predominantemente capacitivo o inductivo?

37-4 Potencia en los circuitos de corriente alterna

16. Demuestre que $[\text{sen}^2\ \omega t]_{pro} = \frac{1}{2}$ y $[\text{sen}\ \omega t \cos \omega t]_{pro} = 0$, donde los promedios se toman arriba de uno o de varios ciclos.

17. Un motor eléctrico conectado a una toma de corriente de 120 V, 60 Hz realiza trabajo mecánico con una rapidez de 0.10 hp (1 hp = 746 W). Si extrae una corriente de 650 mA, ¿qué resistencia tiene en función de la transferencia de potencia? ¿Será la misma que la resistencia de sus bobinas, medidas con un óhmetro mientras el motor está desconectado de la toma?

18. Demuestre que la potencia promedio suministrada a un circuito *RLC* también puede escribirse

$$P_{pro} = \mathscr{E}_{rcm}^2 R/Z^2.$$

Demuestre que la expresión anterior ofrece resultados razonables con un circuito totalmente resistivo, con un circuito *RLC* en resonancia, con un circuito enteramente capacitivo y con un circuito completamente inductivo.

19. Calcule la potencia promedio que se disipa en el problema resuelto 37-3, suponiendo *a*) que el inductor se extrae del circuito y *b*) que se extrae el capacitor.

20. Un acondicionador de aire conectado a una línea de corriente alterna raíz cuadrada media de 120 V equivale a una resistencia de 12.2 Ω y a una reactancia inductiva en serie de 2.30 Ω. *a*) Calcule la impedancia del acondicionador de aire. *b*) Determine la potencia promedio suministrada al electrodoméstico. *c*) ¿Cuál es el valor de la corriente raíz cuadrada media?

21. Un voltímetro de corriente alterna con alta impedancia está conectado por turnos a través del inductor, del capacitor y del resistor en un circuito en serie que tiene una fuente de corriente alterna de 100 V (rcm) y que ofrece la misma lectura en volts en todos los casos. ¿Cuál es la lectura?

22. Considere el circuito de antena de FM que se muestra en la figura 37-9, con $L = 8.22\ \mu$H, $C = 0.270$ pF y $R = 74.7\ \Omega$. La señal de radio induce una fuerza electromotriz alterna en la antena con $\mathscr{E}_{rcm} = 9.13\ \mu$V. Calcule *a*) la frecuencia de los ondas de entrada en que la antena está "sintonizada", *b*) la corriente raíz cuadrada media, que pasa por la antena y *c*) la diferencia de potencial, raíz cuadrada media a través del capacitor.

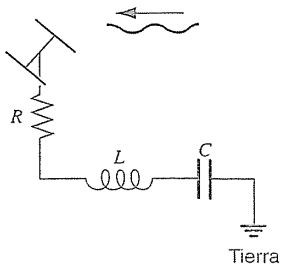


FIGURA 37-9. Ejercicio 22.

23. En la figura 37-10 demuestre que la potencia disipada en el resistor R alcanza su valor máximo cuando $R = r$, donde r es la resistencia interna del generador de corriente alterna. En el texto hemos supuesto implícitamente hasta ahora que $r = 0$. Compare esto con el caso de la corriente directa.

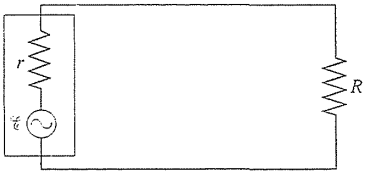


FIGURA 37-10. Ejercicios 23 y 32.

24. En un circuito *RLC* como el de la figura 37-1, suponga que $R = 5.0\ \Omega$, $L = 60$ mH, $f = 60$ Hz y $\mathscr{E}_m = 30$ V. ¿Con qué valores de la capacitancia la potencia promedio disipada en el resistor presentaría *a*) un valor máximo y *b*) un valor mínimo? *c*) ¿Cuáles son esas potencias máxima y mínima? *d*) ¿Cuáles son los ángulos correspondientes de fase? *e*) ¿Cuáles son los factores correspondientes de potencia?

25. En la figura 37-11 $R = 15.0\ \Omega$, $C = 4.72\ \mu$F y $L = 25.3$ mH. El generador produce un voltaje senoidal de 75.0 V (rcm) a una frecuencia $f = 550$ Hz. *a*) Calcule la amplitud de corriente rcm.

b) Determine los voltajes rcm ΔV_{ab}, ΔV_{bc}, ΔV_{cd}, ΔV_{bd}, ΔV_{ad}. *c*) ¿Qué potencia promedio disipa cada uno de los tres elementos del circuito?

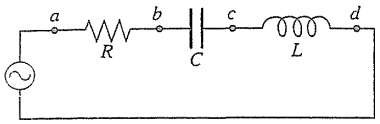


FIGURA 37-11. Ejercicio 25.

26. En un circuito *RLC*, demuestre que en un ciclo con periodo T *a*) la energía almacenada en el capacitor no cambia, *b*) la energía almacenada en el inductor tampoco cambia; *c*) el generador suministra energía $(\frac{1}{2}T)\mathscr{E}_m i_m \cos\phi$, y *d*) el resistor disipa energía $(\frac{1}{2}T)Ri_m^2$. *e*) Demuestre que las magnitudes encontradas en *c*) y en *d*) son iguales.

37-5 El transformador

27. Un generador suministra 150 V (rcm) a la bobina primaria de un transformador de 65 vueltas. Si la bobina secundaria tiene 780 vueltas, ¿cuál es el voltaje secundario?

28. Un transformador tiene 500 vueltas primarias y 10 vueltas secundarias. *a*) Si ΔV_p del primario es 120 V (rcm), ¿cuál es ΔV_s del secundario, suponiendo que se trate de un circuito abierto? *b*) Si el secundario está ahora conectado a un circuito resistivo de 15 Ω, ¿qué corrientes fluyen por los devanados primario y secundario?

29. En la figura 37-12 se muestra un autotransformador. Consta de una sola bobina (con un núcleo de hierro). Se incluyen tres tomas. Entre las tomas T_1 y T_2 hay 200 vueltas y entre las tomas T_2 y T_3 hay 800 vueltas. Dos de ellas pueden considerarse "terminales primarios" y dos, "terminales secundarios". Mencione todos los valores en que podemos convertir el voltaje primario en uno secundario.

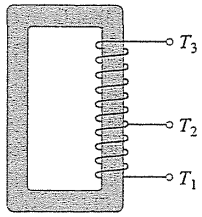


FIGURA 37-12. Ejercicio 29.

30. Un agricultor maneja una bomba de agua de 3.8 A rcm. La línea conectora proveniente del transformador mide 1.2 km de largo y se compone de dos alambres de cobre, de 1.8 mm de diámetro cada uno. La temperatura es de 5.4°C. ¿Cuánta potencia se pierde al transmitir por la línea?

31. Un ingeniero eléctrico diseña un transformador ideal para que haga funcionar una máquina de rayos X con un potencial máximo de 74 kV y con una corriente rcm de 270 mA. El transformador funciona con una fuente de potencia rcm de 220 V. Sin embargo, no se tuvo en cuenta la resistencia de los alambres que conectan la fuente al transformador. Terminada la instalación, se descubrió que los alambres de suministro tenían una resistencia de 0.62 Ω. ¿Cuánto debe incrementarse el voltaje de suministro a fin de mantener los mismos parámetros de funcionamiento en el transformador?

32. En la figura 37-10, supongamos que la caja rectangular de la izquierda representa la salida (alta impedancia) de un amplificador de audio, con $r = 1000\ \Omega$. Sea $R = 10\ \Omega$ representa la bobina (baja impedancia) del altavoz. Ya dijimos que un transformador puede servir para "transformar" las resistencias, haciendo que se comporten eléctricamente como si fueran más grandes o pequeñas de lo que son en realidad. Dibuje las bobinas primarias y secundarias de un transformador para introducir entre el "amplificador" y el "altavoz" en la figura 37-10, para "igualar las impedancias". ¿Cuál ha de ser la razón de vueltas?

PROBLEMAS

1. La salida de un generador de corriente alterna está dada por $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \operatorname{sen}(\omega t - \pi/4)$, donde $\mathscr{E}_m = 31.4$ V y $\omega = 350$ rad/s. La corriente está dada por $i(t) = i_m \operatorname{sen}(\omega t - 3\pi/4)$, donde $i_m = 622$ mA. *a*) ¿En cuánto tiempo, después que $t = 0$, alcanza el generador un valor máximo por primera vez? *b*) ¿En cuánto tiempo, después que $t = 0$, hace lo mismo la corriente? *c*) El circuito contiene un solo elemento aparte del generador. ¿Es un capacitor, un inductor o un resistor? Fundamente su respuesta. *d*) ¿Cuál es el valor de la capacitancia, de la inductancia o de la resistencia, según el caso?

2. Repita el problema 1, sólo que ahora $i = i_m \operatorname{sen}(\omega t + \pi/4)$.

3. En un circuito *RLC*, que opera a 60 Hz, el voltaje máximo a través del inductor es el doble del que tiene el resistor, en tanto que el voltaje máximo del capacitor es igual al del resistor. *a*) ¿Con qué ángulo de fase la corriente se rezaga con la fuerza electromotriz del generador? *b*) Si la fuerza electromotriz máxima del generador es 34.4 V, ¿cuál debe ser la resistencia del circuito para obtener una corriente máxima de 320 mA?

4. Una generador de corriente alterna en la figura 37-13 suministra 170 V (máximo) a 60 Hz. Con el interruptor abierto como en el diagrama, la corriente resultante se adelanta 20° a la fuerza electromotriz del generador. Con el interruptor en posición 1 la corriente se rezaga 10° con el generador. La corriente máxima es 2.82 A cuando el interruptor se encuentra en la posición 2. Calcule los valores de R, L y C.

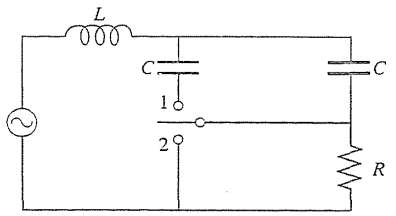


FIGURA 37-13. Problema 4.

5. Un generador de tres fases G produce una potencia eléctrica que se transmite mediante los tres alambres de la figura 37-14. Los potenciales (relativos a un nivel común de referencia) de ellos son $V_1 = V_m$ sen ωt, $V_2 = V_m$ sen $(\omega t - 120°)$ y $V_3 = V_m$ sen $(\omega t - 240°)$. Algunos equipos industriales (los motores por ejemplo) tienen tres terminales y están diseñados para conectarlos directamente a ellas. Si se quiere utilizar un dispositivo ordinario de dos terminales (digamos una lámpara), se conecta a dos de tres alambres. Demuestre que la diferencia de potencial entre dos alambres cualesquiera *a*) oscila senoidalmente con la frecuencia angular ω y *b*) que su amplitud es $V_m\sqrt{3}$.

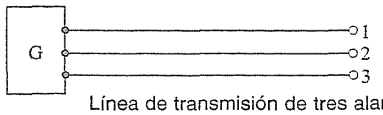


FIGURA 37-14. Problema 5.

6. La figura 37-15 muestra un generador de corriente alterna conectado a una "caja negra" por medio de un par de terminales. La caja contiene un circuito *RLC*, posiblemente inclusive un circuito multimallas, cuyos elementos y arreglos desconocemos. Las mediciones fuera de la caja revelan que $\mathscr{E}(t) = (75\ \text{V})$ sen ωt e $i(t) = (1.2\ \text{A})$ sen $(\omega t + 42°)$. *a*) ¿Cuál es el factor de potencia? *b*) ¿La corriente se adelanta o se rezaga con la fuerza electromotriz? *c*) ¿Es el circuito de la caja principalmente inductivo o capacitivo? *d*) ¿Está en resonancia? *e*) ¿Debe haber un capacitor en la caja?; ¿un inductor?, o ¿un resistor? *f*) ¿Qué potencia promedio suministra el generador a la caja? *g*) ¿Por qué no es necesario conocer la frecuencia angular ω para contestar las preguntas anteriores?

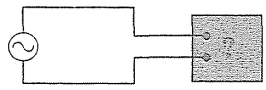


FIGURA 37-15. Problema 6.

7. Un circuito tiene $R = 5.12\ \Omega$, $C = 19.3\ \mu\text{F}$, $L = 988$ mH y $\mathscr{E}_m = 31.3$ V. *a*) ¿A qué frecuencia angular ω presentará la corriente su valor máximo, como en las curvas de resonancia de la figura 36-13? *b*) ¿Cuál es su valor máximo? *c*)¿Cuáles son las dos frecuencias angulares ω_1 y ω_2 en que la amplitud de la corriente tendrá la mitad de ese valor? *d*) Obtenga el ancho fraccional $[= (\omega_1 - \omega_2)/\omega]$ de la curva de resonancia.

8. *a*) Demuestre que el ancho fraccional de las curvas de resonancia de la figura 36-13 está dado, con mucha aproximación, por

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\sqrt{3}R}{\omega L},$$

donde ω es la frecuencia resonante y $\Delta\omega$ es el ancho de la resonancia máxima con $i = \frac{1}{2}i_m$. Nótese (Prob. 15 del Cap. 36) que la expresión anterior puede escribirse como $\sqrt{3}/Q$, que muestra claramente que un circuito con "Q alta" presenta una resonancia máxima pronunciada, esto es, un valor pequeño de $\Delta\omega/\omega$. *b*) Utilice este resultado para comprobar la parte *d*) del problema 7.

9. En un circuito *RLC*, $R = 16.0\ \Omega$, $C = 31.2\ \mu\text{F}$, $L = 9.20$ mH, $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m$ sen ωt con $\mathscr{E}_m = 45.0$ V y $\omega = 3000$ rad/s. Al tiempo $t = 0.442$ ms, obtenga *a*) la rapidez con que el generador produce energía, *b*) la rapidez con que se guarda energía en el capacitor, *c*) la rapidez con que se almacena energía en el inductor y *d*) la rapidez con que se disipa en el resistor. *e*) ¿Qué significa el resultado negativo para cualquiera de las partes *a*), *b*) y *c*)? *f*) Demuestre que el resultado de las partes *b*), *c*) y *d*) suman el de la parte *a*).

10. En la figura 37-6, demuestre que $i_p(t)$ en el circuito primario no se altera si conectamos una resistencia R' $[= R(N_p/N_s)^2]$ directamente en el generador, el transformador y el circuito secundario se eliminan. Es decir,

$$i_p(t) = \frac{\mathscr{E}(t)}{R'}.$$

En este sentido vemos que un transformador "transforma" no sólo las diferencias de potencial y las corrientes, sino también las resistencias. En el caso más general, en que el circuito secundario de la figura 37-6 contiene capacitores e inductores, lo mismo que resistores, decimos que un transformador convierte las impedancias.

11. Un amortiguador común de luz, con el cual se atenúa la iluminación del escenario de los teatros, consta de un inductor variable L conectado en serie con la lámpara B, como se indica en la figura 37-16. La fuente de potencia es 120 V (rcm) a 60.0 Hz; la lámpara está marcada "120 V, 1000 W". *a*) ¿Cuál es la inductancia máxima L requerida si la potencia de una lámpara debe variar por un factor de cinco? Suponga que su resistencia no depende de la temperatura. *b*) ¿Podría usarse un resistor variable en vez de un inductor? De ser así, ¿qué resistencia máxima se necesita? ¿Por qué no se hace esto?

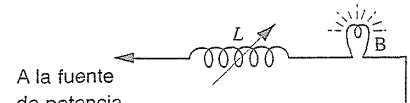


FIGURA 37-16. Problema 11.

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Considere otra vez el problema resuelto 37-3. Con métodos numéricos basados en la ecuación 37-25, genere una gráfica de la corriente en función del tiempo. Escoja un tamaño de paso de 1/6000 s (1/100 de un periodo) y suponga que en $t = 0$ la carga del capacitor es cero y que no existe corriente en el circuito. ¿Cuánto tiempo se requiere para que la corriente se convierta en una solución como la de la figura 37-2? ¿Son mejores los resultados que los de la solución analítica?

CAPÍTULO 38

LAS ECUACIONES DE MAXWELL Y LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

En este capítulo resumimos las cuatro ecuaciones básicas del electromagnetismo, conocidas como ecuaciones de Maxwell; las hemos expuesto individualmente en capítulos precedentes. Un argumento inspirado en la simetría revela un importante término que falta en una de estas ecuaciones. Cuando lo incluimos, las ecuaciones permiten predecir las ondas electromagnéticas que se desplazan con la velocidad de la luz. También describimos las propiedades de estas ondas, las cuales son importantes para entender la óptica, las transmisiones de radio y de televisión, así como las propiedades de aparatos como los hornos de microondas.

38-1 LAS ECUACIONES BÁSICAS DEL ELECTROMAGNETISMO

Aunque existen muchas diferencias en las propiedades físicas de los campos eléctrico y magnético, sus propiedades matemáticas tienen varias semejanzas. Para captarlas vamos no sólo a escribir las propiedades básicas del electromagnetismo, sino a aplicarlas a una región del espacio donde existen esos campos, pero no cargas ni corrientes (los campos pueden deberse a cargas y corrientes de otras regiones en el espacio).

Si elegimos una superficie cerrada en esta región, podemos aplicar la ley de Gauss a los campos eléctrico y magnético:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0, \tag{38-1}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0. \tag{38-2}$$

En una superficie cerrada, las integrales de superficie de los campos magnético y eléctrico son cero, porque esta superficie cerrada no contiene carga eléctrica ni polos magnéticos. Las dos ecuaciones anteriores presentan exactamente la misma forma, que representa una importante simetría entre los campos eléctrico y magnético.

A continuación escogemos cualquier trayectoria cerrada en esta región y aplicamos las leyes de Faraday y de Ampère

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \tag{38-3}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0. \tag{38-4}$$

La simetría entre $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, que mostramos en las ecuaciones 38-1 y 38-2, parece estar ausente en las ecuaciones 38-3 y 38-4. La ley de Faraday (Ec. 38-3) nos indica que, en esta región, un campo magnético variable puede crear un campo eléctrico. ¿Es posible que ocurra *lo contrario*?

Maxwell fue el primero en hacerse esta pregunta.* Su respuesta correcta proporcionó el término faltante en la ley de Ampère que restableció la simetría entre los campos eléctrico y magnético en esa ley y en la de Faraday. El término adicional es la causa de las ondas electromagnéticas, que Maxwell logró deducir de su teoría. Poco después de su predicción, se descubrieron las ondas y se aplicaron a la invención de la ra-

* James Clerk Maxwell (1831-1879), físico escocés, fue el primero en formular la estructura matemática de las leyes del electromagnetismo. También descubrió la mecánica estadística de los gases e hizo importantes aportaciones a la fotografía de color y al conocimiento de los anillos de Saturno. La forma actual de las ecuaciones del electromagnetismo no es obra de Maxwell, sino del físico británico Oliver Heaviside (1850-1925), quien reconoció en ellas la simetría entre $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

dio. No es exagerado señalar que las comunicaciones modernas nacieron directamente del descubrimiento de Maxwell.

38-2 CAMPOS MAGNÉTICOS INDUCIDOS Y LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

En este apartado exponemos a fondo las pruebas de la suposición de la sección anterior: un campo eléctrico cambiante induce un campo magnético. Aunque nos guiamos principalmente por consideraciones de simetría, también presentamos una verificación experimental directa.

La figura 38-1*a* muestra un capacitor circular de placas paralelas. Una corriente i entra en la placa izquierda (que, suponemos, transporta una corriente positiva) y una corriente igual i sale de la placa derecha. Una espira amperiana rodea el alambre, en la figura 38-1*a*, y crea la frontera de una superficie atravesada por el alambre. La corriente que pasa por este alambre genera un campo magnético; en la sección 33-5 vimos que el campo magnético y la corriente están relacionados mediante la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i. \qquad (38\text{-}5)$$

En otras palabras, la integral de línea del campo magnético alrededor de la espira es proporcional a la corriente total que cruza la superficie limitada por la espira.

En la figura 38-1*b* conservamos la misma espira, pero hemos extendido la superficie delimitada por ella para que encierre toda la placa izquierda del capacitor. Como la espira no ha cambiado (y tampoco el campo magnético), el lado izquierdo de la ley de Ampère ofrece el mismo resultado, pero el derecho da otro muy distinto, cero, porque ningún alambre conductor pasa por la superficie. Al parecer, se ha violado la ley de Ampère.

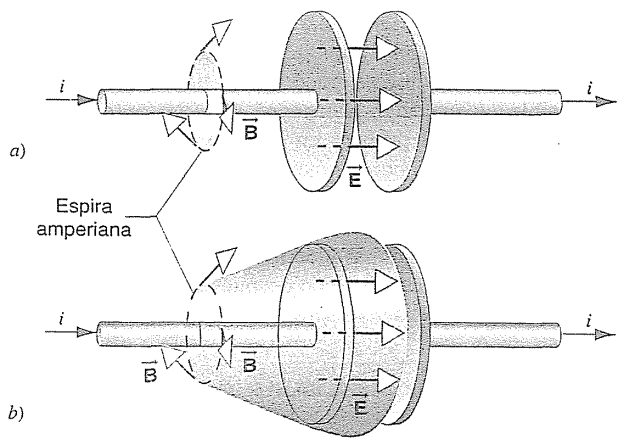


FIGURA 38-1. *a*) Una espira amperiana encierra una superficie que atraviesa un alambre portador de corriente. *b*) La misma espira encierra una superficie que pasa entre las placas del capacitor. Ninguna corriente de conducción atraviesa la superficie.

Para restablecerla y para que describa correctamente la situación de la figura 38-1*b*, recurrimos a la conclusión de la sección anterior basada en la simetría: *un campo eléctrico cambiante crea un campo magnético*. Estudiemos con mayor detenimiento la situación de la figura 38-1. A medida que una carga es transportada al interior del capacitor, el campo eléctrico dentro de él se modifica con una rapidez dE/dt. Las líneas de este campo eléctrico cruzan la superficie de la figura 38-1*b* en el interior del capacitor; a partir del flujo eléctrico Φ_E hemos explicado el paso de las líneas del campo por esta superficie; el campo eléctrico cambiante debe producir un flujo eléctrico también cambiante, $d\Phi_E/dt$.

Para describir el nuevo efecto desde el punto de vista cuantitativo, nos hemos guiado por la analogía con la ley de inducción de Faraday (Ec. 38-3), la cual establece que un campo eléctrico (lado izquierdo) es producido por un campo magnético cambiante (lado derecho). En la versión simétrica escribimos*

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \qquad (38\text{-}6)$$

La ecuación 38-6 señala que un campo magnético (lado izquierdo) puede ser generado por un campo eléctrico cambiante (lado derecho).

La situación que se muestra gráficamente en la figura 38-1*a*, se describe mediante la ley de Ampère por medio de la ecuación 38-5, y la de la figura 38-1*b* mediante la ecuación 38-6. En el primer caso, la corriente que pasa a través de la superficie es la que crea el campo magnético; en el segundo, el flujo eléctrico cambiante que atraviesa la superficie es el que genera el campo magnético. En términos generales se deben explicar *ambas* formas de producir un campo magnético: *a*) con una corriente y *b*) con un flujo eléctrico cambiante. Debemos, pues, modificar la ley de Ampère para que quede así

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \qquad (38\text{-}7)$$

Esta importante generalización de la ley de Ampère es obra de Maxwell.

En el capítulo 33 supusimos que no hay campos eléctricos cambiantes, de modo que el término $d\Phi_E/dt$ de la ecuación 38-7 era cero. Al comentar la figura 38-1*b* supusimos que no existían corrientes de conducción en el espacio que contiene al campo eléctrico. De ahí que el término $\mu_0 i$ de la ecuación 38-7 sea cero en este caso. Ahora nos damos cuenta de que cada una de las situaciones es un caso especial. Si hubiera alambres delgados que conectasen las dos placas de la figura 38-1*b*, habría contribuciones de los dos términos en la ecuación 38-7.

Otra forma de interpretar la ecuación 38-7 se sugiere en la figura 38-2; ésta muestra el campo eléctrico en la región situada entre las placas del capacitor de la figura 38-1. En seguida, suponemos que la espira amperiana es una trayectoria circular en esta región. El término i es cero en el lado derecho

* El sistema de unidades del SI exige introducir las constantes ϵ_0 y μ_0 en la ecuación 38-6. En otros sistemas de unidades no aparecerían.

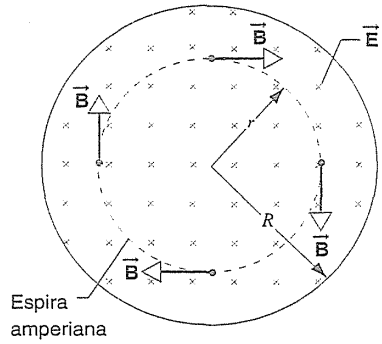


FIGURA 38-2. Campo magnético inducido $\vec{B}$, que se muestra en cuatro puntos y que es producido por el campo eléctrico cambiante $\vec{E}$ dentro del capacitor de la figura 38-1. La magnitud del campo eléctrico está aumentando. Compare esta figura con la figura 34-15*b*.

de la ecuación 38-7, no así el término $d\Phi_E/dt$. De hecho, el flujo que pasa a través de la superficie es positivo si las líneas del campo son las que se indican; el flujo aumenta (en correspondencia con el incremento del campo eléctrico) al ser transportada una carga positiva al interior de la placa izquierda de la figura 38-1. La integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de la espira también debe ser positiva, y las direcciones de $\vec{B}$ deben ser las que aparecen en la figura 38-2.

La figura 38-2 es un excelente ejemplo de la simetría de la naturaleza. Un campo *magnético* cambiante induce un campo *eléctrico* (ley de Faraday); ahora vemos que un campo *eléctrico* cambiante induce un campo *magnético.* Compare con mucho cuidado la figura 38-2 con la 34-15*b;* ésta ilustra la producción de un campo eléctrico por un campo magnético cambiante. En cada caso, *crece* el flujo apropiado Φ_B o Φ_E. No obstante, el experimento revela que las líneas de $\vec{E}$ en la figura 34-15*b* siguen una *dirección contraria a la de las manecillas del reloj,* mientras que las de $\vec{B}$ en la figura 38-2 siguen la *dirección de las manecillas del reloj.* La diferencia exige que el signo menos en la figura 38-3 se omita en la ecuación 38-6.

PROBLEMA RESUELTO 38-1. Un capacitor de placas circulares y paralelas se carga como en la figura 38-1. *a)* Obtenga una expresión para calcular el campo magnético inducido en el radio r en la región entre las placas. Suponga que $r \leq R$ y $r \geq R$. *b)* Encuentre B cuando $r = R$ para $dE/dt = 10^{12}$ V/m · s y $R = 5.0$ cm.

Solución *a)* De acuerdo con la ecuación 38-6,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

podemos escribir, con $r \leq R$, como en la figura 38-2,

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}[(E)(\pi r^2)] = \mu_0\epsilon_0\pi r^2 \frac{dE}{dt}.$$

Al resolver para B obtenemos

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0\epsilon_0 r \frac{dE}{dt} \qquad (r \leq R).$$

Cuando $r \geq R$, la ecuación 38-6 nos da

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}[(E)(\pi R^2)] = \mu_0\epsilon_0\pi R^2 \frac{dE}{dt},$$

o bien

$$B = \frac{\mu_0\epsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt} \qquad (r \geq R).$$

b) Con $r = R$ las dos ecuaciones de B se reducen a la misma expresión, es decir,

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0\epsilon_0 R \frac{dE}{dt}$$
$$= \tfrac{1}{2}(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(8.9 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)$$
$$\times (5.0 \times 10^{-2}\ \text{m})(10^{12}\ \text{V/m}\cdot\text{s})$$
$$= 2.8 \times 10^{-7}\ \text{T} = 280\ \text{nT}.$$

Lo anterior indica que los campos magnéticos inducidos en este ejemplo, son tan pequeños que apenas si pueden medirse con un aparato simple, lo cual contrasta mucho con los campos *eléctricos* inducidos (ley de Faraday). Eso puede demostrarse fácilmente. En parte, esta diferencia experimental se debe a que es fácil multiplicar las fuerzas electromotrices inducidas, utilizando una bobina de muchas vueltas. No se cuenta con una técnica tan simple para los campos magnéticos. En experimentos que incluyan oscilaciones de muy alta frecuencia, dE/dt puede ser muy grande y dar valores mucho más altos que los del campo magnético inducido.

Corriente de desplazamiento

La comparación de las ecuaciones 38-5 y 38-6 indica que el término $\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$ tiene las dimensiones de una corriente. A pesar de que no hay movimiento alguno de la carga, ofrece ventajas asignarle a este término el nombre de *corriente de desplazamiento.** Esta corriente i_d se define de acuerdo con

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{38-8}$$

Por tanto, podemos decir que un campo magnético puede crearse mediante una corriente de conducción i o mediante una corriente de desplazamiento i_d; entonces la ecuación 38-6 puede reescribirse así

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(i + i_d). \tag{38-9}$$

Calculemos la corriente de desplazamiento i_d en la separación del capacitor de la figura 38-1*b*. La carga q en las placas se relaciona con el campo eléctrico E en la separación por medio de la ecuación 30-3 ($E = \sigma/\epsilon_0$),

$$q = \epsilon_0 EA.$$

La derivación nos da

$$i = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d(EA)}{dt}.$$

La magnitud EA es el flujo eléctrico Φ_E y, por tanto,

$$i = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

* El término "desplazamiento" se introdujo por razones históricas. Nada tiene que ver con el uso anterior de desplazamiento para indicar la posición de una partícula.

La comparación con la ecuación 38-8 indica que

$$i = i_d.$$

Por tanto, la corriente de desplazamiento en la separación es igual a la corriente de conducción en los alambres.

Así pues, el concepto de corriente de desplazamiento nos permite conservar la idea de que *la corriente es continua*, principio establecido para las corrientes de conducción en la sección 31-1. Por ejemplo, en la figura 38-1*b*, una corriente de conducción i entra en la placa positiva y sale de la placa negativa. La corriente de *conducción no* es continua en la separación del capacitor, porque no se transporta carga alguna a través de esta separación. No obstante, allí la corriente de desplazamiento i_d es exactamente igual a i; con esto se mantiene el concepto de continuidad de la corriente.

Cuando el capacitor está cargado por completo, la corriente de conducción desciende súbitamente a cero (no fluye corriente en los alambres). El campo eléctrico entre las placas se vuelve constante; en consecuencia, $dE/dt = 0$ y, por lo mismo, la corriente de desplazamiento también se reduce a cero.

La corriente de desplazamiento i_d, dada por la ecuación 38-8, tiene dirección y también magnitud. La dirección de la corriente i es la del vector de densidad de corriente de conducción $\vec{j}$. De modo parecido, la dirección de la corriente de desplazamiento i_d es la de su vector de densidad de corriente de desplazamiento $\vec{j}_d$; ésta, como deducimos de la ecuación 38-8, es $\epsilon_0(d\vec{E}/dt)$. La regla de la mano derecha aplicada a i_d da la dirección del campo magnético producido, igual que en el caso de la corriente de conducción i.

PROBLEMA RESUELTO 38-2. ¿Cuál es la corriente de desplazamiento en la situación del problema resuelto 38-1?

Solución Con base en la ecuación 38-8, la corriente de desplazamiento se define,

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt}[(E)(\pi R^2)] = \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

$$= (8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(\pi)(5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2(10^{12}\ \mathrm{V/m \cdot s})$$

$$= 0.070\ \mathrm{A} = 70\ \mathrm{mA}.$$

Esta es una corriente bastante grande, pero en el problema resuelto 38-1 vimos que produce un campo magnético de sólo 280 nT. Una corriente de 70 mA que fluya en un alambre delgado producirá un gran campo magnético cerca de la superficie del alambre, fácilmente detectable con la aguja de una brújula.

La diferencia *no* se debe al hecho de que una corriente es de conducción y la otra de desplazamiento. En las mismas condiciones, ambos tipos de corriente generan un campo magnético con igual eficacia. La diferencia se presenta porque, en este caso, la corriente de conducción es transportada por un alambre delgado, pero la corriente de desplazamiento se distribuye en un área igual a la de las placas del capacitor. Por tanto, éste se comporta como un "alambre grueso" de 5 cm de radio, que lleva una corriente (desplazamiento) de 70 mA. Su efecto magnético más grande, que ocurre en el borde del capacitor, es mucho más pequeño de lo que sería en la superficie de un alambre delgado (Prob. 2).

38-3 ECUACIONES DE MAXWELL

Las cuatro ecuaciones del electromagnetismo, conocidas como ecuaciones de Maxwell, están completas ahora con la adición del término del campo magnético inducido (corriente de desplazamiento) en la ley de Ampère. Estas ecuaciones se sintetizan en la tabla 38-1; ésta muestra además el experimento decisivo que dio origen a cada una de estas ecuaciones. Esta lista de experimentos nos recuerda que las ecuaciones de Maxwell no son meras especulaciones teóricas; más bien, fueron formuladas para explicar los resultados de los experimentos de laboratorio.

Estas ecuaciones tan importantes reúnen algunas características que conviene examinar.

1. *Simetría.* La inclusión de la corriente de desplazamiento ocasiona que las ecuaciones III y IV de la tabla 38-1 se asemejan más, mejorando con ello su simetría. Si se confirmase la existencia de las cargas magnéticas individuales (monopolos magnéticos), las ecuaciones parecerían más similares. Si q_m representa la "carga magnética", escribiremos la ley del magnetismo de Gauss como $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 q_m$. Esta ecuación afirma que el flujo magnético que pasa a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga magnética total encerrada por la superficie. En este caso, las ecuaciones I y II se tornarían más simétricas.

Si pudiéramos formar un flujo de estas cargas magnéticas y pudiéramos convertirlo en una corriente magnética $i_m = dq_m/dt$ (suponiendo que los experimentos lo comprobaran) podríamos agregar un término al lado derecho de la ecuación III que mostraría la posibilidad de que una corriente magnética produzca un campo eléctrico. Con ello, las ecuaciones III y IV serían más simétricas.

Hasta ahora no contamos con datos experimentales que evidencien la existencia de monopolos magnéticos. Pero si se descubrieran, sería muy fácil modificar las ecuaciones de Maxwell para explicar sus efectos.

2. *Ondas electromagnéticas.* Las cuatro ecuaciones se conocían ya, antes de la época de Maxwell; aparte de la corriente de desplazamiento, no se originan predicciones nuevas de ninguna de estas ecuaciones. Como veremos en la siguiente sección, cuando se combinan estas ecuaciones surge otra predicción: la existencia de ondas electromagnéticas y un valor de su velocidad (la velocidad de la luz). Estas ondas fueron predichas por Maxwell y descubiertas por Heinrich Hertz en 1888, quince años después de publicarse la teoría de Maxwell. Más adelante en el capítulo explicamos cómo esta predicción proviene de las ecuaciones de Maxwell.

3. *Electromagnetismo y relatividad.* Las ecuaciones de Maxwell son notables porque son enteramente compatibles con la teoría especial de la relatividad. A diferencia de las leyes de la mecánica de Newton, que exigen cambios radicales del movimiento en velocidades cercanas a la velocidad de la luz, las ecuaciones de Maxwell no cambian para ningún observador, cualquiera que sea su velocidad relativa. De hecho, el descubrimiento de Einstein de la relatividad se basó directamente en la interpretación que éste dio a las leyes del electromagnetismo y a las ecuaciones de Maxwell.

TABLA 38-1 Ecuaciones básicas del electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell)[a]

Número	*Nombre*	*Ecuación*	*Describe*	*Experimento decisivo*	*Capítulo del libro*
I	Ley de Gauss para la electricidad	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon_0$	La carga y el campo eléctrico	*a*) Cargas iguales se repelen y cargas diferentes se atraen como el cuadrado inverso de su separación. *b*) Una carga en un conductor aislado se dirige a su superficie exterior.	27
II	Ley de Gauss para el magnetismo	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	El campo magnético	Las líneas del campo magnético forman espiras cerradas; no hay evidencia de que existan monopolos magnéticos.	35
III	Ley de inducción de Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -d\Phi_B/dt$	El efecto eléctrico de un campo magnético cambiante	Un imán de barra, introducido en una espira cerrada de alambre, creará una corriente en esta última.	34
IV	Ley de Ampère (tal como la amplió Maxwell)	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0\epsilon_0 \, d\Phi_E/dt$	El efecto magnético de una corriente o un campo eléctrico cambiante	*a*) Una corriente en un alambre produce un campo magnético cerca de él. *b*) La velocidad de la luz se calcula exclusivamente con mediciones electromagnéticas.	33 38

[a] Escritas suponiendo que no haya material dieléctrico ni magnético.

Cavidades oscilantes (opcional)

Existen muchas situaciones en que las ecuaciones de Maxwell sirven para obtener una comprensión teórica del funcionamiento de un dispositivo práctico o de un fenómeno cotidiano. Un caso particular es la cavidad metálica que contiene campos eléctricos y magnéticos oscilatorios.

En muchos aspectos, el oscilador de cavidad electromagnética se parece a un oscilador de cavidad acústica; por ejemplo, el tubo o cañón cerrado de un órgano. Cuando hacemos oscilar el tubo mediante una perturbación externa, producimos una onda estacionaria con oscilaciones tan intensas de densidad y de velocidad en las moléculas de aire, que la energía acústica del tubo oscila entre la energía potencial relacionada con las compresiones y rarefacciones del gas y la energía cinética del gas en movimiento.

La cavidad electromagnética resonante se comporta de modo similar, sólo que la energía oscila entre sus campos magnético y eléctrico en una onda electromagnética estacionaria. La figura 38-3 es una representación de los campos magnético y eléctrico en la mitad de un ciclo de oscilación. Los campos aparecen en todo el volumen de la cavidad. Las densidades de energía en cualquier punto están dadas por las ecuaciones 30-28 ($u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$) y 36-22 ($u_B = B^2/2\mu_0$); la energía total almacenada se calcula integrando sobre todo el volumen de la cavidad.

Los dos extremos planos de la cavidad pueden considerarse las placas de un capacitor que instantáneamente contienen las cargas $+q$ y $-q$ para crear el campo eléctrico de la figura 38-3. A medida que la cavidad oscila, las cargas se desplazan a lo largo de las paredes conductoras de la cavidad para invertir la dirección del campo.

Si escogemos una trayectoria circular en la cavidad de un plano paralelo a los extremos, cambiará el flujo eléctrico en la superficie rodeada por la trayectoria. Este flujo eléctrico cambiante crea un campo magnético tangente al círculo, según el término adicional de Maxwell que se incorporó a la ley de Ampère. En forma equivalente, puede considerarse que la corriente de desplazamiento fluye al interior del volumen de la cavidad (paralelamente a las líneas del campo eléctrico) y

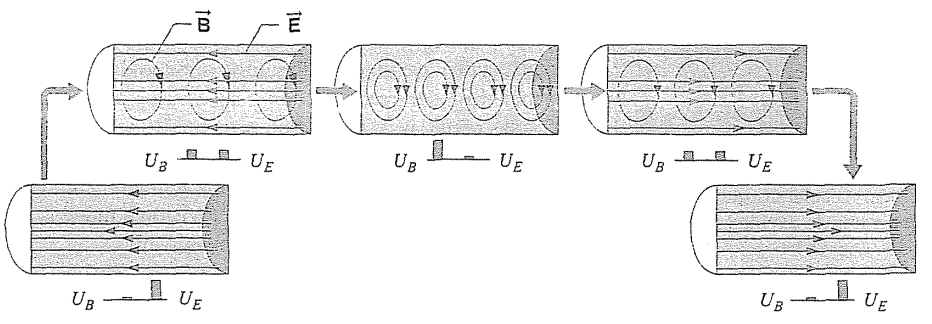


FIGURA 38-3. Medio ciclo de oscilación de una cavidad electromagnética. La gráfica debajo de cada figura presenta la energía eléctrica almacenada U_E y la energía magnética U_B. Las líneas de $\vec{E}$ son paralelas al eje de la cavidad, y las de $\vec{B}$, círculos concéntricos con el eje.

que esta corriente de desplazamiento produce líneas circulares de campo magnético como lo hacen las corrientes ordinarias en los alambres rectos.

Si, en cambio, escogemos una trayectoria rectangular en el plano de las líneas del campo eléctrico, la ley de Faraday establece que el campo eléctrico en esta trayectoria depende de la rapidez con que cambie el flujo magnético en el rectángulo. Tenemos, pues, dos resultados a partir de las ecuaciones de Maxwell:

$$B \propto \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \text{y} \quad E \propto \frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{38-10}$$

Nótese que B tiene su valor máximo cuando el campo eléctrico cambia con la rapidez máxima lo cual sucede cuando $E = 0$, esto es, cuando el campo eléctrico invierte su dirección. Asimismo, E alcanza su valor máximo cuando $B = 0$.

La ecuación 38-10 muestra la interdependencia de $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en la cavidad. El campo eléctrico cambiante genera un campo magnético, y el campo magnético cambiante uno eléctrico. Las oscilaciones de $\vec{\mathbf{E}}$ produce $\vec{\mathbf{B}}$ y las oscilaciones de $\vec{\mathbf{B}}$ produce $\vec{\mathbf{E}}$. Así pues, los campos oscilatorios se sostienen uno a otro; una vez establecida la oscilación, continuaría de modo indefinido si no fuera por las pérdidas resistivas en las paredes de la cavidad o por la fuga de energía a través de las aberturas de la cavidad. Se observa un acoplamiento mutuo similar de los campos magnético y eléctrico en las ondas electromagnéticas viajeras, tema que abordaremos más adelante en este capítulo.

Las cavidades oscilantes como las antes descritas constituyen el fundamento del *magnetrón*, que servía de generador de radiación de microondas utilizadas en el radar durante la década de 1940. Otro dispositivo basado en la cavidad es el *klystron*, con el cual se amplificaban las señalas reflejadas del radar. (Si las ondas cruzan una cavidad de klystron con la velocidad de la luz, es posible estimar que una cavidad de unos pocos centímetros de longitud tendrá un periodo aproximado de 10^{-10} s, correspondiente a una frecuencia de 10 GHz.) Una aplicación común de este aparato son los aceleradores productores de haces de partículas cargadas con mucha energía. En la figura 38-4 se ve el interior del acelerador de electrones de dos millas en Stanford, donde cientos de cavidades resonantes en sucesión se emplean para elevar a 50 GeV la energía de los electrones. ■

FIGURA 38-4. Interior del Stanford Linear Accelerator de 2 millas. El largo cilindro vertical es una de cientos de cavidades electromagnéticas resonantes (klystron) que generan los campos eléctricos necesarios para acelerar los electrones. Cada klystron produce una potencia máxima de 67 MW.

38-4 GENERACIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Las ondas electromagnéticas transportan energía o momento de un punto a otro del espacio por medio de sus campos eléctrico y magnético. Antes de iniciar la descripción matemática de las ondas electromagnéticas, vamos a exponer algunas propiedades generales que cabría esperar de estas ondas.

¿Qué tipo de arreglo de las cargas o corrientes se prevé que produzca una onda electromagnética? Un carga eléctrica en reposo origina un patrón de líneas del campo eléctrico. Una carga en movimiento con velocidad constante crea un patrón de líneas del campo magnético además de las líneas del campo eléctrico. Una vez alcanzada una condición estacionaria (esto es, después que la carga está en movimiento y que los campos se establecen en el espacio), existe en dicho espacio una densidad de energía relacionada con los campos eléctrico y magnético, pero la densidad de la energía permanece constante en el tiempo. Fuera de la evidencia de su presencia, no se traslada ninguna señal de la carga a puntos distantes; tampoco se transporta energía ni momento, y no hay radiación electromagnética.

En cambio, si agitamos la carga hacia adelante y atrás, podríamos enviarle señales a un amigo distante que tuviera el equipo necesario para detectar los cambios en los campos eléctrico y magnético. Mediante un código preestablecido, podríamos enviar información agitando la carga a cierta velocidad o dirección. En este caso, se emitirían las señales con una onda electromagnética. Para producir esta onda hay que acelerar la carga. Es decir, *a velocidad constante ni las cargas estáticas ni las cargas en movimiento irradian*; *sí lo hacen las cargas aceleradas*. Dicho con otras palabras, el movimiento uniforme de cargas equivale a una corriente que no cambia con el tiempo; el movimiento acelerado corresponde a una corriente que cambia con el tiempo; así, podemos suponer que la radiación proviene de corrientes que varían con el tiempo.

En el laboratorio, una forma fácil de generar una onda electromagnética consiste en hacer que las corrientes de los alambres cambien con el tiempo. Para simplificar las cosas suponemos una variación senoidal con el tiempo. En la figura 38-5 se muestra un circuito que pudiera emplearse con este fin. Consta de un circuito *RLC* oscilatorio, con una fuente externa que restaura la energía disipada en el circuito o transportada por radiación. La corriente en este circuito varía senoidalmente con la frecuencia angular resonante ω; ésta es aproximadamente $1/\sqrt{LC}$ si las pérdidas resistivas son pequeñas (Sec. 36-7). Con un transformador, el oscilador se acopla a una *línea de transmisión*, que sirve para transportar la corriente a una *antena*. (Los cables coaxiales, que llevan señales de televisión a muchos hogares, son un ejemplo común de estas líneas.)

La forma de la antena determina las propiedades geométricas de los campos eléctrico y magnético radiados. Supone-

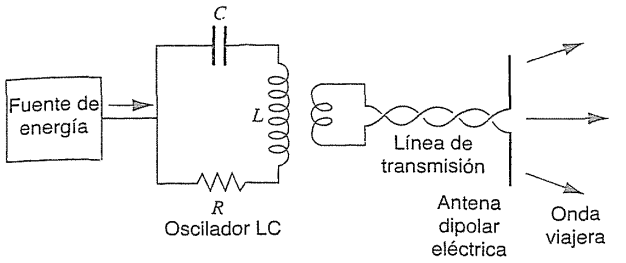


FIGURA 38-5. Arreglo para generar una onda electromagnética viajera.

mos una *antena dipolar* que, como se aprecia en la figura 38-5, puede considerarse simplemente como dos conductores rectos. Las cargas fluctúan hacia adelante y atrás en los dos conductores con la frecuencia ω, excitadas por el oscilador. Podemos pensar que la antena es un dipolo eléctrico oscilatorio, donde una rama lleva una carga instantánea q, y la otra una carga $-q$. La carga q varía senoidalmente con el tiempo y cambia de signo cada mitad de ciclo. Estas cargas se aceleran cuando se desplazan hacia atrás y adelante en la antena, de modo que dicha antena es una *fuente de radiación eléctrica dipolar.* En cualquier punto del espacio hay campos eléctricos y magnéticos que varían senoidalmente en el tiempo.*

La figura 38-6 contiene una serie de "instantáneas" que ofrecen una imagen esquemática de cómo se forma el campo de radiación. Las líneas del campo eléctrico pueden deducirse de los lugares donde surgen las cargas positiva y negativa del dipolo; el campo magnético correspondiente, que aparece en la figura 38-6*e*, se infiere de la corriente en el conductor, aplicando para ello la regla de la mano derecha. La figura es un corte en el plano xy; para hacernos una idea más completa del campo debemos imaginar que giramos la figura alrededor del eje y. Se supone que observamos el campo a grandes distancias del dipolo en comparación con la longitud de onda de la radiación; el campo observado en tales condiciones recibe el nombre de *campo de radiación*. A distancias menores observaremos el *campo cercano* más complejo, del que no nos ocuparemos aquí. Nótese que el campo "se rompe y se aleja" de la antena y forma espiras cerradas, en contraste con el campo estático de un dipolo eléctrico, donde las líneas del campo siempre comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas.

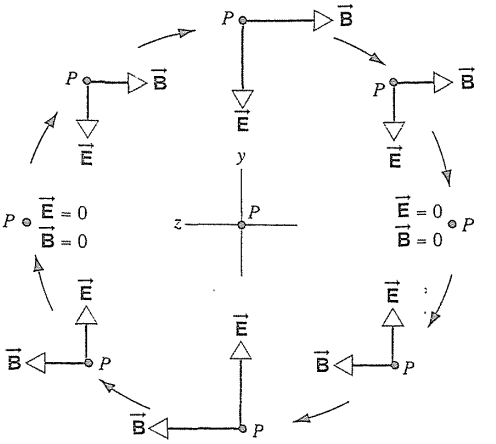


FIGURA 38-7. Ocho "instantáneas" cíclicas de una onda electromagnética plana que irradian del dipolo oscilatorio de la figura 38-6, observados en el punto P. La dirección en que se desplaza la onda (dirección x en la Fig. 38-6) está fuera del plano de la página. Las líneas de $\vec{E}$ son verticales y las de $\vec{B}$ horizontales.

Otra perspectiva del campo de radiación se ofrece en la figura 38-7 que representa una serie de "instantáneas" de los campos eléctrico y magnético que rápidamente dejan atrás al observador situado en el punto P del eje x de la figura 38-6. Suponemos que el observador se halla tan lejos del dipolo que los frentes de onda pueden considerarse planos. Como de costumbre, la densidad de las líneas de campo indica la intensidad de este campo. Adviértase especialmente que 1) $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están en fase (ambos alcanzan su nivel máximo en el mismo instante y que son cero también en el mismo instante); 2) $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí. En la siguiente sección expli-

* Al tipo dipolar pertenece la mayor parte de las radiaciones de la vida cotidiana, desde las ondas de radio y la luz hasta los rayos X y los rayos gamma. Por lo regular, las antenas de radio y de televisión están diseñadas para transmitir radiación dipolar. Desde el punto de vista de la emisión de radiación, a menudo puede suponerse que los átomos y núcleos individuales son dipolos oscilatorios.

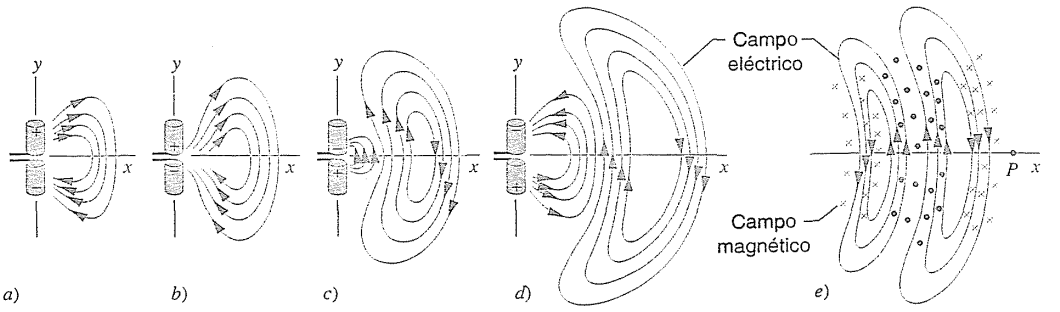


FIGURA 38-6. Etapas sucesivas en la emisión de una onda electromagnética desde una antena dipolar. En *a*)-(*d*), sólo se muestran los patrones de campo. En *e*) se muestra el campo magnético como perpendicular al plano de la página.

caremos estas conclusiones, las cuales se infieren al analizar las ondas electromagnéticas viajeras en el espacio libre con el uso de las ecuaciones de Maxwell.

38-5 ONDAS VIAJERAS Y LAS ECUACIONES DE MAXWELL

La exposición anterior nos ofrece una descripción cualitativa de un tipo de onda electromagnética viajera. En la presente sección estudiamos la descripción matemática de esta onda, que, según veremos, concuerda con las ecuaciones de Maxwell. Al hacerlo también veremos que la velocidad de estas ondas en el espacio vacío es igual a la velocidad de la luz; esto nos lleva a concluir que también la luz es una onda electromagnética.

Supóngase que el observador en el punto P de la figura 38-6 se halla tan lejos del dipolo oscilador que los frentes de onda que pasan por el punto P (mostrados en la Fig. 38-7) son planos. Las líneas de $\vec{\mathbf{E}}$ son paralelas al eje y, y las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ son paralelas al eje z. Escribimos los campos $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en la forma matemática usual de una onda senoidal viajera (Secc. 18-3):

$$E(x, t) = E_m \operatorname{sen}(kx - \omega t), \qquad (38\text{-}11)$$

$$B(x, t) = B_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \qquad (38\text{-}12)$$

Aquí, ω es la frecuencia angular relacionada con el dipolo oscilatorio, y el número de onda k tiene su significado habitual de $2\pi/\lambda$. Si la onda se propaga con la rapidez de fase c, ω y k se relacionan de acuerdo con $c = \omega/k$. La figura 38-8 representa la variación senoidal de los campos $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en los puntos a lo largo del eje x en un instante particular. En esta onda plana, la misma variación de los campos $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ ocurre a lo largo de cualquier línea paralela al eje x, es decir, los campos en cualquier punto del eje x son iguales a los campos en todas partes en un plano que atraviesa ese punto perpendicular al eje x.

Más adelante, demostraremos que las amplitudes E_m y B_m se relacionan entre sí. Nótese que, al escribir estas ecuaciones para las magnitudes de $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, hemos supuesto que E y B están en fase; es decir, las constantes de fase de las ecuaciones 38-11 y 38-12 tienen el mismo valor (que hemos supuesto que es cero). En páginas posteriores veremos que esta elección se basa en las ecuaciones de Maxwell.

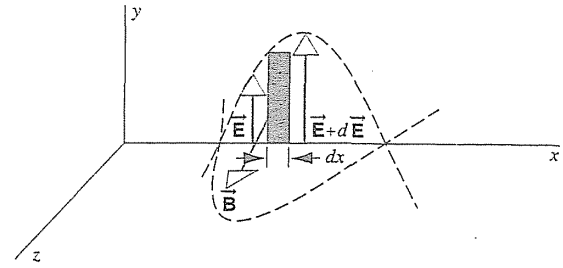


FIGURA 38-9. Detalle de la tira vertical de la figura 38-8 en el momento en que la atraviesa la onda.

Vamos a examinar a fondo la onda cuando pasa por dos tiras rectangulares en el punto P de la figura 38-8. Las tiras tienen una altura h y un ancho dx; una se encuentra en el plano xy (es decir, en el plano de $\vec{\mathbf{E}}$) y la otra en el plano xz (el plano de $\vec{\mathbf{B}}$).

Vamos a considerar primero la tira en el plano xy, que se muestra de modo pormenorizado en la figura 38-9. Al pasar la onda sobre la tira, las líneas de $\vec{\mathbf{E}}$ son paralelas a los lados largos de la tira y las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ son perpendiculares al área de esta tira. En la terminología de la ley de Faraday, conforme pasa la onda, cambia el flujo magnético en la superficie rectangular y se crea entonces un campo eléctrico inducido alrededor de la superficie. El campo eléctrico inducido es simplemente el campo eléctrico de la onda viajera.

Examinamos la tira en el instante que aparece en la figura 38-9. Al dirigirse la onda a la derecha, el flujo magnético está disminuyendo en el tiempo porque el campo $\vec{\mathbf{B}}$ de la onda que se mueve al interior de la tira es más pequeño. El campo inducido $\vec{\mathbf{E}}$ debe oponerse al cambio y esto significa lo siguiente: se inducirá una corriente en el sentido de las manecillas del reloj si imaginamos que la frontera del rectángulo sombreado es una espira de corriente. Dicha corriente induciría un campo magnético que apuntaría hacia afuera de la página dentro del rectángulo. Por supuesto, no fluye corriente por la espira, pero los vectores $\vec{\mathbf{E}}$ son compatibles con esta explicación, ya que el campo eléctrico más grande en el borde derecho de la espira generaría una corriente neta en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Al aplicar la ley de Faraday, $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -d\Phi_B/dt$, primero necesitamos la integral de línea de $\vec{\mathbf{E}}$ alrededor de la espira. Evaluaremos la integral desplazándonos en sentido

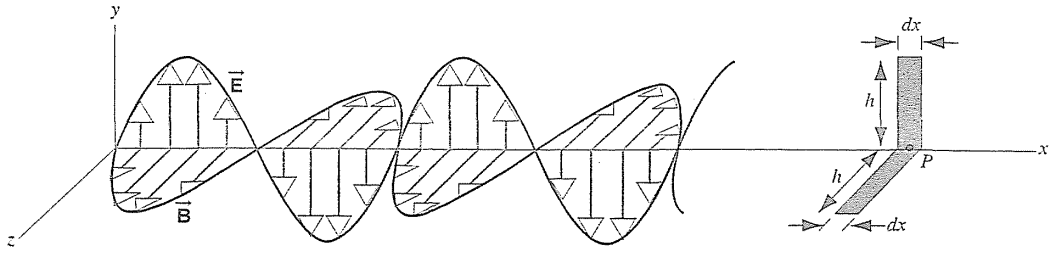


FIGURA 38-8. "Instantánea" de una onda electromagnética que varía senoidalmente viajando en la dirección x. Observamos la onda en el momento de pasar por el punto P. La longitud de los vectores $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ indica únicamente su variación espacial en varios lugares del eje x. Las longitudes absolutas de estos vectores son arbitrarias.

contrario al de las manecillas del reloj en torno a la espira. Puesto que $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{s}$ son perpendiculares en la parte superior e inferior de ella, la integral no recibe contribuciones de esos lados. Entonces, la integral queda así

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s} = (E + dE)h - Eh = dE\,h.$$

El flujo Φ_B para el rectángulo es*

$$\Phi_B = (B)(dx\,h),$$

donde B es la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ en la tira rectangular, y $dx\,h$ su área. La derivación nos da

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = h\,dx\,\frac{dB}{dt}.$$

Conforme a la ley de Faraday (Ec. 38-3) tenemos entonces

$$dE\,h = -h\,dx\,\frac{dB}{dt},$$

o

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}. \tag{38-13}$$

En realidad, tanto B como E son funciones de x y de t (Ecs. 38-11 y 38-12). Al evaluar dE/dx, suponemos que t *es* constante porque la figura 38-9 es una "instantánea". También, al evaluar dB/df suponemos que x es constante porque se requiere la rapidez del cambio de B en un lugar particular, la tira de la figura 38-9. En tales circunstancias, las derivadas son *derivadas parciales*, † y entonces se emplea una notación diferente para ellas; consúltense por ejemplo las secciones 18-3 y 18-5. En esta notación la ecuación 38-13 se convierte en

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{38-14}$$

El signo negativo en esta ecuación es apropiado y necesario, pues B disminuye con t, aunque E aumenta con x en el sitio del rectángulo sombreado en la figura 38-9. Dado que se conocen $E(x, t)$ y $B(x, t)$ (Ecs. 38-11 y 38-12), la ecuación 38-14 se convierte en

$$kE_m \cos(kx - \omega t) = \omega B_m \cos(kx - \omega t).$$

Si hubiera empleado otras constantes de fase en las ecuaciones 38-11 y 38-12, los términos de coseno en la ecuación anterior estarían fuera de fase y los dos lados no podrían ser iguales con todas las x y t. La ecuación 38-14, que se obtiene directamente al aplicar las ecuaciones de Maxwell, indica que E y B deben estar en fase.

Al eliminar el término coseno, obtenemos

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{\omega}{k} = c. \tag{38-15}$$

La razón de las amplitudes de los componentes magnéticos y eléctricos de la onda es la velocidad c de ella. En las ecuaciones 38-11 y 38-12 vemos que la razón de las amplitudes es la misma que la razón de los valores instantáneos, o sea

$$E = cB. \tag{38-16}$$

Este importante resultado será útil en las secciones posteriores.

Ahora nos concentramos en la tira horizontal de la figura 38-8, que se halla en el plano xz. Un detalle de ella se observa en la figura 38-10. En este instante particular el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ aumenta en la tira. El flujo eléctrico disminuye en el tiempo porque la onda que se dirige al interior de ella tiene un campo $\vec{\mathbf{E}}$ más pequeño.

Para analizar los campos en esta tira, necesitamos la ley de Ampère con la modificación hecha por Maxwell (Ec. 38-6): $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{s} = \mu_0\epsilon_0 d\Phi_E/dt$. En efecto, el flujo eléctrico cambiante (o corriente de desplazamiento) en la superficie rectangular induce un campo magnético en la tira: es el campo magnético de la onda.

Como hicimos en el caso del campo $\vec{\mathbf{E}}$ de la figura 38-9, evaluemos la integral de línea de $\vec{\mathbf{B}}$ (lado izquierdo de las leyes de Ampère y de Maxwell), recorriendo la tira en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Dado que $\vec{\mathbf{B}}$ y $d\vec{s}$ son perpendiculares en sus lados cortos, necesitamos considerar sólo sus lados largos, donde tenemos

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{s} = -(B + dB)h + Bh = -h\,dB,$$

donde B es la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ en el lado izquierdo de la tira, y $B + dB$ su magnitud en el lado derecho.

Nótese que $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s}$ en la figura 38-9 es positivo y que en cambio $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{s}$ en la figura 38-10 es negativo, a pesar de que los flujos correspondientes *están aumentando* en ambos casos. Ello concuerda con la diferencia de signos en las ecuaciones 38-3 y 38-6 y con las figuras, las cuales muestran $\vec{\mathbf{E}}$ en la figura 38-9 y $\vec{\mathbf{B}}$ en la figura 38-10 circulando en dirección opuesta alrededor de las tiras.

El flujo Φ_E en el rectángulo de la figura 38-10 es

$$\Phi_E = (E)(h\,dx).$$

La derivación nos da

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = h\,dx\,\frac{dE}{dt}.$$

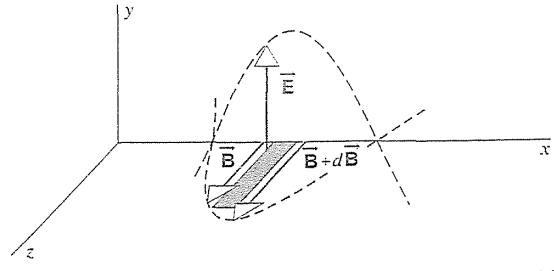


FIGURA 38-10. Detalle de la tira horizontal de la figura 38-8.

* Usamos la regla de la mano derecha para el signo del flujo: si los dedos de la mano derecha apuntan en la dirección en que integramos alrededor de la trayectoria, el pulgar indicará la dirección en que el campo que pasa por el área encerrada produce un flujo positivo.

† Al tomar una derivada parcial respecto a cierta variable, como $\partial E/\partial x$, tratamos el resto de las variables (y, z y t, por ejemplo) como si fuesen constantes.

Por consiguiente, podemos escribir la ley de Ampère y de Maxwell (Ec. 38-6) así

$$-h\,dB = \mu_0\epsilon_0\left(h\,dx\frac{dE}{dt}\right)$$

o, cancelando h y sustituyendo las derivadas parciales,

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}. \qquad (38\text{-}17)$$

Una vez más, el signo negativo de esta ecuación es apropiado y necesario, pues E disminuye con t, aunque B aumenta con x en el sitio del rectángulo sombreado de la figura 38-10.

Al combinar la ecuación anterior con las ecuaciones 38-11 y 38-12 encontramos

$$-kB_m\cos(kx - \omega t) = -\mu_0\epsilon_0\omega E_m\cos(kx - \omega t),$$

o bien

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{k}{\mu_0\epsilon_0\omega} = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0 c}, \qquad (38\text{-}18)$$

donde hemos usado $\omega = ck$. La eliminación de E_m/B_m entre las ecuaciones 38-15 y 38-18 nos da

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}. \qquad (38\text{-}19)$$

Y al sustituir los valores numéricos obtenemos

$$c = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})}}$$
$$= 3.0 \times 10^8\ \mathrm{m/s},$$

que es la velocidad de la luz en el espacio libre. Este surgimiento de la velocidad de la luz, partiendo de consideraciones meramente electromagnéticas, es el broche de oro de la teoría electromagnética de Maxwell. Él hizo su predicción antes que se conocieran las ondas de radio y la naturaleza electromagnética de la luz. Su predicción originó el concepto del espectro electromagnético y el descubrimiento de las ondas de radio por Heinrich Hertz en 1890. Permitió explicar la óptica como una rama del electromagnetismo y derivar sus leyes fundamentales de las ecuaciones de Maxwell.

Como por definición μ_0 es exactamente $4\pi \times 10^{-7}$ H/m y como a la velocidad de la luz se le asigna ahora el valor exacto de 299,792,458 m/s, gracias a la ecuación 38-19 se obtiene un valor definido de ϵ_0:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0} = 8.854187817\ldots \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}.$$

Es interesante precisar lo siguiente: Maxwell no consideró la propagación de las ondas electromagnéticas y los fenómenos electromagnéticas como se indica, digamos, en la figura 38-8. Como los físicos de su época, Maxwell estaba firmemente convencido de que el espacio estaba lleno con una sustancia sutil denominada *éter* y que los fenómenos electromagnéticos podían explicarse como vórtices que giraban en este éter.

Uno de los atributos de Maxwell es su genialidad ya que, aun con esos modelos mecánicos, logró deducir las leyes del electromagnetismo que llevan su nombre. Como ya señalamos con anterioridad, estas leyes no sólo no requirieron cambio alguno cuando tres décadas más tarde apareció la teoría especial de la relatividad de Einstein, sino que incluso recibieron un decidido apoyo de esta teoría. Hoy, según se menciona en la sección 41-6, ya no es necesario recurrir al concepto de éter para explicar la propagación de las ondas electromagnéticas.

38-6 TRANSPORTE DE ENERGÍA Y EL VECTOR DE POYNTING

Como cualquier forma de onda, una onda electromagnética puede transportar energía de un lugar a otro. La luz emanada de una lámpara y el calor radiante de un fuego son ejemplos comunes de energía que fluye por medio de ondas electromagnéticas.

El flujo de energía en una onda electromagnética suele medirse en función de la rapidez con que fluye la energía por unidad de superficie (o, en forma equivalente, la potencia electromagnética por unidad de superficie). Describimos la magnitud y la dirección del flujo de energía en función de un vector denominado *vector de Poynting** $\vec{S}$, definido a partir de

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}. \qquad (38\text{-}20)$$

Convenzámonos primero de que $\vec{S}$ tal como se define en la ecuación 38-20 indica la dirección de desplazamiento de la onda. Según la regla usual del producto cruz, $\vec{S}$ debe ser perpendicular al plano determinado por $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en una dirección establecida por la regla de la mano derecha. Al aplicar esta regla a la figura 38-8, se advierte que en la primera mitad del ciclo de la onda, donde $\vec{E}$, sigue la dirección $+y$, y $\vec{B}$ sigue la dirección $+z$, el producto cruz de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ apunta en dirección $+x$ que es, efectivamente, aquella en que se desplaza la onda. En la segunda mitad del ciclo, donde $\vec{E}$ tiene la dirección $-y$, y $\vec{B}$ la dirección $-z$, el producto cruz sigue otra vez la dirección $+x$.

Nótese que una onda electromagnética puede especificarse en forma inequívoca con sólo dar su campo $\vec{E}$ y la dirección de su movimiento. En otras palabras, por medio de las ecuaciones 38-15 y 38-20 podemos encontrar el campo $\vec{B}$ de una onda si conocemos su campo $\vec{E}$ y la dirección de su movimiento. La ecuación 38-15 contiene la magnitud de $\vec{B}$, y la ecuación 38-20, su dirección.

A continuación vamos a examinar la magnitud de $\vec{S}$ definida en la ecuación 38-20 y demostraremos que se obtiene la potencia por unidad de superficie de la onda. En el caso de la onda de la figura 38-8, la magnitud de $\vec{S}$ es

$$S = \frac{1}{\mu_0}EB, \qquad (38\text{-}21)$$

* Al vector de Poynting se le llama así en honor de John Henry Poynting (1852-1914), quien fue el primero en explicar las propiedades de este vector. Fue un físico británico famoso por sus estudios del electromagnetismo y de la gravitación.

donde S, E y B son los valores instantáneos en el punto de observación. Con el uso de las ecuaciones 38-16 y 38-19, podemos escribir lo anterior como

$$S = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 = \epsilon_0 c E^2 \quad \text{o} \quad S = \frac{c}{\mu_0} B^2. \tag{38-22}$$

Antes, obtuvimos la densidad de energía (energía por unidad de volumen) *en cualquier punto donde hay un campo eléctrico o* magnético: $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ (Ec. 30-28) y $u_B = \frac{1}{2}B^2/\mu_0$ (Ec. 36-22). Estas ecuaciones, obtenidas para los campos estéticos, se aplican igualmente a los campos que varían con el tiempo. Cuando existe un campo eléctrico y otro magnético (como en las ondas electromagnéticas), la densidad total de energía en cualquier punto es

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{S}{2c} + \frac{S}{2c} = \frac{S}{c}, \tag{38-23}$$

donde hemos utilizado la ecuación 38-22 para expresar E^2 y B^2 en función de S. Nótese en la ecuación 38-23 que $u_E = u_B$ por donde quiera que pase la onda.

La figura 38-11 representa los campos instantáneos a medida que la onda cruza un pequeño volumen del espacio que rodea al punto P. El volumen tiene un espesor dx en la dirección en que se mueve la onda y un área A transversal a su dirección de desplazamiento. El volumen dV puede expresarse como $A\,dx$. La onda recorre la distancia dx en un tiempo $dt = dx/c$, donde c es la velocidad de onda. La energía electromagnética dU en el elemento volumétrico dV es

$$dU = u\,dV = \frac{S}{c}\,dV = \frac{S}{c}A\,dx = SA\,dt. \tag{38-24}$$

Entonces, la magnitud del vector de Poynting es

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \frac{P}{A}, \tag{38-25}$$

donde hemos hechos la rapidez de flujo de la energía dU/dt igual a la potencia P. La ecuación 38-25 muestra que la magnitud del vector de Poynting indica la rapidez de flujo de la energía o la potencia por unidad de área de la onda. En la ecuación 38-25 es evidente que la unidad de S en el SI es watts/metro^2.

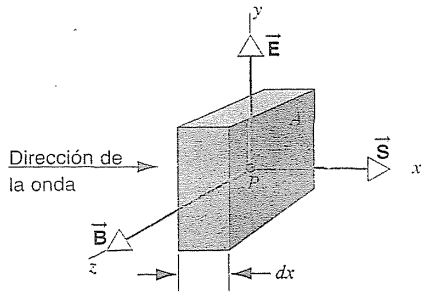


FIGURA 38-11. Una onda electromagnética atraviesa un pequeño volumen en el punto P. Se muestran los campos y el vector de Poynting en un instante particular.

Intensidad de una onda electromagnética

La ecuación 38-21 relaciona la magnitud de S en cualquier lugar con la de E y la de B allí en un valor particular de tiempo. Estos valores fluctúan muy rápidamente en el tiempo; por ejemplo, la frecuencia de una onda luminosa es de unos 10^{15} Hz. En la mayoría de los detectores (el ojo humano entre ellos), esta fluctuación resulta demasiado rápida para el observador. En cambio, vemos el *promedio en el tiempo* de S, tomado en muchos ciclos de onda. A dicho promedio S_{pro} se le conoce también como *intensidad* I de la onda.

A partir de las ecuaciones 38-11 y 38-22 tenemos

$$I = S_{\text{pro}} = \frac{1}{\mu_0 c}(E^2)_{\text{pro}} = \frac{1}{\mu_0 c}E_{\text{m}}^2\,[\text{sen}^2\,(kx - \omega t)]_{\text{pro}}.$$

Por lo regular, el intervalo temporal en que promediamos es mucho mayor que el periodo de un ciclo. En este caso podemos despreciar el efecto de las fracciones de un ciclo y reemplazar el sen^2 por su promedio en un número entero de ciclos, o sea $\frac{1}{2}$. Y así obtenemos

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c}E_{\text{m}}^2 = \frac{1}{2\mu_0}E_{\text{m}}B_{\text{m}}. \tag{38-26}$$

La intensidad también se expresa en términos de magnitudes de rcm (raíz cuadrada media) del campo. Con $E_{\text{m}} = \sqrt{2}E_{\text{rcm}}$, obtenemos

$$I = \frac{1}{\mu_0 c}E_{\text{rcm}}^2 = \frac{1}{\mu_0}E_{\text{rcm}}B_{\text{rcm}}. \tag{38-27}$$

Nótese que la ecuación 38-27 se parece a la ecuación 38-21, si sustituimos los valores instantáneos por sus valores promedio rcm.

La figura 38-8 y las ecuación 38-11 y 38-12 representan una onda cuyas amplitudes E_{m} y B_{m} no cambian con la posición conforme van desplazándose. La luz procedente de un láser es una buena aproximación de este tipo de onda. Otro ejemplo es la luz emanada de una fuente muy distante que vemos desde distancias mucho menores que la de la fuente; por ejemplo, la luz procedente del Sol. Con todo, a menudo tratamos con fuentes cercanas en que las ecuaciones 38-11 y 38-12 con una amplitud constante no son válidas. Si consideramos una fuente puntual de ondas, como una lámpara vista a distancias mucho mayores que el tamaño de la lámpara, los frentes de onda provenientes de la fuente se dispersan como esferas si la fuente emite su radiación con igual intensidad en todas direcciones (llamadas *isotrópicas*).

Si las ondas no pierden energía al desplazarse, la energía de un frente de onda esférico permanece constante. En otras palabras, la rapidez con que la energía proveniente de la onda cruza una superficie esférica centrada en la fuente no depende del radio r de la esfera. A medida que r crece, la potencia total suministrada por el frente de onda no se altera, pero disminuye la potencia por unidad de superficie, porque aumenta el área superficial de la esfera. Si P es la potencia promedio emitida por la fuente, la intensidad en la superficie esférica es la potencia por unidad de superficie:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}. \tag{38-28}$$

La intensidad de la onda que se origina en una fuente puntual se reduce como $1/r^2$ con la distancia de ella. La comparación de las ecuaciones 38-27 y 38-28 muestra que la amplitud correspondiente de los campos eléctricos y magnéticos (E_m y B_m o E_{rcm} y B_{rcm}) disminuye como $1/r$.

PROBLEMA RESUELTO 38-3. Un observador se halla a 1.8 m de una fuente luminosa (de dimensiones mucho menores que 1.8 m), cuya salida de potencia P es 250 W. Calcule el valor rcm de los campos eléctrico y magnético en la posición del observador. Suponga que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones.

Solución La combinación de las ecuaciones 38-27 y 38-28 nos da

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{rcm}^2.$$

El campo eléctrico rcm es

$$E_{rcm} = \sqrt{\frac{P\mu_0 c}{4\pi r^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(250\ \text{W})(4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{(4\pi)(1.8\ \text{m})^2}}$$
$$= 48\ \text{V/m}.$$

El valor rcm del campo magnético se deduce de la ecuación 38-15 y es

$$B_{rcm} = \frac{E_{rcm}}{c} = \frac{48\ \text{V/m}}{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}}$$
$$= 1.6 \times 10^{-7}\ \text{T} = 0.16\ \mu\text{T}.$$

Nótese que E_{rcm} (= 48 V/m) es considerable a juzgar por los estándares habituales de laboratorio, pero que B_{rcm} (= 0.16 μT) es muy pequeño. Ello sirve para explicar por qué la mayoría de los instrumentos con que se detectan y se miden las ondas electromagnéticas reaccionan al componente eléctrico de la onda. No obstante, es un error decir que el componente eléctrico de una onda electromagnética es "más fuerte" que el componente magnético, pues no es posible comparar magnitudes medidas en unidades diversas. Como ya vimos, los componentes eléctrico y magnético tienen la misma base en lo tocante a la propagación de la onda. Sus energías promedio, que pueden compararse, son idénticas.

38-7 PRESIÓN DE RADIACIÓN

Cuando una onda electromagnética incide en un objeto, éste se halla en condiciones de absorber energía de esta onda, y el resultado a menudo se manifiesta como un incremento en la temperatura del objeto. En realidad, el campo eléctrico de la onda ejerce fuerza sobre los electrones y los acelera. En colisiones con los átomos del material, los electrones pueden transferir su energía a todo el objeto, aumentando con ello su temperatura.

En teoría es posible que la absorción de una onda electromagnética transfiera momento a todo el objeto al ejercer fuerza sobre sus electrones. En efecto, la onda ejerce una fuerza neta sobre el objeto en la dirección en que se desplaza la onda. La fuerza suele ser muy pequeña —no sentimos sus efectos cuando la luz nos ilumina—, pero puede observarse en el laboratorio en condiciones rigurosamente controladas.

La figura 38-12 muestra los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética que incide en una delgada hoja de material con alta resistividad. El campo eléctrico de esta onda ejerce una fuerza $\vec{F}_E = -e\vec{E}$ en los electrones, que son acelerados en una dirección opuesta al campo (la dirección $-y$ en la Fig. 38-12). Cuando se aplica un campo eléctrico a un material conductor, sabemos que los electrones adquieren una velocidad de desplazamiento $\vec{v}_d$ que es proporcional a la intensidad del campo (véase, por ejemplo, la Ec. 29-19). Vamos a prescindir de todos los detalles de las propiedades del material y a escribir que la magnitud de la velocidad de desplazamiento es proporcional a la fuerza eléctrica, de manera que

$$bv_d = eE, \tag{38-29}$$

donde b es una constante de proporcionalidad. Ésta desempeña una función parecida a la constante de amortiguamiento en una partícula que se mueve en un fluido viscoso, digamos una piedra que cae en un contenedor de aceite. Si la fuerza efectiva de amortiguamiento (es decir, la resistividad) es grande, la velocidad del electrón se reajustará continuamente al campo eléctrico y, por lo mismo, la ecuación 38-29 conserva su validez, inclusive para un campo que varíe con el tiempo de una onda electromagnética.

A medida que el electrón se desplaza a lo largo del eje y, el campo magnético de la onda ejerce una fuerza sobre él: $\vec{F}_B = -e\vec{v}_d \times \vec{B}$. En la figura 38-12 se ve que la fuerza sigue la dirección $+x$, esto es, la misma en que se mueve la onda. Cuando $\vec{E}$ y $\vec{B}$ invierten la dirección, la fuerza continúa en la dirección $+x$. Por ser $\vec{v}_d$ y $\vec{B}$ perpendiculares entre sí, podemos escribir la magnitud de la fuerza magnética en un electrón individual como $F_B = ev_dB$. Al sustituir $v_d = eE/b$, basándonos en la ecuación 38-29, obtenemos

$$F_B = ev_dB = \frac{e^2EB}{b} = \frac{e^2E^2}{cb}, \tag{38-30}$$

donde el último resultado se deduce al utilizar $B = E/c$. Si la hoja está iluminada uniformemente y si contiene N electrones, la fuerza total en la dirección x es $F = NF_B$.

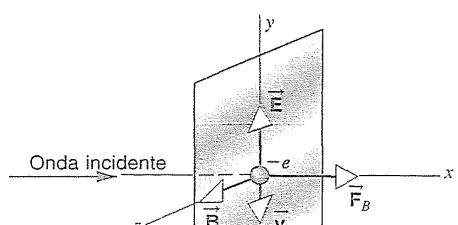


FIGURA 38-12. Una onda luminosa plana incidente cae sobre un electrón en una delgada hoja resistiva. Se indican los valores instantáneos de $\vec{E}$, $\vec{B}$, la velocidad del electrón $\vec{v}_d$ y la fuerza de radiación $\vec{F}_B$.

Examinamos a continuación la rapidez con que la hoja absorbe energía de la onda. El campo $\vec{B}$ no realiza trabajo en los electrones porque la fuerza magnética siempre es perpendicular a su movimiento, pero el campo $\vec{E}$ sí realiza trabajo y, por tanto, transfiere energía. La potencia (rapidez de transferencia de energía) suministrada desde el campo $\vec{E}$ a un electrón es

$$\frac{dU_e}{dt} = F_E v_d = (eE)\left(\frac{eE}{b}\right) = \frac{e^2E^2}{b}. \qquad (38\text{-}31)$$

La rapidez total de la absorción de energía en todos los electrones en la hoja es $dU/dt = N\,dU_e/dt$.

Ahora, podemos obtener una expresión de la fuerza total en dicha hoja partiendo de la rapidez de absorción de energía al combinar las ecuaciones 38-30 y 38-31:

$$F = NF_B = \frac{Ne^2E^2}{cb} = \frac{1}{c}\frac{dU}{dt} = \frac{SA}{c}, \qquad (38\text{-}32)$$

donde A es el área total de la hoja. Al tomar el promedio temporal de todas las cantidades, obtenemos

$$\frac{F_{pro}}{A} = \frac{I}{c} \quad \text{(absorción)}. \qquad (38\text{-}33)$$

La ecuación 38-33 muestra que la presión total (fuerza por unidad de superficie) ejercida por la radiación sobre la hoja es proporcional a la intensidad I de la radiación.

Con el uso de la segunda ley de Newton en la forma $F = dp/dt$, podemos escribir la ecuación 38-33 así

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dU}{dt} \quad \text{o} \quad dp = \frac{dU}{c}.$$

Al integrar obtenemos

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c} \quad \text{(absorción)}. \qquad (38\text{-}34)$$

El resultado anterior indica el cambio del momento Δp en un objeto que "retrocede" tras absorber la energía ΔU de una onda electromagnética.

También es posible que el objeto refleje la radiación incidente en él en vez de absorberla. Puesto que la onda debe invertir la dirección al reflejarse, el objeto retrocede con el doble del momento que habría tenido en el caso de absorción. (Este caso se parece a la molécula de un gas que imparte una presión a las paredes de un contenedor en colisiones que invierten su momento; Secc. 22-2). En el caso de la reflexión, la presión ejercida por la onda sobre el objeto y el momento impartido a él son el doble de grandes que en el caso de la absorción:

$$\frac{F_{pro}}{A} = \frac{2I}{c} \quad \text{(reflexión)}, \qquad (38\text{-}35)$$

$$\Delta p = \frac{2\Delta U}{c} \quad \text{(reflexión)}. \qquad (38\text{-}36)$$

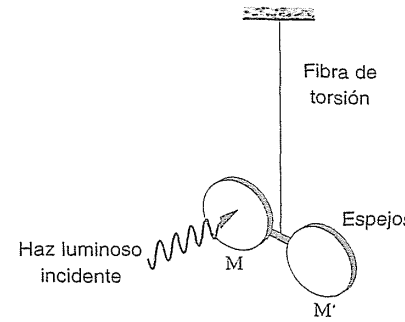


FIGURA 38-13. Arreglo de Nichols y Hull para medir la presión de radiación. La presión de la luz sobre un espejo M causa que la fibra se tuerza en un ángulo pequeño. En el dibujo se omitieron muchos detalles de un experimento tan delicado.

En 1903 E. F. Nichols y G. F. Hull efectuaron las primeras mediciones de la presión de radiación. Hicieron incidir un haz luminoso sobre un espejo pequeño sujeto a una fibra de torsión, como se señala en la figura 38-13. Por la presión en el espejo la fibra se tuerce y forma un ángulo pequeño θ. La presión que midieron era de unos 10^{-5} N/m^2 unos 10^{-10} veces más pequeña que la presión atmosférica. El lector imaginará el cuidado extraordinario que los experimentadores tuvieron para observar un efecto tan pequeño. Hoy los rayos láser nos permiten alcanzar intensidades mucho mayores de la luz, y la presión de un haz de láser puede elevar un objeto pequeño (Fig. 38-14).

Es difícil observar los efectos de la presión de radiación a causa de la luz que incide sobre objetos ordinarios; pero la radiación afecta mucho a los objetos microscópicos. Las partículas de polvo liberadas por los cometas experimentan la presión de radiación proveniente de la luz solar. Esta presión las em-

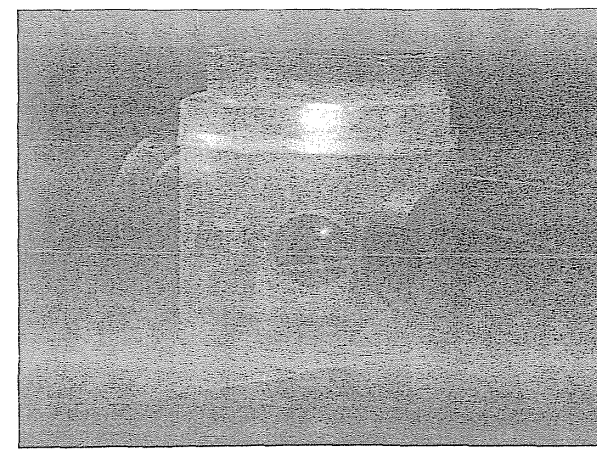


FIGURA 38-14. Un haz de lásers vertical levanta un pequeña gota de líquido (menos de 10 μm de diámetro). Los tubos horizontales son microscopios con que se observa la luz dispersada por la gota. Cortesía de David W. DuBois.

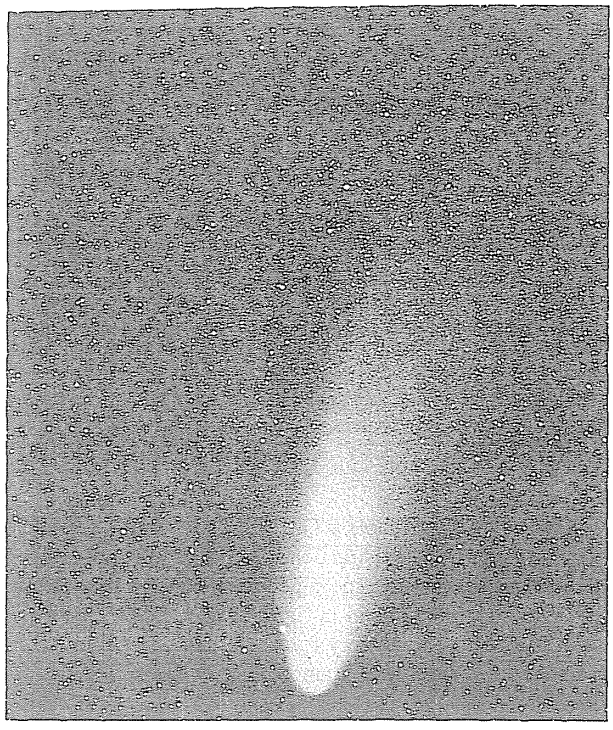


FIGURA 38-15. El cometa Hale-Bopp, que muestra dos colas. La más brillante, la derecha, se origina en las partículas de polvo del cometa que la presión de radiación aleja del Sol. La cola menos brillante, de la izquierda, se debe a los iones del cometa acelerados por el viento solar (protones y electrones de gran velocidad que provienen del Sol).

puja lejos del Sol, donde aparecen como la "cola" del cometa (Fig. 38-15). Inclusive se ha propuesto construir en el espacio hojas gigantes de material reflexivo delgado y utilizarlas para "enviar" naves espaciales a través del sistema solar.

PROBLEMA RESUELTO 38-4. Considere una partícula de polvo procedente de un cometa que se halla a una distancia R del Sol y lejos de cualquier planeta. Suponiendo que absorba toda la luz incidente, encuentre el radio r de esta partícula, si la fuerza de la presión de radiación equilibra exactamente la atracción gravitacional del Sol. Suponga que la partícula es esférica y que tiene la misma densidad que el material de la corteza terrestre, unos $3.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$.

Solución A primera vista, tal vez parezca que no disponemos de suficiente información para resolver el problema, pues no conocemos la distancia R del Sol. Sin embargo, la fuerza gravitacional y la intensidad de radiación (Ec. 38-28) varían como R^{-2}, de ahí que la distancia del Sol no afecte nuestro cálculo.

La fuerza ejercida sobre la partícula por la presión de la luz puede calcularse partiendo de la ecuación 38-33. En una superficie A donde la luz se absorba, empleamos el área circular πr^2 de la partícula de polvo. Si hacemos la fuerza causada por la presión de la luz igual a la fuerza gravitacional, obtendremos

$$\frac{IA}{c} = \frac{GmM}{R^2},$$

donde m $(= \rho V)$ es la masa de la partícula y M la del Sol. Sustituimos la ecuación 38-28 para la intensidad de la radiación y de ese modo tenemos

$$\frac{P(\pi r^2)}{4\pi R^2 c} = \frac{GmM}{R^2} = \frac{G\rho(\frac{4}{3}\pi r^3)M}{R^2}.$$

Al resolver para r obtenemos

$$r = \frac{3P}{16\pi c G \rho M}.$$

En el apéndice C se incluyen los valores de la potencia radiante del Sol y de su masa. La sustitución de los valores numéricos nos da

$$r = 1.9 \times 10^{-7}\ \text{m} = 0.19\ \mu\text{m}.$$

A medida que las partículas de este tamaño se desprenden del cometa, ninguna fuerza neta opera sobre ellas y continúan moviéndose en línea recta con una velocidad igual a la del cometa en el momento de la separación. En virtud de que la fuerza gravitacional crece con la masa de la partícula (o sea proporcionalmente a r^3) mientras que la fuerza de radiación lo hace con su superficie transversal (es decir, como r^2), las partículas más grandes caen hacia el Sol, pero las más pequeñas son empujadas lejos del Sol. El patrón neto de todas las partículas forma la cola del cometa.

OPCIÓN MÚLTIPLE

38-1 Las ecuaciones básicas del electromagnetismo

1. ¿De dónde proviene el signo negativo en la ecuación 38-3?
   A) De la Ley de Gauss
   B) De la ley de Faraday
   C) De la ley de Lenz
   D) De la ley de Cole

38-2 Campos magnéticos inducidos y la corriente de desplazamiento

2. La corriente en un alambre largo y recto aumenta de acuerdo con $i = (4.0\ \mu\text{A/s})t$.
   a) ¿Qué magnitud tiene la corriente de desplazamiento en el alambre?
   A) $i_d = 4.0\ \mu\text{A}$.
   B) $i_d = i = (4.0\ \mu\text{A/s})t$.
   C) No hay corriente de desplazamiento en el alambre.
   D) Se necesita más información para contestar la pregunta.
   b) ¿Qué dirección tiene la corriente de desplazamiento?
   A) Paralela a la corriente original.
   B) Antiparalela a la corriente original.
   C) No hay corriente de desplazamiento.

38-3 Ecuaciones de Maxwell

3. ¿Cuáles de las ecuaciones de Maxwell en la tabla 38-1 se obtienen de argumentos puramente teóricos que no requieren mediciones?

A) las cuatro ecuaciones
B) II solamente
C) I y II, las ecuaciones de la ley de Gauss
D) Ninguna de ellas

4. ¿Qué término necesita agregarse a la ley de inducción de Faraday, si se descubrieran monopolos magnéticos q_m? Suponga que la corriente magnética se define como $i_m = dq_m/dt$.
A) $-\epsilon_0 i_m$ B) $-i_m/\epsilon_0$
C) $-i_m/\mu_0$ D) $-\mu_0 i_m$

38-4 Generación de una onda electromagnética

5. Una corriente oscilatoria en una espira de alambre en un plano horizontal irradiará ondas electromagnéticas. ¿Qué dirección tiene el vector de campo eléctrico en la región lejana hacia el norte de la espira?
A) Norte/sur B) Este/oeste C) Arriba/abajo

6. Se generan ondas de radio de amplitud modulada con una antena vertical de dipolo eléctrico; se reciben con un largo solenoide cilíndrico. ¿Cómo hay que orientarlo para que capte las señales de amplitud modulada en forma óptima?
A) El eje del solenoide debe ser vertical.
B) El eje del solenoide debe ser horizontal y apuntar hacia la antena transmisora.
C) El eje del solenoide debe ser horizontal y perpendicular a la dirección de la antena transmisora.
D) No importa cómo esté orientado el solenoide, porque las señales de frecuencia modulada son isotrópicas.

38-5 Ondas viajeras y las ecuaciones de Maxwell

7. La ecuación 38-6, $E = cB$, se relaciona con
A) lo instantáneo B) el promedio
C) la raíz cuadrada media D) el valor máximo
E) todos los valores anteriores de E y de B.

38-6 Transporte de energía y el vector de Poynting

8. En cierto punto y tiempo, el campo eléctrico de una onda electromagnética apunta al norte cuando el campo magnético lo hace hacia arriba. ¿En qué dirección se desplaza la onda electromagnética?
A) Este B) Sur
C) Oeste D) Abajo

9. De los tres vectores en la ecuación $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$, ¿cuál par o pares siempre forman ángulo recto en una onda electromagnética plana del espacio vacío? (*Puede haber más de una respuesta correcta.*)
A) $\vec{S}$ y $\vec{E}$ B) $\vec{S}$ y $\vec{B}$
C) $\vec{E}$ y $\vec{B}$ D) Ninguno
E) Las tres deben formar un ángulo recto.

10. Una fuente de radiación electromagnética irradia uniformemente en todas direcciones. ¿De qué manera la magnitud de la intensidad del campo eléctrico varía con la distancia r de la fuente?
A) E_m es constante para las ondas electromagnéticas.
B) $E_m \propto 1/r$
C) $E_m \propto 1/r^2$
D) $E_m \propto 1/r^3$

38-7 Presión de radiación

11. Se permite que una onda electromagnética se refleje en un espejo al medir la presión de radiación. Si se duplica E_{rem} mientras la frecuencia de onda se reduce a la mitad, la presión de radiación
A) se cuadriplica. B) se duplica.
C) no se altera. D) se reduce a la mitad.

PREGUNTAS

1. Con sus propias palabras, explique por qué la ley de inducción de Faraday (Tabla 38-1) puede interpretarse diciendo "un campo magnético cambiante genera un campo eléctrico".
2. Si un flujo uniforme Φ_E a través de un anillo circular plano disminuye con el tiempo, ¿sigue el campo magnético inducido (visto a lo largo de la dirección de $\vec{E}$) la dirección de las manecillas del reloj o la dirección contraria?
3. Si (como sucede) hay sistemas de unidades en que no aparecen ϵ_0 y μ_0, ¿por qué puede ser válida la ecuación 38-19?
4. ¿Por qué es tan fácil demostrar que "un campo magnético cambiante puede inducir un campo eléctrico" y tan difícil demostrar de modo simple que "un campo eléctrico cambiante produce un campo magnético"?
5. En la figura 38-2 considere un círculo con $r > R$. ¿Cómo puede inducirse un campo magnético a su alrededor, según se indica en el problema resuelto 38-1? Después de todo, no hay campo eléctrico en el lugar de este círculo y aquí $dE/dt = 0$.
6. En la figura 38-2, $\vec{E}$ entra en la figura y su magnitud crece. Encuentre la dirección de $\vec{B}$, si *a)* $\vec{E}$ entra en la figura y disminuye, *b)* $\vec{E}$ sale de ella y aumenta, *c)* $\vec{E}$ sale de la figura y disminuye, y *d)* $\vec{E}$ permanece constante.
7. En la figura 36-8*c* se requiere una corriente de desplazamiento para conservar la continuidad de corriente en el capacitor. ¿Cómo puede existir suponiendo que no hay carga en él?
8. *a)* En la figura 38-2, ¿qué dirección tiene la corriente de desplazamiento i_d? En esta misma figura, ¿puede encontrar una regla que relacione las direcciones *b)* de $\vec{B}$ y $\vec{E}$ y *c)* de $\vec{B}$ y $d\vec{E}/dt$?
9. ¿Qué ventajas tiene llamar corriente de desplazamiento al término $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ en la ecuación IV, tabla 38-1?
10. ¿Puede una corriente de desplazamiento medirse con un amperímetro?
11. ¿Por qué los campos magnéticos de las corrientes de conducción en los alambres son tan fáciles de detectar, mientras que resulta muy difícil hacerlo con la corriente de desplazamiento en los capacitores?
12. En la tabla 38-1 hay tres clases de una evidente asimetría en la ecuaciones de Maxwell. *a)* Las magnitudes ϵ_0 y/o μ_0 aparecen en I y en IV, pero no en II ni en II. *b)* Hay un signo negativo en III, pero no en IV. *c)* En II y en III faltan "términos de polos magnéticos". ¿Cuál de ellos representa una asimetría auténtica? Si se descubrieran monopolos magnéticos, ¿cómo reescribiría las ecuaciones anteriores para incluirlos? (Sugerencia: Sea q_m la magnitud del polo magnético análogo al cuanto de la carga e; ¿qué unidades del SI tendría q_m?)
13. Las ecuaciones de Maxwell tal como se incluyen en la tabla 38-1 se escriben suponiendo que no hay materiales dieléctricos presentes. ¿Cómo deberían escribirse si se suprimiera esta restricción?

14. Explique el flujo periódico de energía (si es que existe) de punto a punto en una cavidad acústica resonante.
15. Una cavidad acústica resonante aire y una cavidad electromagnética resonante del mismo tamaño tienen frecuencias resonantes que se hallan en la razón de 10^6 aproximadamente. ¿Cuál de ellas tiene la frecuencia más alta y por qué?
16. A menudo el interior de las cavidades electromagnéticas está recubierta de plata. ¿Por qué?
17. ¿En qué partes del ciclo *a*) será cero la corriente de conducción y *b*) la de desplazamiento de la figura 38-3?
18. Explique la variación temporal durante un ciclo completo de las cargas que aparecen en varios puntos de las paredes internas de la cavidad electromagnética oscilatoria en la figura 38-3.
19. Con poco rigor científico, podemos decir que los componentes eléctrico y magnético de una onda electromagnética viajera "se alimentan" uno a otro. ¿Qué significa ello?
20. "Hay corrientes de desplazamiento en una onda electromagnética viajera y podemos asociar el componente de campo magnético de ella con estas corrientes." ¿Es verdad el enunciado? Explique su respuesta en forma pormenorizada.
21. ¿Puede un campo magnético desviar una onda electromagnética? ¿Y un campo eléctrico?
22. ¿Por qué la modificación que Maxwell hizo a la ley de Ampère (es decir, el término $\mu_0\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ en la Tabla 38-1) se necesitaba para entender la propagación de las ondas electromagnéticas?
23. ¿Es posible que algún día la teoría electromagnética pueda predecir el valor de c (3×10^8 m/s), no en función de μ_0 y ϵ_0, sino numéricamente, sin recurrir a medición alguna?
24. Si quisiera usted calcular el vector de Poynting para varios puntos dentro de un transformador y alrededor de él, ¿qué aspecto se supone que tendría el patrón del campo? Suponga que una diferencia de potencial se aplicó a los devanados primarios y que el circuito resistivo está conectado a través de los devanados secundarios.
25. Mencione dos experimentos históricos, además de las mediciones de la presión de radiación realizadas por Nichols y Hull, en que se haya utilizado un equilibrio de torsión. Ambos se describen en el libro: uno en el volumen 1, y el otro en el 2.
26. ¿Puede un objeto absorber energía luminosa sin que se le transfiera un momento lineal? Si la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo. Si no lo es, explique por qué.
27. Cuando se enciende una lámpara, ¿experimenta una fuerza relacionada con la emisión de luz?
28. Asociamos la energía y el momento lineal a las ondas electromagnéticas. ¿Existe además un momento angular?
29. ¿Qué relación existe (si es que la hay) entre la intensidad I de una onda electromagnética y la magnitud S de su vector de Poynting?
30. Mientras se encuentra usted recostado en una silla al Sol, ¿por qué está tan consciente de la energía térmica que recibe, pero no repara en absoluto en el momento lineal proveniente de esa misma fuente? ¿Es verdad que, cuando atrapa una pelota de béisbol lanzada con mucha fuerza, está consciente de la energía suministrada, pero no del momento?
31. Cuando un haz paralelo de luz cae sobre un objeto, las transferencias de momento están dadas por las ecuaciones 38-34 y 38-36. ¿Son válidas las ecuaciones si la fuente luminosa se mueve rápidamente hacia el objeto o desde él, quizá a una velocidad de $0.1c$?
32. Se cree que a causa de la presión de radiación se fija un límite máximo (de unos $100M_{Sol}$) a la masa de una estrella. Explique por qué.

EJERCICIOS

38-1 Las ecuaciones básicas del electromagnetismo

38-2 Campos magnéticos inducidos y la corriente de desplazamiento

1. En la situación descrita en el problema resuelto 38-1, ¿cuándo es el campo magnético igual a la mitad de su valor máximo?
2. Pruebe que la corriente de desplazamiento en un capacitor de placas paralelas puede escribirse

$$i_d = C\frac{dV}{dt}.$$

3. Recibe un capacitor de placas paralelas de 1.0 μF. ¿Cómo produciría una corriente de desplazamiento (instantánea) de 1.0 mA en el espacio entre sus placas?
4. En el problema resuelto 38-1 demuestre que la *densidad de la corriente de desplazamiento* j_d está dada por $r < R$, para

$$j_d = \epsilon_0\frac{dE}{dt}.$$

5. Un capacitor de placas paralelas tiene placas cuadradas de 1.22 m de lado, como se ve en la figura 38-16. Una corriente de carga de 1.84 A fluye hacia su interior (y sale de él). *a*) ¿Cuál es la corriente de desplazamiento que pasa por la región entre las placas? *b*) ¿Cuál es dE/dt en esta región? *c*) ¿Cuál es la corriente de desplazamiento que pasa por la trayectoria cuadrada punteada entre las placas) *d*) ¿Cuál es $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ alrededor de la trayectoria?

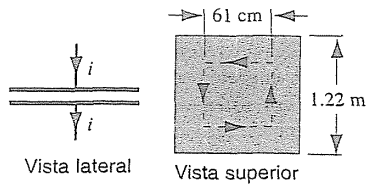


FIGURA 38-16. Ejercicio 5.

6. En el problema resuelto 38-1, demuestre que las expresiones obtenidas para $B(r)$ pueden escribirse

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} \qquad (r \geq R),$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d r}{2\pi R^2} \qquad (r \leq R).$$

Nótese que las expresiones anteriores tienen la misma forma que las obtenidas en el capítulo 33, salvo que la corriente de conducción i ha sido reemplazada por la de desplazamiento i_d.

7. Un campo eléctrico uniforme cae a cero a partir de una magnitud inicial de 0.60 MV/m en un tiempo de 15 μs, tal como se aprecia en la figura 38-17. Calcule la corriente de desplazamiento en una región de 1.9 m^2 perpendicular al campo, durante los intervalos temporales *a*), *b*) y *c*) que aparecen en la gráfica. (No tenga en cuenta el comportamiento en los extremos de los intervalos.)

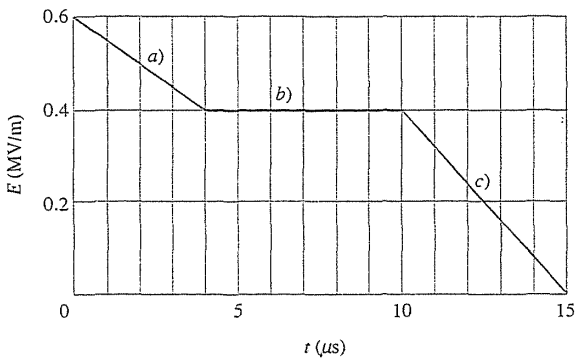


FIGURA 38-17. Ejercicio 7.

8. Un capacitor de placas paralelas con placas circulares de 21.6 cm de diámetro está siendo cargado como se ve en la figura 38-2. La densidad de la corriente de desplazamiento en toda la región es uniforme hacia el interior del papel en el diagrama, y tiene un valor de 1.87 mA/cm^2. *a*) Calcule el campo magnético B a una distancia $r = 53.0$ mm del eje de simetría de la región. *b*) Calcule dE/dt en esta región.
9. Suponga que un capacitor de placas paralelas tiene un radio R de 32.1 mm y una separación de placas de 4.80 mm. Entre ellas se aplica una diferencia de potencial senoidal con un valor máximo de 162 V y una frecuencia de 60.0 Hz. Cuando $r = R$, obtenga el valor máximo del campo magnético inducido.

38-3 Ecuaciones de Maxwell

10. Recoja y tabule expresiones referentes a las siguientes cuatro magnitudes, suponiendo que $r < R$ y que $r > R$. Coloque las formas de obtención adosadas y estúdielas como aplicaciones interesantes de las ecuaciones de Maxwell a problemas que tienen simetría cilíndrica. *a*) $B(r)$ para una corriente i en un alambre largo de radio R. *b*) $E(r)$ en un cilindro uniforme, largo, con carga con un radio R. *c*) $B(r)$ en un capacitor de placas paralelas, con placas circulares de radio R, donde E cambia con una rapidez constante. *d*) $E(r)$ en una región cilíndrica de radio R donde un campo magnético uniforme B cambia con rapidez constante.
11. Dos trayectorias adyacentes cerradas *abefa* y *bcdeb* comparten el lado *be* como se advierte en la figura 38-18. *a*) Podemos aplicar $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -d\Phi_B/dt$ (Ec. III de la Tabla 38-1) a cada una de estas dos trayectorias cerradas de manera separada. Demuestre que con base en esto la ecuación III se satisface automáticamente en la trayectoria compuesta *abcdefa*. *b*) Repita lo anterior usando la ecuación IV. *c*) A esta relación se le llama propiedad de "autoconsistencia" ¿Por qué deben tenerla todas las ecuaciones de Maxwell?

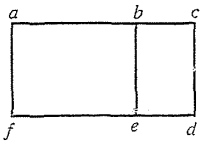


FIGURA 38-18. Ejercicio 11.

12. Dos paralelepípedos contiguos y cerrados comparten una cara, como se observa en la figura 38-19. *a*) Podemos aplicar por separado $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon_0$ (Ec. I en la Tabla 38-1) a las dos superficies cerradas. Demuestre que ello basta para satisfacer automáticamente la ecuación I en la superficie cerrada compuesta. *b*) Repita el ejercicio usando la ecuación II. Consulte el ejercicio 11.

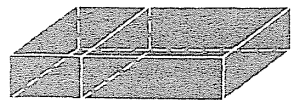


FIGURA 38-19. Ejercicio 12.

13. En términos microscópicos el principio de continuidad de la corriente puede expresarse como

$$\oint (\vec{j} + \vec{j}_d) \cdot d\vec{A} = 0,$$

donde $\vec{j}$ es la densidad de la corriente de conducción, y $\vec{j}_d$, la densidad de la corriente de desplazamiento. La integral debe tomarse en cualquier superficie cerrada; en esencia, la ecuación indica que toda corriente que fluya al interior del volumen cerrado debe hacerlo también hacia afuera. Aplique esta ecuación a la superficie indicada con las líneas punteadas en la figura 38-20 después de cerrado el interruptor S.

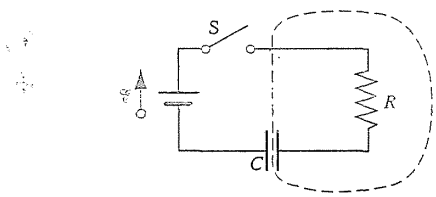


FIGURA 38-20. Ejercicio 13.

38-4 Generación de una onda electromagnética

14. La figura 38-21 muestra un oscilador LC conectado mediante una línea de transmisión a una antena de un tipo de dipolo magnético. Compárela con la figura 38-5, que tiene un arreglo similar sólo que con un tipo de antena de dipolo eléctrico. *a*) ¿En qué se basan los nombres de los dos tipos de antena? *b*) Dibuje figuras correspondientes a las figuras 38-6 y 38-7 para describir la onda electromagnética que rápidamente deja atrás al observador en el punto P de la figura 38-21.

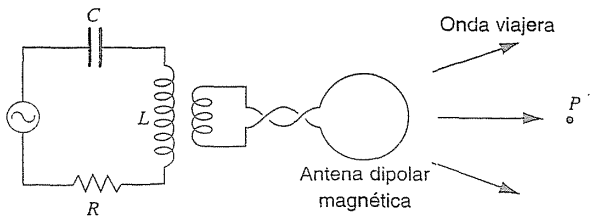


FIGURA 38-21. Ejercicio 14.

15. ¿Qué inductancia se requiere con un capacitor de 17 pF a fin de construir un oscilador capaz de generar ondas electromagnéticas de 550 nm (es decir, visibles)? Comente su respuesta.

38-5 Ondas viajeras y las ecuaciones de Maxwell

16. El campo eléctrico asociado a una onda electromagnética plana está dado por $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = E_0$ sen $k(x - ct)$, donde $E_0 = 2.34 \times 10^{-4}$ V/m y $k = 9.72 \times 10^6$ m^{-1}. La onda se propaga en la dirección $+x$. *a*) Escriba las expresiones de los componentes de su campo magnético. *b*) Determine la longitud de onda.
17. Una onda electromagnética plana tiene un campo eléctrico máximo de 321 μV/m. Calcule el campo magnético máximo.
18. Comience con las ecuaciones 38-14 y 38-17 y demuestre que $E(x, t)$ y $B(x, t)$, los componentes eléctrico y magnético de un plano que recorre la onda electromagnética, deben satisfacer las "ecuaciones de onda"

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}.$$

19. *a*) Demuestre que las ecuaciones 38-11 y 38-12 satisfacen las ecuaciones de onda mostradas en el ejercicio 18. *b*) Demuestre que las expresiones de la forma $E = E_m f(kx \pm \omega t)$ y $B = B_m f(kx \pm \omega t)$, donde $f(kx \pm \omega t)$ que denotan una función arbitraria, también satisfacen estas ecuaciones.

38-6 Transporte de energía y el vector de Poynting

20. Encuentre la dirección del vector de Poyting $\vec{S}$ y de ese modo demuestre que la dirección de los campos eléctrico y magnético en todos los puntos de las figuras 38-6, 38-7 y 38-8 son compatibles en todos los tiempos con las direcciones supuestas de propagación.
21. Los rayos láser de neodimio-vidrio que se usan actualmente generan 100 TW de potencia en pulsos de 1.0 ns, con una longitud de onda de 0.26 μm. ¿Cuánta energía está contenida en un solo pulso?
22. Una onda electromagnética plana se desplaza en la dirección negativa y. En una posición y tiempo dados, el campo magnético se halla en el eje positivo z y tiene una magnitud de 28 nT. ¿Cuáles son la dirección y la magnitud del campo eléctrico en esa posición y tiempo?
23. Nuestro vecino espacial más cercano, la estrella α Centauri, se halla a 4.30 años luz. Se ha propuesto que los programas de televisión transmitidos en nuestro planeta han llegado hasta esta estrella y han sido vistos por habitantes hipotéticos de un planeta también hipotético que gira alrededor de ella. Una estación en la Tierra tiene una salida de potencia de 960 kW. Calcule la intensidad de su señal en α Centauri.
24. *a*) Demuestre que en una onda electromagnética viajera plana la intensidad promedio, es decir, la rapidez promedio de transporte de energía por unidad de superficie, está dada por

$$S_{pro} = \frac{cB_m^2}{2\mu_0}.$$

b) What is the average intensity of a plane traveling electromagnetic wave if B_m, the maximum value of its magnetic field component, is 1.0×10^{-4} T?

25. La intensidad de la radiación solar directa no absorbida por la atmósfera en un día de verano es 130 W/m^2. ¿A qué distancia debe situarse frente a un calentador eléctrico de 1.0 kW para sentir la misma intensidad? Suponga que el calentador irradia uniformemente en todas direcciones.
26. Pruebe que, en cualquier punto de una onda electromagnética como la de la figura 38-8, la densidad de energía almacenada en el campo eléctrico es igual a la de la que se guarda en el campo magnético.
27. Camina usted 162 m hacia una lámpara de una calle y descubre que la intensidad aumenta 1.50 veces la de su posición original. *a*) ¿A qué distancia de la lámpara estaba usted inicialmente? (La lámpara irradia uniformemente en todas direcciones.) *b*) ¿Puede determinar su salida de potencia? Si no puede hacerlo, explique por qué.
28. La luz solar llega a la Tierra justo afuera de su atmósfera, con una intensidad de 1.38 kW/m^2. Calcule *a*) E_m y *b*) B_m en la luz solar, suponiendo que se trate de una onda plana.
29. El campo eléctrico máximo a una distancia de 11.2 m de la fuente puntual luminosa es 1.96 V/m. Calcule *a*) la amplitud del campo magnético, *b*) la intensidad y *c*) la salida de potencia de la fuente.
30. Frank D. Drake, un investigador que trabaja en el programa SETI (Search for Extra-Terrestrial Intelligence), ha dicho que el gran telescopio de radio en Arecibo (Puerto Rico) "puede detectar una señal que ponga en toda la superficie terrestre la potencia apenas de un picowatt" (Fig. 38-22). *a*) ¿Cuál es la potencia que en realidad recibía la antena de Arecibo con dicha señal? Su diámetro mide 305 m. *b*) ¿Cuál sería la salida de potencia de una fuente en el centro de nuestra galaxia que pudiera suministrar esa señal? El centro galáctico está a una distancia 2.3×10^4 años luz. Suponga que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones.

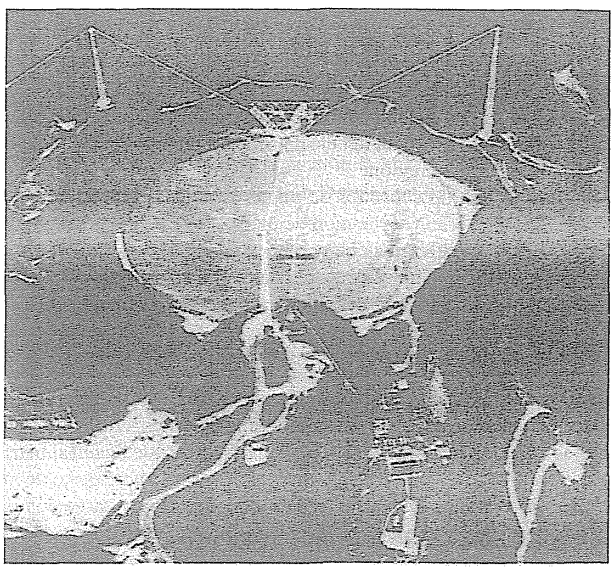


FIGURA 38-22. Ejercicio 30.

31. Un avión que vuela a una distancia de 11.3 km de un transmisor de radio recibe una señal de 7.83 μW/m^2. Calcule *a*) la amplitud del campo eléctrico en el avión proveniente de la señal; *b*) la amplitud de su campo magnético; *c*) la potencia total irradiada por el transmisor, suponiendo que éste irradie uniformemente en todas direcciones.
32. Durante una prueba el sistema de vigilancia por radar de la NATO, que opera a 12 GHz con 183 kW de potencia de salida, intenta detectar un avión "enemigo" a 88.2 km que se acerca. El avión blanco está diseñado de modo que tenga una superficie efectiva muy pequeña de 0.222 m^2 para la reflexión de las ondas de radar. Suponga que el haz del radar se dispersa isotrópicamente al interior del hemisferio anterior en la transmisión y la reflexión; no tenga en cuenta la atmósfera. En el haz reflejado que se recibe en la parte posterior del sitio del radar calcule

a) la intensidad, *b*) la amplitud del vector del campo eléctrico y *c*) el valor rcm del campo magnético.

38-7 Presión de radiación

33. Suponga que toma el Sol durante 2.5 h, exponiendo una superficie de 1.3 m^2 a 90° bajo rayos de una intensidad 1.1 kW/m^2. Suponiendo una absorción completa de ellos, ¿cuánto momento recibe su cuerpo?

34. La intensidad promedio de la radiación solar que cae normalmente en una superficie apenas afuera de la atmósfera terrestre es 1.38 kW/m^2. *a*) ¿Qué presión de radiación se ejece sobre dicha superficie, suponiendo una absorción completa? *b*) ¿Qué relación hay entre esta presión y la presión atmosférica de la Tierra a nivel del mar, que es de 101 kPa?

35. Se emplean láseres de alta potencia para comprimir los plasmas de gas mediante la presión de radiación. La reflectividad del plasma es igual a uno, si la densidad de los electrones es lo bastante alta. Un láser que genera pulsos de radiación con una potencia máxima de 1.5 GW, se enfoca en 1.3 mm^2 de plasma de alta densidad de electrones. Determine la presión ejercida sobre el plasma.

36. Calcule la presión de radiación a 1.50 m de distancia de una lámpara de 500 W. Suponga que la superficie donde se ejerce la presión está delante de la lámpara y que absorbe perfectamente; suponga además que la lámpara irradia uniformemente en todas direcciones.

37. La radiación procedente del Sol que llega a la Tierra tiene una intensidad de 1.38 kW/m^2. *a*) Suponiendo que la Tierra se comporta como un disco plano en ángulos rectos con los rayos solares y que toda la energía incidente se absorbe, calcule la fuerza en la Tierra causada por la presión de radiación. *b*) Calcule la razón F_{rad}/F_{grav} y compare esto con la fuerza ocasionada por la atracción gravitacional.

38. Demuestre que el vector $c\epsilon_0\vec{E} \times \vec{B}$ tiene las dimensiones de momento/(área · tiempo); en tanto que $\mu_0^{-1}\vec{E} \times \vec{B}$ tiene las dimensiones de energía/(área · tiempo). (El vector $c\epsilon_0\vec{E} \times \vec{B}$ puede servir para calcular el flujo de momento en la misma forma que $\vec{S} = \mu_0^{-1}\vec{E} \times \vec{B}$ se emplea para calcular el flujo de energía.)

39. En condiciones normales, la radiación de intensidad I incide en un objeto que absorbe una fracción f de ella y refleja el resto. ¿Cuál es la presión de radiación?

40. Para una onda plana de incidencia normal en una superficie plana, pruebe que la presión de radiación en la superficie es igual a la densidad de energía en el haz fuera de la superficie. Esta relación se mantiene sin importar la fracción de la energía incidente que se refleje.

41. En una corriente de balas que chocan contra una superficie plana de incidencia normal, pruebe que la "presión" es el doble de la densidad de energía cinética en la corriente arriba de la superficie; suponga que las balas se absorben completamente en la superficie. Compare esto con el comportamiento de la luz (Ej. 40).

42. Una pequeña nave espacial cuya masa, incluidos los ocupantes, es de 1 500 kg, se desplaza en el espacio exterior, donde el campo gravitacional es insignificante. Si el astronauta activa un haz láser de 10.0 kW, ¿qué velocidad alcanzará la nave en un día gracias a la fuerza de reacción relacionada con el momento enviado afuera por el haz?

43. Un láser tiene una salida de potencia de 4.6 W y un diámetro de haz de 2.6 mm. Si lo dirigimos verticalmente hacia arriba, ¿cuál es la altura H de un cilindro perfectamente reflejante que pueda hacerse "oscilar" mediante la presión de radiación ejercida por el haz? Suponga que la densidad del cilindro es 1.2 g/cm^3 (Fig. 38-23).

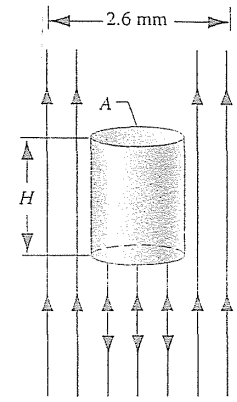


FIGURA 38-23. Ejercicio 43.

44. En el ejercicio 8 del capítulo 3 se describió el yate *Diana*, diseñado para navegar en el sistema solar sirviéndose de la presión de la luz solar. El área de las velas es 3.1 km^2, y la masa, 930 kg. Verifique que la fuerza máxima de radiación en las velas es 29 N a una distancia del Sol igual al radio orbital de la Tierra.

PROBLEMAS

1. En la figura 38-24 se muestran las placas P_1 y P_2 de un capacitor de placas paralelas con radio R. Como se muestra en la figura estas placas están conectadas a alambres rectos, donde existe una corriente constante de conducción i. Se muestran además tres círculos hipotéticos de radio r, dos de ellos están fuera del capacitor y uno entre las placas. Demuestre que el campo magnético en la circunferencia de los círculos está dado por

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

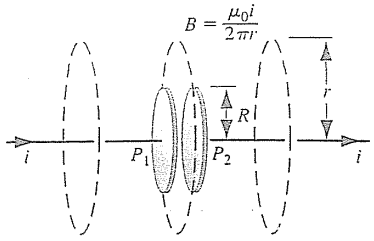


FIGURA 38-24. Problema 1.

2. En 1929, por primera vez, M. R. Van Cauwenberghe logró medir por vez primera directamente la corriente de desplazamiento i_d entre las placas de un capacitor de placas paralelas al que se aplicaba una diferencia de potencial alterna, según se indica en la figura 38-2. Utilizó placas circulares cuyo radio efectivo medía 40.0 cm y cuya capacitancia era de 100 pF. La diferencia de potencial tenía un valor máximo de ΔV_m de 174 kV a una frecuencia de 50.0 Hz. *a*) ¿Cuál era la corriente máxima de desplazamiento entre las placas? *b*) ¿Por qué era tan grande la diferencia de potencial aplicada que se escogió? (Estas mediciones eran tan precisas que se efectuaron de modo directo apenas 60 años después que Maxwell propusiera el concepto de corriente de desplazamiento. El experimento se describe en *Journal de Physique*, núm. 8, 1929.)
3. El capacitor de la figura 38-25, compuesto de dos placas circulares con radio $R = 18.2$ cm, está conectado a una fuente de fuerza electromotriz $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m$ sen ωt, donde $\mathscr{E}_m = 225$ V y $\omega = 128$ rad/s. El valor máximo de la corriente de desplazamiento es $i_d = 7.63$ μA. No tenga en cuenta el efecto de los bordes del campo eléctrico en los extremos de las placas. *a*) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente i? *b*) ¿Cuál es el valor máximo de $d\Phi_E/dt$, donde Φ_E es el flujo eléctrico que pasa por la región entre las placas? *c*) ¿Qué separación d existe entre las placas? *d*) Calcule el valor máximo de la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ entre las placas a una distancia $r = 11.0$ cm del centro?

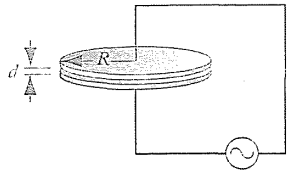


FIGURA 38-25. Problema 3.

4. Una larga varilla conductora cilíndrica con radio R se centra en el eje x, como se ve en la figura 38-26. Se hace un estrecho corte de sierra en la varilla en $x = b$. Una corriente de conducción i, que crece con el tiempo y que está dada por $i = \alpha t$, fluye hacia la derecha en la varilla; α es una constante de proporcionalidad (positiva). Cuando $t = 0$ no hay carga en las caras cortadas cerca de $x = b$. *a*) Determine la magnitud de la carga en estas caras en función del tiempo. *b*) Utilice la ecuación I de la tabla 38-1 para encontrar E en la separación en función del tiempo. *c*) Dibuje las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ para $r < R$, donde r es la distancia desde el eje x. *d*) Use la ecuación IV de la tabla 38-1 para encontrar $B(r)$ en la separación para con $r < R$. *e*) Compara la respuesta anterior con $B(r)$ en la varilla cuando $r < R$.

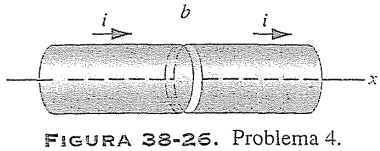


FIGURA 38-26. Problema 4.

5. Un cubo de lado a tiene sus lados paralelos a los ejes x, y y z de un sistema coordenado rectangular. Un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo al eje y y un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ es paralelo al eje x. Calcule *a*) la rapidez con que, según el punto de vista del vector de Poynting, puede decirse que la energía cruza las caras del cubo y *b*) la rapidez neta con que puede decirse que cambia la energía almacenada en él.
6. Una cavidad electromagnética cilíndrica de 4.8 cm de diámetro y de 7.3 cm de longitud oscila como se muestra en la figura 38-3. *a*) Suponga que, en los puntos del eje de la cavidad, $E_m = 13$ kV/m. La frecuencia de oscilación es 2.4 GHz. En esos puntos axiales, ¿cuál es la rapidez máxima $(d\dot{E}/dt)_m$ con que se altera E? *b*) Suponga que, en todos los puntos de la sección transversal, el valor promedio de $(dE/dt)_m$ es la mitad del que se obtuvo antes en los puntos axiales. Con esta suposición, ¿cuál será el valor máximo de B en la superficie cilíndrica de la cavidad?
7. La intensidad promedio de la luz solar, que cae con incidencia normal fuera de la atmósfera terrestre, varía a lo largo del año a causa de la cambiante distancia entre Tierra y Sol. Demuestre que la variación fraccional anual está dada aproximadamente por $\Delta I/I = 4e$, donde e es la excentricidad de la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol.
8. La radiación emitida por un láser no es exactamente un haz paralelo; más bien, el haz se esparce en forma de cono con una sección transversal circular. Al ángulo θ del cono (Fig. 38-27) se le conoce con el nombre de divergencia de haz con ángulo completo. Un láser de argón de 3.85 kW, que irradie a 514.5 nm, se dirige a la Luna en un experimento de trayectoria; el láser tiene una divergencia de haz de ángulo completo de 0.880 μrad. Determine la intensidad del haz en la superficie lunar.

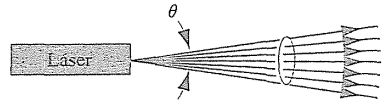


FIGURA 38-27. Problema 8.

9. Estudie la posibilidad de ondas electromagnéticas estacionarias:

$$E = E_m \text{ sen } kx \text{ sen } \omega t,$$

$$B = B_m \cos kx \cos \omega t.$$

a) Demuestre que satisfacen las ecuación 38-14 y 38-17, si E_m se relaciona adecuadamente con B_m y ω lo hace con k. ¿Cuáles son esas relaciones? *b*) Encuentre el vector de Poynting (instantáneo). *c*) Demuestre que la potencia promedio, en el tiempo que fluye a través de cualquier área es cero. *d*) Describa el flujo de energía en esta situación.
10. Un alambre de cobre (diámetro, 2.48 mm; resistencia, 1.00 Ω por 300 m) lleva una corriente de 25.0 A. Calcule *a*) el campo eléctrico, *b*) el campo magnético y *c*) la magnitud del vector de Poynting en un punto de la superficie del alambre.
11. Un cable coaxial (radio interno a, radio externo b) se emplea como línea de transmisión entre una batería $\mathscr{E}$ y un resistor R, como se aprecia en la figura 38-28. *a*) Calcule E, B con $a < r > b$. *b*) Calcule el vector de Poynting $\vec{\mathbf{S}}$ cuando $a < r < b$. *c*) Mediante una integración adecuada del vector de Poynting de-

muestre que la potencia total que fluye por la sección transversal anular $a < r < b$ es $\mathscr{E}^2/R$. ¿Resulta lógico eso? *d*) Demuestre que la dirección de $\vec{S}$ siempre se dirige de la batería al resistor, sin importar la forma en que esté conectada.

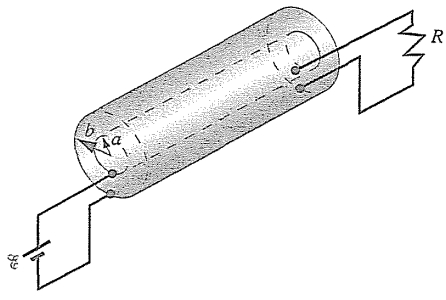


FIGURA 38-28. Problema 11.

12. La figura 38-29 muestra un resistor cilíndrico de longitud *l*, de radio *a* y de resistividad ρ, que transporta una corriente *i*. *a*) Demuestre que en todas partes el vector de Poynting $\vec{S}$ en la superficie del resistor se dirige normalmente a la superficie, como se indica. *b*) Demuestre que la rapidez con que fluye energía a su interior a través de la superficie cilíndrica, que se obtiene integrando el vector en esta superficie, es igual a la rapidez con que se produce energía interna, esto es,

$$\int \vec{S} \cdot d\vec{A} = i^2 R,$$

donde $d\vec{A}$ es un elemento de área de la superficie cilíndrica. Ello significa que, desde el punto de vista del vector de Poynting, la energía que aparece en un resistor como interna no entra en él por los alambres conectores, sino por el espacio que los rodea a ellos y al resistor.

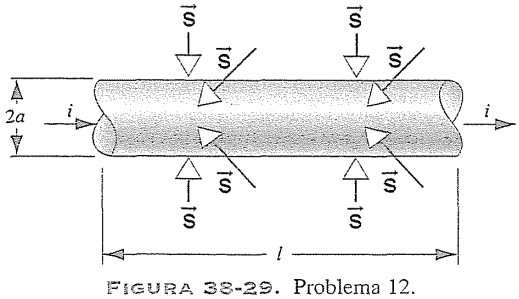


FIGURA 38-29. Problema 12.

13. Una onda electromagnética plana, con una longitud de 3.18 m, se desplaza por el espacio libre en la dirección + *x* con su vector eléctrico $\vec{E}$, de 288 V/m de amplitud, a lo largo del eje *y*. *a*) ¿Cuál es su frecuencia? *b*) ¿Qué dirección y amplitud tiene el campo magnético asociado a ella? *c*) Si $E = E_m \operatorname{sen}(kx - \omega t)$, ¿cuáles son los valores de *k* y de ω? *d*) Determine la intensidad de la onda. *e*) Si cae en una hoja perfectamente absorbente de superficie 1.85 m^2, ¿con qué rapidez se suministrará momento a la hoja y qué presión de radiación se ejercerá sobre ella?

14. La figura 38-30 muestra un capacitor de placas paralelas mientras se le carga. *a*) Demuestre que en todas partes el vector de Poyting $\vec{S}$ apunta radialmente hacia al interior del volumen cilíndrico. *b*) Demuestre que la rapidez con que la energía fluye a su interior, que se calcula integrando el vector en la frontera cilíndrica de este volumen, es igual a la rapidez con que aumenta la energía electrostática almacenada, esto es,

$$\int \vec{S} \cdot d\vec{A} = Ad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\right),$$

donde *Ad* es el volumen del capacitor y $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ la densidad de energía en todos los puntos dentro del volumen. Este análisis indica que, desde el punto de vista del vector de Poynting, la energía almacenada en un capacitor no entra en él por los alambres sino por el espacio alrededor de ellos y de las placas. [Sugerencia: para encontrar $\vec{S}$ es preciso obtener primero $\vec{B}$, que es el campo magnético creado por la corriente de desplazamiento durante el proceso de carga (Fig. 38-2). No tenga en cuenta los efectos de los bordes de las líneas de $\vec{E}$.]

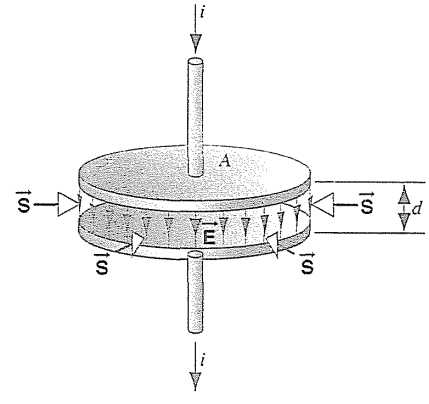


FIGURA 38-30. Problema 14.

15. Un láser de helio-neón como el que se emplea en los laboratorios de física, tiene una salida de potencia de haz de 5.00 mW, con una longitud de onda de 633 nm. El haz se enfoca mediante un lente sobre un punto circular, cuyo diámetro efectivo puede suponerse que es de 2.10 longitudes de onda. Calcule *a*) la intensidad del haz enfocado; *b*) la presión de radiación ejercida sobre una esfera delgada perfectamente absorbente, cuyo diámetro es el del punto focal; *c*) la fuerza ejercida sobre la esfera y *d*) la aceleración que se le imparte. Suponga una densidad de la esfera de 4.88 g/cm^3.

16. Se ha propuesto que una nave espacial podría ser propulsada en el sistema solar mediante la presión de radiación, utilizando una gran vela hecha de oropel. ¿Qué tamaño debe tener la vela para que la magnitud de la fuerza de radiación sea igual a la atracción gravitacional del Sol? Suponga que la masa de la nave + vela es de 1 650 kg, que la vela es perfectamente reflejante y que está orientada a ángulos rectos con los rayos solares. Consúltense en el apéndice C los datos necesarios.

CAPÍTULO 39

ONDAS DE LUZ

En este capítulo explicamos las características de las ondas de luz, entre ellas la radiación visible; la velocidad de propagación en el vacío y la materia; el cambio de dirección cuando la luz encuentra una frontera entre dos materiales donde la velocidad de propagación es distinta, y el efecto Doppler (cambio de frecuencia a causa del movimiento relativo de la fuente y del observador).

En virtud de que no existe nada fundamental que distinga la luz de otro tipo de ondas electromagnéticas, conviene, pues, que tenga presente que las explicaciones de este capítulo se aplican con el mismo rigor a otras clases de ondas electromagnéticas. No obstante, este capítulo sirve de puente entre la explicación de las ondas electromagnéticas del capítulo anterior y el estudio de la óptica (la ciencia de la luz); este tema lo abordamos en los siguientes capítulos.

39-1 EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO*

En la época de Maxwell, la luz y las contiguas radiaciones infrarroja y ultravioleta fueron los únicos tipos conocidos de radiación electromagnética. Hoy el espectro electromagnético, que se muestra en la figura 39-1, incluye una amplia gama de tipos de radiación emanada de diversas fuentes. De la teoría de Maxwell extraemos la siguiente conclusión: las propiedades de estas radiaciones difieren enormemente de sus medios de producción y de las formas en que las observamos; pero todas estas propiedades pueden ser descritas en función de los campos eléctricos y magnéticos y todas se desplazan por el vacío con la misma velocidad (la velocidad de la luz). De hecho, en lo esencial se distinguen solamente por la longitud de onda o la frecuencia. Los nombres asignados a las regiones del espectro en la figura 39-1 tienen que ver sólo con la forma en que se producen u observan los tipos de ondas: nada tienen que ver con alguna propiedad básica. Aparte de la diferencia de su longitud de onda, no existe ninguna técnica experimental que permita distinguir una onda en la región visible de otra en la región infrarroja; las ondas tienen forma y descripciones matemáticas idénticas. No hay separaciones en el espectro ni tampoco límites bien definidos entre las categorías. (Algunas regiones del espectro son asignadas por las leyes comerciales o de otra índole, como la transmisión de televisión, de frecuencia modulada o de amplitud modulada.)

A continuación vamos a estudiar más a fondo los tipos anteriores de radiación electromagnética.

1. *Luz.* La región visible del espectro es la más conocida, pues contamos con receptores adaptados (los ojos) que son sensibles a la radiación electromagnética más intensa emanada del Sol, la fuente extraterrestre más cercana. Los límites de

* La palabra *espectro* proviene del latín y significa "forma" o "aspecto". Otras palabras procedentes de la misma raíz son "espectáculo" y "especie". Newton la acuñó para describir la imagen de arco iris que se produce cuando un haz de luz solar cruza un prisma de vidrio. Hoy con la expresión *espectro electromagnético* designamos las distintas clases de radiación electromagnética, clasificadas por su frecuencia o su longitud de onda en una escala creciente. También nos referimos al *espectro político*, que indica la amplia gama de posiciones políticas en una escala que abarca desde los ultraconservadores a los ultraliberales.

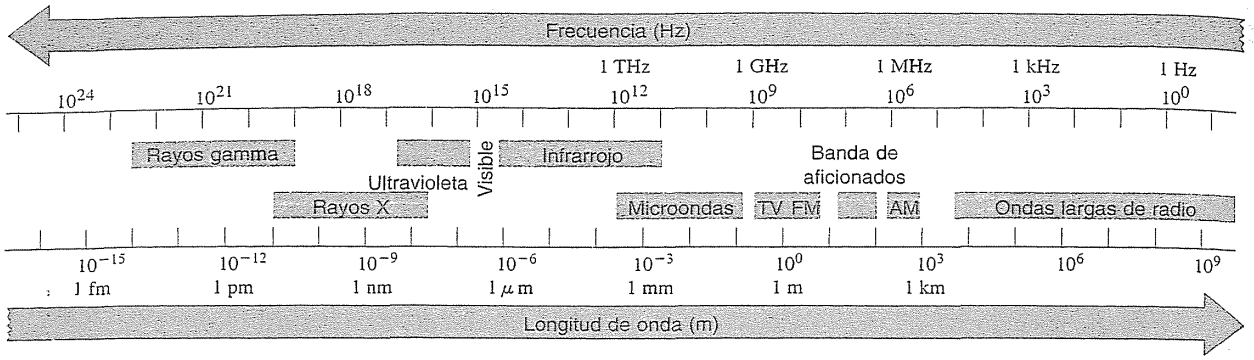


FIGURA 39-1. El espectro electromagnético. Nótese que las escalas de longitud de onda y de frecuencia son logarítmicas.

la longitud de onda de la región visible fluctúan entre 400 nm (violeta) y 700 nm (rojo) más o menos.

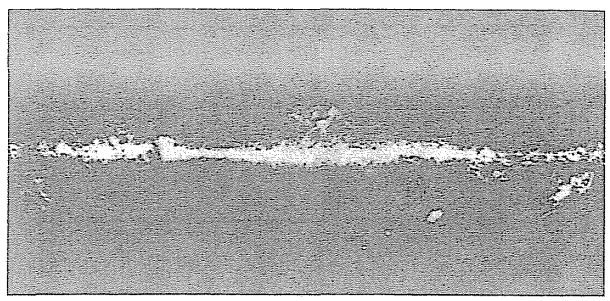
La luz puede ser emitida por un conjunto de átomos disgregados, como un gas, en el cual la luz es una característica de las propiedades. Los átomos individuales, o por un grupo de átomos compactados, como un sólido, en que la luz puede caracterizar las propiedades del objeto entero. El estudio de la luz emitida por el Sol y por las esrellas lejanas suministra información sobre su composición química, su temperatura y movimiento.

2. *Rayos infrarrojos.* La radiación infrarroja, que tiene longitudes de onda mayores que la visible (de 0.7 μm a 1 mm aproximadamente), es emitida comúnmente por átomos o moléculas cuando modifican su movimiento rotacional o vibratorio. A veces a esta radiación se le llama *radiación de calor* porque se relaciona con la transferencia de calor a medida que un objeto gana o pierde energía interna; los objetos cuyas temperaturas caen en el intervalo que normalmente encontramos (hasta unos 3000 K) emiten su radiación más intensa en la región infrarroja. La descripción de la radiación infrarroja proveniente del espacio nos ofrece información que complementa la conseguida de la radiación visible (Fig. 39-2).

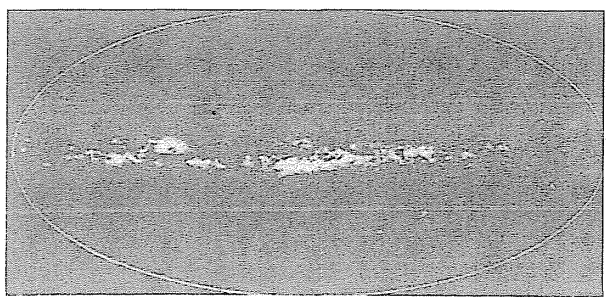
3. *Microondas.* Puede considerarse a las microondas como ondas cortas de radio, con longitudes típicas entre 1 mm y 1 m. Las producen circuitos eléctricos oscilantes, como en el caso de los hornos de microondas. Se emplean comúnmente para retransmitir las llamadas telefónicas (Fig. 39-3). A escala cósmica, el universo está lleno de radiación residual del "Big Bang" que marcó el origen del universo hace unos 10^{10} (sección 52-5); esta radiación se produce principalmente en la región de microondas del espectro.

4. *Ondas de radio.* Tienen una longitud de onda mayor que 1 m. Pueden producirlas los electrones que oscilan en los alambres de circuitos eléctricos; se emplean antenas para transmitir o recibir las ondas de radio que llevan señales de radio de frecuencia o amplitud moduladas y de televisión. Existen también fuentes extraterrestres de estas ondas; la más intensa es el Sol, cuyas emisiones puede interferir con la recepción de la radio y de la televisión en la Tierra. El planeta Júpiter también es una fuente activa de emisiones de radio. La observación de dichas emisiones, denominada *astronomía de radio,* nos proporciona más información del universo. La figura 39-4 ofrece un ejemplo de radiotelescopio y la figura 39-5 contiene un mapa de emisiones de radio en nuestra galaxia.

5. *Rayos ultravioleta.* Las radiaciones con longitud de onda más corta que la de la luz visible empiezan con la radiación ultravioleta (1 a 400 nm), que puede ser producida por los electrones en los átomos y también por fuentes térmicas como el Sol. La exposición a la radiación ultravioleta puede



a)



b)

FIGURA 39-2. *a)* Imagen infrarroja de la Vía Láctea, tomada por el satélite IRAS. *b)* Imagen de luz visible de la Vía Láctea. Las partes de la imagen visible, especialmente las cercanas al centro de la galaxia, están oscurecidas por nubes de polvo que no afectan a la imagen infrarroja. Los dos objetos grandes debajo de la galaxia y a la derecha del centro son Las Nubes Magelánicas Grandes y Pequeñas, que son galaxias que acompañan a la Vía Láctea.

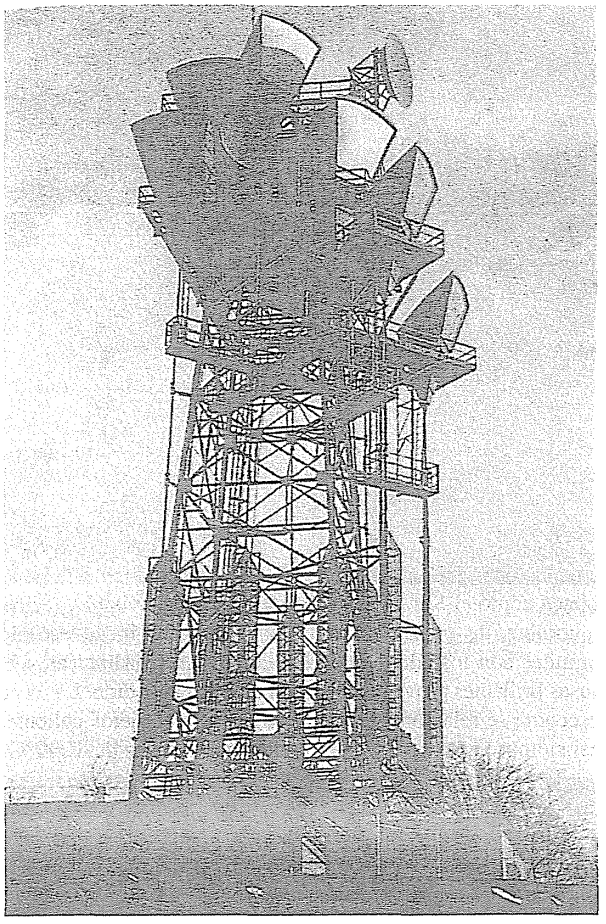


FIGURA 39-3. Estación de relevador de microondas, el cual recibe y luego retransmite señales que llevan llamadas telefónicas de larga distancia.

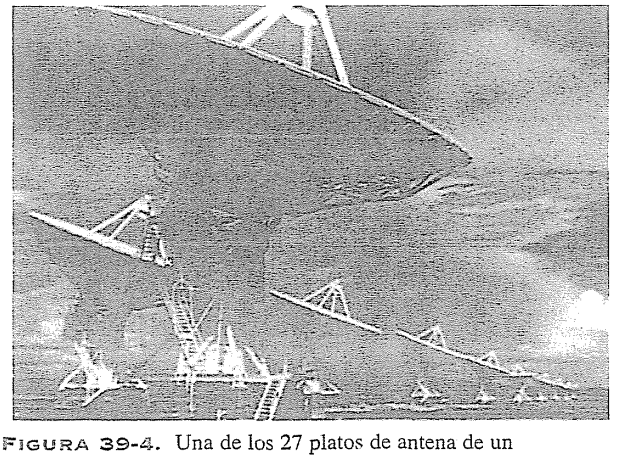


FIGURA 39-4. Una de los 27 platos de antena de un radiotelescopio de 25 m en Very Large Array, cerca de Socorro (Nuevo México). Los platos están dispuestos en una vía férrea en forma de Y; cada línea mide 10 millas de largo. Este sistema equivale a un plato individual de 20 millas de diámetro.

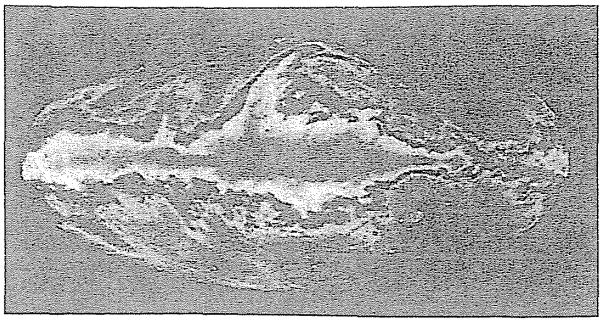


FIGURA 39-5. Imagen de radio de la Vía Láctea. (Compárela con la figura 39-2.) Se toma en una longitud de onda de 73 cm. La radiación se origina principalmente en los electrones de gran energía que son desviados por los campos magnéticos de la galaxia. Nótense las intensas emisiones que salen del plano de la galaxia y que no aparecen en la figura 39-2.

causar eritema solar y hasta cáncer en la piel; por fortuna, la mayor parte de ella se absorbe en la atmósfera terrestre. A causa de esta absorción la astronomía de la radiación ultravioleta debe basarse en los datos conseguidos en los observatorios situados en la órbita terrestre.

6. *Rayos X.* Estos rayos (el intervalo típico de la longitud de onda es de 0.01 a 10 nm) pueden producirse con longitudes de onda discretas en los átomos por medio de transiciones en que intervienen los electrones más estrechamente ligados; también pueden producirse en un intervalo continuo de longitudes de onda cuando se desaceleran partículas cargadas como los electrones. Los rayos X se emplean en el diagnóstico médico, pues pueden penetrar en los tejidos blandos, pero no el hueso. Por lo regular, las estrellas no son fuertes emisoras de rayos X; pero, en los sistemas de estrellas binarios el material de una estrella puede emitir rayos X cuando se calienta y se acelera a medida que cae en la otra estrella.

7. *Rayos gamma.* Tienen la longitud de onda más corta del espectro electromagnético (menos de 10 pm). Se emiten durante el decaimiento de muchos núcleos radiactivos y de algunas partículas elementales. Los rayos gamma son la modalidad más penetrante de la radiación electromagnética, y la exposición intensa a ellos pueden causar efectos nocivos en el cuerpo humano. En dosis mucho menores, pueden introducirse materiales radiactivos en el cuerpo para que los médicos tracen la imagen de un órgano, observando las radiaciones gamma emitidas. Cada tipo de núcleo radiactivo emite su propio patrón de radiación, y éstas emisiones sirven para identificar la presencia de determinados elementos. En la astronomía de rayos gamma, la observación de estas radiaciones características procedentes de las estrellas y de las galaxias prueba la presencia de ciertos elementos y la existencia de determinados procesos nucleares en el universo.

En las descripciones anteriores vemos que hay fuentes naturales y artificiales de todo tipo de radiación electromagnética y que el estudio de estas radiaciones en todas las longitudes de onda sirve para enriquecer nuestro conocimiento de la estructura y evolución del universo.

El estudio de la luz en los siguientes capítulos se concentrará en su naturaleza ondulatoria. Sin embargo, algunos experimentos revelan que la luz puede comportarse no como una onda que varía suavemente, sino como un paquete concentrado de energía electromagnética, llamado *fotón*. A partir del capítulo 45 analizaremos el aspecto fotónico de la luz.

39-2 LA LUZ VISIBLE

De manera funcional podemos definir a la luz como la radiación electromagnética a la cual el ojo es sensible. La sensibilidad de los observadores varía, pero normalmente el hombre observa la radiación cuyas longitudes de onda van desde 400 a 700 nm (correspondientes a frecuencias entre 7×10^{14} Hz a 4×10^{14} Hz. Dentro de este dominio, la sensibilidad ante diversas longitudes de ondas no es constante. En la figura 39-6 vemos una representación de cómo varía la sensibilidad de un observador común ante las radiaciones de distinta longitud de onda, pero de intensidad radiante constante en la región visible del espectro. La máxima sensibilidad ocurre cerca de los 555 nm, correspondiente a la luz de color amarillo-verde. La sensibilidad decrece rápidamente en las longitudes de onda corta y larga; podemos fijar de modo aproximado en 430 nm (violeta) y 690 nm (rojo) los límites de la región visible, donde equivale a 1% de la sensibilidad máxima. (Compare el intervalo de longitudes de onda *visibles*, menos que un factor de 2, con el de las longitudes de onda o frecuencias *audibles*, que como se aprecia en la figura 19-5 son un factor de alrededor de 100 en el límite de 1%.)

En definitiva, las fuentes de luz visible dependen del movimiento de los electrones. Podemos elevar los electrones de los átomos de su nivel más bajo de energía a sus niveles más altos por diversos medios; por ejemplo, al calentar la sustancia o pasando una corriente eléctrica por ella. Cuando los electrones finalmente retornan a su nivel bajo, los átomos emiten una radiación que puede hallarse en la región visible del espectro. La emisión de la luz visible es muy probable cuando los electrones externos (valencia) realizan la transición.

La fuente más conocida de luz visible es el Sol. Su superficie emite una radiación que abarca todo el espectro electromagnético, pero la radiación más intensa se encuentra en la región que definimos como visible; la intensidad radiante del Sol alcanza su nivel máximo a una longitud aproximada de onda de 550 nm, correspondiente precisamente a la sensibilidad máxima del observador promedio (Fig. 39-6). Esto significa que, a través de la selección natural, el ojo humano ha evolucionado de modo que su sensibilidad al espectro solar ha aumentado.

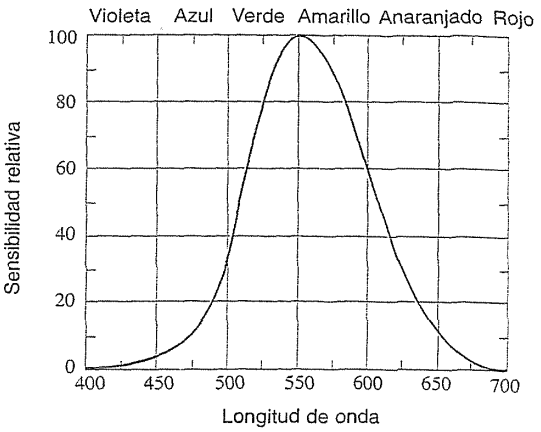


FIGURA 39-6. Sensibilidad relativa del ojo humano en función de la longitud de onda.

A causa de su temperatura, todos los objetos emiten radiación electromagnética, denominada *radiación térmica*. Algunos objetos como el Sol, cuya radiación térmica es visible, reciben el nombre de *incandescentes*. Otros objetos incandescentes comunes son los filamentos de las lámparas ordinarias y las brasas brillantes provenientes de un carbón encendido. La incandescencia se relaciona normalmente con los objetos calientes: casi siempre se requieren temperaturas mayores de 1000°C.

También es posible que la luz sea emitida por los objetos fríos; a este fenómeno se le llama *luminiscencia*. He aquí algunos ejemplos: lámparas fluorescentes comunes, los rayos, los relojes de pulsera y las carátulas luminosas de los relojes de pared, los televisores. En el caso de una lámpara fluorescente, una corriente eléctrica que pasa por el gas del tubo ocasiona que los electrones alcancen niveles más altos de energía; cuando retornan a su estado original, ceden el exceso de energía en forma de radiación ultravioleta. Esta radiación es absorbida por los átomos de la capa interior del tubo de vidrio, el cual entonces, emite luz visible. En el caso de la carátula luminosa de un reloj de pared, la luz *incidente* causa la excitación.

Los objetos luminiscentes pueden calificarse en dos categorías dependiendo de la duración de la emisión de luz después de eliminar la fuente de excitación. Se da el nombre de *fluorescentes* a aquellos objetos cuya emisión cesa inmediatamente (en 10^{-8} s) después de suspender la excitación; por ejemplo, las lámparas fluorescentes. Los objetos que siguen brillando más de en 10^{-8} s, una vez eliminada la fuente de excitación (como la carátula de un reloj), reciben el nombre de *fosforescentes* y el material que produce este efecto se conoce como *fósforo* (Fig. 39-7).

La luminiscencia puede deberse a varias causas. Cuando la energía que excita los átomos se origina en una reacción química, se le conoce como *quimioluminiscencia*. A menudo el efecto ocurre en seres vivos, como en las luciérnagas y en muchos organismos marinos; en este caso, recibe el nombre de *bioluminiscencia* (Fig. 39-8). También se emite luz cuando se rompen algunos cristales, por ejemplo, el azúcar; el efecto denominado *triboluminiscencia* se observa en un cuar-

* La asignación del color a varias regiones del espectro visible es sumamente arbitraria, porque el color es una designación psicológica más que una cualidad física. Del mismo modo que no existe una distinción física fundamental entre la luz y otras ondas electromagnéticas, tampoco hay una distinción física básica entre la luz azul y la roja. Más información sobre la percepción del color se incluye en "The Retinex Theory of Color Vision", de Edwin H. Land, *Scientific American*, diciembre de 1977, p. 108, y *Eye, Brain, and Vision*, de David H. Hubel (Scientific American Library Series, 1998), capítulo 8.

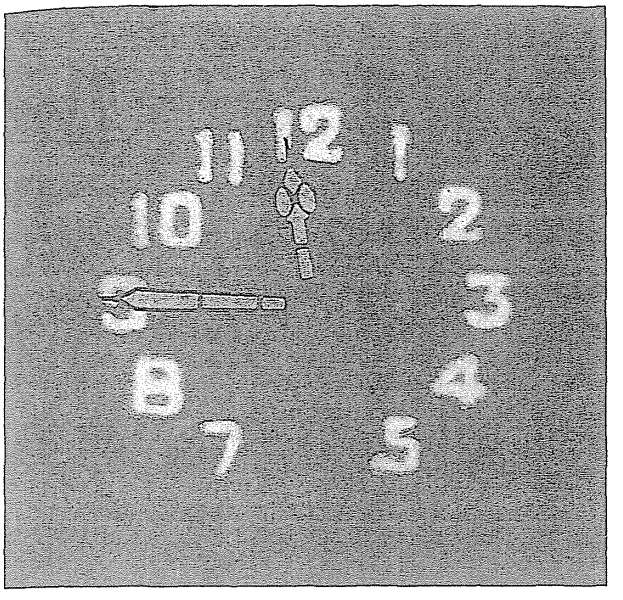


FIGURA 39-7. Un material fosforescente hace brillar los números de este reloj. El radio radiactivo a menudo se mezcla con fósforo para obtener la energía de excitación.

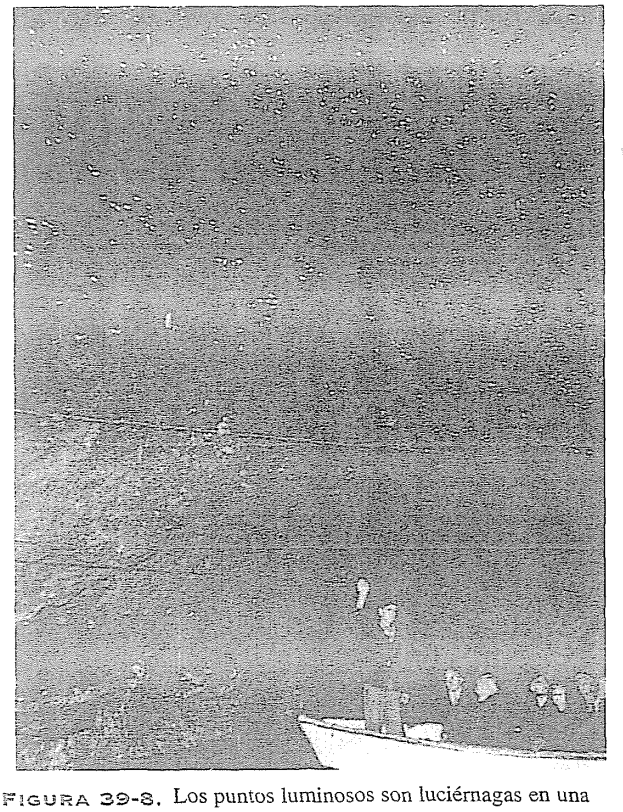


FIGURA 39-8. Los puntos luminosos son luciérnagas en una cueva de Nueva Zelanda. La luz atrae insectos, que quedan atrapados y sirven de alimento a las larvas de las luciérnagas.

to oscuro al masticar una pastilla salvavidas. He aquí otra causas de luminiscencia: corrientes eléctricas (como en los relámpagos o en los diodos emisores de luz y el impacto de las partículas de mucha energía (como en la aurora boreal).

39-3 LA VELOCIDAD DE LA LUZ

De acuerdo con la teoría de Maxwell, todas las ondas electromagnéticas se desplazan con la misma velocidad por el espacio vacío. A esta velocidad se le llama "velocidad de la luz", a pesar de que se aplica a todas las radiaciones electromagnéticas y no sólo a la luz. Esta velocidad es una de las constantes más importantes de la naturaleza.

Hasta el siglo XVII se pensaba que la luz se propagaba instantáneamente, es decir, se creía que la velocidad de la luz era infinita. Galileo abordó esta cuestión en su famoso trabajo, *Diálogo acerca de dos ciencias,* publicado en 1638. Expuso sus argumentos mediante un diálogo entre varios personajes, entre ellos Simplicio (que representaba al ignorante desde un punto de vista científico) y Sagredo (que representaba la voz de la razón y, probablemente, al propio Galileo):

> SIMPLICIO: La experiencia diaria nos muestra que la luz se propaga en forma instantánea; pues cuando vemos disparar una artillería a una gran distancia, el relámpago llega a nuestros ojos de inmediato, pero el sonido llega al oído un intervalo considerable.
>
> SAGREDO: Pues bien, Simplicio, lo único que puedo deducir de esta experiencia familiar es que el sonido, al llegar a nuestros oídos, se desplaza más lentamente que la luz; pero no me dice si la luz llega instantáneamente o si tarda tiempo en hacerlo, por muy rápida que sea.

Galileo empieza entonces a describir un experimento (que llevó a cabo él mismo) para medir la velocidad de la luz. Por la noche él y un asistente estaban de pie uno frente al otro, separados por una distancia aproximada de una milla, y llevaban una linterna que podían cubrir o destapar a discreción. Galileo comenzaba destapando su linterna y el asistente debía destapar la suya cuando viera la luz de Galileo. Éste trataba entonces de medir el tiempo que transcurría entre el instante en que destapaba su linterna y el instante en que le llegaba la luz a su asistente. Aunque Galileo no logró determinar el valor de la velocidad de la luz (el tiempo del viaje redondo con una separación de una milla era de apenas 11 μs, o sea varios órdenes menores de magnitud que los tiempos de reacción humana) se le atribuye el primer intento de medirla.

En 1676 Ole Roemer, astrónomo danés que trabajaba en París, se sirvió de observaciones astronómicas para deducir que la velocidad de la luz era finita. Su conclusión se basaba en una discrepancia entre el tiempo predicho y el observado de los eclipses de la luna más interna de Júpiter, Io (Problema 2). Unos 50 años más tarde James Bradley, astrónomo inglés,

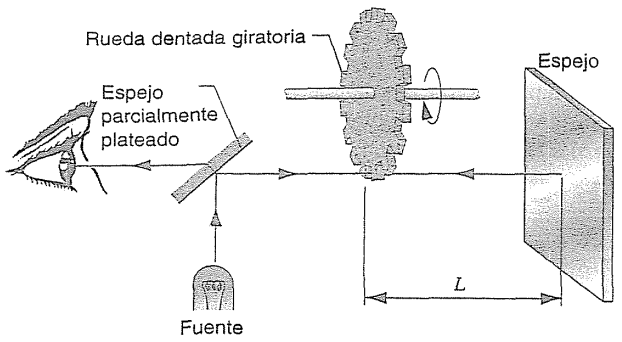


FIGURA 39-9. Diagrama esquemático del aparato con que Fizeau midió la velocidad de la luz.

aplicó un método distinto basado en la luz estelar para obtener un valor de 3×10^8 m/s.

El siguiente gran avance en la medición de la velocidad de la luz no se logra sino después de más de un siglo. En 1849 el físico francés Hipolyte Louis Fizeau (1819-1896) utilizó un mecanismo que se muestra gráficamente en la figura 39-9. En esencia, hizo que un haz luminoso describiera una larga trayectoria de ida y vuelta (de longitud $L = 8630$ m en cada sentido), la cual cruzaba una rueda dentada en ambas direcciones. La rueda cortaba en breves pulsos el haz que se dirigía al espejo. Cuando en el tiempo en que el pulso realizaba el viaje de ida y vuelta, la rueda giraba de modo que un diente bloqueaba la trayectoria luminosa, el observador no veía el pulso de luz. Cuando esto sucedía, el tiempo $2L/c$ que tardaba el haz luminoso en realizar el recorrido de ida y vuelta entre la rueda y el espejo debía ser igual al tiempo θ/ω que tardaba en girar con la velocidad angular ω por el ángulo θ entre el centro de un diente y el de un corte. Es decir,

$$\frac{2L}{c} = \frac{\theta}{\omega}$$

o

$$c = \frac{2L\omega}{\theta}. \tag{39-1}$$

Los haces cortados se usan en formas semejantes para medir la velocidad de los neutrones y de otras partículas. (Con una variante de este método se verificó la distribución de velocidades de Maxwell, Fig. 22-8).

El resultado que Fizeau obtuvo empleando ese método fue 3.133×10^8 m/s. A finales del siglo XIX y principios del siglo XXI, otros investigadores, entre ellos el físico estadounidense Albert A. Michelson, utilizaron técnicas mecánicas parecidas. El trabajo de Michelson sobresale por su rigor y precisión; en 1907 fue galardonado con el Premio Nobel por su investigación mediante técnicas ópticas para efectuar mediciones exactas. A raíz de sus investigaciones se redujo a unos 1000 m/s la incertidumbre en c.

La invención de técnicas electrónicas, sobre todo aplicadas a las microondas, permitió realizar una nueva clase de mediciones durante la década de 1950. Se consiguieron resultados que coincidieron con los de Michelson y que presentaban límites similares de incertidumbre.

Con la aplicación de los rayos láser en la década de 1970 se logró el adelanto decisivo en la medición de la velocidad de la luz. Se midieron directamente la frecuencia y la longitud de onda de la luz; se descubrió así que la luz podía obtenerse con $c = \lambda f$. Los refinamientos de esta técnica aportaron valores de c con una incertidumbre menor que 1 m/s. En la tabla 39-1 se resumen algunas de las mediciones de c que

TABLA 39-1 Velocidad de la radiación electromagnética en el espacio libre (algunas medidas seleccionadas)

Fecha	*Experimentador*	*País*	*Método*	*Velocidad* (km/s)	*Incertidumbre* (km/s)
1600(?)	Galileo	Italia	Linternas y ventanas	"Rapidez extraordinaria"	
1676	Roemer	Francia	Lunas de Júpiter	"Finita"	
1729	Bradley	Inglaterra	Aberración de la luz de estrellas	304,000	
1849	Fizeau	Francia	Rueda dentada	313,300	
1862	Foucault	Francia	Espejo giratorio	298,000	500
1880	Michelson	Estados Unidos	Espejo giratorio	299,910	50
1906	Rosa y Dorsey	Estados Unidos	Teoría electromagnética	299,781	10
1923	Mercier	Francia	Ondas estacionarias en alambres	299,782	15
1926	Michelson	Estados Unidos	Espejo giratorio	299,796	4
1950	Bergstrand	Suecia	Geodímetro	299,792.7	0.25
1950	Essen	Inglaterra	Cavidad de microondas	299,792.5	3
1950	Bol y Hansen	Estados Unidos	Cavidad de microondas	299,789.3	0.4
1951	Aslakson	Estados Unidos	Radar Shoran	299,794.2	1.9
1952	Rank y otros	Estados Unidos	Espectros moleculares	299,766	7
1952	Froome	Inglaterra	Interferómetro de microondas	299,792.6	0.7
1958	Froome	Inglaterra	Interferómetro de microondas	299,792.50	0.10
1967	Grosse	Alemania	Geodímetro	299,792.5	0.05
1973	Evenson y colaboradores	Estados Unidos	Métodos láser	299,792,4574	0.0012
1978	Woods y colaboradores	Inglaterra	Métodos láser	299,792.4588	0.0002
1987	Jennings y colaboradores	Estados Unidos	Métodos láser	299,792.4586	0.0003

hemos venido mencionando.* Nótese la reducción del límite de la incertidumbre con los años.

La precisión con que se mide la frecuencia (alrededor de una parte en 10^{13}) ha rebasado con mucho la de la longitud de onda (aproximadamente una parte en 10^9). Así pues, en el momento actual, la velocidad de la luz tiene por definición el valor exacto de

$$c = 299{,}792{,}458 \text{ m/s},$$

y el segundo se define partiendo de las mediciones de frecuencia; por tanto, el metro es ahora un patrón secundario, definido en función del segundo y del valor de c.

La velocidad de la luz en la materia

Cuando hablamos de la "velocidad de la luz", casi siempre nos referimos a la velocidad *en el vacío*. En el capítulo 38 estudiamos la propagación de la radiación electromagnética, que se realiza por acoplamiento entre sus campos eléctrico y magnético. En el caso de los materiales dieléctricos, dijimos en la sección 29-6 que el campo eléctrico se ve alterado por un factor de κ_e, la constante dieléctrica del material. Una forma fácil de modificar las ecuaciones para los campos eléctricos en el vacío para tomar en cuenta la presencia de los materiales dieléctricos es, como se señaló en la sección 29-6, reemplazar la constante dieléctrica ϵ_0 por la magnitud $\kappa_e\epsilon_0$.

Además hay que explicar el efecto de las propiedades *magnéticas* del medio en el campo magnético donde se propaga la onda electromagnética. Según comentamos en la sección 35-4, los materiales magnéticos se caracterizan por una permeabilidad relativa κ_m; en analogía con el campo eléctrico, podemos modificar las ecuaciones del campo magnético en la materia con sólo sustituir la constante magnética μ_0 por la magnitud $\kappa_m\mu_0$.

Por medio de las sustituciones anteriores, podemos modificar la ecuación 38-19 para obtener la velocidad de la luz en la materia:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\kappa_m\kappa_e}}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa_m\kappa_e}}. \qquad (39\text{-}2)$$

Los materiales que transmiten luz son casi siempre no ferromagnéticos y, por eso, κ_m suele diferir de 1 por no más de 10^{-4} (Tablas 35-2 y 35-3). En consecuencia, la constante dieléctrica κ_e determina la velocidad de la luz en un material. Sin embargo, las constantes dieléctricas incluidas en la tabla 29-2 no pueden emplearse en la ecuación 39-2, porque esos valores caracterizan a las situaciones *estáticas*. Recuerde que la constante dieléctrica es, en realidad, una medida de la respuesta de los dipolos (permanentes o inducidos) ante un campo eléctrico aplicado. Si éste varía con una frecuencia alta, los dipolos tal vez no dispongan de tiempo para responder, y no podemos utilizar las constantes dieléctricas estáticas en el caso de un campo $\vec{E}$ que varía rápidamente. A las frecuencias típicas de una onda luminosa (10^{15} Hz), el campo oscila demasiado rápido para que los dipolos lo sigan por completo. Más aún, κ_e en la ecuación 39-2 varía con la frecuencia y de ahí que la velocidad de la luz en la materia dependa de la longitud de onda de la luz o de su frecuencia.

TABLA 39-2 Velocidad de la luz en algunos materiales[a]

Material	*Velocidad de la luz* (10^8 m/s)
Vacío	3.00
Aire	3.00
Agua	2.26
Solución de azúcar (50%)	2.11
Vidrio Crown	1.97
Diamante	1.24

[a] En una longitud de onda de 589 nm (luz amarilla de sodio).

La tabla 39-2 contiene los valores de la velocidad de la luz en varios materiales.

Propagación de la luz en la materia (opcional)

El mecanismo causante de que la luz se propage en la materia es la dispersión (en realidad, la absorción de la luz incidente por los átomos o moléculas del medio y la reemisión de la luz en varias direcciones). Las fases de las ondas dispersadas que se dirigen transversalmente hacia la luz incidente provocan una interferencia destructiva casi completa en las direcciones transversales. Las ondas dispersadas que se desplazan paralelamente en dirección de la luz incidente no están en fase con ella; a causa de la interferencia entre las dos ondas, la fase de su combinación es distinta a la de la onda incidente. Este cambio en la fase lo observamos como un cambio de la velocidad.

El campo eléctrico de la luz incidente hace que los electrones del átomo oscilen con la frecuencia de la luz incidente. Es razonable esperar que la fase de la onda reemitida dependa de la frecuencia de la oscilación atómica y, por lo mismo, de la frecuencia de la onda original. Cuando interfieren las ondas incidentes y dispersadas, la fase de su combinación se basa en su diferencia de fase y, por tanto, en la frecuencia. Así pues, la velocidad de la luz en un material depende de la frecuencia o de la longitud de onda. En la sección 39-4 se describe este fenómeno, denominado *dispersión*.

En un sólido común, la distancia en que la luz original se absorbe y se reemite es del orden de micrómetros; en el aire es del orden de milímetros. En efecto, la luz que vemos en el Sol llega a nuestros ojos no directamente de él, sino de las moléculas de aire a unos cuantos milímetros de ellos. ■

Problema Resuelto 39-1. La velocidad de la luz de color amarillo ($\lambda = 589$ nm, correspondiente a $f = 5.09 \times 10^{14}$ Hz) en el agua es de 2.26×10^8 m/s. ¿Cuál es la constante dieléctrica efectiva del agua en esta frecuencia?

Solución Usamos la ecuación 39-2 y suponemos que, con suficiente exactitud en el cálculo, $\kappa_m = 1$. Al resolver la ecuación 39-2 para κ_e y haciendo $\kappa_m = 1$, obtenemos

$$\kappa_e = \left(\frac{c}{v}\right)^2 = \left(\frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{2.26 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2 = 1.76.$$

* Las referencias a algunas mediciones se incluyen en "Resource Letter RMSL-1: Recent Measurements of the Speed of Light and The Redefinition of the Meter", de Harry E. Bates, *American Journal of Physics*, agosto de 1988, p. 682.

Este es muy diferente de la constante dieléctrica *estática* del agua, cuyo valor es alrededor de 80 a temperatura ambiente; esto refleja la dificultad que los momentos dipolares de sus moléculas tienen para seguir la variación del campo eléctrico en esta frecuencia. Por lo regular, las constantes dieléctricas para alta frecuencia son más pequeñas que los valores estáticos correspondientes. Ello significa que el campo eléctrico inducido a alta frecuencia es menor que el campo eléctrico inducido estático.

39-4 REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE LAS ONDAS DE LUZ

Cuando vemos a través de una ventana, nos damos cuenta de que la luz nos llega desde el otro lado del vidrio; un amigo que se encuentre allí podrá vernos. Pero si observa con mucha atención, contemplará su reflejo en el vidrio. Si proyecta la luz de una linterna sobre el cristal, su amigo vería el haz luminoso, pero también usted vería la luz reflejada a sus espaldas.

En términos generales, estos dos efectos pueden ocurrir siempre que un haz luminoso pase de un medio (el aire por ejemplo) a otro (un vidrio). Una parte de este haz regresará y se reflejará en el primer medio, y la otra se transmitirá al segundo medio. En la figura 39-10 se ilustran gráficamente los dos efectos. Nótese que el haz puede desviarse o *refractarse* al penetrar en el segundo medio.*

En la figura 39-10, los haces se representan por medio de rayos. Éstos, trazados como líneas rectas perpendiculares a los frentes de onda (planos), indican la dirección en que se mueven los frentes. Observe los tres rayos de la figura 39-10: el original (o rayo *incidente*), el *reflejado* y el *refractado;* éste cambia de dirección al entrar en el segundo medio.

En el punto donde el rayo incidente choca contra la superficie, trazamos una línea normal (perpendicular) a ella y definimos tres ángulos medidos respecto a la normal: el *ángulo de incidencia* θ_1, el *ángulo de reflexión* θ'_1 y el *ángulo de refracción* θ_2. (Los subíndices indican el medio por donde se desplaza el rayo. En nuestro caso, el rayo incide desde el medio 1, el aire, y penetra en el medio 2, el vidrio.) El plano formado por el rayo incidente y la normal recibe el nombre de *plano de incidencia;* es el plano de la página en la figura 39-10.

Por medio de un experimento deducimos las siguientes leyes que rigen la reflexión y la refracción:

Ley de la reflexión Los rayos reflejados se hallan en el plano de incidencia y

$$\theta'_1 = \theta_1. \tag{39-3}$$

Ley de la refracción Los rayos reflejados se hallan en el plano de incidencia y

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2. \tag{39-4}$$

* *Refractado* es una palabra derivada del latín y significa roto; la misma raíz se encuentra en "fractura". Si introducimos un lápiz en el agua y lo inclinamos, la parte inclinada parece estar "rota".

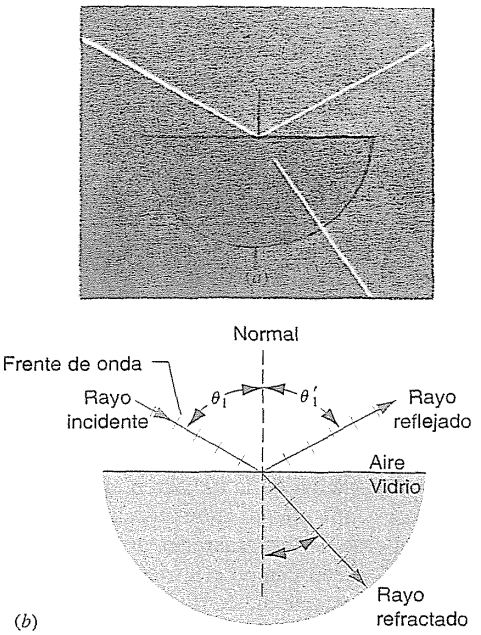


FIGURA 39-10. *a*) Fotografía que muestra la reflexión y la refracción de un haz luminoso que incide en una superficie plana de vidrio. *b*) Una representación gráfica por medio de rayos. Están marcados los ángulos de incidencia θ_1, de reflexión θ'_1 y de refracción θ_2. Nótese que los ángulos se miden entre la normal a la superficie y el rayo correspondiente.

A la ecuación 39-4 se le llama *ley de Snell.* Aquí n_1 y n_2 son constantes adimensionales denominadas *índice de refracción* de los medios 1 y 2. El índice de refracción n de un medio es la razón entre la velocidad de la luz c en el vacío y la velocidad v en dicho medio:

$$n = \frac{c}{v}. \tag{39-5}$$

En la sección anterior mencionamos la velocidad de la luz en varios materiales. Conviene precisar que la refracción se debe a que la velocidad de la luz cambia de un medio a otro. Esta idea la exponemos más a adelante en esta sección.

La tabla 39-3 ofrece algunos ejemplos del índice de refracción de diversos materiales. Nótese que, para muchos

TABLA 39-3 Algunos índices de refracción[a]

Medio	*Índice*	*Medio*	*Índice*
Vacío (exactamente)	1.00000	Vidrio típico crown	1.52
Aire (STP)	1.00029	Cloruro de sodio	1.54
Agua (20°C)	1.33	Poliestireno	1.55
Acetona	1.36	Disulfuro de carbono	1.63
Alcohol etílico	1.36	Vidrio pesado de pedernal	1.65
Solución de azúcar (30%)	1.38	Zafiro	1.77
Cuarzo fundido	1.46	Vidrio muy pesado de pedernal	1.89
Solución de azúcar (80%)	1.49	Diamante	2.42

[a] En una longitud de onda de 589 nm (luz amarilla de sodio).

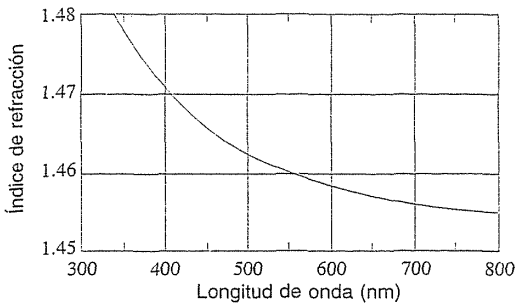


FIGURA 39-11. Índice de refracción del cuarzo fundido en función de la longitud de onda.

propósitos, podemos suponer que el aire equivale al vacío en la refracción de la luz. El índice de refracción de un material casi siempre varía con la longitud de onda de la luz (Fig. 39-11). Así pues, la refracción sirve para dividir un haz luminoso en sus longitudes de onda constitutivas, como sucede en el arco iris o en un prisma de vidrio; a este efecto se le llama *dispersión.*

Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas (opcional)

Las leyes de la reflexión y de la refracción son válidas en todas las regiones del espectro electromagnético, no sólo para la luz. De hecho, las ecuaciones 39-3 y 39-4 pueden obtenerse de las ecuaciones de Maxwell, circunstancia que las hace generalmente aplicables a las ondas electromagnéticas. Los datos experimentales referentes a esta aplicabilidad abarcan la reflexión de microondas o de ondas de radio provenientes de la ionosfera y la refracción de los rayos X por cristales.

Por lo regular, pensamos que las superficies muy pulidas o suaves son "buenas reflectoras", pero lo mismo puede decirse de otras superficies como la de una hoja de papel. La reflexión por el papel (denominada *reflexión difusa*) dispersa la luz más o menos en todas direcciones. Es principalmente mediante este tipo de reflexión que vemos los objetos no luminosos del entorno. La diferencia entre la reflexión difusa y la especular (como la del espejo) se funda en la textura de la superficie: un haz reflejado se forma sólo si las dimensiones típicas de las irregularidades de la superficie del reflector son esencialmente menores que las de las longitudes de onda de la luz incidente. En consecuencia, la clasificación de las propiedades de reflexión de una superficie se basa en la longitud de onda de la radiación que recibe dicha superficie. Así, el fondo de una sartén de hierro fundido puede ser un buen reflector de microondas con una longitud de 0.5 cm, no así de la luz visible.

Las ecuaciones de Maxwell permiten calcular cómo la energía incidente se divide entre los haces reflejados y refractados. En la figura 39-12 se muestra la predicción teórica referente a *a*) un haz luminoso en el aire que incide sobre una interfaz vidrio-aire y *b*) un haz que cae en un vidrio sobre una interfaz vidrio-aire. En la figura 39-12*a* vemos que, en los ángulos de incidencia hasta de 60°, se refleja menos del 10% de la energía luminosa. La superficie se convierte en un reflector excelente en la incidencia de roce (con ángulos de incidencia cercanos a 90°). Otro ejemplo de este efecto es el alto poder reflejante de una carretera mojada cuando la luz de los faros de los automóviles choca contra la carretera cerca de la incidencia de roce.

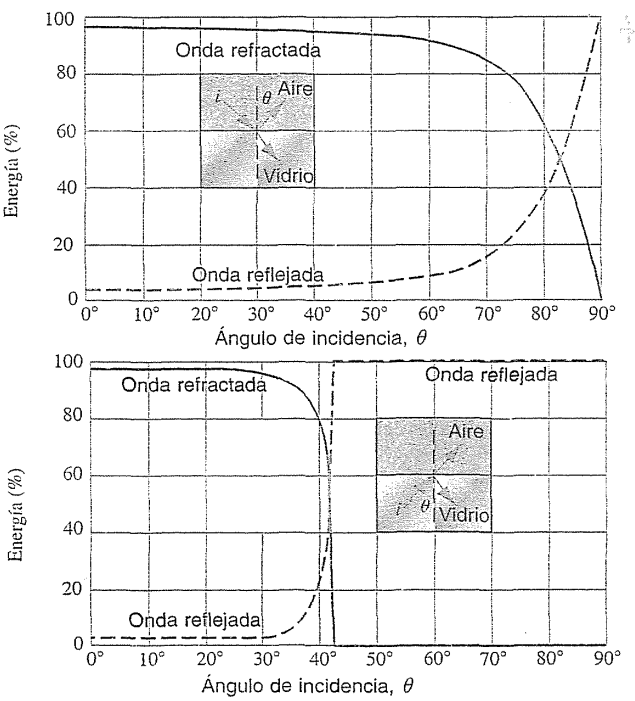


FIGURA 39-12. *a*) Porcentaje de energía reflejada y refractada cuando una onda en el aire incide en vidrio ($n = 1.50$). *b*) Lo mismo para una onda en vidrio que incide en aire y que muestra la reflexión interna total.

La figura 39-12*b* muestra claramente que *toda* la luz se refleja en cierto ángulo crítico (41.8° en este caso). En la sección 39-5 se da el nombre de *reflexión interna total* a este fenómeno.

PROBLEMA RESUELTO 39-2. En la figura 39-13 se muestra un rayo incidente i que choca contra un espejo plano MM' en un ángulo de incidencia θ. El espejo $M'M''$ es perpendicular a MM'. Siga este rayo en sus reflexiones subsecuentes.

Solución El rayo reflejado r forma un ángulo θ con la normal en b y llega como incidente contra un espejo $M'M'$. Su ángulo de incidencia θ' en este espejo es $\pi/2 - \theta$. Un segundo rayo reflejado r' forma un ángulo θ' con la normal trazada en b'. Los rayos i y r' son antiparalelos con cualquier valor de θ. Para comprobarlo nótese que

$$\phi = \pi - 2\theta' = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\theta.$$

Dos líneas son paralelas si sus ángulos interiores opuestos en una línea de intersección (ϕ y 2 θ) son iguales.

Repita el problema si el ángulo entre los espejos es 120° en vez de 90°.

El análogo tridimensional de la figura 39-13 es el *reflector de esquina,* que consta de tres espejos planos perpendiculares unidos como las secciones positivas de los planos coordenados en un sistema xyz. El reflector de esquina posee la propiedad de que, con *cualquier* dirección de incidencia, el rayo incidente se refleja en la dirección opuesta. Los reflectores de carreteras aplican este principio, de modo que la luz proveniente de los faros de un automóvil que se acerca se refleja hacia él, sin importar la dirección en que se aproxime ni el ángulo de los faros arriba de la carretera. Los astronautas del Apolo colocaron este tipo de reflectores en la Luna; se determina exactamente la distancia entre Tierra y Luna cronometrando un haz reflejado de rayos láser proveniente de la Tierra. Los reflectores de ángulo se ponen en los mástiles de botes pequeños, para que los radares los localicen más fácilmente.

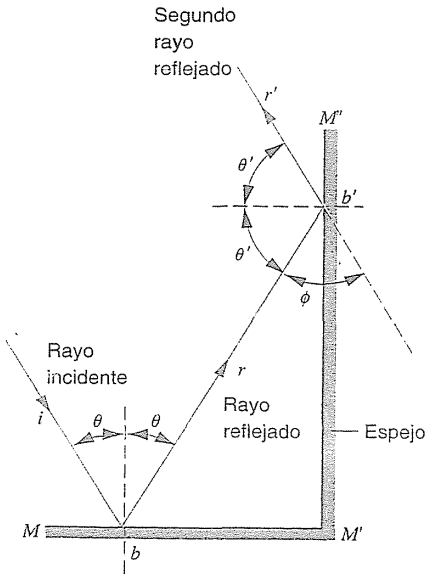


FIGURA 39-13. Problema resuelto 39-2. Reflector de esquina bidimensional.

PROBLEMA RESUELTO 39-3. Un haz luminoso en el aire incide en la superficie plana de un bloque de cuarzo y forma un ángulo de 30.00° con la normal. Contiene dos longitudes de onda, de 400 y de 500 nm. El índice de refracción del cuarzo con estas longitudes es de 1.4702 y 1.4624, respectivamente. ¿Cuál es el ángulo entre los dos haces refractados en el cuarzo?

Solución Según la ecuación 39-4 ($n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$) tenemos en el haz de 400 nm (suponiendo que $n_1 = 1.0003$ para aire)

$$(1.0003)\ \operatorname{sen} 30.00° = (1.4702) \operatorname{sen} \theta_2,$$

lo cual nos da

$$\theta_2 = 19.89°.$$

En el caso del haz de 500 nm tenemos

$$(1.0003)\ \operatorname{sen} 30.00° = (1.4624) \operatorname{sen} \theta_2$$

o bien

$$\theta_2 = 20.00°.$$

El ángulo $\Delta\theta_2$ entre los haces es de 0.11°; el componente de longitud de onda más corta se dobla hacia el ángulo más grande, es decir, el que tiene el menor ángulo de refracción. La diferencia del ángulo disminuye a medida que disminuye el ángulo de incidencia, convirtiéndose en 0.018° cuando $\theta_1 = 5°$. En los instrumentos ópticos que emplean lentes, la variación del ángulo de refracción con la longitud de onda provoca una distorsión denominada *aberración cromática.* La distorsión causada por este fenómeno se reduce por medio de ángulos pequeños de incidencia.

PROBLEMA RESUELTO 39-4. Un haz luminoso en el aire incide en una cara de un prisma de vidrio, como se indica en la figura 39-14. El ángulo θ se escoge de modo que el rayo emergente también forme un ángulo θ con la normal a la otra cara. Obtenga una expresión para el índice de refracción del material del prisma, suponiendo que $n = 1$ para el aire.

Solución Nótese que $\angle\ bad + \alpha = \pi/2$ y que $\angle\ bad + \phi/2 = \pi/2$, donde ϕ es el ángulo del prisma. Por tanto,

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\phi. \tag{39-6}$$

El ángulo de desviación ψ es la suma de los dos ángulos interiores opuestos en el triángulo aed, o sea

$$\psi = 2(\theta - \alpha).$$

Al sustituir $\frac{1}{2}\phi$ para α y al resolver para θ, obtenemos

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\psi + \phi). \tag{39-7}$$

En el punto a, θ es el ángulo de incidencia, y α el ángulo de refracción. La ley de la refracción (ecuación 39-4) es

$$\operatorname{sen}\theta = n \operatorname{sen}\alpha,$$

donde n es el índice de refracción del vidrio.

Conforme a las ecuaciones 39-6 y 39-7, lo anterior nos da

$$\operatorname{sen}\frac{\psi + \phi}{2} = n \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}$$

o bien

$$n = \frac{\operatorname{sen}(\psi + \phi)/2}{\operatorname{sen}(\phi/2)}, \tag{39-8}$$

que es la relación deseada. Esta ecuación es válida sólo cuando θ se escoge de modo que el rayo luminoso pase simétricamente por el prisma.

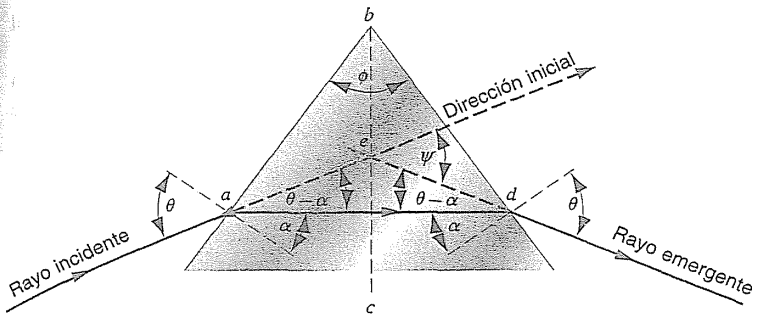


FIGURA 39-14. Problema resuelto 39-4.

En este caso ψ se llama el *ángulo de desviación mínima*; si θ es aumentado o disminuido se obtiene un ángulo de desviación más grande.

Obtención de la ley de la reflexión

Esta ley puede obtenerse en varias formas. A continuación explicaremos dos de ellas.

Principio de Huygens. En 1678 el físico holandés Christiaan Huygens* propuso una teoría simple de la luz. En ella supone que la luz es una onda, pero nada dice sobre la naturaleza de esta última. (Como la teoría del electromagnetismo de Maxwell aparecería casi dos siglos más tarde, la de Huygens no alude en absoluto a la índole electromagnética de la luz.) Huygens no sabía si la luz era una onda transversal o longitudinal; tampoco conocía las longitudes de onda de la luz visible; poco sabía respecto a la velocidad de la luz. Con todo, su teoría fue una guía útil en los experimentos durante muchos años y hoy sigue teniendo aplicaciones pedagógicas y de otro tipo. No debemos pensar que ofrezca una información tan rica y detallada como la más completa teoría electromagnética de Maxwell.

La teoría de Huygens está basada en una construcción geométrica que nos permite saber dónde un frente de onda se hallará en cualquier momento futuro, si conocemos su posición actual. Puede formularse así:

> *Todos los puntos de un frente de onda pueden considerarse fuentes puntuales en la producción de ondas esféricas secundarias. Transcurrido el tiempo t, la nueva posición de un frente de onda es la superficie tangente a las ondas esféricas secundarias.*

Vamos a explicar lo anterior con un ejemplo sencillo. En un frente de onda (*ab* en la figura 39-15) de una onda plana en el espacio libre, ¿cuál será el frente de onda un tiempo *t* más tarde? Conforme al principio de Huygens, varios puntos del plano (los de la figura 39-15) sirven de centro a las ondas esféricas secundarias. En un tiempo *t*, el radio de estas ondas esféricas es *ct*, donde *c* es la velocidad de la luz en el espacio libre. Con *de* representamos el plano tangente a las esferas en el tiempo *t*. Como se espera, *de* es paralelo al plano *ab* y está a un distancia perpendicular *ct* de él. Así pues, los frentes de ondas planas se propagan como planos y con la velocidad *c*. Nótese que el método de Huygens incluye una construcción tridimensional y que la figura 39-15 es la intersección de ella con el plano de la página.

Cabría esperar que, en contraste con la observación, una onda irradiaría hacia atrás y también hacia adelante desde los puntos de la figura 39-15. Este resultado se evita suponiendo que la intensidad de las ondas esféricas no es uniforme en todas direcciones, sino que varía continuamente de un máximo en la dirección hacia adelante hasta alcanzar un mínimo de cero en la dirección hacia atrás. Esto se indica con el sombreado de los arcos circulares en la figura 39-15. El método

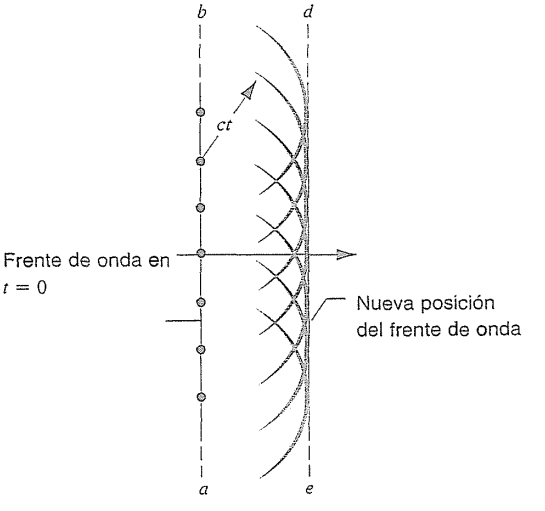


FIGURA 39-15. La construcción de Huygens describe la propagación de una onda plana en el espacio libre. Nótese que el rayo (flecha horizontal) que representa la onda es perpendicular a los frentes de onda.

* Christiaan Huygens (1629-1695) fue un científico muy profundo e influyente. Además de la teoría ondulatoria de la luz, entre sus logros conviene citar el perfeccionamiento del diseño del telescopio que le permitió deducir la forma de los anillos de Saturno; el desarrollo del reloj de péndulo, y hacer contribuciones a la teoría de los cuerpos giratorios (descubrimiento de la existencia de la aceleración centrípeta) y de los objetos en colisión (principio de la conservación del momento).

de Huygens puede aplicarse en forma cuantitativa a *todos* los fenómenos ondulatorios (Ejercicio 12). Dos siglos después, Gustav Kirchhoff (1824-1887) aportó a este método una sólida base matemática, y probó que la intensidad de las ondas varía con la dirección, tal como lo acabamos de mencionar.

A continuación mostraremos cómo la ley de la reflexión se deduce del principio de Huygens. En la figura 39-16a se muestran tres frentes de onda en una onda plana que choca contra un espejo plano MM′. Para facilitar la explicación, decidimos que los frentes de onda se encuentran separados por una longitud de onda. Nótese que θ_1, el ángulo entre los frentes de onda y el espejo, es el mismo que el existente entre el rayo incidente y la normal al espejo. En otras palabras, θ_1 es el *ángulo de incidencia*. Los tres frentes de onda están relacionados entre sí mediante la construcción de Huygens, como se aprecia en la figura 39-15.

Consideremos el punto a en el frente de onda de la figura 39-16b como una fuente de la onda secundaria de Huygens, que se expande tras un tiempo λ/c para incluir el punto b en la superficie del espejo. La luz proveniente del punto p en este mismo frente de onda no puede ir más allá del espejo, pero debe expandirse hacia arriba como onda esférica de Huygens. Cuando se pone un compás en el radio λ y se genera un arco alrededor de p, se crea un semicírculo en el cual el frente de onda reflejado debe ser tangente. Esta tangente debe pasar por b, pues el punto b debe estar en el nuevo frente de onda. Nótese que el ángulo θ_1' entre el frente de onda y el espejo es

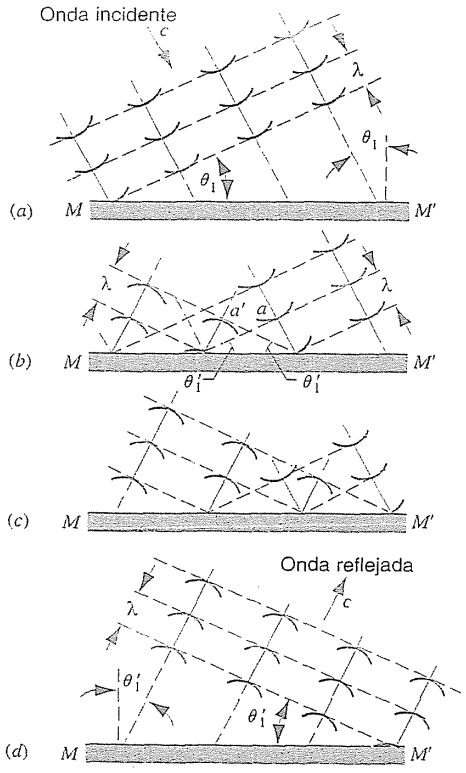


FIGURA 39-16. Reflexión de una onda plana contra un espejo plano tal como se analiza en la construcción de Huygens.

el mismo que el existente entre el rayo reflejado y la normal al espejo. En otras palabras, θ_1' es el *ángulo de reflexión*.

Examine los triángulos rectos abp y $a'bp$. Tienen en común el lado bp, y el lado ab $(= \lambda)$ es igual al lado $a'p$. De ahí que los dos triángulos rectos sean congruentes y que podamos concluir que

$$\theta_1 = \theta_1',$$

con lo cual se verifica la ley de la reflexión. Si recuerda que la construcción de Huygens es tridimensional y que los arcos mostrados representan segmentos de superficies esféricas, podrá convencerse de que el rayo reflejado se encuentra en el plano formado por el rayo incidente y la normal al espejo, es decir, al plano de la figura 39-16. Éste también es un requisito de la ley de la reflexión.

En las figuras 39-16*c* y 39-16*d* se muestra cómo el proceso continúa hasta que los tres frentes de onda incidentes se hayan reflejado.

Principio de Fermat. En 1650 Pierre Fermat* descubrió un principio muy importante, el cual puede expresarse en los siguientes términos:

> *Un rayo luminoso que pasa de un punto fijo a otro seguirá una trayectoria tal que, en comparación con las trayectorias cercanas, el tiempo requerido es mínimo, máximo o permanece inalterado (esto es, estacionario).*

Es fácil obtener de este principio la ley de la reflexión. La figura 39-17 contiene dos puntos fijos A y B, así como el radio reflejante APB que los conecta. (Suponemos que el rayo APB se halla en el plano de la figura; ejercicio 11). La longitud total L de este rayo es

$$L = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2},$$

donde x localiza el punto P donde el rayo toca al espejo.

De acuerdo con el principio de Fermat, P tendrá una posición tal que el tiempo de recorrido $t = L/c$ de la luz debe ser mínimo (o máximo o debe permanecer inalterado); esto sucede cuando $dt/dx = 0$. Al tomar esta derivada se obtiene

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\frac{dL}{dx}$$

$$= \frac{1}{2c}(a^2 + x^2)^{-1/2}(2x)$$

$$+ \frac{1}{2c}[b^2 + (d - x)^2]^{-1/2}(2)(d - x)(-1) = 0,$$

* Pierre Fermat (1601-1665) fue un matemático francés a quien se le recuerda por haber inventado la geometría analítica y por sus numerosas aportaciones a la teoría de números. Quizá su contribución más interesante es el *último teorema de Fermat*: la ecuación $x^n + y^n = z^n$, donde x, y, z y n son enteros positivos, no tiene solución cuando $n > 2$. Aunque decía haber probado este teorema (prueba que no publicó), eludió a los matemáticos más de 300 años, hasta que en 1994 lo resolvió el matemático de Princeton Andrew Wiles.

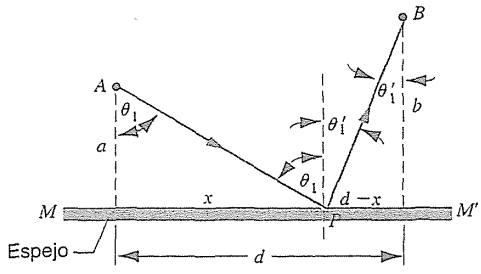


FIGURA 39-17. Reflexión de una onda plana contra un espejo plano, tal como se analiza por medio del principio de Fermat. Un rayo proveniente de A pasa por B luego de reflejarse en P.

que puede reescribirse como

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

(Al evaluar la derivada, adviértase que mantenemos fijos los puntos finales y modificamos la trayectoria permitiendo que x cambie.) La comparación con la figura 39-17 indica que podemos escribir lo anterior así

$$\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_1'$$

o bien

$$\theta_1 = \theta_1',$$

que es la ley de la reflexión.

Obtención de la ley de refracción

A continuación usamos los principios de Huygens y de Fermat para obtener la ley de la refracción (Ec. 39-4).

Principio de Huygens. La figura 39-18 muestra cuatro etapas en la refracción de tres frentes de onda sucesivos de una onda plana que inciden sobre una interfaz aire (medio 1) y vidrio (medio 2). Para facilitar la exposición supondremos que los frentes incidentes están separados por λ_1, la longitud de onda medida en el medio 1. Supongamos que la velocidad de la luz en el aire es v_1 y que en el vidrio es v_2. Además suponemos que

$$v_2 < v_1. \qquad (39\text{-}9)$$

Esta suposición sobre las velocidades es indispensable para la obtención de lo siguiente.

Los frentes de onda de la figura 39-18*a* se relacionan entre sí mediante la construcción de Huygens de la figura 39-15. Al igual que en la figura 39-16, θ_1 es el ángulo de incidencia. En la figura 39-18*b* considere el tiempo ($= \lambda_1/v_1$) durante el cual una onda secundaria de Huygens proveniente del punto e se desplaza, para incluir el punto d. La luz procedente del punto h, que pasa por el vidrio a una velocidad reducida (recuerde la suposición de la ecuación 39-9), recorre una distancia más corta,

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{v_2}{v_1}, \qquad (39\text{-}10)$$

durante este lapso. Ello se deduce de $v = \lambda f$ y $f_1 = f_2$. El frente de onda refractado debe ser tangente a un arco de este radio

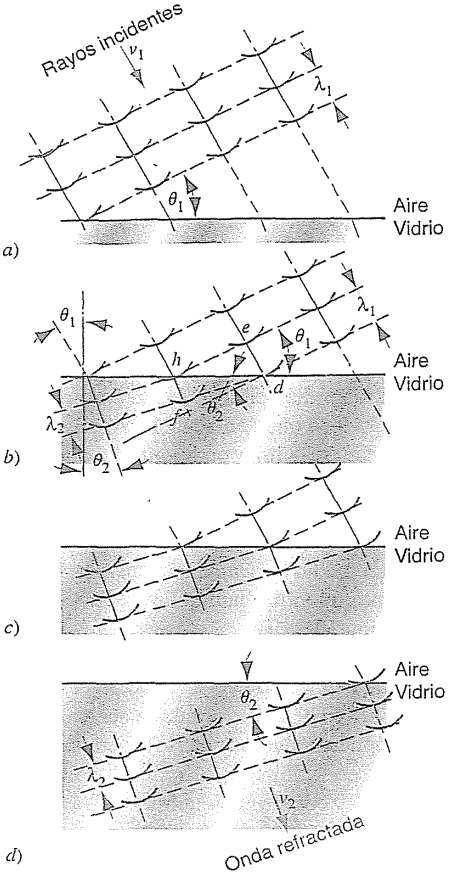


FIGURA 39-18. Refracción de una onda plana en una interfaz plana, tal como se describe en la construcción de Huygens. No se muestra la onda reflejada para simplificar el dibujo. Nótese el cambio de la longitud en la onda refractada.

centrado en h. Como d se halla en el nuevo frente de onda, la tangente debe pasar a través de este punto, según se indica. Nótese que θ_2, el ángulo entre el frente de onda refractado y su interfaz aire-vidrio, es el mismo que el ángulo existente entre el rayo refractado y la normal a esa interfaz. En otras palabras, θ_2 es el *ángulo de refracción*. Nótese que la longitud de onda en el vidrio (λ_2) es menor que la longitud de onda en el aire (λ_1).

Respecto a los triángulos rectos *hde* y *hdf*, podemos escribir

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{\lambda_1}{hd} \qquad \text{(para } hde\text{)}$$

y

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{\lambda_2}{hd} \qquad \text{(para } hdf\text{)}.$$

Al dividir y utilizar la ecuación 39-10, obtenemos

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}. \qquad (39\text{-}11)$$

La introducción de un factor común c nos permite rescribir la ecuación 39-11 así

$$\frac{c}{v_1}\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{c}{v_2}\operatorname{sen}\theta_2. \qquad (39\text{-}12)$$

De acuerdo con la ecuación 39-5, $c/v_1 = n_1$ y $c/v_2 = n_2$; así que la ecuación 39-12 se convierte en

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2, \qquad (39\text{-}13)$$

que es la ley de la refracción.

Si un medio es el vacío, la ecuación 39-10 queda así

$$\lambda_n = \lambda\frac{v}{c} = \frac{\lambda}{n}, \qquad (39\text{-}14)$$

donde λ_n es la longitud de onda de la luz en un medio de índice n, y λ la longitud de onda en el vacío. Al pasar de un medio a otro, la velocidad de la luz y su longitud de onda se reducen el mismo factor, pero la frecuencia de la luz no se altera.

La aplicación del principio de Huygens a la refracción exige que, si doblamos un rayo luminoso hacia la normal cuando pasa del aire a un medio ópticamente denso, la velocidad de la luz en este último (un vidrio por ejemplo) debe ser *menor* que en el aire (ecuación 39-9). Este requisito es válido para todas la teorías ondulatorias. En la antigua teoría de partículas propuesta por Newton, la explicación de la refracción establecía que la velocidad de la luz en el medio donde se acerca la luz a la normal (el medio ópticamente más denso) fuera *mayor* que en el aire. Se pensaba que el medio más denso ejercía fuerzas de atracción sobre los "corpúsculos luminosos" a medida que se acercaban a la superficie, acelerándolos y cambiando su dirección para hacer que formasen ángulos más pequeños con la normal.

Por ello, una comparación experimental de la velocidad de la luz en el aire con la velocidad de la luz y en un medio ópticamente más denso es indispensable para escoger entre la teoría ondulatoria y corpuscular de la luz. Esta comparación la realizó por primera vez Foucault en 1850; demostró de manera convincente que la luz se desplaza con mayor lentitud en el agua que en el aire, con lo cual excluyó la teoría corpuscular de Newton.

Principio de Fermat. Para probar la ley de la refracción partiendo de este principio, examine con mucha atención la figura 39-19, que muestra dos puntos fijos A y B en dos medios y un rayo refractado APB que los conecta. El tiempo t que el rayo tarda en pasar de A a B está dado por

$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2}.$$

Si empleamos la relación $n = c/v$, podemos escribir lo anterior así

$$t = \frac{n_1L_1 + n_2L_2}{c} = \frac{L}{c}, \qquad (30\text{-}15)$$

donde L es la *longitud del camino óptico*, definida como

$$L = n_1L_1 + n_2L_2. \qquad (30\text{-}16)$$

En cualquier rayo luminoso que atraviese medios sucesivos, la longitud del camino óptico es la suma del producto de la longitud de la trayectoria geométrica de cada segmento y el índice de refracción de ese medio. La ecuación 39-14 ($\lambda_n = \lambda/n$) muestra que la longitud de trayectoria óptica es igual a la longitud que este mismo número de ondas tendría si el medio fuera el vacío. No confunda la longitud del camino óptico con la de trayectoria geométrica, que es $L_1 + L_2$ para el rayo de la figura 39-19.

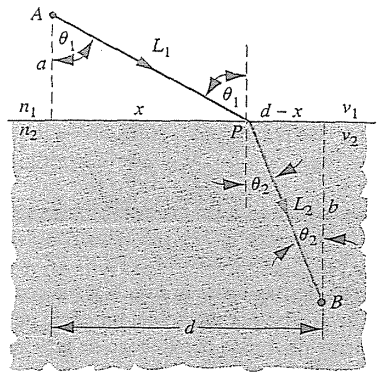


FIGURA 39-19. Refracción de una onda plana en una interfaz plana, tal como se analiza mediante el principio de Fermat. Un rayo A pasa por B después de refractarse en P.

El principio de Fermat establece lo siguiente: el tiempo t que la luz tarda en recorrer la trayectoria APB debe ser mínimo (máximo o permanecer inalterado); esto a su vez requiere seleccionar x de modo que $dt/dx = 0$. La longitud del camino óptico en la figura 39-19 es

$$L = n_1L_1 + n_2L_2 = n_1\sqrt{a^2 + x^2} + n_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}.$$

Al sustituir el resultado anterior en la ecuación 39-15 y al diferenciar, obtenemos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\frac{dL}{dx}$$

$$= \frac{n_1}{2c}(a^2 + x^2)^{-1/2}(2x)$$

$$+ \frac{n_2}{2c}[b^2 + (d - x)^2]^{-1/2}(2)(d - x)(-1) = 0,$$

que puede escribirse como

$$n_1\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2\frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

La comparación con la figura 39-19 muestra que podemos escribir lo anterior así

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2,$$

que es la ley de la refracción.

PROBLEMA RESUELTO 39-5. La luz roja de 632 nm de longitud de onda en el espacio libre incide, en un ángulo de $\theta_1 = 39°$ respecto a la normal, en un microscopio de vidrio cuyo espesor es $d = 0.78$ mm y cuyo índice de refracción es $n = 1.52$ (Fig. 39-20). Encuentre *a*) la longitud de onda en el vidrio y *b*) la longitud del camino óptico de la luz que se desplaza por el vidrio.

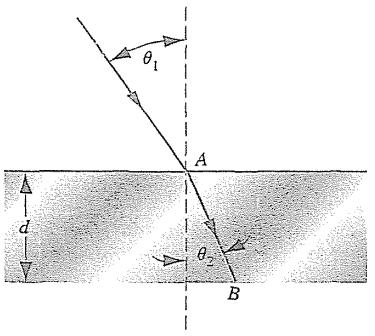


FIGURA 39-20. Problema resuelto 39-5.

Solución *a)* Podemos encontrar la longitud de onda en el vidrio usando la ecuación 39-14, que nos da

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{632\text{ nm}}{1.52} = 416\text{ nm}.$$

b) El ángulo de refracción se obtiene de la ecuación 39-13,

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{n} = \frac{\operatorname{sen}39^\circ}{1.52} = 0.414$$

o bien

$$\theta_2 = 24.5^\circ,$$

y la longitud real de la trayectoria que pasa por el vidrio es

$$AB = \frac{d}{\cos\theta_2} = \frac{0.78\text{ mm}}{\cos 24.5^\circ} = 0.857\text{ mm}.$$

El camino óptico es

$$L = n(AB) = 1.52(0.857\text{ mm}) = 1.30\text{ mm}.$$

39-5 REFLEXIÓN INTERNA TOTAL

La figura 39-21 muestra los rayos provenientes de una fuente puntual en un vidrio que inciden sobre una interfaz vidrio-aire. Conforme aumenta el ángulo de incidencia θ, llegamos a una situación (véase el rayo *e*) donde el rayo refractado apunta a lo largo de una superficie, con un ángulo de refracción de 90°. En los ángulos de incidencia más grandes que este *ángulo crítico* θ_c, no existen rayos refractados, y hablamos entonces de una *reflexión interna total.*

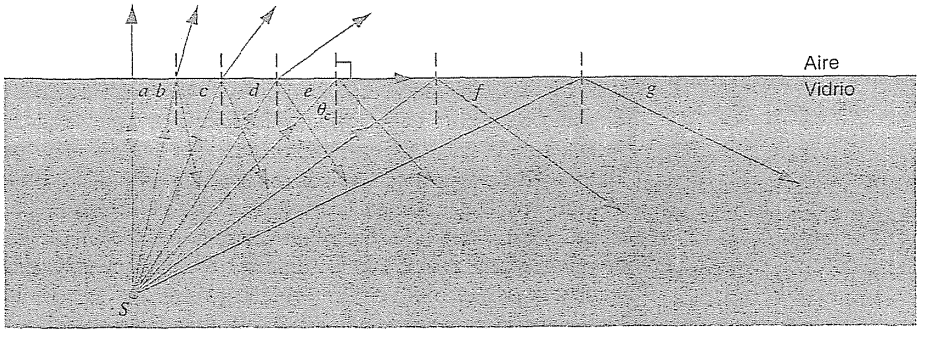


FIGURA 39-21. La reflexión interna total de la luz desde una fuente puntual *S* ocurre en todos los ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico θ_c. En este último los rayos refractados apuntan a lo largo de la interfaz aire-vidrio.

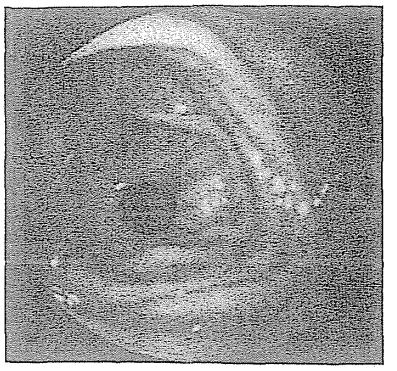


FIGURA 39-22. Imagen de fibra óptica durante el paso del estómago al intestino delgado.

El ángulo crítico lo obtenemos haciendo $\theta_2 = 90^\circ$ en la ley de la refracción (Ec. 39-4):

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_c = n_2 \operatorname{sen}90^\circ$$

o

$$\theta_c = \operatorname{sen}^{-1}\frac{n_2}{n_1}. \qquad (39\text{-}17)$$

Para un vidrio en el aire, $\theta_c = \operatorname{sen}^{-1}(1.00/1.50) = 41.8^\circ$. La figura 39-12b indica que el 100% de la energía de la onda se refleja cuando el ángulo de incidencia rebasa los 41.8°.

El seno de un ángulo no puede ser mayor que la unidad, por lo cual es preciso tener $n_2 < n_1$. Ello nos indica que la reflexión interna total no puede ocurrir cuando la luz incidente está en el medio con menor índice de refracción. El adjetivo *total* significa exactamente eso: la reflexión se realiza sin pérdida de intensidad. Por el contrario, en la reflexión ordinaria de un espejo hay una pérdida aproximada de intensidad de 4%.

La reflexión interna total posibilita los dispositivos de fibra óptica con que los médicos estudian visualmente muchos sitios internos del cuerpo (Fig. 39-22). En estos aparatos un haz de fibras transmite una imagen que puede observarse visualmente fuera del cuerpo.* Las fibras ópticas se emplean asimismo en las comunicaciones telefónicas, en la transmisión electrónica de datos y gracias a su peso ligero y a

* Consúltese "Optical Fibers in Medicine" de Abraham Katzir, *Scientific American,* mayo de 1989, p. 120.

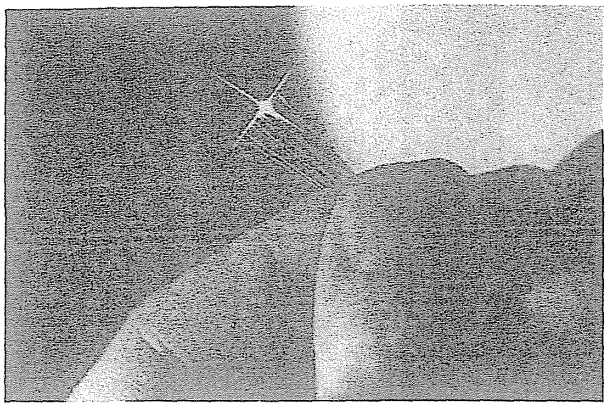


FIGURA 39-23. La luz se transmite a través de una fibra óptica.

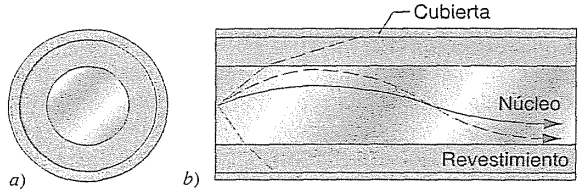


FIGURA 39-24. *a*) Fibra óptica mostrada en una sección transversal. Su diámetro mide más o menos lo mismo que un cabello humano. *b*) Vista transversal, que muestra la propagación de la reflexión interna total. Se muestran el núcleo, el revestimiento (de índice menor que el núcleo) y la cubierta protectora.

la ausencia de interferencia electromagnética, en el transporte de señales en aviones. La figura 39-23 muestra la luz proveniente de una fibra óptica.*

Como se ve en la figura 39-24, la fibra consta de un núcleo central que gradualmente se convierte en un revestimiento externo de un material con menor índice de refracción. Sólo los rayos que se reflejan internamente pueden propagarse por la fibra. Se han desarrollado materiales de extrema pureza con el propósito de reducir la atenuación de la señal cuando pasa a través de la fibra. Si el agua de mar fuese transparente como el vidrio con que se construyen las fibras, sería posible ver su fondo mediante la luz solar reflejada a varias millas de profundidad.

PROBLEMA RESUELTO 39-6. La figura 39-25*a* muestra un prisma triangular de vidrio: se refleja totalmente un rayo incidente normal a una cara. Si θ_1 es 45°, ¿qué puede concluirse respecto al índice de refracción n del vidrio?

Solución El ángulo θ_1 debe ser igual o mayor que el ángulo crítico θ_c, donde θ_c, está dado por la ecuación 39-17:

$$\theta_c = \text{sen}^{-1}\frac{n_2}{n_1} = \text{sen}^{-1}\frac{1}{n}$$

*Consúltese "Lightwaves and Telecommunication" de Stewart E. Miller, *American Scientist*, enero-febrero de 1984, p. 66, y "Light-Wave Communications", de W. S. Boyle, *Scientific American*, agosto de 1977, p. 40.

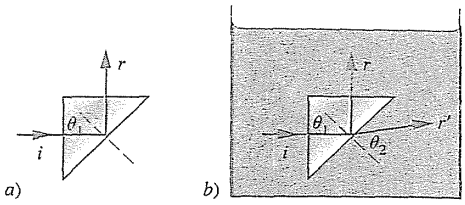


FIGURA 39-25. *a*) Problema resuelto 39-6. *b*) Problema resuelto 39-7.

o bien

$$n = \frac{1}{\text{sen}\,\theta_c},$$

donde el índice de refracción del aire ($= n_2$) es igual a la unidad. Puesto que se presenta una reflexión interna total, θ_c debe ser menor que 45°; por consiguiente,

$$n > \frac{1}{\text{sen}\,45°} = 1.41.$$

En consecuencia, el índice de refracción del vidrio debe ser mayor que 1.41. Si n fuese menor que 1.41, el rayo de la figura 39-25*a* se refractaría parcialmente en el aire, en vez de retornar y reflejarse por completo en el vidrio.

PROBLEMA RESUELTO 39-7. ¿Qué sucede si el prisma del problema resuelto 39-6 (suponga que $n_1 = 1.50$) está sumergido en agua ($n_2 = 1.33$)? (Fig. 39-25*b*).

Solución El nuevo ángulo crítico, dado por la ecuación 39-17, es

$$\theta_c = \text{sen}^{-1}\frac{n_2}{n_1} = \text{sen}^{-1}\frac{1.33}{1.50} = 62.5°.$$

El ángulo real de incidencia (45°) es menor que esto, de manera que *no* tenemos la reflexión interna total.

Existe un rayo reflejado r, con un ángulo de reflexión de 45°, como se observa en la figura 39-25*b*. Hay además un rayo refractado r', con un ángulo de refracción dado por

$$n_1 \,\text{sen}\,\theta_1 = n_2 \,\text{sen}\,\theta_2$$

$$(1.50)(\text{sen } 45°) = (1.33)\,\text{sen}\,\theta_2,$$

que produce $\theta_2 = 52.9°$. Demuestre que, a medida que $n_2 \rightarrow n_1$, $\theta_c \rightarrow 90°$.

¿De qué manera el rayo incidente i en las figura 39-25*a* y 39-25*b* determina si hay aire o agua más allá del vidrio? En otras palabras, ¿cómo "sabe" si se refleja por completo o si se refracta parcialmente? La onda viajera en el vidrio crea campos eléctricos y magnéticos que son funciones exponenciales que decrecen fuertemente con fuerza la distancia, las cuales penetran algunas longitudes de onda en el siguiente medio. Esos campos no se relacionan con una onda viajera, pero pueden considerarse como una "muestra" del medio más allá de la interfaz. Podemos demostrar la penetración colocando un segundo prisma de vidrio cerca del primero, como se indica en la figura 39-26. Al muestrear el medio 2 (el aire), los campos perciben al segundo prisma; aunque la ley de la refracción prohíbe que las ondas aparezcan en el espacio de aire entre los prismas, sí les permite propagarse en el segundo prisma. Nótese en la figura 39-26 que

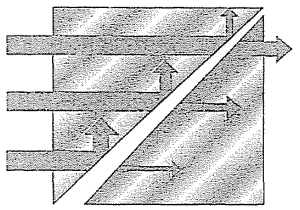


FIGURA 39-26. Reflexión interna total frustrada. Cuanto más gruesa es la separación de aire, más pequeña será la intensidad de la luz en el segundo prisma (indicado por el ancho de los rayos). Nótese que las ondas luminosas no aparecen *en* la separación.

el rayo luminoso aparece en el segundo prisma, no así en el espacio de aire. A este fenómeno se le conoce como *reflexión interna total frustrada* y es una propiedad general de las ondas. (Puede hacerse con las microondas por ejemplo.) En la mecánica cuántica, las propiedades ondulatorias de las partículas materiales permiten un efecto similar llamado *penetración de barrera:* una partícula puede pasar de una región permitida a otra penetrando en una región donde esté prohibida. En el capítulo 46 nos ocuparemos de la penetración de barrera.

39-6 EL EFECTO DOPPLER PARA LA LUZ

En la sección 19-9 demostramos que, si una fuente *sonora* se dirige hacia un observador con una velocidad u, la frecuencia f escuchada por él es (consúltese la ecuación 19-42, que hemos rearreglado y en que hemos sustituido u por v_S)

$$f = f_0 \frac{1}{1 + u/v} \qquad \text{(onda sonora, observador fijo, fuente que se aleja).} \qquad (39\text{-}18)$$

En esta ecuación f_0 es la frecuencia escuchada cuando la fuente se halla en reposo y v la velocidad del sonido. Al cambio de frecuencia causado por el movimiento relativo se le llama *efecto Doppler.*

Si la fuente está en reposo en el medio transmisor pero el observador se aleja de ella con una velocidad u, la frecuencia observada (ecuación 19-39, donde u ha sido sustituida por v_0 es

$$f = f_0 (1 - u/v) \qquad \text{(onda sonora, fuente fija, observador que se aleja).} \qquad (39\text{-}19)$$

Con valores idénticos de la velocidad relativa de separación u de la fuente y del observador, las frecuencias predichas por las ecuaciones 39-18 y 39-19 son distintas. Ello no debe sorprendernos, pues una fuente sonora que se desplace por un medio donde el observador se halla en reposo será físicamente diferente a un observador que se mueve por el medio con la fuente en reposo, como se comprueba al comparar las figuras 19-14 y 19-15 y cómo se demostró en el problema resuelto 19-6.

Estamos tentados a aplicar las ecuaciones 39-18 y 39-19 a la luz, sustituyendo c (la velocidad de la luz) por v (la velocidad de sonido). Sin embargo, en el caso de la luz en contraste con el sonido ha sido imposible identificar un medio de transmisión respecto al cual la fuente y el observador se mueven. Ello significa que la "fuente que se aleja del observador" y "el observador que se aleja de la fuente" son situaciones físicamente idénticas y deben presentar *exactamente la misma* frecuencia de desplazamiento Doppler. En lo tocante a la luz, las ecuaciones 39-18 o 39-19 son incorrectas. Como veremos más adelante en la sección, el efecto Doppler predicho por la teoría de la relatividad es

$$f = f_0 \frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \text{(onda de luz, fuente fija, observador que se aleja).} \qquad (39\text{-}20)$$

La ecuación 39-20 se aplica exclusivamente al caso especial en que la dirección de la propagación de la luz es la misma que la dirección del movimiento relativo de S y de S'. Podemos modificar la ecuación 39-20 en caso de que la fuente y el observador estén acercándose entre sí; basta reemplazar u por $-u$.

Por medio del teorema del binomio podemos expandir la raíz cuadrada en la ecuación 39-20 como $(1 - u^2/c^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}u^2/c^2 + \ldots$, lo cual nos da

$$f = f_0 \left[1 - \frac{u}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \cdots \right]. \qquad (39\text{-}21)$$

La razón u/c para la mayor parte de las fuentes de luz, aun en las de dimensiones atómicas es pequeña. En tales casos, los términos en u^2/c^2 (y los términos de orden superior) son insignificantemente pequeños y el término de primer orden u/c ofrece una estimación razonable del desplazamiento Doppler.

En 1938, H. E. Ives y G. R. Stilwell efectuaron la prueba experimental clásica del efecto Doppler relativista. Enviaron un haz de átomos de hidrógeno, generado a partir de una descarga de gas, a lo largo de un tubo con una velocidad u, como se ve en la figura 39-27. Pudieron observar la luz emitida por los átomos en dirección contraria a $\vec{u}$ (átomo 1, por ejemplo), usando para ello un espejo y también en dirección paralela a $\vec{u}$ (átomo 2, por ejemplo). Con un espectógrafo de gran precisión, pudieron fotografiar una línea espectral característica de esta luz, obteniendo en una escala de frecuencia las líneas marcadas f'_1 y f'_2 en la figura 39-27*b*. Además es posible fotografiar, en la misma placa, una línea correspondiente a la luz emitida de los átomos *en reposo*; las líneas aparecen como f

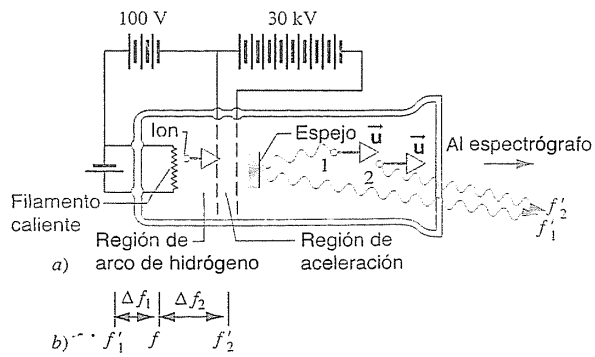


FIGURA 39-27. Aparato que se utilizó en el experimento de Ives-Stilwell.

TABLA 39-4 Experimento de Ives-Stilwell

Velocidad u (10^6 m/s)	$\Delta f/f\ 10^{-5}$ *Clásica*	*Relativista*	*Experimento*
0.865	1.67	0.835	0.762
1.01	2.26	1.13	1.1
1.15	2.90	1.45	1.42
1.33	3.94	1.97	1.9

en la figura 39-27*b*. En este experimento una magnitud fundamental medida es $\Delta f/f$, definida a partir de

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{f}, \tag{39-22}$$

(Fig. 39-27*b*). Mide hasta qué punto la frecuencia de la luz emitida por los átomos en reposo no se sitúa a la mitad entre las frecuencias f_1' y f_2'. La tabla 39-4 muestra que los resultados medidos coinciden con la fórmula predicha por la teoría de la relatividad (ecuación 39-20), y no con la fórmula clásica tomada de la teoría de la propagación del sonido en un medio material (ecuación 39-18).

Ives y Stilwell no presentaron sus resultados experimentales como evidencia en favor de la teoría de la relatividad de Einstein; más bien les dieron una interpretación teórica alterna. Hoy los observadores modernos, que no sólo se centran en el excelente experimento de ambos sino también en toda los datos experimentales disponibles, interpretan el experimento de Ives-Stilwell como acabamos de señalar: como una prueba del efecto Doppler relativista.

PROBLEMA RESUELTO 39-8. Un cuasar distante se aleja de la Tierra con una velocidad u. Un astrónomo busca cierta línea espectral en la luz de este cuasar. Esa línea, emitida por el hidrógeno atómico, se observa usando tubos de descarga de hidrógeno en la Tierra que tengan una longitud de onda de $\lambda_0 = 121.6$ nm. El astrónomo descubre la línea espectral de hidrógeno emitida por el cuasar en una longitud de onda de $\lambda = 460.9$ nm. Suponiendo que el cuasar se aleja radialmente de la Tierra, ¿cuál es su velocidad en relación con ella?

Solución Utilizamos la ecuación 39-20, que reescribimos en función de la longitud de onda:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

o

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}. \tag{39-23}$$

Al resolver para la velocidad obtenemos

$$\frac{u}{c} = \frac{(\lambda/\lambda_0)^2 - 1}{(\lambda/\lambda_0)^2 + 1}. \tag{39-24}$$

Con $\lambda/\lambda_0 = 460.9$ nm$/121.6$ nm $= 3.79$, obtenemos

$$\frac{u}{c} = \frac{(3.79)^2 - 1}{(3.79)^2 + 1} = 0.87.$$

El cuasar se aleja de la Tierra a 87% de la velocidad de la luz. Este cálculo determina sólo el componente radial o la línea de vista de la velocidad relativa.

El efecto Doppler causa el siguiente efecto: las longitudes de onda de luz provenientes de objetos que se alejan de la Tierra se alargan o cambian de dirección y se dirigen al extremo rojo (longitud de onda larga) del espectro visible. De ahí que se les conozca como *corrimiento al rojo*. En la figura 39-28 se incluye un ejemplo de dicho espectro, a partir del cual es posible determinar la velocidad de la galaxia en relación con la Tierra. Muchas observaciones revelan que todos los objetos distantes se alejan de nosotros y que se da una relación directa (lineal) entre la velocidad del objeto y su distancia de la Tierra: cuanto más apartado esté, más rápido se alejará de nosotros. Este comportamiento lineal, deducido de las mediciones del corrimiento al rojo, es la prueba fundamental de la expansión del universo.

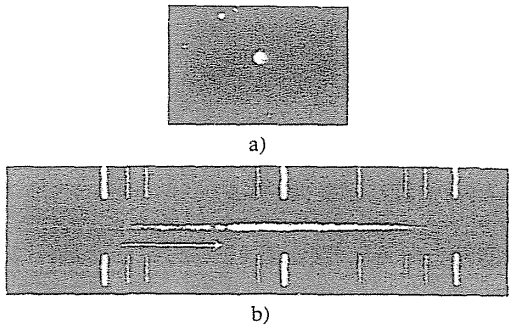


FIGURA 39-28. *a*) Galaxia en la constelación Corona Boreal. *b*) La raya central muestra el espectro de longitudes de onda de la luz emitida por esta galaxia. Las dos bandas verticales oscuras muestran las líneas de absorción relacionadas con el calcio, que se encuentra en esta galaxia. Las líneas espectrales arriba y debajo se registraron con una fuente de laboratorio para calibrar la longitud de onda. La flecha horizontal indica a qué distancia se desplazan las líneas de calcio, desde donde se supone que deberían aparecer si las emitiera una fuente en reposo dentro del laboratorio. A partir de este corrimiento Doppler se deduce que la velocidad de alejamiento de la galaxia es de unos 21,000 km/s.

Obtención del efecto Doppler relativista

En seguida vamos a examinar el origen de la ecuación 39-20 referente al efecto Doppler relativista y por qué difiere de las ecuaciones 39-18 y 39-19. La figura 39-29*a* contiene un observador S' que transporta una fuente de ondas electromagnéticas. Esta fuente emite una serie de N frentes de onda. El observador S se halla en movimiento respecto a S' con una velocidad $\vec{u}$. En el instante presentado en la figura 39-29*a*, el primer frente de onda acaba de llegar a la posición actual de S. Desde el punto de vista de S', la distancia recorrida por el frente es $c\,\Delta t_0$. Utilizamos el subíndice 0 para destacar que el intervalo Δt_0 es el *tiempo propio;* como se definió en el capítulo 20, el intervalo de tiempo propio es aquel en que los eventos que marcan el inicio y el final del intervalo ocurren en el mismo sitio. S' mide el intervalo Δt_0 como el tiempo transcurrido entre la emisión del primer frente de onda y el frente *enésimo*, que aparece en el mismo lugar dentro del marco de referencia de S'.

De acuerdo con S', la longitud de onda λ' es la distancia total que ocupan los N frentes de onda, dividida entre el número de estos frentes de onda, o sea

$$\lambda' = \frac{c\,\Delta t_0}{N}. \tag{39-25}$$

La frecuencia y la longitud de onda están relacionadas por medio de $c = \lambda' f_0$; así que

$$f_0 = \frac{c}{\lambda'} = \frac{N}{\Delta t_0}. \tag{39-26}$$

Examinemos ahora la misma situación desde el punto de vista del observador S, en la cual S' es quien está en movimiento con una velocidad $-\vec{\mathbf{u}}$, como se aprecia en la figura 39-29*b*. Para S, el primer frente de onda se dirige del sitio de S' al lugar (fijo) de S en un tiempo Δt, y recorre una distancia $c\,\Delta t$. En ese mismo intervalo, S' se mueve una distancia $u\,\Delta t$. (Nótese que Δt *no* es el intervalo de tiempo propio para S, quien observa el primer frente de onda que se emite cuando la fuente está en un lugar y el último frente de onda que se origina en dicha fuente cuando se encuentra en otro sitio.

Desde el punto de vista de S, los N frentes de onda ocupan una distancia de $u\,\Delta t + c\,\Delta t$ y, por lo mismo, la longitud de onda λ es

$$\lambda = \frac{u\,\Delta t + c\,\Delta t}{N}. \tag{39-27}$$

Con $f = c/\lambda$ y $N = f_0\,\Delta t_0$ a partir de la ecuación 39-26, tenemos

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{cN}{u\,\Delta t + c\,\Delta t} = f_0\,\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\,\frac{1}{1 + u/c}. \tag{39-28}$$

La relación entre el intervalo de tiempo propio Δt_0 y el intervalo (más largo) Δt está dada por la fórmula de dilatación del tiempo, ecuación 20-3: $\Delta t = \Delta t_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}$; por consiguiente,

$$f = f_0\,\frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + u/c} = f_0\,\frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \tag{39-29}$$

expresión idéntica a la ecuación 39-20.

¿Por qué el procedimiento anterior para las ondas luminosas da un resultado diferente a los obtenidos con las ondas clásicas (sonoras)? En las ecuaciones 39-26 y 39-28, hemos empleado $c = \lambda' f_0$ y $c = \lambda f$; esto significa que los observadores S' y S miden la misma velocidad de las ondas luminosas. Esto lo exige el segundo principio de la relatividad: la velocidad de la luz en el espacio vacío posee el mismo valor para todos los observadores, sin que importe cuál es su movimiento relativo. Sin embargo, tratándose de las ondas sonoras, la velocidad ondulatoria relativa al medio que las transporta varía para los observadores que se desplazan con distinta velocidad.

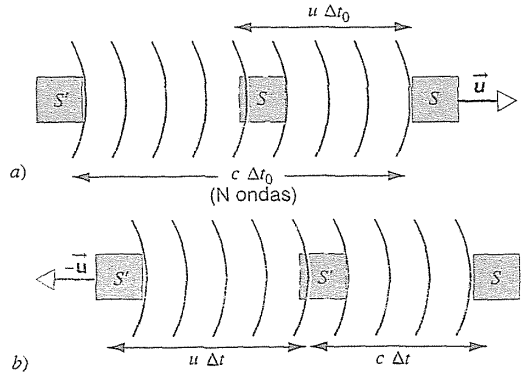


FIGURA 39-29. *a*) Fuente de ondas luminosas en el marco de referencia S' emite N frentes de onda. La figura muestra el instante en que el primer frente llega a S, que se desplaza con la velocidad $\vec{\mathbf{u}}$. *b*) La misma situación vista desde el marco de referencia de S.

El efecto Doppler transversal

Hemos obtenido la ecuación 39-29 para el caso especial en que el movimiento relativo de S y de S' se realiza a lo largo de la línea que los conecta. En términos generales, la velocidad $\vec{\mathbf{u}}$ podría encontrarse en algún ángulo θ relativo a esta línea. En el primer término de la ecuación 39-29, el numerador se origina en el factor de dilatación del tiempo y depende sólo de la magnitud de $\vec{\mathbf{u}}$, y no de la dirección relativa del movimiento. No obstante, el denominador contiene al componente de $\vec{\mathbf{u}}$ a lo largo de la línea que conecta S y S', de modo que la distancia $u\,\Delta t$ en la figura 39-29*b* y en la ecuación 39-28 sería $(u \cos\theta)\,\Delta t$. En conclusión, la ecuación 39-29 queda así

$$f = f_0\,\frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + (u/c)\cos\theta}. \tag{39-30}$$

En el caso especial en que $\theta = 90°$, la ecuación 39-30 es

$$f = f_0\sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{39-31}$$

La ecuación 39-31 describe el *efecto Doppler transversal*, que se aplica cuando la fuente o el observador se mueve transversal o perpendicularmente a la línea que los conecta. El efecto Doppler clásico aplicado a las ondas sonoras no cuenta con un término transversal: no se modifica la frecuencia si la fuente sonora o el observador se mueve transversalmente. El efecto Doppler transversal es un efecto relativista en su totalidad, sin su complemento clásico. En 1963 Walter Kundig logró una confirmación elegante y sensible del efecto Doppler transversal en los rayos gamma: utilizó una fuente de rayos gamma en el centro de un rotor centrífugo y un detector en el borde. Un resumen de sus resultados se incluye en la figura 39-30.

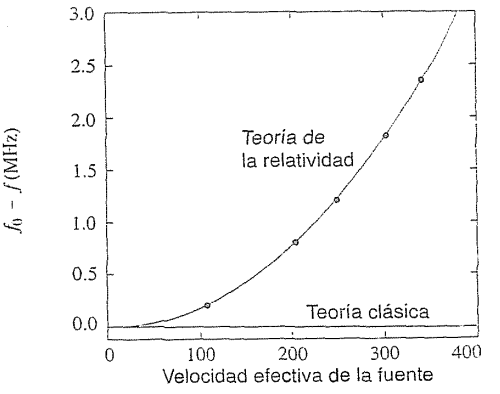


FIGURA 39-30. Los resultados del experimento de Kundig (con los puntos de datos indicados por los puntos negros) referentes al efecto *Doppler transversal coinciden* con la teoría de la relatividad (Ec. 39-16) y discrepan con la teoría clásica, la cual predice la ausencia del efecto.

PROBLEMA RESUELTO 39-9. Un satélite terrestre gira de este a oeste a una altitud de $h = 153$ km en una órbita circular arriba del ecuador (Fig. 39-31). Un barco de localización se encuentra en el ecuador en el meridiano primero a una longitud de 0° (en la costa occidental de África). El satélite emite ondas de radio con una frecuencia de 122.450 Mhz. ¿A qué frecuencia debería el barco sintonizar su receptor cuando el satélite se halla *a)* directamente arriba, *b)* a una longitud de 10° al oeste del barco y *c)* a una longitud de 10° al este de él?

Solución *a)* Suponemos que el marco S' se desplaza junto con el satélite en el instante en que se encuentra arriba del barco; el marco S es el del barco. La frecuencia f_0 observada en el marco S' (el satélite) es 122.450 Mhz. La velocidad relativa u entre los marcos se debe a la rapidez orbital del satélite a una altitud h o a un radio $R = R_E + h$, donde R_E es el radio de la Tierra. La aceleración gravitacional en el radio R es MG/R^2, que debe imprimir la aceleración centrípeta u^2/R necesaria para una órbita circular. Por tanto, $MG/R^2 = u^2/R$, o sea

$$u = \sqrt{\frac{MG}{R}} = \sqrt{\frac{MG}{R_E + h}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)}{6370\ \text{km} + 153\ \text{km}}}$$

$$= 7.82 \times 10^3\ \text{m/s} = 2.61 \times 10^{-5}c.$$

Cuando el satélite se encuentra exactamente arriba del barco, el corrimiento Doppler se calcula mediante la ecuación 39-30 con $\theta = 90°$:

$$f = f_0\sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

Con $u/c = 2.61 \times 10^{-5}$, tenemos $u^2/c^2 = 6.8 \times 10^{-10}$. La magnitud bajo el radical difiere de 1 apenas por unas cuantas partes 10^{10}; así que con la precisión deseada

$$f \approx f_0 = 122.450\ \text{MHz}.$$

b) Cuando el satélite no está arriba del barco, hay que calcular el ángulo θ entre la velocidad del satélite y la línea directa del barco localizador (Fig. 39-31). Trazamos la línea BD perpendicular a AC $(= R_E + h)$. Entonces, como el ángulo $ABD = \theta$, tenemos $\cot\theta = BD/AD$, donde $BD = R_E \operatorname{sen}\phi$ y $AD = AC - CD = R_E + h - R_E\cos\phi$. Por tanto,

$$\cot\theta = \frac{R_E \operatorname{sen}\phi}{h + R_E(1 - \cos\phi)}$$

$$= \frac{(6370\ \text{km})(\operatorname{sen} 10°)}{153\ \text{km} + (6370\ \text{km})(1 - \cos 10°)} = 4.428,$$

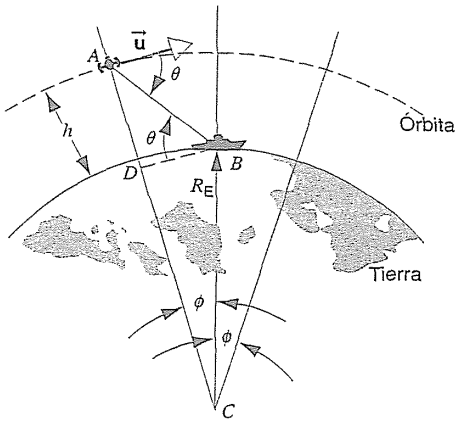


FIGURA 39-31. Problema resuelto 39-9. Un satélite se encuentra en órbita circular a una altitud h sobre la superficie terrestre. Una nave en la superficie observa las señales emitidas por el satélite.

o bien

$$\theta = \cot^{-1} 4.428 = 12.7°.$$

Ahora con la ecuación 39-30 podemos obtener la frecuencia, usando el resultado de la parte *a)* de que el factor de raíz cuadrada es casi 1 y sustituyendo $-u$ por u, porque el satélite se aproxima al barco:

$$f \approx \frac{f_0}{1 - (u/c)\cos\theta} = \frac{122.450\ \text{MHz}}{1 - (2.61 \times 10^{-5})(\cos 12.7°)}.$$

$$= 122.453\ \text{MHz}.$$

c) Una vez que el satélite pasa arriba del barco, su movimiento se aleja del observador y la ecuación 39-15 da

$$f \approx \frac{f_0}{1 + (u/c)\cos\theta} = \frac{122.450\ \text{MHz}}{1 + (2.61 \times 10^{-5})(\cos 12.7°)}$$

$$= 122.447\ \text{MHz}.$$

Vemos que la frecuencia detectada en la Tierra fluctúa entre 122.453 Mhz (cuando el satélite se acerca), 122.450 Mhz (cuando está arriba del barco) y 122.447 Mhz (cuando se aleja). Así pues, una medición de la frecuencia del corrimiento Doppler es suficiente para localizar al satélite.

OPCIÓN MÚLTIPLE

39-1 El espectro electromagnético

39-2 Luz visible

1. ¿Cuál color de la luz recibe una absorción *mínima* en las plantas?
   A) El rojo B) El amarillo C) El azul D) El violeta

39-3 La velocidad de la luz

2. La velocidad de la luz en el agua es menor que en el aire. ¿Qué cambia cuando un rayo de luz roja, $\lambda = 650$ nm, pasa del aire al agua?
   A) La frecuencia B) La longitud de onda
   C) El color D) A y B
   E) A, B y C

3. ¿En cuál de los siguientes tipos de sustancias podría la velocidad de la luz ser mayor que c?
   A) Dieléctrico B) Diamagnético
   C) Paramagnético D) Ferromagnético
   E) Ninguno de los anteriores

4. Basándose en lo estudiado en la sección 39-3, ¿esperaría que la luz roja se moviera con mayor o menor rapidez a través de una sustancia que la luz azul?
   A) La luz roja se movería más rápidamente.
   B) La luz azul se movería más rápidamente.
   C) Las dos se mueven con la misma rapidez, pues el color es una designación psicológica.
   D) La respuesta depende de la sustancia.

39-4 Reflexión y refracción de las ondas luminosas

5. Un rayo de luz choca contra un reflector de esquina como se aprecia en la figura 39-13. Al aumentar el ángulo de incidencia θ, el ángulo existente entre el rayo reflejado final y el rayo incidente
   A) aumenta B) disminuye
   C) permanece inalterado
   D) La pregunta no puede contestarse sin calcular individualmente cada ángulo incidente.

6. Un rayo de luz choca contra uno de dos espejos que se encuentran en un ángulo de 60°, como se ve en la figura 39-32. Al ir creciendo el ángulo de incidencia θ, el ángulo existente entre el rayo final reflejado y el rayo incidente
   A) aumenta B) disminuye C) no se altera
   D) La pregunta no puede contestarse sin calcular individualmente cada ángulo incidente.

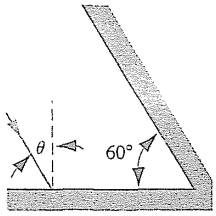


FIGURA 39-32. Pregunta de opción múltiple 6.

7. Una rayo de luz brilla en dos espejos que se encuentran en un ángulo α (medido en radianes). ¿Cuál es una estimación razonable del número máximo de veces que la luz rebotará contra ellos antes de salir?
   A) $2\pi/\alpha$ B) π/α C) $\sqrt{\pi/\alpha}$ D) $\sqrt{\pi/\alpha}$

8. Un rayo de luz incide en la frontera entre dos sustancias, como se muestra en la figura 39-33. Las sustancias tienen distintos índices de refracción. ¿Cuál rayo saliente *no* podría producirse a partir del rayo incidente?

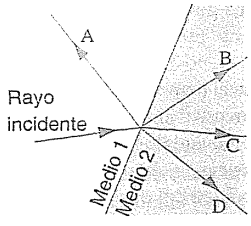


FIGURA 39-33. Pregunta de opción múltiple 8.

9. Un rayo de luz incide en la frontera entre dos sustancias como se aprecia en la figura 39-34. Las sustancias tienen distinto índices de refracción. ¿Cuál rayo incidente *no* podría haberlo producido?

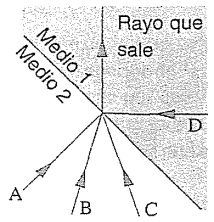


FIGURA 39-34. Pregunta de opción múltiple 9.

10. El ángulo de incidencia de un rayo luminoso es $\theta_i = 20°$, y el de refracción es $\theta_t > 20°$.
   a) Si el ángulo de incidencia disminuye 10°, el ángulo de refracción
   A) también disminuirá 10°
   B) disminuirá más de 10°
   C) disminuirá menos de 10°
   D) La pregunta no puede contestarse sin más información.
   b) Si cambiáramos el ángulo de incidencia de modo que el de refracción se duplicase, entonces el ángulo de incidencia
   A) también debe haberse duplicado
   B) será más del doble
   C) será menos del doble
   D) La pregunta no puede contestarse sin más información.

39-5 Reflexión interna total

11. La luz que se desplaza por tres sustancias transparentes sigue la trayectoria mostrada en la figura 39-35. Ordene los índices de refracción del más pequeño al más grande. Nótese que la reflexión interna total *sí* tiene lugar en la superficie del fondo del medio 2.
   A) $n_1 < n_2 < n_3$ B) $n_2 < n_1 < n_3$
   C) $n_1 < n_3 < n_2$ D) $n_3 < n_1 < n_2$

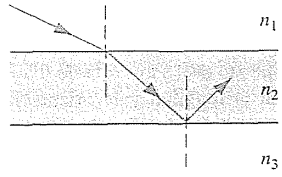


FIGURA 39-35. Pregunta de opción múltiple 11.

12. La luz incide en un bloque de vidrio como se indica en la figura 39-36. θ_1 aumenta un poco. ¿Qué sucede con θ_2?
    A) θ_2 también aumenta un poco
    B) θ_2 permanece inalterado
    C) θ_2 disminuye un poco
    D) θ_2 cambia repentinamente, pues el rayo experimenta una reflexión interna total

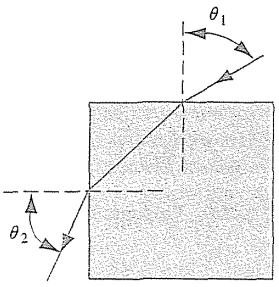


FIGURA 39-36. Pregunta de opción múltiple 12.

13. Una lámpara está sumergida en el agua. La luz viaja hacia afuera en todas direcciones, pero sólo una parte de ella escapa de la superficie del agua. (Compare esto con la figura 39-21.) ¿Qué sucede con la fracción f de luz que escapa de la superficie del agua a medida que la lámpara baja más en el agua?
    A) f aumenta
    B) f disminuye
    C) f no se altera
    D) La respuesta depende del índice de refracción del agua.

14. Se observa que un rayo de luz sale de una frontera entre dos sustancias, como se indica en el figura 39-37. La sustancia tiene varios índices de refracción. ¿Cuál rayo incidente podría *no* haber producido el rayo saliente?

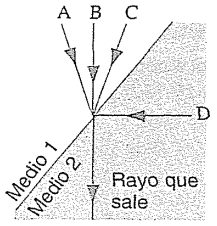


FIGURA 39-37. Pregunta de opción múltiple 14.

39-6 El efecto Doppler de la luz

15. Se aleja usted de la Tierra a una velocidad v y se da cuenta de que una señal de radio proveniente de ella pasa de 96 a 48 Mhz por el corrimiento Doppler. Se da la vuelta y se dirige hacia la Tierra con la misma velocidad. ¿Cuál será ahora la frecuencia de desplazamiento de la señal?
    A) Mayor que 192 MHz
    B) Igual a 192 MHz
    C) Menor que 192 Mhz.

PREGUNTAS

1. Las ondas electromagnéticas nos llegan desde muy lejos del espacio. Con la información que contienen, ¿podemos conocer el aspecto actual que presenta el universo?, ¿o en algún momento del pasado?
2. Si en un examen le preguntaran qué parte del espectro electromagnético se encuentra en el intervalo visible, ¿qué contestaría?
3. Mencione varios aspectos en que las ondas de radio se distinguen de las ondas luminosas visibles. ¿En qué aspectos son iguales?
4. ¿Cómo caracterizaría la radiación electromagnética que tiene una frecuencia de 10 kHz? ¿De 10^{20} Hz? ¿Y una longitud de onda de 500 nm? ¿O de 10 km? ¿O de 0.50 nm?
5. ¿Qué determina la longitud y la orientación adecuadas de la antena de televisor "orejas de conejo"?
6. ¿Cómo cocina comida un horno de microondas? ¿Puede hervir agua en una bolsa de plástico con él? ¿Cómo ocurre eso?
7. ¿De qué manera podría medirse una curva de sensibilidad del ojo como la de la figura 39-6?
8. ¿Por qué las señales de peligro están en rojo, cuando el ojo es más sensible al amarillo-verde?
9. En relación con la figura 39-6, *a*) ¿cree posible que la longitud de onda de la sensibilidad máxima podría variar si cambiara la intensidad de la luz? *b*) ¿Qué aspecto podría tener la curva de la figura 39-6 para un grupo de daltónicos que no distinguieran, por ejemplo, entre el rojo y el verde?
10. Suponga que el ojo humano fuera insensible a la luz visible, pero muy sensible a la luz infrarroja. ¿Qué cambios ambientales se necesitarían si usted tuviera que *a*) caminar por un largo corredor y *b*) conducir un automóvil? ¿Existiría el fenómeno del color? ¿Qué modificaciones habría que hacer a los semáforos?
11. ¿Qué característica de la luz corresponde a la sonoridad?
12. ¿Cómo pudo Galileo haber probado experimentalmente que los tiempos de reacción son una fuente potentísima de error cuando intentó medir la velocidad de la luz, como se describe en la sección 39-3?
13. ¿Se le ocurre una observación "ordinaria" (es decir, sin aparato experimental) que demuestre que la velocidad de la luz no es infinita? Piense en los relámpagos, en las posibles discrepancias entre el tiempo predicho de la salida del sol y el tiempo observado, en las comunicaciones de radio entre la Tierra y los astronautas en naves que giran, etc.
14. Comente la siguiente afirmación: en virtud de la forma en que se define el metro, ya no es posible medir la velocidad de la luz.
15. Se ha dicho que con el tiempo la velocidad de la luz puede cambiar un poco. ¿Encuentra usted alguna prueba de esto en la figura 39-1?
16. En el vacío, ¿la velocidad de la luz depende de *a*) la longitud de onda, *b*) la frecuencia, *c*) la intensidad, *d*) la velocidad de la fuente o *e*) la velocidad del observador?.
17. Describa cómo sería su ambiente inmediato si todos los objetos absorbieran por completo la luz. ¿Podría ver algo si estuviera

sentado en una silla en un cuarto? Si un gato entrara, ¿podría verlo?

18. ¿Se le ocurre una prueba u observación simples para probar que la ley de la reflexión es igual con todas las longitudes de onda, en condiciones donde predomine la óptica geométrica?
19. Una lámpara de la calle, vista por reflexión a través de un depósito de agua donde hay ondulaciones, aparece muy alargada en la línea de visión, pero no a los lados. Explique el fenómeno.
20. Las transmisiones de onda corta originadas en Europa se escuchan en Estados Unidos, a pesar de que la trayectoria no es una línea recta. Explique por qué.
21. El tiempo de recorrido de las señales desde los satélites hasta las estaciones terrestres varía con su frecuencia. ¿Por qué?
22. ¿En qué porcentaje la velocidad de luz azul en el cuarzo fusionado difiere de la velocidad de la luz roja?
23. ¿Cómo puede determinar los índices de refracción de los medios de la tabla 39-3 en relación con el agua, con los datos que se incluyen en ella?
24. ¿Esperaría usted que las ondas sonoras obedezcan las leyes de la reflexión y de la refracción? Por medio del principio de Huygens, explique la propagación de las ondas esféricas y cilíndricas. ¿Se aplica a las ondas sonoras en el aire?
25. Si el principio de Huygens predice las leyes de la reflexión y de la refracción, ¿por qué es necesario o conveniente ver la luz como una onda electromagnética, con la complejidad asociada?
26. Se ensancha un haz luminoso al penetrar en el agua. Explique su respuesta.
27. ¿Es correcto decir que no existe interacción entre la luz visible y el medio transparente por donde pasa?
28. ¿Cómo afecta la refracción atmosférica al tiempo de puesta del Sol?
29. Las estrellas parpadean, no así los planetas. ¿Por qué?
30. Explique por qué el extremo lejano de una alberca llena a una profundidad uniforme parece estar menos profundo que el que se halla cerca del observador en su borde.
31. Es un hermoso día soleado y usted quiere crear un arco iris en su patio utilizando una manguera de jardín. Describa con todo detalle cómo lo haría. A propósito, ¿por que no puede caminar debajo o ir al extremo de un arco iris?
32. ¿Es posible, usando uno o más prismas, recombinar en la luz blanca el espectro de colores que se forma cuando esta luz blanca pasa por un solo prisma? Si la respuesta es afirmativa, explique cómo.
33. Describa y explique lo que ve un pez cuando dirige la vista en varias direcciones arriba de su horizonte.
34. ¿Por qué un diamante "brilla" más que una imitación de vidrio cortado al mismo tamaño?
35. ¿Es verosímil que una longitud de onda de luz cambie al pasar del aire al vidrio, no así su frecuencia? Explique su contestación.
36. En la reflexión y en la refracción, ¿por qué los rayos reflejados y refractados se hallan en el plano definido por el rayo incidente y normal a la superficie? ¿Se le ocurren algunas excepciones?
37. Diseñe un periscopio aprovechando la reflexión interna total. ¿Cuáles son las ventajas en comparación con los espejos plateados?
38. ¿Qué características debe reunir un material a fin de servir de "tubo eficiente de luz"?
39. Una pasta dental tiene un mango rojo de plástico con hileras de cerdas de nailon. La parte superior de las cerdas (no sus lados) aparece de color rojo. Explique por qué.
40. ¿Por qué las fibras ópticas son portadores más eficaces de información que, por ejemplo, las microondas o los cables? Reflexione sobre las frecuencias en cuestión.
41. ¿Es el efecto Doppler simplemente un efecto de dilatación del tiempo y nada más o hay algo más en él?
42. Un miembro de un sistema binario de estrellas emite luz visible. Demuestre en una gráfica simple cómo varía con el tiempo el corrimiento de frecuencia Doppler en la Tierra.
43. ¿Puede una galaxia estar tan distante que su velocidad de retroceso sea igual a c? De ser así, ¿cómo podemos verla? Es decir, ¿llegará algún día su luz a nosotros?
44. Los rayos gamma son radiación electromagnética emitida de los núcleos radiactivos. En el espacio libre, ¿se desplazan con la misma rapidez que la luz visible? ¿Depende su velocidad de la del núcleo que los emite?
45. Quizá la observación astronómica más simple que puede hacerse es la siguiente: el cielo se pone rojo cuando el Sol se oculta. Esto es verdad y parece obvio, pero podemos afirmar que no debería ser así. Reflexione: "Suponiendo un universo infinito, poblado uniformemente por estrellas más o menos como nuestro Sol, podríamos decir que una línea recta proyectada desde el observador en cualquier dirección terminará por chocar contra una estrella. La distancia R de la mayoría de estas estrellas será muy grande efectivamente y, por lo mismo, las estrellas iluminan al observador con muy poca intensidad: la iluminación varía como $1/R^2$. Por otra parte, el número de estrellas lejanas situadas en una capa esférica cuyos radios son R y $R + dR$ aumenta como R^2 (suponiendo que dR sea constante). ¿Puede probar esta última aseveración? Los dos efectos parecen cancelarse exactamente. Así pues, el cielo nocturno debería tener una brillantez prácticamente infinita, pues una infinitad de soles iluminarían al observador". ¿Tiene alguna falla este razonamiento (llamado generalmente la paradoja de Olber)? Imagine la velocidad infinita de la luz, la gran escala del universo, el cosmos en expansión y el corrimiento rojo asociado, la vida infinita de las estrellas, etc. (Consúltese en "The Dark Sky Paradox" de E. R. Harrison, *American Journal of Physics*, febrero de 1977, p. 119, una excelente reseña histórica y una explicación reveladora.)

EJERCICIOS

39-1 El espectro electromagnético

1. Demuestre que las marcas de frecuencia y de longitud de onda en la figura 39-1 satisfacen la relación $f\lambda = c$.
2. El Proyecto Seafarer fue un programa muy ambicioso cuyo fin era construir una antena enorme, que se colocaría en un sitio subterráneo de unos 4000 pies cuadrados de superficie. Su finalidad era transmitir señales a los submarinos mientras estaban sumergidos en lo profundo del mar. Si la longitud efectiva de onda era 1.0×10^4 radios terrestres, ¿cuáles serían *a*) la frecuencia y *b*) el periodo de las radiaciones emitidas? Las radiaciones electro-

magnéticas rara vez penetran en lo profundo de conductores como el agua de mar. ¿Se le ocurre una razón por la cual las radiaciones de frecuencia extremadamente baja) deberían penetrar con mayor eficacia? Piense en el caso límite de la frecuencia cero. (¿Por qué no transmitir señales a una frecuencia cero?

3. *a)* Es 0.067 fm la longitud de onda de los rayos x más intensos producidos cuando los electrones se aceleran a 30 GeV en el Stanford Linear Accelerator chocan contra un blanco sólido. ¿Cuál es la frecuencia de estos rayos x? *b)* Una onda de radio de muy baja frecuencia tiene una frecuencia apenas de 30 Hz. ¿Cuál es su longitud de onda?
4. La radiación emitida de cierto láser HeNe, aunque centrada en 632.8 nm. tiene un "ancho finito de línea" de 0.010 nm. Calcule el ancho de línea en unidades de frecuencia.

39-2 Luz visible

5. *a)* ¿Con qué longitudes de onda el ojo de un observador común tiene la mitad de su sensibilidad máxima? *b)* ¿Cuáles son la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de la luz a que el ojo humano es más sensible?
6. ¿Cuántas vibraciones completas están contenidas en el tren de ondas luminosos de 520 nm de longitud, emitidas por un láser durante un tiempo de 430 ps?

39-3 La velocidad de la luz

7. *a)* Suponga que pudiésemos establecer comunicaciones de radio con habitantes hipotéticos de un planeta también hipotético que gira alrededor de nuestra estrella más cercana, α Centauri, que está a 4.34 años-luz de nosotros. ¿Cuánta tardaría en recibir la respuesta a un mensaje? *b)* Repita el ejercicio con la Gran Nebulosa de Andrómeda, uno de nuestros vecinos extragalácticos más cercanos, pero a una distancia de 2.2×10^6 años-luz. ¿A qué conclusión nos llevan las consideraciones anteriores respecto a la naturaleza de una posible comunicación con civilizaciones extraterrestres?
8. *a)* ¿Cuánto tarda una señal de radio en recorrer 150 km desde una antena transmisora hasta una antena receptora? *b)* Vemos la luna llena por la luz reflejada. ¿Cuánto tiempo antes la luz que llega a nuestros ojos sale del Sol? *c)* ¿Cuánto tiempo tarda la luz en realizar el viaje de ida y vuelta entre la Tierra y una nave espacial que gira alrededor de Saturno, a una distancia de 1.3×10^9 km? *d)* Se cree que la Nebulosa Cangrejo, que está a una distancia aproximada de 6500 años-luz, es resultado de la explosión de una supernova registrada por los astrónomos chinos en 1054. ¿Más o menos en qué año se produjo la explosión?
9. La incertidumbre de la distancia de la Luna, medida por la reflexión de una luz láser proveniente de reflectores colocados en ella por los astronautas de Apolo 11, mide unos 2 cm. Esta incertidumbre se relaciona con la medición del tiempo transcurrido; ¿qué incertidumbre presenta este tiempo?

39-4 Reflexión y refracción de las ondas luminosas

10. Un reflector de esquina, que se utiliza ampliamente en la óptica, en microondas y en otras aplicaciones, consta de tres espejos planos sujetados en la esquina de un cubo. Tiene la propiedad de que un rayo incidente es retornado, luego de tres reflexiones, con su dirección exactamente invertida. Pruebe este resultado.
11. Por medio del principio de Fermat, pruebe que el rayo reflejado, el rayo incidente y la normal se hallan en el mismo plano.
12. Un extremo de un palo se arrastra por el agua con una velocidad v mayor que la velocidad u de las ondas de agua. Aplíqueles la construcción de Huygens y demuestre que se crea un frente de onda cónico y que su medio ángulo α está dado por

$$\text{sen } \alpha = u/v.$$

Esto se conoce como la onda de arco de un barco o la onda de choque causada por un objeto que se desplaza por el aire con una velocidad mayor que la del sonido, como se advierte en la figura 19-16.

13. En la figura 39-38 calcule los ángulos *a)* θ_1 y *b)* θ_2.

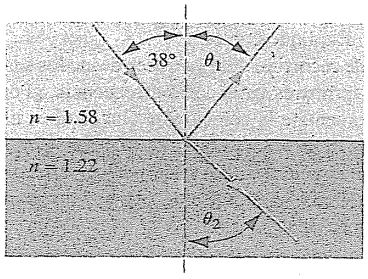


FIGURA 39-38. Ejercicio 13.

14. La luz en el vacío incide en la superficie de una lámina de vidrio. En el vacío el haz forma un ángulo de 32.5° con la normal a la superficie, mientras en el vidrio forma un ángulo de 21.0° con la normal. Determine el índice de refracción del vidrio.
15. En cierto líquido la velocidad de la luz amarilla de sodio se mide y se descubre que es 1.92×10^8 m/s. Encuentre el índice de refracción de este líquido respecto al aire en el caso de la luz de sodio.
16. Calcule en cuarzo fundido la velocidad de la luz con una longitud de onda de 550 nm (Fig. 39-11).
17. Cuando un electrón se mueve por un medio con una velocidad superior a la de la luz en ese medio, irradia ondas electromagnéticas (el efecto Cerenkov). Para poder irradiar ¿qué velocidad mínima debe tener un electrón en un líquido cuyo índice de refracción es 1.54?
18. Un rayo láser se desplaza a lo largo del eje de una sección recta de tubo con 1.61 km de longitud. El tubo normalmente contiene aire a temperatura y presión estándares, pero también puede vaciarse. ¿En qué caso el tiempo de recorrido del haz sería mayor y por cuánto?
19. Cuando el tanque metálico rectangular de la figura 39-39 se llena hasta el borde con un líquido desconocido, un observador con los ojos al mismo nivel que el borde tan sólo ve el rincón E. Determine el índice de refracción del líquido.

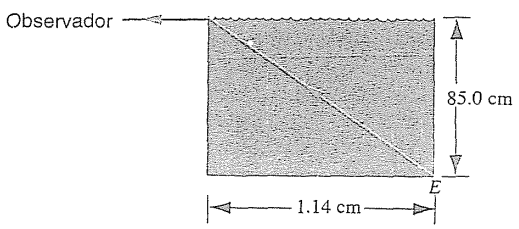


FIGURA 39-39. Ejercicio 19.

20. Un rayo de luz pasa por un prisma equilátero en la posición de la desviación mínima. La desviación total es 37°. ¿Cuál es el índice de refracción del prisma? (Problema resuelto 39-4).

21. En la figura 39-14 (Problema resuelto 39-4) demuestre por trazado gráfico de los rayos y utilizando un transportador, que si θ el ángulo del rayo incidente aumenta o disminuye, el ángulo de desviación ψ aumenta.
22. La luz proveniente de un láser entra en un bloque de vidrio en A y sale en B (Fig. 39-40). El bloque tiene una longitud L = 54.7 cm y un índice de refracción n = 1.63. El ángulo de incidencia es $\theta = 24.0°$. Calcule el tiempo necesario para que la luz pase por el bloque.

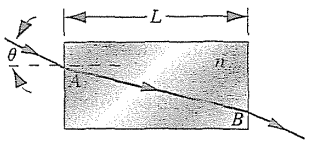


FIGURA 39-40. Ejercicio 22.

23. Debajo de la superficie de agua de un lago, un buzo levanta la vista a 27° de la vertical para ver un salvavidas que flota en la superficie. En el centro se ve la parte superior de un tubo de escape que mide 98 m de altura. ¿A qué distancia del salvavidas está la base del tubo?
24. Un poste vertical de 200 cm de largo y con peso en la base se extiende desde el fondo de una alberca hasta un punto situado a 64 cm arriba del agua. La luz solar incide a 55° arriba del horizonte. Calcule la longitud de la sombra del poste en el fondo a nivel de la alberca.
25. Una moneda se encuentra en el fondo de una alberca con una profundidad d y un índice de refracción n, como se muestra en la figura 39-41. Demuestre que los rayos luminosos cercanos a la normal dan la impresión de originarse en un punto $d_{app} = d/n$ por debajo de la superficie. Esta distancia es la profundidad aparente de la alberca.

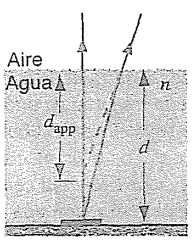


FIGURA 39-41. Ejercicio 25.

26. Un prisma de vidrio con un ángulo ápice de 60° tiene n = 1.60. *a)* ¿Cuál es el ángulo más pequeño de incidencia en que un rayo puede entrar por una cara del prisma y salir por la otra? *b)* ¿Cuál ángulo de incidencia se requeriría para que un rayo cruce el prisma simétricamente? Consulte el problema resuelto 39-4.
27. Una capa de agua (n = 1.33) de 20 mm de espesor flota en una capa de tetracloruro de carbono (n = 1.46) de 41 mm de espesor. ¿A qué profundidad de la superficie del agua parece estar el fondo del tanque, vista en la incidencia normal cercana?
28. La profundidad aparente de una alberca depende del ángulo de visión. Supóngase que deposita una moneda en el fondo de una alberca llena con agua (n = 1.33) hasta una profundidad de 2.16 m. Determine la profundidad de la moneda debajo de la superficie cuando se ve *a)* en una incidencia normal cercana y *b)* mediante los rayos que salen de la moneda y forman un ángulo de 35.0° con la normal al fondo (Ejercicio 25).
29. En el vacío la luz de 612 nm de longitud de onda se desplaza 1.57 pm en un medio de 1.51 de índice de refracción. Encuentre *a)* la longitud de onda en el medio, *b)* la longitud de la trayectoria óptica y *c)* la diferencia de fase después de recorrer esa distancia respecto a la luz que se desplaza en el vacío.
30. En el aire la longitud de onda de la luz amarilla de sodio es de 589 nm. *a)* ¿Cuál es su frecuencia? *b)* ¿Cuál es su longitud de onda en un vidrio cuyo índice de refracción es 1.53? *c)* Con los resultados de *a)* y *b)* determine la velocidad en este vidrio.
31. Pruebe que la longitud de trayectoria óptica de la reflexión y de la refracción en las figuras 39-17 y 39-19 es mínima en comparación con otras trayectorias cercanas que conectan esos dos mismos puntos. (Sugerencia: examine la magnitud d^2L/dx^2).

39-5 Reflexión interna total

32. Un rayo de luz incide normalmente en la cara *ab* de un prisma de vidrio (n = 1.52), como se observa en la figura 39-42. *a)* Suponiendo que el prisma esté inmerso en el aire, obtenga el valor máximo del ángulo ϕ, de modo que el rayo se refleje totalmente en la cara *ac*. *b)* Determine ϕ si el prisma está sumergido en agua.

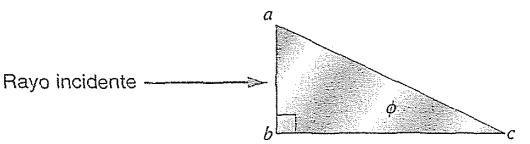


FIGURA 39-42. Ejercicio 32.

33. Dos materiales, A y B, tienen índices de refracción de 1.667 y 1.586, respectivamente. *a)* Encuentre el ángulo crítico de la reflexión interna total en una interfaz entre los dos materiales. *b)* ¿En qué dirección debe un rayo incidente propagarse para que se refleje totalmente?
34. Un pescado se encuentra a 1.8 m debajo de la superficie en un lago tranquilo. ¿A qué ángulo arriba de la horizontal debe ver para mirar la luz proveniente de una pequeña hoguera en la orilla del agua, situada a 92 m de distancia?
35. Una fuente puntual de luz se halla a 82.0 cm debajo de la superficie de un depósito de agua. Obtenga el diámetro del círculo más grande en la superficie por donde la luz sale del agua.
36. Un rayo luminoso incide sobre una lámina cuadrada de vidrio, según se observa en la figura 39-43. ¿Cuál debe ser el índice mínimo de refracción del vidrio, si la reflexión interna total ocurre en la cara vertical?

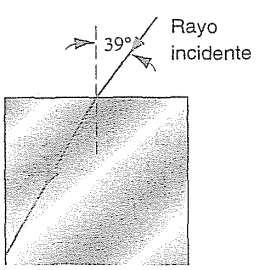


FIGURA 39-42. Ejercicio 36.

37. Una onda plana de luz blanca que se desplaza por un cuarzo fundido choca contra una superficie plana también de cuarzo, formando un ángulo de incidencia θ. ¿Es posible que un haz

internamente reflejado aparezca *a*) azulado o *b*) rojizo? *c*) ¿Aproximadamente qué valor de θ debe utilizarse? (Sugerencia: la luz blanca aparecerá azulada si se suprimen las longitudes de onda correspondientes al rojo.)

38. Un cubo de vidrio tiene una pequeña mancha en su centro. *a*) ¿Qué partes de su cara han de cubrirse para evitar que la mancha sea vista, sin importar la dirección de la vista? *b*) ¿Qué fracción de la superficie del cubo ha de cubrirse de esa manera? Suponga un borde de cubo de lado 12.6 mm y un índice de refracción de 1.52. (No tenga el cuenta el comportamiento subsecuente de un rayo de reflexión interna.)

39-6 El efecto Doppler de la luz

39. Demuestre que, en una línea de 21.1 cm que emplean tanto los astrónomos de radio, un corrimiento de frecuencia Doppler en kHz puede convertirse en una velocidad radial de km/s con sólo multiplicar por 0.211, a condición de que $u << c$.

40. Demuestre que con velocidades $u << c$, el corrimiento Doppler puede escribirse en forma aproximada

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u}{c},$$

donde $\Delta\lambda$ es el cambio de longitud de onda.

41. Una nave espacial propulsada por cohetes se aleja de la Tierra con una velocidad de $0.20c$. Una luz suya aparece azul a los pasajeros. ¿Qué color deberá recibir un observador situado en la Tierra? (Fig. 39-6).

42. Una nave espacial, que se aleja de la Tierra con una velocidad de $0.892c$, se comunica con ella transmitiendo a una frecuencia de 100 Mhz (medidos dentro de la nave). ¿A qué frecuencia deben sintonizarse los receptores terrestres para recibir esas señales?

43. En el espectro del quasar 3C9 aparecen algunas de las conocidas líneas de hidrógeno, pero se modifican tanto hacia el rojo que su longitud de onda es tres veces mayor que la observada en la luz emitida de los átomos de hidrógeno en reposo en un laboratorio. *a*) Demuestre que la ecuación clásica de Doppler, la cual supone que la luz se comporta como el sonido, imprime una velocidad de recesión mayor que *c*. *b*) Suponiendo que el movimiento relativo de 3C9 y de la Tierra sea enteramente de recesión, calcule la velocidad de recesión que predice la ecuación relativista de Doppler.

44. El "corrimiento rojo" de radiación proveniente de una galaxia lejana consta de la luz Hγ, que según se sabe posee una longitud de onda de 434 nm cuando se observa en el laboratorio y que parece tener una longitud de 462 nm. *a*) ¿Cuál es la velocidad de la galaxia en la línea de vista en relación con la Tierra? *b*) ¿Se acerca o se aleja la galaxia?

45. Calcule los corrimientos Doppler de longitud de onda esperados en una luz de 553 m de longitud de onda, emitida desde el borde del disco solar en el ecuador, a causa de la rotación del Sol. Véanse en el Apéndice C los datos necesarios.

46. ¿Con qué velocidad habría que cruzar una luz roja, a fin de hacer que aparezca verde? Tome 620 nm como la longitud de onda de luz roja y 540 nm como la de la luz verde.

47. En el experimento de Ives y Stilwell, la velocidad u de los átomos de hidrógeno en una serie era 8.65×10^5 m/s. Calcule $\Delta f/f$, suponiendo que *a*) la ecuación 39-18 es correcta y que *b*) la ecuación 39-20 también lo es; compare los resultados con los de la tabla 39-4 para esta velocidad.

48. En la Tierra *A* emite señales con una linterna cada seis minutos. *B* se halla en una estación espacial estacionaria respecto a la Tierra. *C* se encuentra en un cohete que va de *A* a *B* con una velocidad constante de $0.60c$ en relación con *A* (Fig. 39-44). *a*) ¿A qué intervalos recibe *B* señales de *A*? *b*) ¿A qué intervalos recibe *C* señales de *A*? *c*) Si *C* emite un centelleo cada vez que se recibe un centelleo de *A*, ¿a qué intervalos recibe *B* centelleos de *C*?

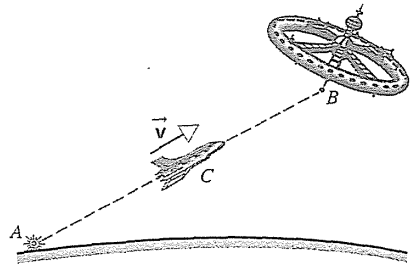


FIGURA 39-44. Ejercicio 48.

49. Un satélite de la Tierra, que transmite con una frecuencia de 40 MHz, pasa directamente arriba de una estación radiofónica receptora a una altitud de 400 km y a una velocidad de 2.8×10^4 km/h. Grafique el cambio de frecuencia, atribuible al efecto Doppler en función del tiempo, contando $t = 0$ como el instante en que el satélite está arriba de la estación (Sugerencia: la velocidad en la fórmula de Doppler no es la velocidad real del satélite, sino sus componentes en la dirección de la estación. No tenga en cuenta la curvatura de la Tierra ni de la órbita del satélite.

50. Indique el cambio de la longitud de onda de Doppler $\lambda - \lambda_0$, si la hay, en la línea de sodio D_2 (589.00 nm) emitida de la fuente que describe un círculo, con una velocidad constante de $0.122c$ medida por un observador fijo en el centro del círculo.

51. Una fuente de ondas de radio, con una frecuencia de 188 MHz en reposo, se desplaza con una velocidad de $0.717c$ transversalmente a la línea visual con un detector. ¿En qué ángulo de la línea debe una segunda fuente, con una frecuencia de 162 MHz en reposo, moverse también a $0.717c$ si las frecuencias de las dos fuentes recibidas por el detector son iguales?

52. Una fuente luminosa se dirige en ángulos rectos a la línea visual de un detector. Su velocidad es de $0.662c$. ¿A qué velocidad debe una fuente idéntica desplazarse a 75.0° con la línea visual, si son iguales los corrimientos de Doppler registrados por el detector en las dos fuentes.

PROBLEMAS

1. Considere una estrella situada en una línea a través del Sol, dibujada perpendicularmente al plano de la órbita terrestre alrededor de él. La distancia de la estrella es mucho mayor que el diámetro de la órbita terrestre. Demuestre que, a causa de la velocidad finita de la luz, un telescopio con el cual se ve la estrella debe inclinarse un ángulo $\alpha = 20.5''$ a la perpendicular, en la dirección en

OBERA 909 UNIVERSIDAD

que se mueve la Tierra (Fig. 39-45). Este fenómeno, denominado aberración, es perceptible y el primero en explicarlo fue James Bradley en 1729.

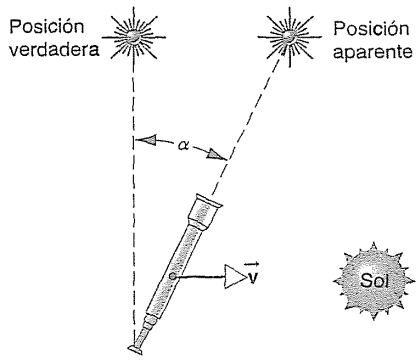


FIGURA 39-45. Problema 1.

2. En 1676 Ole Roemer dedujo que la velocidad de la luz es finita al observar el tiempo del eclipse de uno de los satélites de Júpiter, Io (Fig. 39-46). Basándose en las propiedades orbitales que se conocían de él, predijo que surgiría de la sombra de Júpiter en un momento determinado, correspondiente a la Tierra en la posición x de su órbita. Cuando la Tierra se hallaba en la posición y, Io salía de la sombra de Júpiter unos diez minutos más tarde. Roemer concluyó lo siguiente: la discrepancia se debe al tiempo adicional que la luz tarda en cubrir la distancia adicional de Io al radio de la órbita terrestre. ¿Qué valor puede calcularse para la velocidad de la luz a partir de esta observación? (Las observaciones anteriores pueden interpretarse además en función del efecto Doppler de la luz. Véase "The Doppler Interpretation of Roemer's Method" de V. M. Babovicic, D. M. Davidovic y B. A. Anicin, *American Journal of Physics*, junio de 1991, p. 515.)

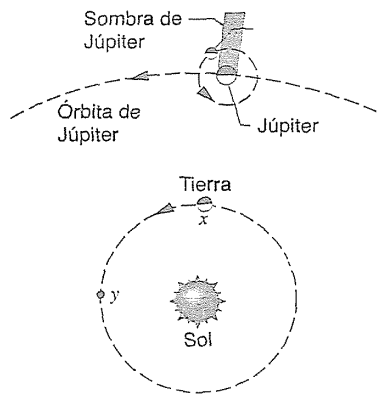


FIGURA 39-46. Problema 2.

3. Las ondas de mar que se mueven con una velocidad de 4.0 m/s se acercan a la playa en un ángulo de 30° a la normal, como se indica en la figura 39-47. Supóngase que la profundidad del agua cambia abruptamente y que la velocidad de las ondas cae a 3.0 m/s. Cerca de la playa, ¿cuál es el ángulo θ entre la dirección del movimiento de la onda y la normal? (Suponga la misma ley de refracción que para la luz.) Explique por qué la mayoría de las ondas llegan en ángulo normal a la playa, a pesar de que a grandes distancias lo hacen con varios ángulos.

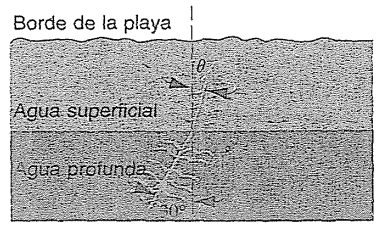


FIGURA 39-47. Problema 3.

4. Dos espejos perpendiculares forman los lados de un recipiente lleno con agua, como se ve en la figura 39-48. Un rayo luminoso incide desde arriba, formando un ángulo normal con la superficie del agua. *a*) Demuestre que hay dos reflexiones en las superficies del espejo. *b*) Repita el análisis en el caso de la incidencia oblicua, con el rayo en el plano de la figura.

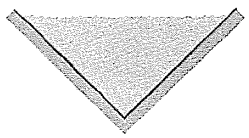


FIGURA 39-48. Problema 4.

5. Pruebe que un rayo luminoso que incide en la superficie de una hoja de vidrio de placas cuyo espesor es t surge de la cara opuesta paralela a su dirección inicial pero desplazada a los lados, como se aprecia en la figura 39-49. *a*) Demuestre que, con ángulos pequeños de incidencia θ, este desplazamiento está dado por

$$x = t\theta\frac{n-1}{n},$$

donde n es el índice de refracción y θ se mide en radianes. *b*) Calcule el desplazamiento en un ángulo de incidencia de 10° a través de una hoja de vidrio Crown de 1.0 cm de espesor.

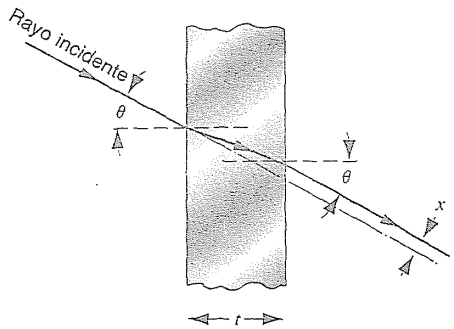


FIGURA 39-49. Problema 5.

6. El índice de refracción de la atmósfera terrestre disminuye monotónicamente con la altura a partir de su valor superficial (1.00029 aproximadamente) al valor en el espacio (más o menos (1.00000) en la parte superior de la atmósfera. Esta variación continua (o gradual) puede aproximarse suponiendo que la atmósfera se componga de tres (o más) capas paralelas planas, donde el índice de refracción es constante. Así pues, en la figura 39-50,

$$n_3 > n_2 > n_1 > 1.00000.$$

Considere un rayo de luz proveniente de una estrella S que choca contra la parte superior de la atmósfera en un ángulo θ con la vertical. *a*) Demuestre que la dirección evidente θ_3 de la estrella con la vertical, vista por un observador desde la superficie terrestre, se obtiene mediante

$$\operatorname{sen}\theta_3 = \frac{1}{n_3}\operatorname{sen}\theta.$$

(Sugerencia: aplique la ley de refracción a pares sucesivos de capas de la atmósfera; desprecie la curvatura de la Tierra.) *b*) Calcule el desplazamiento de posición de una estrella que está a 50° de la vertical. (Los efectos tan pequeños atribuibles a la refracción atmosférica pueden ser importantes en extremo; por ejemplo, deben tenerse presentes cuando se utilizan satélites de navegación para determinar posiciones precisas en la Tierra.)

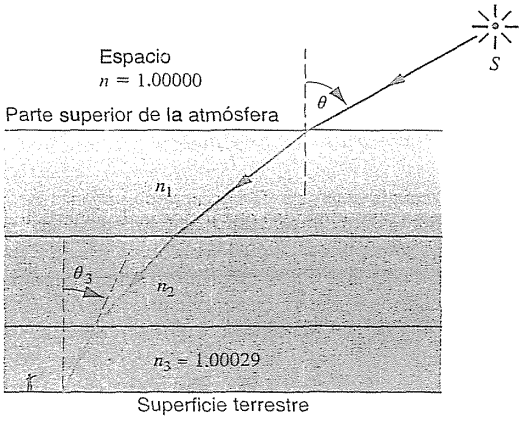


FIGURA 39-50. Problema 6.

7. Se encuentra usted en un extremo de la pista de un aeropuerto. Un gradiente vertical de temperatura en el aire hizo que el índice de refracción del aire situado arriba de la pista variase con la altura y, de acuerdo con $n = n_0(1 + ay)$, donde n_0, es el índice de refracción en la superficie de la pista y $a = 1.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^{-1}$. Sus ojos están a una altura $h = 1.7$ m por encima de ella. ¿Más allá de que distancia horizontal d no puede ver la pista? Consulte la figura 39-51 y el problema 6.

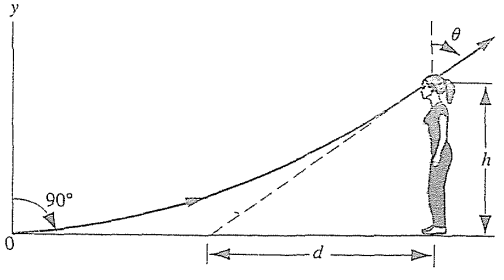


FIGURA 39-51. Problema 7.

8. Unos muones (masa = 106 MeV/c^2) y piones neutros (masa = 135 MeV/c^2), cada uno con un momento de 145 MeV/c, pasan por un material transparente. Determine el intervalo del índice de refracción del material, de manera que sólo los muones emitan la radiación Cerenkov (Ejercicio 17).

9. Una gota de líquido puede colocarse en una lámina semicircular de vidrio como en la figura 39-52. *a*) Indique cómo determinar el índice de refracción del líquido observando para ello la reflexión interna total. El índice de refracción del vidrio se desconoce y también debe determinarse. ¿De alguna manera está restringido el intervalo de índices susceptibles de medirse en esta forma? *b*) ¿Cuál es la eficacia real de este método?

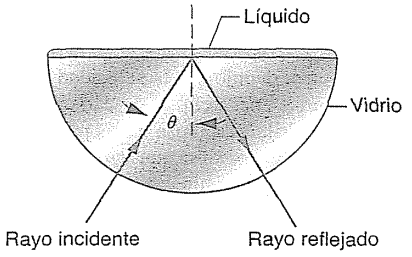


FIGURA 39-52. Problema 9.

10. Un rayo luminoso de cierta longitud de onda, inicialmente en el aire, choca contra un prisma de 90° en P (Fig. 39-53) y se refracta allí y en Q, de modo que apenas si roza la superficie derecha del prisma en Q. *a*) Determine su índice de refracción con esta longitud de onda en función del ángulo de incidencia θ_1 que origina esta situación. *b*) Asigne un límite numérico superior al índice de refracción del prisma. Mediante diagramas de rayos demuestre lo que sucede si el ángulo de incidencia en P es *c*) un poco mayor o *d*) un poco menor que θ_1.

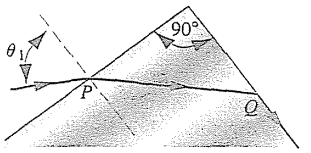


FIGURA 39-53. Problema 10.

11. Una fuente puntual de luz se pone a una distancia h debajo de la superficie de un lago grande y profundo. *a*) Demuestre que la fracción f de la energía luminosa que escapa directamente de la superficie del agua depende de h y está dada por

$$f = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 1/n^2}),$$

donde n es el índice de refracción del agua. [Nota: se prescinde la absorción dentro del agua y la reflexión en la superficie (excepto cuando es total).] *b*) Evalúe esta fracción numéricamente.

12. Una fibra óptica está hecha de un núcleo de vidrio no graduado (índice de refracción n_1), rodeado de un revestimiento (índice de refracción $n_2 < n_1$). Suponga que un haz luminoso penetra en la fibra desde el aire, formando un ángulo θ con el eje de la fibra como se observa en la figura 39-54. *a*) Demuestre que el máximo valor posible de θ en que un rayo se propaga fibra abajo está dado por

$$\theta = \text{sen}^{-1}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

b) Suponga que los índices de refracción del vidrio y del revestimiento son 1.58 y 1.53, respectivamente, y calcule el valor de este ángulo.

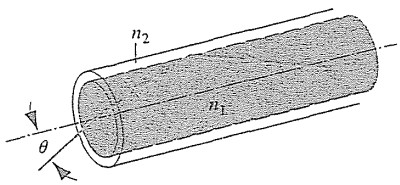


FIGURA 39-54. Problema 12.

13. En una fibra óptica (Problema 12), varios rayos describen trayectorias diversas a lo largo de ella y producen varios tiempos de recorrido. Ello ocasiona que un pulso luminoso se disperse a medida que se desplaza por ella, provocando pérdida de información. El tiempo de retraso debería reducirse al mínimo al diseñar una fibra. Considere un rayo que recorre una distancia L en el eje de la fibra y otro que se refleja en el ángulo crítico, a medida que se dirige al mismo destino que al primero. *a*) Demuestre que la diferencia Δt en los tiempos de llegada está dada por

$$\Delta t = \frac{L}{c}\frac{n_1}{n_2}(n_1 - n_2),$$

donde n_1 es el índice de refracción del núcleo y n_2 es el índice de refracción del revestimiento. *b*) Evalúe Δt en la fibra del problema 12, con $L = 350$ km.

14. Las moléculas de hidrógeno a 700 K emiten luz de 457 THz de frecuencia. *a*) Determine el cambio de frecuencia de la luz observado a causa del movimiento de una molécula que se dirige hacia un observador con una velocidad raíz cuadrada media. *b*) Calcule el corrimiento de frecuencia si la luz se originase de átomos de hidrógeno y no de moléculas.

15. Las microondas, que se desplazan con la velocidad de la luz, se reflejan desde un avión lejano que se aproxima a la fuente de ondas. Se comprueba que, cuando hacemos chocar las ondas reflejadas contra las que irradian de la fuente, la frecuencia de batido es 990 Hz. Si las microondas se encuentran a 12.0 cm en la longitud de onda, ¿cuál es la velocidad de aproximación del avión?

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Se produce el arco iris cuando la luz blanca se refracta y se refleja contra una gota esférica de agua, según se observa en la figura 39-55. *a*) Trace una gráfica que muestre el ángulo de la luz de salida en función del parámetro de impacto b. *b*) Determine los límites angulares ϕ_1 y ϕ_2 entre los cuales los rayos de salida contienen 80% de la luz incidente.

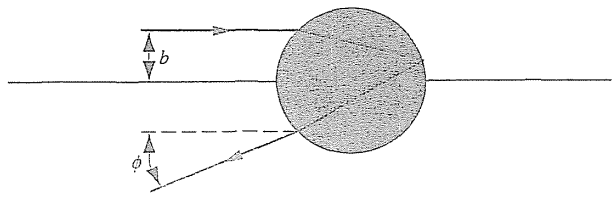


FIGURA 39-55. Problema para resolver por computadora 1.

CAPÍTULO 40

ESPEJOS Y LENTES

Los sistemas ópticos con espejos y lentes tienen aplicaciones importantes. Sirven, entre otras cosas, para corregir defectos visuales, proyectar una imagen sobre una pantalla donde muchas personas puedan verla al mismo tiempo (por ejemplo, en un cine o en un aula) y hacer que los objetos pequeños parezcan grandes (como en el microscopio) o que los objetos lejanos parezcan estar cerca (como en el telescopio).

En este capítulo estudiamos la formación de imágenes por medio de espejos y lentes. Desarrollamos métodos algebraicos y gráficos para analizar la formación de imágenes; los ampliamos para abarcar sistemas con dos o más componentes, como los microscopios y los telescopios.

40-1 FORMACIÓN DE IMÁGENES POR MEDIO DE ESPEJOS Y LENTES

Cuando empleamos un espejo o una lente para mirar a un amigo, vemos algo que no existe en la realidad. El amigo es muy real pero el espejo o la lente distorsionan lo que contemplamos, de modo que el aspecto de este amigo será muy distinto dependiendo del sitio donde esté (más cerca o más lejos), de su estatura (parecerá más grande o más pequeño) y, quizá, incluso de su orientación (puede parecer que está boca abajo).

Lo que vemos es una *imagen* de nuestro amigo. Para entender la formación de una imagen, debemos saber primero cómo la trayectoria de un haz luminoso cambia cuando encuentra un espejo o un lente, para lo cual aplicamos las leyes de reflexión y de refracción expuestas en el capítulo 39. Pero también debemos saber cómo el cerebro procesa la luz que proviene del espejo o lente. El cerebro tiende a creer que la luz se desplaza en líneas rectas exclusivamente. Por eso, cuando dirigimos la vista a un espejo plano, pensamos que la imagen se halla en alguna parte *detrás* de este espejo.

Al mirar un objeto, el cerebro responde a la luz que proviene de este objeto y que entra en los ojos. El cerebro capta la información referente al objeto, agrega algunas señales del ambiente, consigue algunos datos de la memoria y produce una imagen del objeto y de su entorno. Si alguno de los elementos anteriores no concuerda con otros, el cerebro hace lo posible para integrar toda la información. Algunas veces, como en el caso de las "ilusiones ópticas", el cerebro puede equivocarse por completo.

El proceso es similar cuando vemos la luz procedente de un espejo o lente. El cerebro intenta procesar la información y darle la interpretación más congruente posible. Así, en el caso de nuestra imagen en un espejo plano, por ejemplo, el cerebro parece querer colocarnos en alguna parte detrás de la pared donde está colocado el espejo.

Se da el nombre de imagen *virtual* a la que forma un espejo plano, y también, en algunos casos, los espejos y lentes curvos. Se caracteriza por varias propiedades: 1) en realidad no pasa luz alguna por el lugar de la imagen. De hecho, igual que con el espejo plano, la imagen podría aparecer en un sitio donde la luz no puede desplazarse. 2) Es imposible enfocar la imagen en una pantalla. Para ver la imagen, debemos mirar *al interior* del espejo o lente. 3) Una imagen virtual producida por un espejo o lente individual siempre es vertical (no invertida), aunque (como veremos al final del capítulo) los sistemas ópticos con dos o más lentes o espejos pueden crear imágenes virtuales rectas o invertidas.

En cambio, una imagen *real* tiene otras propiedades. 1) Después de encontrarse con el espejo o con la lente, la luz cruza directamente el sitio de la imagen. 2) Por tanto, *podemos* enfocar la imagen sobre la pantalla. Si queremos ver la imagen no es necesario ver el espejo o lente. (Imagine un proyector de películas o de transparencias en su salón de clases: puede mirar la imagen en la pantalla sin ver hacia el interior de la lente.) 3) Una imagen real creada por un solo espejo o lente siempre está invertida (boca abajo), pero hay sistemas con varios componentes capaces de producir imágenes reales que pueden ser rectas o estar invertidas.

A medida que formulemos reglas para analizar la formación de imágenes mediante espejos y lentes, iremos ampliando nuestra exposición sobre las condiciones en que pueden formarse las imágenes reales o virtuales. Mientras tanto, el lector puede efectuar el siguiente experimento: sostenga una cuchara metálica brillante a 30 cm de distancia de la cara, de modo que la parte cóncava quede frente a usted. Deberá tener una vista invertida de su cara; es la imagen real que está situada en el espacio alrededor de un centímetro delante de la cuchara. Ahora voltéela y vea su imagen en la parte posterior. Tendrá una vista vertical de su cara; es la imagen virtual que, como veremos luego, se halla detrás de la cuchara.

Óptica geométrica en comparación con la ondulatoria

La figura 40-1 ofrece una vista desde arriba de un tanque de agua, donde las ondas se originan en el lado izquierdo y se dirigen de izquierda a derecha. Las bandas brillantes y oscuras de la fotografía representan las crestas y los valles de las ondas; así, las bandas brillantes vecinas (o las oscuras) están separadas una longitud de onda. Las ondas encuentran una barrera que tiene un hoyo pequeño. Se aprecia cómo las ondas relampaguean y se extingue después de atravesar el hoyo y aparecen en la región detrás de la barrera sólida. A este fenómeno se le conoce como *difracción*. Como veremos a fondo en el capítulo 42, la difracción se presenta siempre que una onda encuentra una abertura cuyas dimensiones tienen más o menos el mismo tamaño (un tamaño menor) que la longitud de onda. En el caso de la figura 40-1, el tamaño de la abertura es aproximadamente igual al de la longitud de onda. El efecto del relampagueo disminuye conforme hacemos la abertura más grande que la longitud de onda. Si el tamaño de la abertura es varias veces la longitud de onda, los efectos de difracción serán insignificantes y la onda aparecerá sólo en la "sombra" geométrica de la abertura, una vez que haya cruzado la abertura. Efectos semejantes ocurren cuando la onda encuentra un obstáculo en vez de una abertura en la barrera.

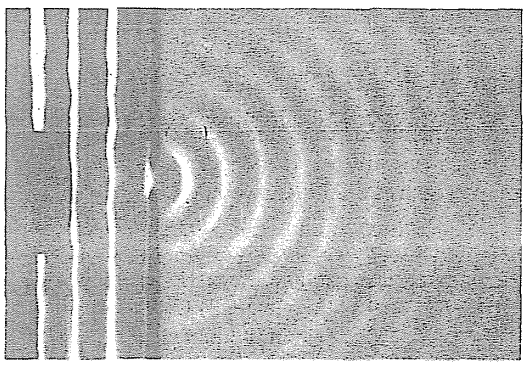


FIGURA 40-1. Difracción de las ondas de agua en una abertura de una barrera. Nótese que la abertura es más o menos del tamaño de la longitud de onda.

La longitud de onda de la luz visible se halla en el intervalo de 400 a 700 nm (4×10^{-7} a 7×10^{-7} m). Inclusive un espejo o lente diminutos con un diámetro apenas de unos pocos mm es 4 órdenes de magnitud más grande que la longitud de onda de la luz. Así pues, los efectos de difracción casi siempre son despreciables en la formación de imágenes por medio de espejo y lentes. En el campo de la *óptica geométrica,* es donde los haces luminosos encuentran objetos mucho mayores que la longitud de onda de la luz. Las condiciones de la óptica geométrica se aplican a todos los casos que examinamos en este capítulo.

En la óptica geométrica es posible analizar la formación de imágenes suponiendo que la luz recorre trayectorias rectas o *rayos.* Por eso, a la óptica geométrica también se le conoce como *óptica de rayos.* El rayo es una forma adecuada de describir el desplazamiento de la luz: se dibujan rayos perpendiculares a los frentes de onda en una dirección que representa el recorrido. Ya hemos empleado los rayos en la sección 39-4 para representar la luz cuando experimenta reflexión y refracción.

Por el contrario, si se trata de los efectos de la difracción, estaremos entonces en el campo de la *óptica física* (llamada también *óptica ondulatoria*) porque debemos incluir específicamente en nuestro análisis la naturaleza ondulatoria de la luz. La interferencia (tema que abordamos en el Cap. 41) y la difracción (Cap. 42) son ejemplos de los efectos en los que debemos aplicar los métodos de la óptica física.

40-2 ESPEJOS PLANOS

Quizá, la experiencia óptica más común es la de ver un espejo. La figura 40-2 muestra una fuente puntual de luz O, que llamamos el *objeto*, situada a una distancia o delante de un espejo plano. La luz que llega a dicho espejo se representa mediante rayos que provienen de O.* En el punto donde un rayo choca contra el espejo construimos un rayo reflejado, aplicando la ley de reflexión (Ec. 39-3). Si extendemos los rayos reflejados hacia atrás, se intersectarán en un punto I, al que denominamos la *imagen* del objeto O. Ésta se encuentra a la misma distancia detrás del espejo que el objeto O delante de él, cosa que probamos a continuación.

* En la exposición anterior de la reflexión en el capítulo 39, supusimos una onda incidente *plana*; en este caso los rayos incidentes son paralelos entre sí. Aquí tenemos una fuente *puntual*, y los rayos que inciden contra el espejo *divergen* de la fuente puntual. La consideramos una fuente de ondas esféricas; los rayos que irradian de ella son perpendiculares a los frentes de onda esféricos.

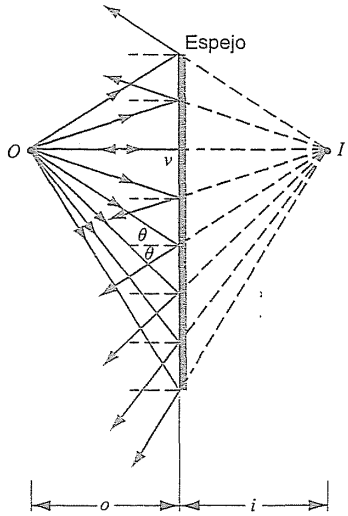


FIGURA 40-2. Un objeto puntual O forma una imagen virtual I en un espejo plano. Los rayos *parecen* divergir de I, pero no hay luz en ese punto.

Las imágenes de luz divergente en espejos planos siempre son virtuales. Por la experiencia diaria sabemos cuán "real" la imagen virtual *parece ser* y cuán definido está el lugar que ocupa en el espacio detrás del espejo, aun cuando este espacio se halle ocupado por una pared de ladrillo.

En la figura 40-3 se muestran dos rayos provenientes de la figura 40-2. Uno choca contra el espejo en v, a lo largo de una línea perpendicular. El otro lo hace en un punto arbitrario a, formando un ángulo de incidencia θ con la normal en ese punto. La geometría elemental muestra que los ángulos aOv y aIv también son iguales a θ. En consecuencia, los triángulos rectángulos aOv y aIv son congruentes y, por lo mismo,

$$i = -o, \tag{40-1}$$

donde introducimos el signo negativo para indicar que I y O se encuentran en los lados opuestos del espejo. La ecuación 40-1 no incluye θ; esto significa que *todos* los rayos provenientes de O y que chocan contra el espejo pasan a través de I cuando se extienden hacia atrás, como vimos en la figura 40-2. En vez de suponer que el espejo es verdaderamente plano y que se cumplen las condiciones de la óptica geométrica,

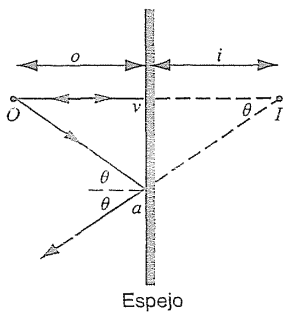


FIGURA 40-3. Dos rayos de la figura 40-2. El rayo Oa forma un ángulo arbitrario θ con la normal a la superficie del espejo.

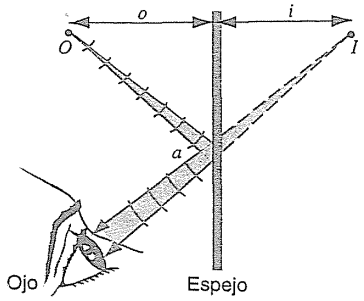


FIGURA 40-4. Un lápiz de rayos provenientes de O entran en el ojo después de reflejarse contra el espejo. Sólo una pequeña parte del espejo cerca de a es efectiva. Los arcos pequeños representan las posiciones de los frentes de onda esféricos. La luz parece provenir de I.

no hicimos aproximaciones al obtener la ecuación 40-1. Un objeto puntual produce una imagen también puntual en un espejo plano, con $i = -o$, sin importar qué tan grande sea el ángulo θ en la figura 40-3.

A causa del diámetro finito de la pupila del ojo, sólo los rayos que se hallan bastante cerca entre sí pueden entrar en el ojo después de reflejarse en un espejo. Con la posición del ojo que se indica en la figura 40-4, únicamente una pequeña porción del espejo cerca del punto a logra formar la imagen; el resto del espejo puede cubrirse o quitarse. Si movemos el ojo hacia otro lugar, una porción distinta del espejo será eficaz; el sitio de la imagen virtual I permanecerá inalterado, mientras el objeto esté fijo.

La imagen de un objeto completo

A menudo no nos interesa la imagen de una fuente puntual individual de luz, sino la de un objeto completo, como la de una cara o de un cuerpo entero. Igual que en la figura 40-5, representamos al objeto completo con una flecha. Todos los puntos de dicho objeto se encuentran a la misma distancia o del espejo. Mediante los métodos de esta sección puede demostrarse que el punto del objeto O forma una imagen I que está a una distancia i detrás del espejo. Las distancias del objeto y de la imagen se relacionan mediante la ecuación 40-1 ($i = -o$). El punto del objeto O' forma la imagen I' que también

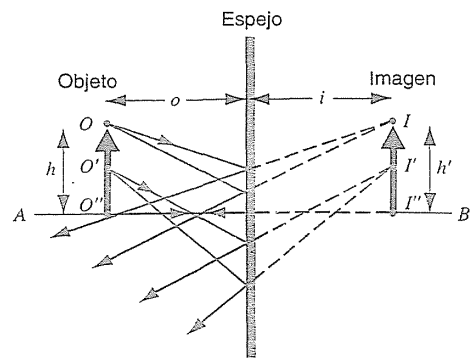


FIGURA 40-5. Imagen de un objeto completo en un espejo plano.

se encuentra a una distancia i detrás del espejo. Con el tiempo lograríamos trazar el perfil entero de la imagen, si supusiéramos que el objeto consta íntegramente de fuentes puntuales.

En virtud de que todos los puntos en el objeto están a una distancia o del espejo y de que todos los puntos de la imagen están a una distancia i detrás de dicho espejo; es necesario *encontrar el sitio de un solo punto de imagen para localizar la imagen entera.* Por lo regular hallamos la imagen de la punta del objeto, que después localiza la punta de la imagen. Entonces resulta fácil trabajar la imagen entera, porque la imagen I'' de la cola de la flecha debe estar a lo largo de la línea AB que se extiende de la cola al objeto O'' y que es perpendicular al espejo.

En cuanto al objeto completo, conviene definir el *aumento lateral* m (llamado simplemente ampliación) como la razón de la altura h' de la imagen a la altura h del objeto:

$$m = \frac{h'}{h}. \qquad (40\text{-}2)$$

Adoptamos la convención de que las alturas medidas arriba de la línea AB (que más tarde llamaremos el *eje* del espejo o del lente) son positivas y que las debajo de AB son negativas. Si la imagen es recta respecto al objeto (esto es, el objeto y la imagen se extienden en la misma dirección que el eje, ambas hacia arriba o hacia abajo), la ampliación será positiva; y será negativa si se invierte la imagen respecto al objeto (una arriba y otra abajo). Más adelante demostraremos que una ecuación general de la ampliación, la cual se aplica asimismo a un espejo o lente curvos, es

$$m = -\frac{i}{o}. \qquad (40\text{-}3)$$

Para un espejo plano, las ecuaciones 40-2 y 40-3 muestran que $m = +1$, es decir, la imagen es recta respecto al objeto (indicado por el signo $+$) y que tiene el mismo tamaño que el objeto (porque la magnitud de la ampliación es 1). Si $|m| > 1$, la imagen se agranda relativa al objeto; si $|m| < 1$, la imagen se reduce.

Inversión de la imagen

Como se aprecia en la figura 40-6*a*, la imagen de la mano izquierda parece ser de la mano derecha. Este aspecto lo interpretamos como una inversión de derecha e izquierda. Es decir, si levanta la mano izquierda, la imagen especular eleva la mano derecha. A menudo la gente se pregunta: ¿por qué un espejo invierte izquierda y derecha, pero no arriba y abajo?

La figura 40-6*b* ilustra la forma en que un espejo invierte la imagen de un objeto tridimensional, representado simplemente como un conjunto de tres flechas perpendiculares entre sí. Nótese que las flechas paralelas al plano del espejo (flechas x y y) son idénticas a su imagen especular. Sólo la dirección de la flecha z cambia por la reflexión. Es, pues, más exacto decir que un espejo invierte el frente por la parte posterior, más que la izquierda por la derecha. En cierto modo, la transformación de la mano izquierda en la derecha se logra intercambiando la palma y el anverso de la mano.

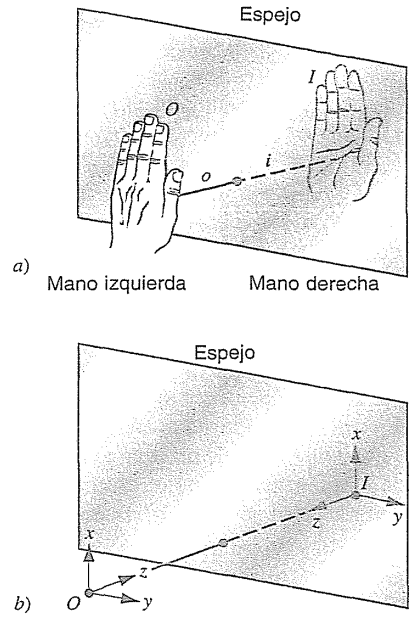


FIGURA 40-6. *a*) El objeto O es una mano izquierda; la imagen I es una mano derecha. *b*) Estudio de un objeto de tres flechas reflejado donde un espejo intercambia la parte frontal y la posterior, no la izquierda y la derecha.

Nótese asimismo lo siguiente: puede suponerse que el objeto representa un sistema coordenado ordinario de la mano derecha (x "cruzada" hacia los puntos y, en la dirección z) mientras que la imagen representa un sistema coordenado de la mano izquierda (x "cruza" hacia los puntos y, en la dirección negativa z) . Tales inversiones se aplican también a los objetos físicos; por ejemplo, la imagen de un tornillo con roscas hacia la derecha es un tornillo con roscas hacia la izquierda.

Si fuera un hecho que todos los seres humanos son diestros, podríamos decir con seguridad la diferencia entre la situación física y su imagen especular: la persona "real" usaría la mano derecha, y la imagen, la izquierda. Sin embargo, si fueran ambidiestros, no podríamos aprovechar ese hecho para distinguir entre el mundo real y el del espejo. La misma distinción se hizo con las leyes de la física: si éstas presentaran una simetría perfecta de derecha-izquierda, la imagen especular de un experimento sería un experimento físicamente posible. Pero si las leyes carecieran de esa simetría, el resultado de algún experimento con imágenes especulares no sería posible desde el punto de vista físico. En 1956 se descubrió que la llamada interacción débil, que ocasiona algunos decaimientos radiactivos, no tiene esta simetría, denominada *paridad.* Este experimento sentó las primeras bases fundamentales para distinguir entre nuestro mundo y su imagen especular.*

* Algunas explicaciones interesantes sobre la simetría y las distinciones entre los objetos y su imagen especular vienen en *The Ambidextrous Universe,* de Martin Gardner (Scribner's, 1979) y *Reality's Mirror,* de Bryan Bunch (Wiley, 1989).

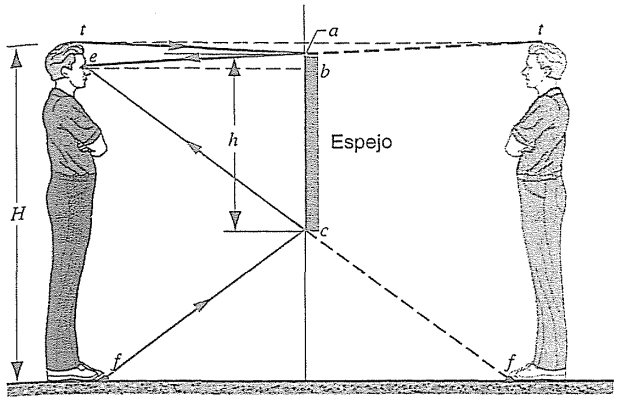


FIGURA 40-7. Problema resuelto 40-1.

PROBLEMA RESUELTO 40-1. Encuentre la longitud mínima necesaria h de un espejo para que una persona de estatura H vea su reflexión entera.

Solución En la figura 40-7 muestra el pie f de una persona, sus ojos e y la parte superior de su cabeza t. Para que se vea de cuerpo completo, es necesario que un rayo luminoso (*tae*) salga de la parte superior de su cabeza, se refleje contra el espejo en a y entre en sus ojos, mientras que otro rayo (*fce*) debe salir de sus pies, reflejarse contra el espejo en c y entrar en sus ojos. La persona verá un reflejo de su cuerpo completo (con imágenes virtuales de los puntos t y f) si la longitud del espejo es por lo menos ac.

A partir de la geometría de la figura 40-7, vemos que

$$ab = \tfrac{1}{2}te \quad \text{y} \quad bc = \tfrac{1}{2}ef,$$

donde el punto b se halla a la misma altura que los ojos. Por tanto,

$$ac = ab + bc = \tfrac{1}{2}te + \tfrac{1}{2}ef = \tfrac{1}{2}tf.$$

Con $h = ac$ y $H = tf$, obtenemos

$$h = \tfrac{1}{2}H.$$

La persona puede ver su imagen entera si el espejo se halla por lo menos a la mitad de su altura. Las partes del espejo debajo de c presentan reflexiones del piso delante de los pies de la persona, mientras las que están arriba de t muestran a la persona lo que está arriba de su cabeza. Adviértase que la distancia de la persona respecto al espejo no influye en este cálculo, el cual conserva su validez con cualquier distancia del objeto en un espejo plano.

40-3 ESPEJOS ESFÉRICOS

Supóngase que en lugar de hacer un espejo plano, le damos una ligera curvatura. En particular, vamos a estudiar los espejos que tienen forma esférica. En las figuras 40-8*b* y 40-8*c* se muestra el efecto en dos casos diferentes. En el primero (Fig. 40-8*b*), el espejo es cóncavo (es decir, "hueco", semejante a una cueva) respecto a la ubicación del objeto. Nótese que, en comparación con el espejo plano, la imagen 1) se amplifica (es mayor que el objeto) y 2) se encuentra más lejos detrás del espejo (es decir, i tiene un valor negativo más grande). Se emplea este tipo de espejos para rasurarse o aplicarse el maquillaje, ya que en este caso se desea una amplificación a costa de la reducción del campo visual. La figura 40-8*b* se aplica sólo cuando la distancia que existe entre el objeto y el espejo es pequeña (menos de $r/2$, como veremos luego).

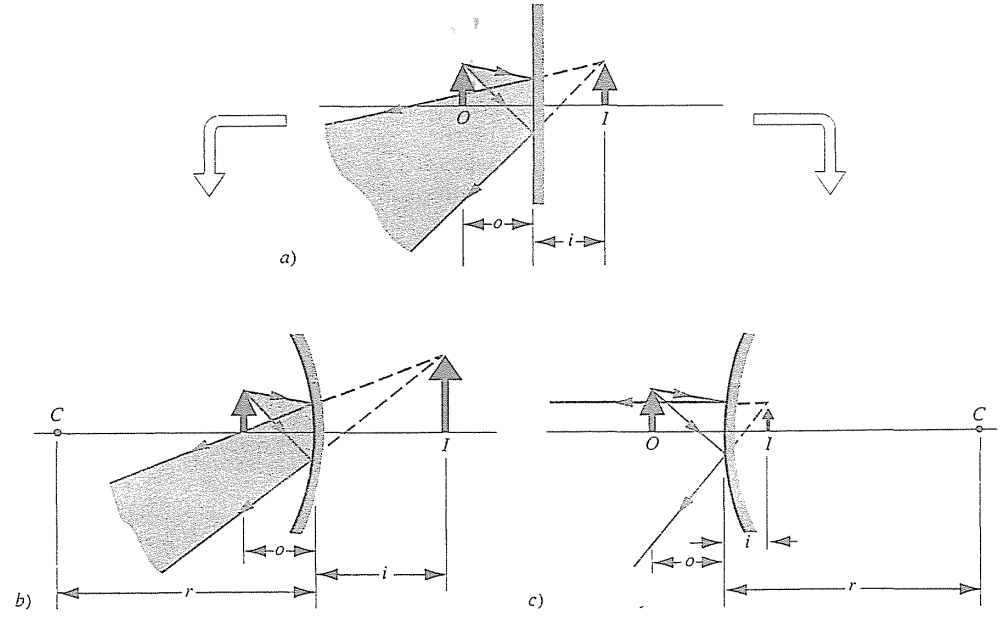


FIGURA 40-8. *a*) Un objeto O forma una imagen virtual I en un espejo plano. *b*) Si doblamos el espejo para que se vuelva *cóncavo*, la imagen se aleja de él y se agranda. *c*) Si doblamos el espejo plano para que se vuelva *convexo*, la imagen se acerca a él y se empequeñece. Al punto C se le llama *centro de curvatura* del espejo; es el centro de la superficie esférica de la cual él forma parte.

En el segundo caso (Fig. 40-8*c*), el espejo es *convexo* (respecto a la ubicación del objeto. Observe que la imagen 1) disminuye de tamaño y 2) que se encuentra a una distancia más cercana del espejo en comparación con la del espejo plano. Ejemplos de estos tipos de espejos son los espejos laterales derechos y los de vigilancia que se emplean en las tiendas al menudeo. El campo visual es más ancho que el de un espejo plano.

Suponga que los espejos esféricos de la figura 40-8 fuesen flexibles. Si quisiéramos doblar uno para hacerlo más plano, la imagen se aproximaría al lugar y al tamaño de la de un espejo plano. Podemos, pues, pensar que un espejo plano es un caso especial del esférico, en el cual el radio de la esfera se vuelve infinitamente grande. Las ecuaciones que describen el espejo esférico deberán convertirse en la ecuación de espejos plano ($i = -o$) a medida que el radio tiende al infinito.

La ecuación de los espejos

Al final de esta sección obtenemos la ecuación que relaciona la distancia del objeto o con la distancia de la imagen i en un espejo esférico. Vamos a estudiar el caso especial en que los rayos luminosos del objeto forman ángulos pequeños con el eje del espejo. A esos rayos se les da el nombre de *paraxiales*. Dicho de otra manera, las medidas del espejo son pequeñas en comparación con el radio de curvatura. Nuestra descripción no se aplicaría a un espejo totalmente iluminado con la forma de un hemisferio entero.

La ecuación de los espejos relaciona las tres distancias en la figura 40-8: o, i y el radio de curvatura r del espejo. Esta relación está dada por la ecuación de espejos esféricos,

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}. \qquad (40\text{-}4)$$

Conviene definir la *longitud focal* f del espejo como la mitad del radio de curvatura, o sea

$$f = r/2. \qquad (40\text{-}5)$$

En función de la longitud focal, la ecuación de espejos puede escribirse así

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}. \qquad (40\text{-}6)$$

La figura 40-9 contiene rayos de luz paralelos que inciden en el espejo. La luz paralela puede obtenerse de un objeto situado muy lejos del espejo, de modo que los frentes de onda del objeto sean esencialmente planos. En la práctica, la luz paralela se obtiene por medio de un espejo o lente. La luz paralela se refleja y se une en un punto F, denominado *punto focal*, que se halla a una distancia f del espejo. La ecuación 40-6 indica que si $o = \infty$, correspondiente al objeto que está muy lejos del espejo, $i = f$.

Si $r = \infty$, correspondiente a un espejo plano, la ecuación 40-4 se reduce a $i = -o$ en concordancia con la ecuación 40-1. Por tanto, un espejo plano es simplemente un caso especial de un espejo esférico con un radio de curvatura infinito. La ecuación 40-6 puede servir para conseguir la *ubicación* de la imagen; su tamaño, en comparación con el tamaño del objeto, puede determinarse de la ampliación, $m = -i/o$ (Ec. 40-3).

Convención de signos

La figura 40-9 indica la convención de signos que es preciso tener presentes al utilizar las ecuaciones 40-4 y 40-6. El lado del espejo donde la luz es incidente recibe el nombre de lado R, porque en ese lado se formará la *imagen real*. Las imágenes reales se producen por la luz convergente; en forma equivalente, puede decirse que las imágenes reales son aquellas que pueden verse en una pantalla colocada en la posición de la imagen. En el lado R del espejo, por convención i, o, r y f son positivas.

A la región detrás del espejo se le llama lado V porque en este lado pueden formarse las *imágenes virtuales*. Son las que se forman mediante la luz divergente, que no pueden mostrarse en la pantalla. En el lado V, por convención o, i, r y f son negativas.

En conformidad con estas convenciones de signos, en la figura 40-8*b* la distancia del objeto o es positiva (porque el objeto se halla en el lado R del espejo), y la distancia de la imagen I, negativa (porque la imagen está en el lado V). El centro de curvatura C se encuentra en el lado R, por lo cual el radio de curvatura r es positivo. En la figura 40-8*c*, o es positiva, e i negativa como en la figura 40-8*b*, pero r negativa porque C se halla en el lado V.

En la figura 40-10 se muestran las distancias de las imágenes para tres distancias del objeto, a medida que uno se dirige hacia un espejo cóncavo. En la figura 40-10*a*, las distancias del objeto y la imagen son positivas porque ambas aparecen en el lado R del espejo. En la figura 40-10*b*, el objeto se encuentra en el punto focal. Con $o = f$, la ecuación 40-6

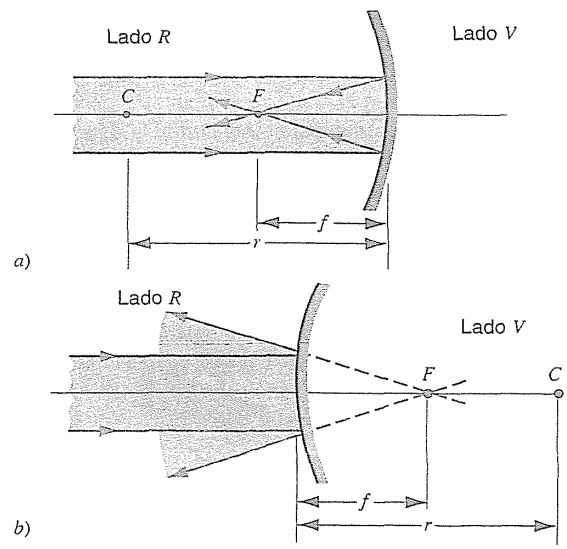


FIGURA 40-9. *a*) En un espejo cóncavo, la luz incidente paralela se lleva a un foco real en F sobre el lado R del espejo. *b*) En un espejo convexo, la luz incidente paralela parece divergir de un foco virtual en F sobre el lado V del espejo.

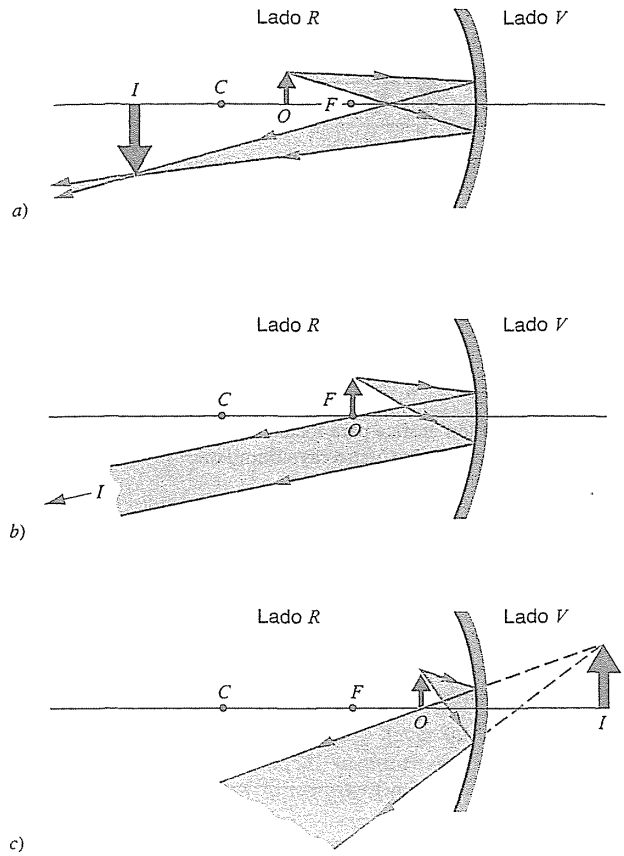


FIGURA 40-10. Acercamos un objeto cada vez más a un espejo cóncavo, de *a*) detrás del punto focal a *b*) el siguiente y luego *c*) al interior de punto focal. Al hacerlo la imagen pasa de *a*) su posición en el lado *R* a *b*) el infinito y luego *c*) reaparece en el lado *V*.

da $i = \infty$. Esto concuerda con la luz paralela que sale del espejo. En la figura 40-10*c*, la distancia del objeto sigue siendo positiva, sólo que ahora es menor que *f*. En este caso, la ecuación 40-6 da un valor negativo de *i*, es decir, una imagen virtual se forma en el lado *V*, como se indica allí.

En la figura 40-10*a* la amplificación lateral *m*, según la ecuación 40-3, es negativa, porque *o* e *i* son positivas. De ahí que la imagen esté invertida. (También está agrandada pues *i* resulta ser mayor que *o* en el caso ilustrado.) En la figura 40-10*c*, *o* e *i* tienen signos contrarios y por lo mismo *m*, es positiva, y la imagen es recta, como se aprecia en la figura.

En la figura 40-11 se incluye un posible arreglo, donde se considera que el objeto se halla en el lado *V* del espejo, así que *o* es negativa. La luz convergente (producida por otro dispositivo óptico, como un lente o un espejo, que no se muestra en la figura) incide en el espejo. Si no existiera el espejo, la luz convergiría en una imagen en el lugar *O* mostrado. Este lugar define la posición de un *objeto virtual*; la distancia entre el lugar y el espejo es la distancia del objeto (negativa). La distancia de la imagen es positiva. La ampliación también es positiva y, por eso, la imagen es recta, como se observa. ¿Pue-

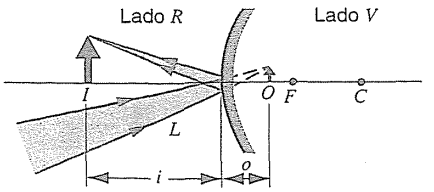


FIGURA 40-11. La luz convergente (procedente de espejos o lentes no incluidos) incide en un espejo plano. El *objeto virtual* en *O* muestra el sitio donde se enfocaría la luz si no estuviera el espejo. Desde luego, no habría luz en el lado *V* del espejo. Se forma una imagen real *I*. Este arreglo produce una imagen real sólo si la magnitud de la distancia del objeto es menor que la longitud focal, pero en situaciones parecidas un lente convexo *siempre* produce una imagen real.

de predecir el resultado si el espejo de la figura 40-11 lo hiciéramos cóncavo en vez de convexa la imagen en la figura 40-11? ¿Qué relación habría entre la magnitud de la distancia de la imagen resultante y la de la distancia del objeto? ¿Estaría la imagen recta o invertida?

Trazado de rayos

Conviene comprobar los resultados de los cálculos algebraicos obtenidos a partir de la ecuación de espejos con un método gráfico que localiza la imagen. A este método se le llama *trazado de rayos*. Como se ve en la figura 40-10, los haces de rayos convergen en una imagen real o divergen de una imagen virtual. Si podemos trazar estos rayos tal como se reflejan contra un espejo, estamos en condiciones de localizar la imagen.

Se puede simplificar este procedimiento al dibujar unos cuantos rayos básicos, cuya intersección sirve para localizar la imagen. Estos rayos, que se muestran en la figura 40-12, se escogen de una cantidad infinita de ellos atendiendo a la facilidad con que se localiza la imagen. Estos rayos no necesariamente existen en la realidad (por ejemplo, una parte del espejo podría cubrirse con una pantalla opaca); pero, pese a ello, pueden servir para encontrar la imagen (que es completa, aun cuando algunos rayos queden bloqueados). He aquí los rayos:

1. *Un rayo paralelo al eje,* que reflejamos para que pase por el punto focal (en el caso de un espejo convergente, Fig. 40-12*a*) o para que parezca provenir del punto focal (en el caso de un espejo divergente, Fig. 40-12*c*).

2. *Un rayo que pasa por el punto focal* (espejo convergente, Fig. 40-12*a*) o que lo hace al ser prolongado espejo divergente, Fig. 40-12*c*) que se refleja para ser paralelo a su eje (Figs. 40-12*b* y 40-12*d*).

3. *Un rayo que pasa por el centro de curvatura C*, que se refleja hacia atrás en su trayectoria original (Figs. 40-12*b* y 40-12*d*).

4. *Un rayo que choca contra el vértice del espejo* (el punto *v* donde el eje intersecta al espejo), que se refleja con un ángulo igual en el lado opuesto del eje (Figs. 40-12*b* y 4012*d*).

Dos rayos cualesquiera de los cuatro anteriores pueden usarse para localizar la imagen, según se indica en la figura 40-12.

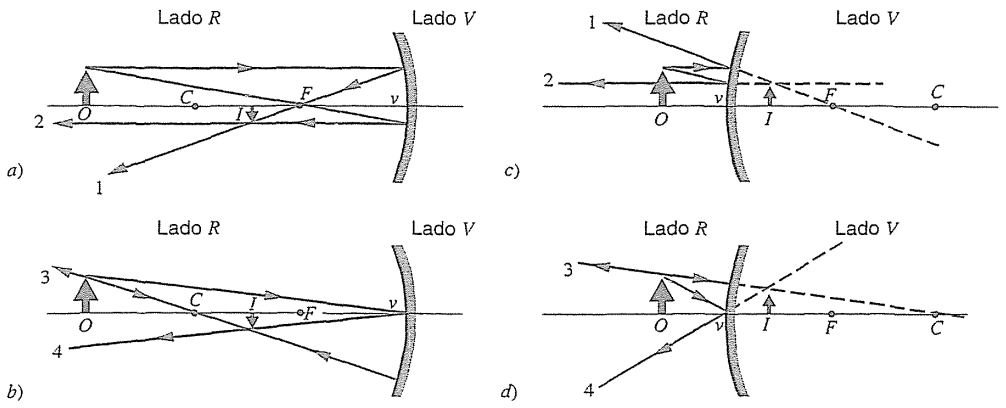


FIGURA 40-12. *a*) Cuatro rayos que pueden emplearse en la construcción gráfica para localizar la imagen de un objeto en un espejo cóncavo. Nótese que la imagen es real e invertida (*c*, *d*). Cuatro rayos similares trazados en el caso de un espejo convexo. La imagen es virtual y recta.

PROBLEMA RESUELTO 40-2. En la situación que se describe en las figuras 40-12*a* y 40-12*b*, suponga que $f = 12$ cm y que $o = 36$ cm. Encuentre la posición de la imagen y el aumento lateral.

Solución Al resolver la ecuación 40-6 para $1/i$, obtenemos

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = \frac{1}{12\text{ cm}} - \frac{1}{36\text{ cm}}$$

o bien

$$i = 18\text{ cm}.$$

Esto es consistente con las figuras 40-12*a* y 40-12*b*.

Si usamos la ecuación 40-3, que se aplica a los espejos esféricos y planos, tenemos

$$m = -\frac{i}{o} = -\frac{18\text{ cm}}{36\text{ cm}} = -0.50.$$

La imagen es 1/2 del tamaño del objeto y está invertida (como lo indica el signo negativo). Esto es consistente con las figuras 40-12*a* y 40-12*b*.

PROBLEMA RESUELTO 40-3. Un espejo convexo tiene un radio de curvatura de 22 cm. Se pone un objeto a 14 cm de distancia de él. Localice y describa la imagen por medio de *a*) métodos gráficos y *b*) métodos algebraicos.

Solución *a*) La figura 40-13 muestra el objeto y el espejo. Se trazan los rayos 1, 2 y 3 para localizar la imagen. Ésta es virtual, recta y está situada en el lado *V* del espejo; la distancia de la imagen es más o menos la mitad de la del objeto y la imagen tiene aproximadamente la mitad de la altura del objeto.

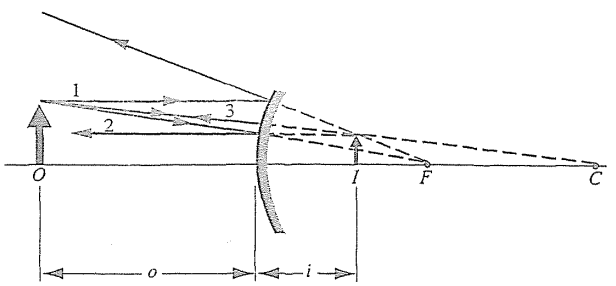


FIGURA 40-13. Problema resuelto 40-3.

b) De acuerdo con nuestra convención de signos, el radio es negativo si el centro de curvatura se encuentra en el lado *V* del espejo. Al resolver la ecuación 40-4 para $1/i$, obtenemos

$$\frac{1}{i} = \frac{2}{r} - \frac{1}{o} = \frac{2}{-22\text{ cm}} - \frac{1}{+14\text{ cm}},$$

que nos da

$$i = -6.2\text{ cm}.$$

Este valor concuerda con el resultado de nuestra construcción gráfica.

Conforme a la ecuación 40-3, el aumento lateral es

$$m = -\frac{i}{o} = -\frac{-6.2\text{ cm}}{+14\text{ cm}} = +0.44,$$

lo cual también concuerda con el resultado conseguido mediante métodos gráficos. Nótese que $m > 0$, o sea que la imagen es recta.

Demostración de las ecuaciones de los espejos

En la figura 40-14 se incluye un objeto puntual *O* en el eje de un espejo esférico cóncavo cuyo radio de curvatura es *r*. Un rayo proveniente de *O*, que forma un ángulo arbitrario α con el eje, intersecta este último en I, después de reflejarse contra el espejo en *a*. Un rayo que sale de *O* a lo largo del eje se refleja hacia atrás a lo largo de sí mismo en *v* y también cruza *I*. Así pues, *I* es la imagen de *O*; es una imagen *real* porque la luz realmente atraviesa *I*. Obtengamos la ubicación de *I*.

Un teorema útil establece que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. Su aplicación a los triángulos *OaC* y *OaI* en la figura 40-14 produce

$$\beta = \alpha + \theta \quad \text{y} \quad \gamma = \alpha + 2\theta.$$

Al eliminar θ entre estas ecuaciones se obtiene

$$\alpha + \gamma = 2\beta. \tag{40-7}$$

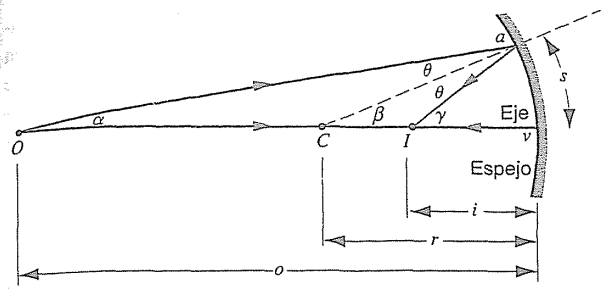


FIGURA 40-14. Un objeto puntual O produce una imagen puntual real I después de reflejarse contra un espejo cóncavo.

En radianes podemos escribir así los ángulos α, β y γ

$$\alpha \approx \frac{s}{o}, \qquad \beta = \frac{s}{r}, \qquad \gamma \approx \frac{s}{i}, \tag{40-8}$$

donde s es la longitud de arco av. Nótese que sólo la ecuación para β es exacta, porque el centro de curvatura del arco av está en C, y no en O ni en I. No obstante, las ecuaciones para α y para γ son aproximadamente correctas si estos ángulos son bastante pequeños. *En la siguiente exposición suponemos que los rayos divergentes procedentes del objeto forman únicamente un ángulo pequeño α con el eje del espejo.* A estos rayos que se encuentran cerca del espejo se les conoce como *paraxiales*. No nos pareció necesario hacer tal suposición en el caso de los espejos planos. Al sustituir las ecuaciones 40-8 en la 40-7 y al cancelar la longitud del arco s se obtiene la ecuación 40-4, que es la que deseamos probar.

La figura 40-15 muestra un objeto puntual en el eje de un espejo convexo. Los ángulos se indican en forma similar a los de la figura 40-14. Podemos realizar un análisis parecido al anterior y nos dará la ecuación 40-4, *a condición de que* sigamos la convención de signos: i y r son negativos en la figura 40-15. Este resultado se deja como ejercicio (Ej. 16).

Para obtener la ecuación referente al aumento lateral (Ec. 40-3), consideremos la figura 40-16 que contiene un rayo (avb), el cual se origina en la punta del objeto, se refleja contra el espejo en el punto v y pasa por la punta de la imagen. La ley de la reflexión exige que forme ángulos iguales θ con el eje de espejo, tal como se muestra en la figura. Con dos triángulos rectángulos semejante aOv y bIv, podemos escribir

$$\frac{Ib}{Oa} = \frac{vI}{vO}. \tag{40-9}$$

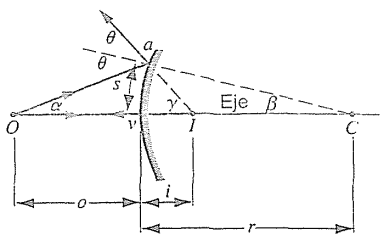


FIGURA 40-15. El objeto puntual O produce una imagen puntual virtual I después de reflejarse en un espejo convexo. Compare esta figura con la figura 40-14.

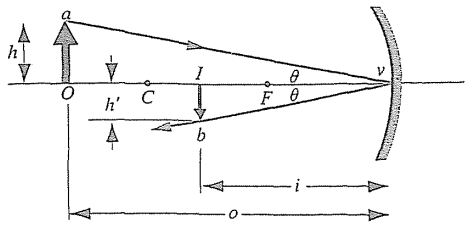


FIGURA 40-16. Un objeto O produce una imagen real invertida I en un espejo cóncavo.

Observan que h (la altura del objeto *arriba* del eje) es $+Oa$ y que h' (la altura de la imagen *debajo* del eje) es $-Ib$. Estas elecciones coinciden con la convención de signos explicada en la ecuación 40-2. Entonces, el lado izquierdo de la ecuación 40-9 es igual a $-h'/h$. Con $vI = i$ y con $vO = o$, la ecuación 40-9 se reduce inmediatamente a $m = -i/o$, que es la ecuación 40-3 que nos habíamos propuesto probar.

Es notable que la ecuación 40-4 no contenga α (o β, γ o θ); así que es válida para todos los rayos que incidan contra el espejo, siempre que sean bastante paraxiales. En un caso concreto, podemos hacer los rayos tan paraxiales como lo deseemos poniendo un diafragma circular delante del espejo y centrado alrededor del vértice v; impondremos así cierto valor máximo de α.

Las imágenes en los espejos esféricos experimentan diversas distorsiones que ocurren porque nunca se justifica por completo la suposición de rayos paraxiales. En términos generales, una fuente puntual no produce una imagen puntual (Ej. 12). Y además aparece una distorsión porque el aumento varía un poco con la distancia del eje del espejo; la ecuación 40-3 es rigurosamente correcta sólo con rayos paraxiales. Por último, debemos tener presente que la óptica geométrica no es más que un caso especial de la óptica física; los efectos de la difracción (Cap. 42) pueden influir en la naturaleza de la imagen.

40-4 SUPERFICIES ESFÉRICAS REFRACTANTES

En la figura 40-17*a*, la luz proveniente de un objeto puntual O incide en una superficie esférica refractante convexa, con un radio de curvatura r. La superficie separa dos medios; el índice de refracción del que contiene a la luz incidente es n_1, mientras que la del medio que contiene a la luz refractada es n_2. El diagrama podría representar la luz que incide en una pequeña región de una esfera de vidrio; adviértase que la imagen real se forma dentro del vidrio (medio 2). Aunque, a menudo, no encontramos este tipo de imágenes, conocer las creadas por superficies esféricas refractantes es esencial cuando hablemos de lentes delgados en la sección 40-5.

En la figura 40-17*b*, una superficie cóncava origina una imagen virtual cuando $n_1 < n_2$; la luz en el medio 2 diverge como si procediera del punto de imagen I. La figura 40-17*c* muestra una superficie que es nuevamente cóncava respecto a la luz incidente, sólo que ahora $n_1 > n_2$ y se forma una imagen real.

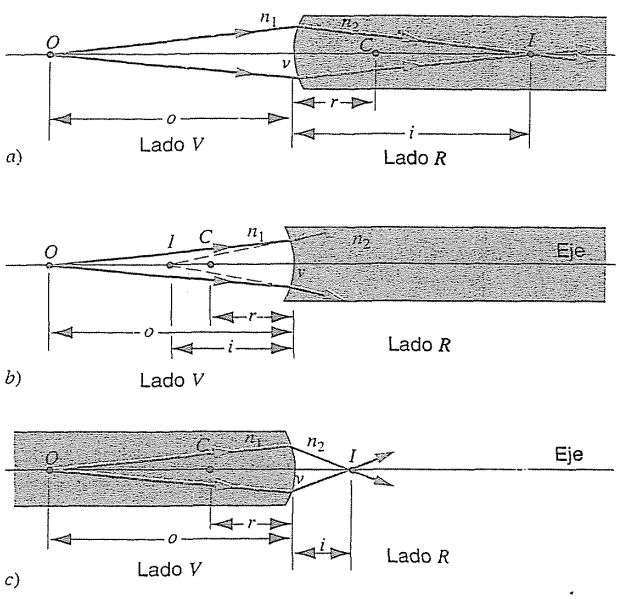


FIGURA 40-17. *a*) Una imagen real de un objeto puntual se obtiene por refracción en una frontera esférica convexa entre dos medios; en este caso, $n_2 > n_1$. *b*) Una imagen virtual se obtiene por refracción en una frontera esférica cóncava cuando $n_2 > n_1$. *c*) Lo mismo que *b*), salvo que $n_2 < n_1$. En este caso se produce una imagen real.

Como probaremos más adelante, la distancia de la imagen i se relaciona con la distancia del objeto o, con el radio de curvatura r y con dos índices de refracción según

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \qquad (40\text{-}10)$$

Esta ecuación individual, con las convenciones apropiadas de signos, basta para analizar las superficies convexas y cóncavas. La única restricción, al igual que la de los espejos esféricos es que los rayos sean paraxiales.

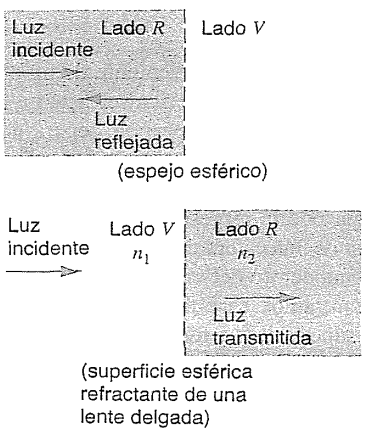


FIGURA 40-18. Se forman imágenes reales en el mismo lado que la luz incidente en el caso de los espejos, pero en el lado opuesto tratándose de superficies refractantes y de lentes.

Las convenciones de signos que se utilizan en la ecuación 40-10 se resumen en la figura 40-18 y se comparan con las de un espejo esférico. Para que una imagen real se forme por la luz convergente originada en la superficie, debe aparecer en el lado de la superficie opuesta a la luz incidente. A este lado se le llama lado R. Las imágenes virtuales, como se observa en la figura 40-17*b*, se forman en el mismo lado que la luz incidente, al que designamos como lado V. Por convención el radio de curvatura es positivo si el centro de la curvatura C se encuentra en el lado R (como en la Fig. 40-17*a*) y negativo si C está ubicado en el lado V (como en las Figs. 40-17*b* y 40-17*c*. La distancia de los objetos es positiva para objetos reales (en el lado V), mientras que la de las imágenes es positiva con imágenes reales (en el lado R). La distancia de la imagen i es positiva en las figuras 40-17*a* y 40-17*c*; i, negativa en la figura 40-17*b*.

PROBLEMA RESUELTO 40-4. Localice la imagen para la geometría de la figura 40-17*a*, suponiendo que el radio de curvatura r sea 11 cm, $n_1 = 1.0$ y $n_2 = 1.9$. Suponga que el objeto está 19 cm a la izquierda del vértice v.

Solución Al resolver la ecuación 40-10 para n_2/t y al sustituir los valores dados, obtenemos

$$\frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r} - \frac{n_1}{o} = \frac{1.9 - 1.0}{+11\text{ cm}} - \frac{1.0}{+19\text{ cm}}.$$

Nótese que r es positivo porque el centro de curvatura C de la superficie en la figura 40-17*a* se halla en el lado R. Si resolvemos la ecuación anterior para i, obtenemos

$$i = +65\text{ cm}.$$

El resultado anterior concuerda con las convenciones de signos de la figura 40-17*a*. En realidad, la luz pasa por el punto de imagen I, de modo que la imagen es real, como lo indica el signo positivo que encontramos con i. Además recuerde que n_1 (= 1.0 en este caso) siempre se refiere al medio en el lado de la superficie de donde proviene la luz.

PROBLEMA RESUELTO 40-5. Un pez nada a lo largo de un diámetro horizontal y está a 10 cm del lado de una pecera esférica de 15 cm de radio (Fig. 40-19). Suponga que el índice de refracción del agua es $n_1 = 1.33$ y determine la ubicación del pez desde el punto de

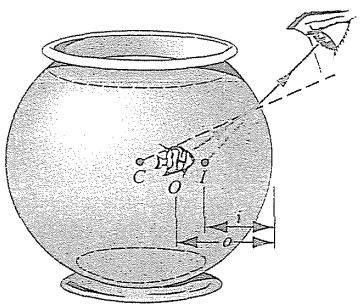


FIGURA 40-19. Problema resuelto 40-5. Nótese que el rayo proveniente de O se inclina y se aleja de la normal (indicada por la línea punteada), de acuerdo con la ley de Snell.

vista de un observador. Suponga que la pecera es tan delgada que puede despreciarse la refracción a causa del vidrio.

Solución De acuerdo con las convenciones de signos, en la geometría de la figura 40-19 tomamos que o es positivo porque el objeto se halla en el lado V de la superficie esférica y que r es negativo porque C está en el lado V. Utilizamos la ecuación 40-10 con $n_2 = 1$, que resolvemos para conseguir

$$\frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r} - \frac{n_1}{o} = \frac{1 - 1.33}{-15\text{ cm}} - \frac{1.33}{10\text{ cm}}.$$

Y al resolver encontramos

$$i = -9.0\text{ cm}.$$

En otras palabras, el pescado parece hallarse más cerca del lado de la pecera de lo que realmente está.

Obtención de la fórmula de superficies refractantes

La figura 40-20 muestra una fuente puntual O cerca de una superficie esférica refractante de radio r. Un rayo proveniente de O choca contra la superficie en v con una incidencia normal y penetra en el medio 2 por el centro de curvatura C. Este rayo crea un eje adecuado para nuestro cálculo. Un segundo rayo, que forma un ángulo pequeño pero arbitrario α con el eje y choca contra la superficie refractante en a, se refracta en conformidad con

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2.$$

El rayo refractado intersecta al primer rayo en I, localizando así la imagen de O.

Igual que en la obtención de la ecuación de espejos, utilizamos el teorema de que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. Al aplicarlo esto a los triángulos COa e ICa obtenemos

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad \text{y} \quad \beta = \theta_2 + \gamma. \tag{40-11}$$

Como lo hicimos en la sección 40-3, suponemos que todos los rayos son paraxiales; por eso los ángulos (β, γ, θ_1, θ_2) son pequeños y el ángulo puede reemplazar al seno de cada uno de ellos. Esto nos permite escribir la ley de refracción en los siguientes términos:

$$n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2. \tag{40-12}$$

Efectuados algunos arreglos, la combinación de las ecuaciones 40-11 y 40-12 nos da

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta. \tag{40-13}$$

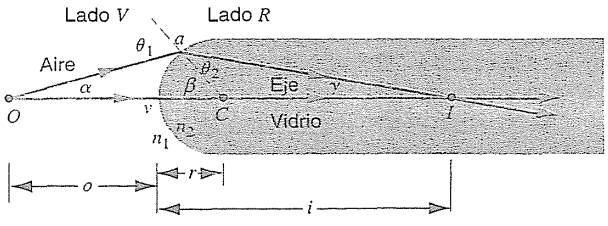


FIGURA 40-20. Un objeto puntual O produce una imagen puntual real I tras la refracción en una superficie esférica convexa entre dos medios.

Midiendo en radianes los ángulos α, β, y γ en la figura 40-20 son

$$\alpha \approx \frac{s}{o}, \quad \beta = \frac{s}{r}, \quad \text{y} \quad \gamma \approx \frac{s}{i}, \tag{40-14}$$

donde s es la longitud de arco av. Sólo la segunda de las ecuaciones anteriores es exacta. Las dos restantes son aproximadas porque ni I ni O son el centro de círculos de los cuales av es un arco. Sin embargo, para los rayos paraxiales (α bastante pequeño) las inexactitudes de las ecuaciones 40-14 pueden reducirse cuanto se quiera.

Las sustituciones de las ecuaciones 40-14 en la 40-13 producen directamente la ecuación 40-10.

40-5 LENTES DELGADAS

Hay muchos ejemplos comunes de la refracción de la luz por una lente. El cristalino del ojo enfoca la luz sobre la retina y las lentes correctivas de los anteojos o de los lentes de contacto compensan las deficiencias de la vista. Las lentes multielementos de una cámara enfocan la luz sobre la película. En la presente sección vamos a estudiar las propiedades de esas lentes.

En la mayoría de los fenómenos de refracción interviene más de una superficie refractante. Esto se observa inclusive en un lente de contacto, donde la luz pasa primero del aire al vidrio y luego del vidrio al ojo. Aquí consideramos sólo el caso especial de una *lente delgada,* es decir, el espesor de la lente es pequeño comparado con la distancia del objeto o, la distancia de la imagen i, o el radio de curvatura r_1 y r_2 de una de las dos superficies refractantes. En este tipo de lente —como probaremos más adelante en la sección—, dichas magnitudes se relacionan por medio de

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}, \tag{40-15}$$

donde la longitud focal f de la lente está dada por

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{40-16}$$

Las ecuaciones 40-15 y 40-16 son aproximaciones válidas sólo con lentes delgadas y rayos paraxiales. Nótese que la ecuación 40-15 es la misma que utilizamos con los espejos esféricos. A la ecuación 40-16 a menudo se le llama *ecuación de fabricante de lentes:* relaciona la longitud focal de la lente con el índice de refracción n de material de que está hecho y los radios de curvaturas de ambas superficies.

En la ecuación 40-16, r_1 es el radio de curvatura de la superficie de la lente en que la luz incide primero y r_2 es la de la segunda superficie. La ecuación se emplea en casos en que una lente con un índice de refracción n está inmersa en el aire. Si la introducimos en un medio cuyo índice de refracción no es la unidad, la ecuación conserva su validez con tal que reemplacemos n en esa fórmula por $n_{\text{lente}}/n_{\text{medio}}$.

El aumento lateral de una lente delgada está dado por la misma fórmula que la de un espejo esférico,

$$m = -\frac{i}{o}. \tag{40-17}$$

Más adelante en la sección vamos a obtener el resultado anterior.

Convenciones de signos

Las convenciones de signos para o, i, r_1 y r_2 se asemejan a las de los espejos esféricos y de las superficies refractantes (Fig. 40-18). En la figura 40-21 se ilustran estos signos. Igual que antes, tenemos un lado R y un lado V.

1. Los radios de curvatura r_1 (referentes a la primera superficie a la que llega la luz) y r_2 (referentes a la segunda superficie) son positivos si los centros correspondientes de curvatura se hallan en el lado R. Los radios son negativos si los centros correspondientes de curvatura están en el lado V. En la figura 40-21*a*, el centro de curvatura C_1 se encuentra en el lado R, de modo que r_1 es positivo y C_2 se encuentra en el lado V, de manera que r_2 es negativo. La observación atenta de ecuación 40-16 revela que, cuando $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$, la longitud focal f siempre es positiva. A esta lente se le llama *convergente*; una lente más gruesa en el centro que en los bordes, siempre será convergente al introducirlo en un medio con un índice de refracción menor que el de la lente.

En la figura 40-21*b*, C_1 se halla en el lado V, y C_2 en el lado R. Por consiguiente, r_1 es negativo y r_2 positivo. En este caso, la ecuación 40-16 indica que f siempre es negativo. A esta lente se le llama *divergente*; una lente que es más delgada en el centro que en los bordes siempre será divergente al introducirla en un medio con menor índice de refracción.

2. La distancia del objeto o es positiva si el objeto es real y está situado en el lado V de la lente, como se aprecia en las figuras 40-21*a* y 40-21*b*. La luz proveniente de un objeto real es divergente cuando choca contra la lente. También es posible hacer que una luz convergente choque contra la lente, como se ve en la figura 40-21*c*. En este caso, la luz convergente formaría un ángulo O en el lado R del lente si éste no estuviera presente; entonces tendremos que la imagen es un objeto virtual y que o es negativa.

3. La distancia de la imagen i es positiva si la imagen (real) está en el lado R de la lente, como se aprecia en las figuras 40-21*a* y 40-21*c*; en cambio, i será negativa si la imagen (virtual) se halla en el lado V, como se ve en la figura 40-21*b*.

4. De acuerdo con la ecuación 40-17, el aumento es negativo cuando tanto i como o son positivas como en la imagen 40-21*a*, correspondiente a una imagen *invertida*. En el caso de una imagen recta, como la de las figuras 40-21*b* y 40-21*c*, el aumento es positivo porque o e i tienen signo positivo. En el caso descrito en la figura 40-21*b*, o es positiva e i es negativa; en cambio, en la figura 40-21*c* o es negativa, e i positiva.

En contraste con un espejo esférico o con una superficie esférica refractante, una lente tiene *dos* puntos focales. En una lente delgada, los dos puntos focales se encuentran a igual distancia f de la lente a ambos lados de la lente.

Cuando un objeto puntual está situado en *el primer punto focal* F_1, una luz paralela sale de la lente, como se señala en la figura 40-22*a*. En el caso de una lente divergente (Fig. 40-22*b*), el objeto puntual es un objeto virtual. La luz convergente, que habría sido enfocada en F_1 si la lente no estuviese allí, es desenfocada en luz paralela por la lente divergente. El *segundo punto focal* F_2 es aquel donde se enfoca la luz paralela (o parece enfocarse) por medio de la lente, como se observa en la fi-

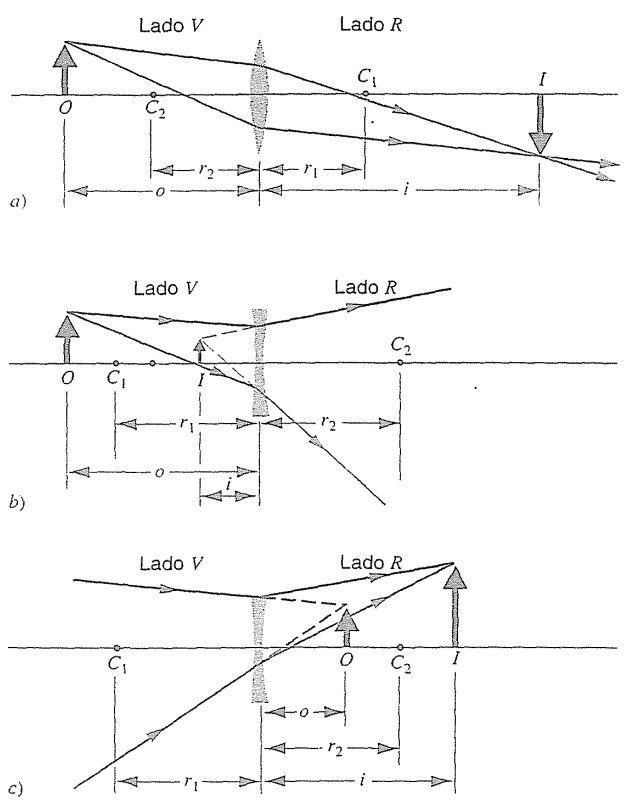


FIGURA 40-21. *a)* Una imagen real invertida se forma con una lente convergente. Ésta tiene una longitud focal positiva y es más gruesa en el centro que en los bordes. *b)* Una imagen virtual recta se forma con una lente divergente. Éste tiene una longitud focal negativa y es más delgada en el centro que en los bordes. *c)* La luz convergente da origen a un objeto virtual en O. Esta lente divergente produce una imagen real recta en I.

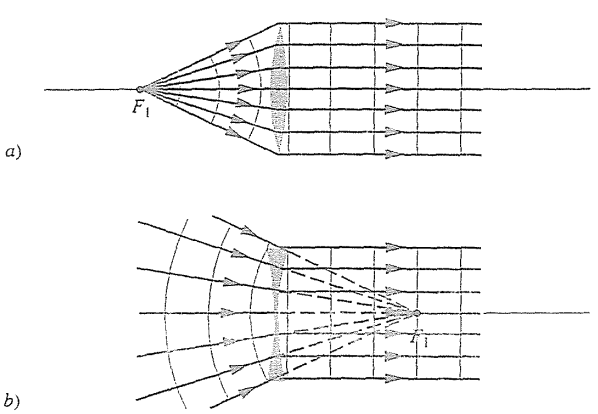


FIGURA 40-22. *a)* Cuando un objeto puntual se encuentra en el primer punto focal F_1 de una lente convergente, ésta emite una luz paralela. *b)* Un objeto puntual virtual origina luz paralela en el caso de una lente divergente.

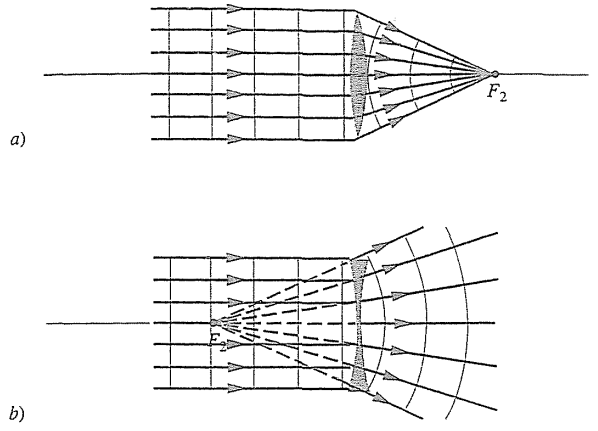


FIGURA 40-23. *a*) Cuando la luz paralela incide en una lente convergente, es enfocada en el segundo punto focal F_2. *b*) Cuando la luz paralela incide en una lente convergente, parece salir del segundo punto focal.

gura 40-23. Nótese que, al comparar las figuras 40-22 y 40-23, la ubicación de los puntos focales primero y segundo en una lente convergente se opone a la de una lente divergente.

En las figuras 40-22 y 40-23 todos los rayos contienen el mismo número de longitudes de onda, esto es, tienen la misma *longitud de trayectoria óptica* (Ec. 39-16). Obsérvese cómo las diferentes longitudes geométricas de las trayectorias de los rayos en la lente (donde la velocidad de la luz es menor que en el aire) transforman los frentes de onda esféricos en planos o los frentes de ondas planos en esféricos.

Trazado de rayos

Como en el caso de los espejos esféricos, mediante un método gráfico con unos cuantos rayos básicos conviene localizar la imagen formada por una lente delgada. La figura 40-24 contiene tres rayos que pueden aplicarse a una imagen real formada por una lente convergente (Fig. 40-24*a*), a una imagen virtual formada por una lente convergente (Fig. 40-24*b*) y a una imagen virtual formada por una lente divergente (Fig. 40-24*c*):

1. Un rayo (rayo 1 de la Fig. 40-24) que cruza (o, al ser extendido, parece cruzar) el primer punto focal F_1 sale de la lente paralelo al eje.

2. Un rayo (rayo 2 de la Fig. 40-24) paralelo al eje atraviesa (o, al ser extendido, parece atravesar) el segundo punto focal F_2.

3. Un rayo (rayo 3 en la Fig. 40-24) que incide en el centro de la lente pasa por ella sin desviarse, porque cerca de su centro esta lente se comporta como un trozo plano de vidrio con lados paralelos; éstos no cambian la dirección del rayo.

Cualquiera de los dos rayos anteriores sirven para localizar la imagen; el tercero se usa como comprobación. Nótese en la figura 40-24 que, en los tres rayos, suponemos que la refracción tiene lugar en un plano. En la posición de la lente. Esto puede hacerse en una lente delgada solamente.

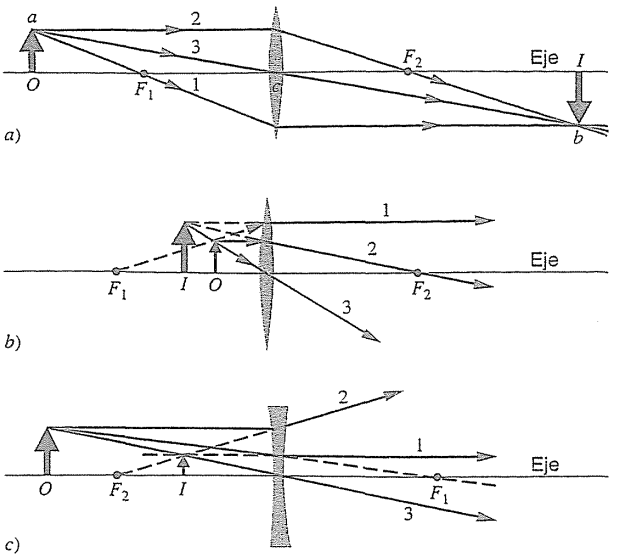


FIGURA 40-24. Tres rayos (1, 2, 3) que pueden usarse para localizar la imagen formada por *a*) un lente convergente (imagen real), *b*) una lente convergente (imagen virtual) y *c*) una lente divergente (imagen virtual).

Obtención de las fórmulas para lentes delgadas

Nuestro plan consiste en examinar cada superficie de la lente por separado, usando la imagen creada por la primera superficie como un objeto en la segunda.

La figura 40-25*a* muestra esa "lente" de vidrio grueso, con una longitud L, cuyas superficies están fijas a los radios r_1 y r_2. Un objeto puntual O se coloca cerca de la superficie izquierda como se indica. Un rayo que sale de O en el eje no se desvía al entrar en la lente ni al salir de ella.

Un segundo rayo que sale de O en un ángulo α con el eje incide contra la superficie en el punto a, se refracta y llega a la segunda superficie en el punto b. El rayo vuelve a refractarse y cruza el eje en I, que por ser la intersección de los dos rayos provenientes de O es la imagen del punto O, formado tras la refracción en dos superficies.

En la figura 40-25*b* se muestra la primera superficie, que forma una imagen virtual de O en I'. Para localizar I' utilizamos la ecuación 40-10, con $n_1 = 1$ y $n_2 = n$:

$$\frac{1}{o} + \frac{n}{i'} = \frac{n-1}{r_1},$$

o, al tener en cuenta que i' es negativa,

$$\frac{1}{o} - \frac{n}{|i'|} = \frac{n-1}{r_1}. \qquad (40\text{-}18)$$

En la figura 40-25*c* se muestra la segunda superficie. Un observador en el punto b, que ignore la existencia de la primera superficie, pensaría que la luz que llega a ese punto proviene del punto I' en la figura 40-25*b* y que la región a la izquierda de la superficie está llena con vidrio. Así pues, la imagen (vir-

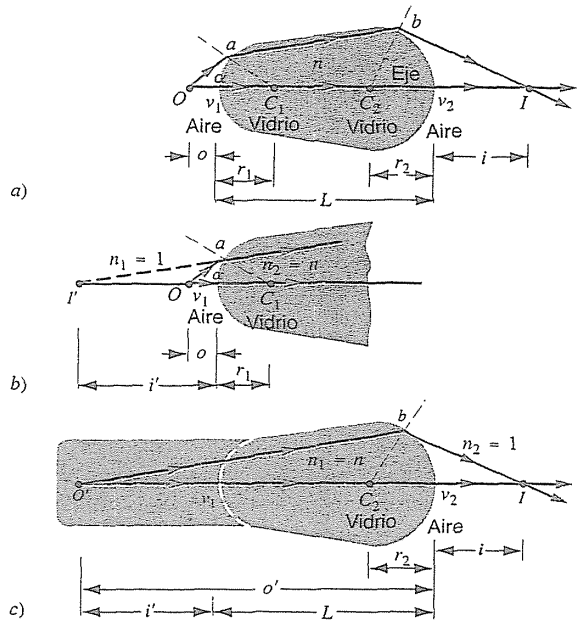


FIGURA 40-25. *a*) Dos rayos procedentes de O forman una imagen real en I tras la refracción en dos superficies esféricas; la primera es convergente y la segunda, divergente. *b*) La primera y la segunda superficies se muestran por separado. Para mayor claridad se exageró mucho la escala vertical.

tual) I', formada por la primera superficie, sirve de objeto real O' a la segunda. La distancia de este objeto respecto a la segunda superficie es

$$o' = |i'| + L. \tag{40-19}$$

Al aplicar la ecuación 40-10 a la segunda superficie, introducimos $n_1 = n$ y $n_2 = 1$ porque el objeto se comporta como si estuviera incrustado en vidrio. Si empleamos la ecuación 40-19, la ecuación 40-10 queda así

$$\frac{n}{|i'| + L} + \frac{1}{i} = \frac{1 - n}{r_2}. \tag{40-20}$$

Ahora, supongamos que el espesor L de la "lente" de la figura 40-25*a* es tan pequeño que podemos despreciarlo de él en comparación con otras magnitudes lineales de la figura (como o, i, o', i', r_1 y r_2). En la siguiente exposición realizamos esta *aproximación de lente delgada*. Al hacer $L = 0$ en la ecuación 40-20 obtenemos

$$\frac{n}{|i'|} + \frac{1}{i} = -\frac{n - 1}{r_2}. \tag{40-21}$$

La adición de las ecuaciones 40-18 y 40-21 nos da

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{40-22}$$

La definición del lado derecho de la ecuación anterior como $1/f$ produce directamente las ecuaciones 40-15 y 40-16, con lo cual se completa la demostración.

Si queremos obtener la ecuación 40-17 para el aumento lateral, haremos referencia a la figura 40-24*a*. Los triángulos rectángulos acO y bcI son semejantes, porque ambos ángulos acO y bcI son iguales. Para los lados correspondientes de los triángulos semejantes obtenemos

$$\frac{bI}{aO} = \frac{cI}{cO}. \tag{40-23}$$

El lado derecho de la expresión anterior es simplemente i/o, y el izquierdo $-m$, donde el signo negativo indica que la imagen está invertida. Con tales sustituciones, la ecuación 40-23 se reduce directamente a la ecuación 40-17.

PROBLEMA RESUELTO 40-6. Las lentes de la figura 40-21 tienen radios de curvatura de una magnitud de 42 cm y están hechas de vidrio, con $n = 1.65$. Calcule sus longitudes focales.

Solución Como C_1 se halla en el lado R del lente en la figura 40-21*a*, r_1 es positivo (= +42 cm). Y como C_2 se encuentra en la lado V, r_2 es negativo (= −42 cm). La sustitución en la ecuación 40-16 nos da

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1.65 - 1)\left(\frac{1}{+42\text{ cm}} - \frac{1}{-42\text{ cm}}\right)$$

o

$$f = +32\text{ cm}.$$

Una longitud focal positiva indica que, en concordancia con lo que hemos venido diciendo, la luz paralela incidente converge después de la refracción para crear un foco real.

En las figuras 40-21*b* y 40-21*c*, C_1 se halla en el lado V de la lente, de manera que r_1 es negativo (= −42 cm). Puesto que C_2 es positivo (= +42 cm), la ecuación 40-16 produce

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1.65 - 1)\left(\frac{1}{-42\text{ cm}} - \frac{1}{+42\text{ cm}}\right)$$

o bien

$$f = -32\text{ cm}.$$

PROBLEMA RESUELTO 40-7. Un objeto está 38 cm delante de una lente divergente de longitud focal −24 cm. Encuentre la ubicación y el aumento lateral de la imagen.

Solución Usamos la ecuación 40-15 y obtenemos

$$\frac{1}{+38\text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{-24\text{ cm}}$$

o

$$i = -15\text{ cm}.$$

El aumento es

$$m = -\frac{i}{o} = -\frac{-15\text{ cm}}{+38\text{ cm}} = +0.39.$$

La figura 40-24*c* ilustra la solución gráfica del problema. El lector se percatará de que la ubicación, el tamaño y la orientación de la imagen son consistentes con los resultados del cálculo.

Sistemas de dos lentes

Un espejo o lente individual rara vez es un dispositivo óptico útil. En instrumentos como los binoculares, los telescopios, los microscopios y las cámaras, las imágenes se forman por una combinación de varias lentes o espejos. En esta sección

vamos a estudiar las imágenes formadas por sistemas que contienen dos lentes.

A fin de analizar la formación de imágenes mediante un sistema de dos lentes, vamos a considerar las lentes una a la vez como si la otra no existiera, tomando la *imagen* formada por una lente como el *objeto* de la siguiente. Aplicaremos las fórmulas antes obtenidas en el caso de la lente delgada (Ecs. 40-15 y 40-17), teniendo en cuenta las convenciones de signos en ambos casos. En particular, recuerde lo siguiente:

> *Cuando la luz divergente que proviene de una imagen formada por una lente incide contra la siguiente, tratamos la imagen como un* objeto real *en la segunda lente. Cuando la luz convergente que proviene de la imagen formada por una lente incide contra el siguiente elemento, tratamos la imagen como un* objeto virtual *en la segunda lente.*

El aumento lateral total m_t del sistema de dos lentes es igual al producto de los aumentos de cada uno de ellos:

$$m_t = mm', \tag{40-24}$$

donde m y m' representan los aumentos laterales de los dos lentes.

Es fácil generalizar estos métodos a los sistemas de un lente y de un espejo o a los sistemas con más de dos componentes.

PROBLEMA RESUELTO 40-8. Dos lentes convergentes idénticas de longitudes focales $f = f' = +15$ cm están separadas por una distancia d de 6 cm, como se muestra en la figura 40-26. Se pone una fuente luminosa a una distancia de $o = 10$ cm de la primera lente. Localice la imagen final.

Solución Comenzamos por localizar la imagen empleando un diagrama de rayos, como el de la figura 40-26. Los rayos 2 y 3 procedentes del objeto O se refractan como se indica por la primera lente; extendidos hacia atrás, muestran el lugar de la imagen (virtual) I, producida por la primera lente. La imagen actúa entonces como el objeto O' de la segunda lente y los rayos 2′ y 3′ indican la posición de la imagen final I, que está invertida y es real.

Al aplicar la ecuación 40-15, podemos determinar la posición de la primera imagen:

$$\frac{1}{+10\text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{+15\text{ cm}}$$

o

$$i = -30\text{ cm}.$$

Es decir, la imagen es virtual y está formada a 30 cm de la lente en su lado *V*. Cuando la tratamos como el objeto O' de la segunda lente, la distancia del objeto o' es $|i| + d = 30\text{ cm} + 6\text{ cm} = 36\text{ cm}$. Nótese que, aunque I es la imagen *virtual* de la primera lente, O' es un objeto *real* de la segunda, porque la luz *divergente* sale de este objeto y choca contra la segunda lente.

Al aplicar de nuevo la ecuación 40-15, obtenemos

$$\frac{1}{+36\text{ cm}} + \frac{1}{i'} = \frac{1}{+15\text{ cm}}$$

o bien

$$i' = +26\text{ cm},$$

correspondiente a una imagen real en el lado R de la segunda lente, tal como se señala en la figura 40-26.

PROBLEMA RESUELTO 40-9. El sistema óptico de la figura 40-27 consta de dos lentes, con longitudes focales $f = +12$ cm y $f' = -32$ cm, separados por una distancia de $d = 22$ cm. Un objeto luminoso se coloca a 18 cm de la primera. Localice la imagen final producida por este sistema.

Solución Una construcción gráfica que utiliza un diagrama de rayos se observa en la figura 40-27. Una imagen real I de la primera lente se formaría a la derecha de la segunda. La luz que forma esta imagen converge al incidir contra la segunda lente, por lo cual la tratamos como un objeto virtual O' de la segunda lente.

Respecto a la primera lente, la ecuación 40-15 nos da

$$\frac{1}{+18\text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{+12\text{ cm}}$$

o

$$i = +36\text{ cm}.$$

La imagen real se formaría a 36 cm de la primera lente, como se indica. La distancia o' del objeto virtual O' a la segunda lente tiene la magnitud $i - d$, o sea 36 cm −22 cm = 14 cm. Como O' es un objeto virtual, tomamos la distancia o' como negativa. Ahora con la segunda lente la ecuación 40-15 nos da

$$\frac{1}{-14\text{ cm}} + \frac{1}{i'} = \frac{1}{-32\text{ cm}}$$

o

$$i' = +25\text{ cm}.$$

la imagen real I' se forma en el lado R de la segunda lente.

PROBLEMA RESUELTO 40-10. El objeto de la figura 40-27 tiene una altura h de 2.4 cm. Encuentre la altura de la imagen.

Solución Buscamos el aumento lateral del sistema compuesto. Una vez más, tratamos este último como dos sistemas individuales, y el

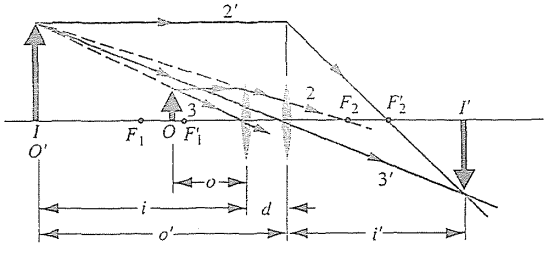


FIGURA 40-26. Problema resuelto 40-8.

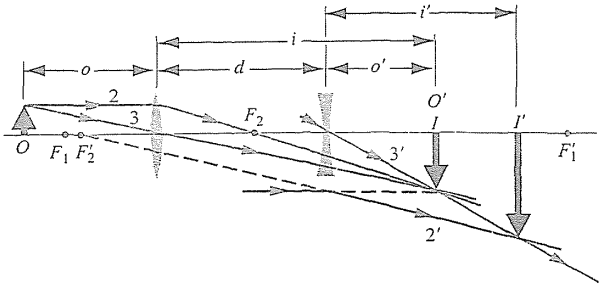


FIGURA 40-27. Problemas resueltos 40-9 y 40-10.

aumento lateral total m_t del sistema combinado es el producto de los aumentos laterales m y m' de cada lente:

$$m_t = mm' = \left(-\frac{i}{o}\right)\left(-\frac{i'}{o'}\right) = \left(-\frac{+36\text{ cm}}{+18\text{ cm}}\right)\left(-\frac{+25\text{ cm}}{-14\text{ cm}}\right)$$
$$= -3.57,$$

donde hemos utilizado los valores de las distancias del objeto y de la imagen que calculamos en el problema resuelto 40-9. La altura h_f de la imagen final es

$$h_f = m_t h = (-3.57)(2.4\text{ cm}) = -8.6\text{ cm}.$$

El valor negativo nos recuerda que la imagen final está invertida respecto al objeto original.

40-6 INSTRUMENTOS ÓPTICOS

El ojo humano es un órgano de una extraordinaria eficacia, pero su dominio puede ampliarse en muchas formas mediante instrumentos ópticos como los anteojos o los lentes de contacto, las lupas simples, los proyectores de películas, las cámaras (entre ellas las de televisión), los microscopios y los telescopios. En muchos casos estos aparatos amplían el alcance de la visión más allá del límite visible; un ejemplo de ello lo constituye las cámaras infrarrojas de los satélites y los microscopios de rayos X.

En casi todos los casos de los complejos instrumentos ópticos modernos, las fórmulas de espejos y de lentes delgados sólo se emplean de manera aproximada. En los microscopios de laboratorio, la lente no puede considerarse "delgada". En la generalidad de los instrumentos ópticos, las lentes son compuestas, es decir, están hechos de varios elementos.

En esta sección vamos a estudiar los instrumentos ópticos diseñados para producir una imagen amplificada; queremos que algo *parezca* más grande de lo que percibe el ojo sin ayuda. El aumento lateral es una medida inexacta del tamaño de una imagen producida por un sistema óptico. Éste podría producir una imagen agrandada ($|m| > 1$), pero puede colocar la imagen tan lejos de nosotros que el objeto que percibiríamos sería en realidad menor que el objeto. A pesar de que el aumento lateral puede ser mayor que la unidad y, por lo mismo, el tamaño de la imagen ser más grande que el del objeto, el resultado neto es lo que el observador llamaría imagen "amplificada".

La lupa simple

La figura 40-28*a* representa la formación de una imagen por el ojo humano. El tamaño de ella en la retina depende del ángulo θ subtendido en el ojo por el objeto. Tratándose de objetos pequeños situados a una distancia relativamente grande del ojo, el ángulo θ puede aproximarse como

$$\theta \approx \frac{h}{d}, \qquad (40\text{-}25)$$

donde h es el tamaño del objeto y d la distancia entre éste y el ojo.

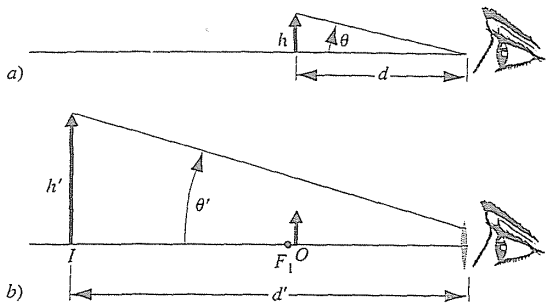


FIGURA 40-28. *a)* Un objeto de altura h situado a una distancia d del ojo subtiende un ángulo θ. *b)* Cuando se ve a través de una lente utilizado como lupa simple, la imagen I de altura h' se halla a una distancia d' y subtiende un ángulo θ' en el ojo.

En la figura 40-28*b*, el observador contempla el objeto a través de una lente que crea una imagen de tamaño lateral h' a una distancia d' del ojo. Una vez más, tratándose de ángulos pequeños, el tamaño angular aparente de la imagen percibida por el observador es

$$\theta' \approx \frac{h'}{d'}. \qquad (40\text{-}26)$$

Al observador la imagen vista a través de la lente le *parecerá* más grande que el objeto original, si subtiende un ángulo sólido mayor que el que subtiende el objeto. Así pues, al medir el tamaño de ella lo importante no es el aumento lateral m ($= h'/h$); es el *aumento angular* m_θ definido como

$$m_\theta = \frac{\theta'}{\theta}. \qquad (40\text{-}27)$$

En efecto, m_θ es la razón del tamaño de las dos imágenes en la retina, una con la lente y la otra sin ella.

El ojo humano normal puede enfocar la imagen nítida de un objeto sobre la retina, si el objeto O se halla en alguna parte desde el infinito (las estrellas, por ejemplo) hasta cierto punto denominado *punto cercano* P_n, que suponemos está a unos 25 cm del ojo. Si vemos un objeto más cerca que ese punto, la imagen retiniana percibida se vuelve borrosa. En condiciones normales la ubicación del punto cercano varía con la edad. Todos hemos escuchado historias sobre personas que afirman no necesitar anteojos, pero que leen el periódico extendiendo los brazos; su punto cercano va alejándose cada vez más. Localice su punto cercano aproximando esta página a los ojos, cada uno por separado, hasta alcanzar un sitio donde la imagen empiece a tornarse borrosa.

Tomamos como base de comparación el tamaño angular que un objeto presentaría si lo colocáramos en el punto cercano. Por tanto,

$$\theta = \frac{h}{25\text{ cm}}. \qquad (40\text{-}28)$$

Si ponemos el objeto en un sitio tal que se encuentre exactamente dentro del primer punto focal de una lente convergente como en la figura 40-28*b*, se formará una imagen virtual lejos de la lente. El aumento lateral m tiene la magnitud i/o,

y la distancia d' respecto a la imagen es i. Si tomamos la magnitud de todas las cantidades, el tamaño lateral de la imagen es

$$h' = mh = \frac{i}{o}h \tag{40-29}$$

y el tamaño angular es

$$\theta' = \frac{h'}{d'} = \frac{(i/o)h}{i} = \frac{h}{o} \approx \frac{h}{f}, \tag{40-30}$$

donde el último paso puede tomarse porque supusimos que el objeto iba a ser colocado cerca del punto focal. El aumento angular es

$$m_\theta = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{h/f}{h/25\text{ cm}}$$

o bien

$$m_\theta = \frac{25\text{ cm}}{f}. \tag{40-31}$$

La ecuación 40-31 ofrece el aumento angular de la *lupa simple,* que utiliza una sola lente. El "vidrio lupa" ordinario, que emplean los coleccionistas de estampillas y los actores que representan a Sherlock Holmes, es en realidad, una simple lupa. Para obtener un aumento angular grande, queremos que f sea lo más pequeña posible. En la práctica, un aumento angular aproximado de 10 es lo mejor que podemos hacer antes que las aberraciones de la lente empiecen a distorsionar la imagen. Las lentes de aumento más complejas, como el microscopio compuesto que estudiaremos en seguida, pueden tener aumentos angulares mucho mayores.

El microscopio compuesto

La figura 40-29 ofrece una versión de un microscopio compuesto de lente delgado, el cual sirve para ver objetos pequeños que están muy cerca de la lente objetivo del instrumento. El objeto O, de altura h, se coloca fuera del primer punto focal F_1 del lente objetivo, cuyo punto focal es f_{ob}. El objeto crea una imagen real invertida I de altura h', cuyo aumento lateral está dado por la ecuación 40-17, o sea

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{-s\tan\theta}{f_{ob}\tan\theta} = -\frac{s}{f_{ob}}. \tag{40-32}$$

Como de costumbre, el signo negativo indica una imagen invertida.

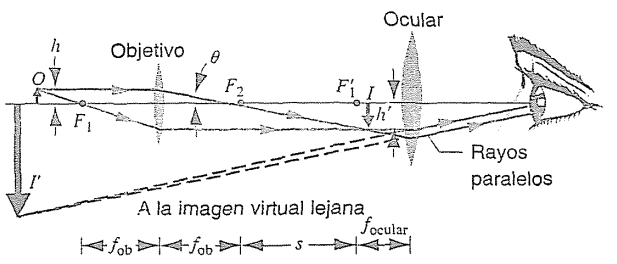


FIGURA 40-29. Versión de un microscopio de lentes delgadas (no dibujado a escala).

La distancia s (denominada *longitud de tubo*) se escoge de modo que la imagen I aparezca cerca del primer punto focal F_1' del ocular de este microscopio, el cual, entonces puede funcionar como una lupa simple como se explicó antes. Los rayos paralelos entran en el ojo y la imagen final I', aparece en el infinito. La amplificación final M resulta de la amplificación lineal m de la lente objetiva (Ec. 40-32) y de la amplificación angular m_θ del ocular de este miscroscopio (Ec. 40-31), es decir,

$$M = mm_\theta = -\frac{s}{f_{ob}}\frac{25\text{ cm}}{f_{ey}}. \tag{40-33}$$

Telescopio de refracción

Igual que los microscopios, los telescopios vienen en formas muy diversas. La que describimos a continuación es la del telescopio de refracción simple, el cual consta de una lente objetiva y de una ocular, ambos representados en la figura 40-30 por medio de lentes delgadas. En la práctica, cada lente puede ser un sistema compuesto como en los microscopios.

A primera vista, parecería que los arreglos de lentes en el telescopio y en el microscopio son semejantes. Pero los telescopios están diseñados para mirar objetos grandes desde muy lejos, como las galaxias, las estrellas y los planetas; los microscopios, en cambio, están diseñados para ver los objetos pequeños desde muy cerca. Nótese que en la figura 40-30 el segundo punto focal del objetivo F_2 coincide con el primero del ocular F_1', mientras que en la figura 40-29 estos puntos están separados por la longitud del tubo s.

En la figura 40-30, los rayos paralelos provenientes de un objeto distante inciden contra la lente objetivo, formando un ángulo θ_{ob} con el eje del telescopio y creando una imagen real invertida en el punto focal común F_2, F_1'. La imagen actúa como objeto del ocular y aparece una imagen virtual (invertida todavía) en el infinito. Los rayos que la definen forman un ángulo θ_{ocular} con el eje del telescopio.

El aumento angular m_θ del telescopio es $\theta_{ocular}/\theta_{ob}$. En los rayos paraxiales (cercanos al eje) puede escribirse $\theta_{ob} = h'/f_{ob}$ y $\theta_{ocular} = h'/f_{ocular}$, que nos da

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{ocular}}, \tag{40-34}$$

donde el signo negativo indica una imagen final invertida.

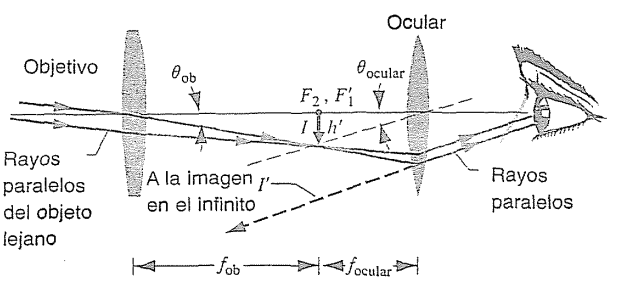


FIGURA 40-30. Versión de un telescopio de refracción de lentes delgadas (no dibujado a escala).

El aumento no es más que uno de tantos factores de diseño del telescopio astronómico y resulta fácil de conseguir. Un buen telescopio necesita *potencia de obtención de luz,* que determina la brillantez de la imagen. Esto es importante cuando se miran objetos tenues, entre ellos las galaxias distantes, y se logra haciendo el diámetro del lente objetivo lo más grande posible. El *campo visual* es otro parámetro importante. Un instrumento diseñado para la observación galáctica (campo visual estrecho) es muy distinto del diseñado para observar meteoros (campo visual ancho). Además, el diseñador debe tener en cuenta las aberraciones de la lente y del espejo como la *aberración esférica,* por ejemplo (las lentes y los espejos con superficies verdaderamente esféricas no producen imágenes nítidas) y la *aberración cromática* (en las lentes simples el índice de refracción y, por tanto, la longitud focal varían con la longitud de onda; así que aparecen imágenes borrosas que presentan colores no naturales).

Si queremos construir telescopios refractantes de diámetro mayor (para lograr una mejor eficiencia de obtención de luz), debemos hacer lentes más gruesas, las cuales aumentan las distorsiones y aberraciones causadas por la lente. Los telescopios refractantes más grandes, que se construyeron a fines del siglo XIX, tienen lentes aproximadamente de 1 m de diámetro. Los telescopios de reflexión, cuyo elemento objetivo es un espejo en vez de una lente, no experimentan tales distorsiones porque la luz se refleja contra la superficie frontal del espejo. Los más grandes tienen un diámetro de unos 10 m y, en consecuencia, su capacidad de obtención de luz es 100 veces más que los telescopios refractantes más grandes. Pueden construirse telescopios aún mayores combinando en una sola imagen la luz procedente de muchos espejos individuales.

A causa de la distorsión atmosférica, los telescopios ópticos situados en la Tierra tienen una capacidad limitada para producir imágenes nítidas; la turbulencia natural de la atmósfera deforma los frentes de onda (casi) planos que llegan a la Tierra desde objetos lejanos. Se ha logrado resolver este problema gracias a la invención de la *óptica de adaptación*: al sentir la distorsión atmosférica, la forma de un espejo flexible puede modificarse para compensar la distorsión y obtener así una imagen nítida. Otra manera de suprimir los efectos de la atmósfera consiste en poner el telescopio *arriba* de la atmósfera. En la figura 40-31 se muestra el Hubble Space Telescope, un telescopio refractante que en 1990 fue colocado en la órbita terrestre por medio de un transbordador espacial.

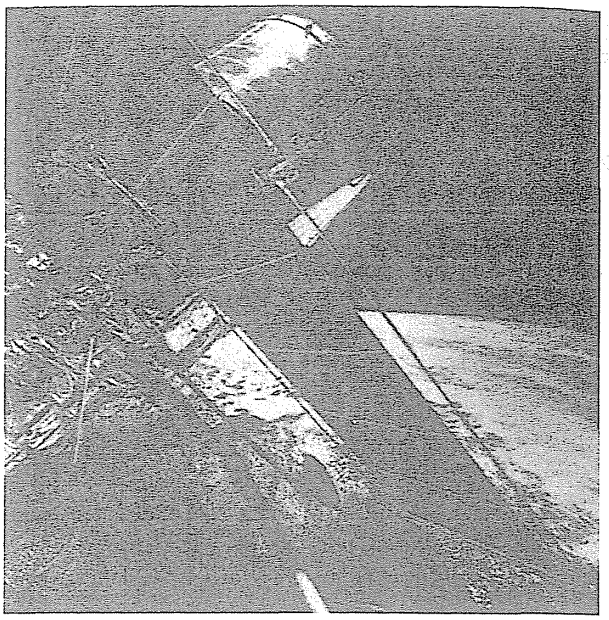


FIGURA 40-31. El Hubble Space Telescope.

OPCIÓN MÚLTIPLE

40-1 Formación de imágenes por medio de espejos y lentes

1. ¿Existe efectivamente un objeto virtual?
   A) No.
   B) Sí, pero sólo como un constructo matemático no físico.
   C) Sí, existe cuando los rayos luminosos se originan en un punto que no está allí.
   D) Sí, existe cuando los rayos luminosos convergentes chocan contra un dispositivo óptico antes de encontrarse en un punto.

40-2 Espejos planos

2. ¿Qué sucede con la imagen cuando nos alejamos de un espejo plano?
   A) Se aleja del espejo y se vuelve más pequeña.
   B) Se aleja del espejo, pero conserva el mismo tamaño.
   C) Conserva la misma distancia del espejo, pero se vuelve más pequeña.
   D) Conserva la misma distancia del espejo y también el mismo tamaño.
3. ¿Cuál es el tamaño mínimo del espejo necesario para que una persona de 6 pies de estatura logre contemplar una imagen íntegra?
   A) 6 ft B) 4.5 ft C) 3 ft
   D) Depende de la distancia a que la persona se encuentra del espejo.

40-3 Espejos esféricos

4. A menudo el espejo lateral de un automóvil tiene la advertencia: "Los objetos pueden estar más cerca de lo que parece". ¿Está la imagen *realmente más lejos* que el objeto?
   A) Sí, es más pequeña y está más lejos que el objeto.
   B) No, es más pequeña y está más cerca que el objeto.
   C) No, es más grande y está más cerca que el objeto.
   D) Sí, es más grande y está más lejos que el objeto.

5. Sin importar la distancia con cierto espejo, nuestra imagen aparece recta. ¿Qué tipo de espejo es éste?
   A) Cóncavo B) Convexo C) Plano
   D) De tipo B) o C)
   E) No se cuenta con suficiente información para contestar esta pregunta.
6. Delante de cierto espejo, usted se da cuenta de que su imagen parece agrandada. ¿Qué tipo de espejo es?
   A) Cóncavo B) Convexo C) Plano
   D) De tipo B) o C)
   E) No se cuenta con suficiente información para contestar esta pregunta.
7. Un espejo produce una imagen real en i a partir de un objeto real en $o > i$. ¿Qué puede concluir respecto a la longitud focal del espejo?
   A) $f < 0$ B) $0 < f < i$
   C) $i < f < o$ D) $o < f$

40-4 Superficies esféricas refractantes

8. La luz brilla a través de una burbuja esférica de aire debajo del agua. ¿Como qué tipo de dispositivo óptico funciona la burbuja?
   A) Convergente B) Divergente C) Plano
9. Un buzo con un casco de vidrio mira un pez según se aprecia en la figura 40-32.
   a) ¿Dónde se encuentra la imagen del pez en relación con su ubicación verdadera?
   A) Más cerca del buzo.
   B) Más lejos de buzo.
   C) A la misma distancia del buzo.
   D) La respuesta depende de la ubicación del pez.
   b) ¿Qué tamaño tiene la imagen en comparación con la del pez?
   A) Más grande B) Más pequeña C) Del mismo tamaño
   D) La respuesta depende de la ubicación del pez.

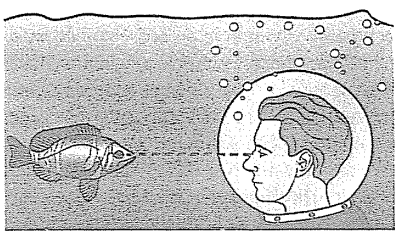


FIGURA 40-32. Pregunta de opción múltiple 9.

40-5 Lentes delgadas

10. Una persona miope (Ej. 40) lee sin dificultad un periódico a una distancia máxima de 1 m. ¿Qué longitud focal deberían tener sus lentes correctivos?
    A) Más de 2 m B) Más de 1 m
    C) Menos de 1 m D) Menos de 0.5 m
11. En la figura 40-33 aparecen tres personas que usan anteojos. ¿Cuál de ellas es miope? (Ej. 40.)

FIGURA 40-33. Pregunta de opción múltiple 11.

12. Una lámpara es un objeto real para una lente; una imagen de ella se proyecta sobre una pantalla.
    a) ¿Qué tipo de lente es ésta?
    A) Convergente B) Divergente
    C) De tipo A) o B)
    D) No se cuenta con suficiente información para contestar esta pregunta.
    b) ¿Qué tipo de imagen se produce?
    A) Real B) Recta C) Virtual
    D) Invertida lateralmente
13. Un objeto de personaje de caricatura se halla a la izquierda de una lente delgada; una imagen real aparece a la derecha (Fig. 40-33*a*). ¿Cuál rostro de la figura 40-34*b* muestra mejor la imagen?

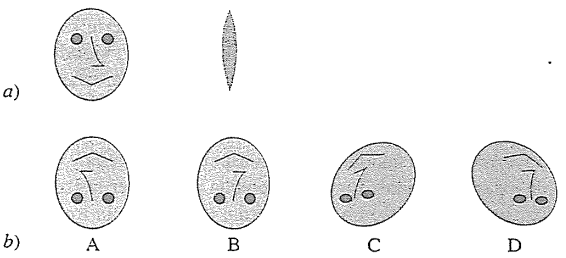


FIGURA 40-34. Pregunta de opción múltiple 13.

14. Una tarjeta opaca se sostiene arriba de la mitad inferior de una lente convergente, como se ve en la figura 40-35*a*. ¿Cuál representación de la figura 40-35*b* muestra mejor la imagen que aparece en la pantalla?

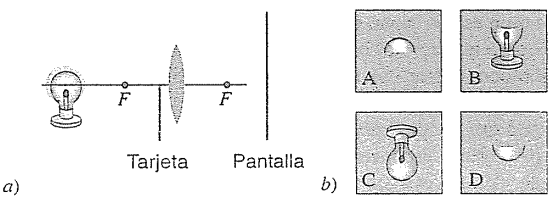


FIGURA 40-35. Pregunta de opción múltiple 14.

40-6 Instrumentos ópticos

15. ¿A qué distancia debe una lupa de longitud focal f estar de un objeto para ofrecer el máximo aumento *angular* (medido desde el centro del lente) con una imagen recta?
    A) $o < f$ B) $o \approx f$
    A) $f < o < 2f$ B) $2f < o$
    E) No importa; el aumento no depende de o.
16. Sostenemos una lupa de punto focal f a una distancia óptima de un objeto, a fin de obtener el aumento máximo. ¿A qué distancia debería el ojo encontrarse respecto a la luz para producir el máximo aumento angular?
    A) Lejos del vidrio
    B) Aproximadamente f
    C) Muy cerca del vidrio
    D) No importa; el aumento depende de la distancia respecto al vidrio.

PREGUNTAS

1. ¿Puede una imagen virtual fotografiarse exponiendo una película en el sitio de la imagen? Explique su respuesta.
2. Por la noche, en un cuarto iluminado, sopla un anillo de humo hacia un cristal de ventana. Si enfoca los ojos en él a medida que se acerca a la ventana, parecerá que atraviesa el cristal y que desaparece en la oscuridad. ¿Cómo explica esta ilusión óptica?
3. Al conducir un automóvil, a veces ve vehículos como las ambulancias con letras pintadas de modo que aparecen en forma normal cuando mira por el espejo retrovisor. Anote su nombre de manera que pueda leerlo así.
4. Hemos visto que un reflejo simple en un espejo plano se invierte a la derecha e izquierda. Por ejemplo, cuando conducimos carretera abajo, las letras de los letreros se invierte como si los miráramos por el espejo retrovisor. Con todo, viendo a través de ese espejo, parece que vamos por el carril derecho. ¿Por qué el espejo invierte los letreros y no los carriles? ¿O lo hace? Explique su respuesta.
5. Sabemos que, cuando vemos un espejo, la derecha y la izquierda están invertidas. La mano derecha parece ser la izquierda; si partimos el cabello en la izquierda, tendremos la impresión de lo que partimos en la derecha y así sucesivamente. ¿Se le ocurre un sistema de espejos que nos permita vernos como la gente nos ve? Si la respuesta es afirmativa, dibuje y pruebe su afirmación trazando algunos rayos típicos.
6. Diseñe un sistema de espejos planos que le permite mirar la parte posterior de su cabeza. Dibuje los rayos para probar su afirmación.
7. ¿Qué significa "longitud de camino óptico"? ¿Puede alguna vez ser menor que la longitud de camino geométrico? ¿Puede ser mayor?
8. En muchos autobuses urbanos un espejo convexo está colocado arriba de la puerta, al alcance de la vista del conductor. ¿Por qué no un espejo plano o cóncavo?
9. Los dentistas y los higienistas dentales utilizan un espejo pequeño con un largo mango para examinar los dientes de sus clientes. ¿Es el espejo cóncavo, convexo o plano y por qué?
10. ¿En qué condiciones un espejo esférico, que puede ser cóncavo o convexo, produce *a*) una imagen real, *b*) una imagen invertida y *c*) una imagen menor que el objeto?
11. ¿Podemos proyectar una imagen virtual sobre una pantalla?
12. Está usted viendo un perro desde una ventana de vidrio. ¿Dónde se encuentra la imagen del animal? ¿Es real o virtual? ¿Está recta o invertida? ¿Cuál es el aumento? (Sugerencia: piense en la ventana como el caso límite de un lente delgado donde se ha permitido que los rayos de curvatura se vuelvan infinitamente grandes.
13. En algunos automóviles, el espejo lateral de la derecha contiene la advertencia: "Los objetos son más grandes de lo que parecen". ¿Qué característica del espejo la exige? ¿Qué ventajas ofrece el espejo para compensar esta desventaja? ¿Los automóviles vistos a través de él parecen moverse con mayor o menor rapidez que si se reflejase en un espejo plano?
14. ¿Están los objetos de la pregunta 13 realmente más cerca de lo que parece? ¿Dónde se localiza la imagen?
15. Todos hemos visto las imágenes televisivas de un partido de béisbol tomadas con una cámara situada atrás de las segunda base. El lanzador y el bateador se hallan separados por una distancia de 60 ft, pero parecen estar mucho más cerca en la pantalla de televisión. ¿Por qué las imágenes vistas a través de una lente de telefoto aparecen reducidas en esta forma?
16. Una lente delgada asimétrica forma una imagen de un objeto puntual en su eje. ¿Cambia la ubicación de la imagen si invertimos la lente?
17. ¿Por qué una lente tiene dos puntos focales y un espejo solamente uno?
18. ¿En qué condiciones una lente delgada, que puede ser convergente o divergente, produce *a*) una imagen real, *b*) una imagen invertida y *c*) una imagen más pequeña que el objeto?
19. Un conductor quiere utilizar una bolsa de plástico llena de aire como lente convergente con visibilidad debajo del agua. Dibuje una sección transversal adecuada para esta bolsa.
20. En relación con la figura 40-23*a*, todos los rayos procedentes del mismo frente de onda en la onda incidente siguen la misma trayectoria óptica hacia el punto de la imagen. Explique esto a partir del principio de Fermat (Cap. 39).
21. ¿Por qué la aberración cromática ocurre en lentes simples, y no en espejos?
22. Considere varias aberraciones de lente. ¿Es posible, en teoría, construir una lente sin aberración alguna (por ejemplo, limando las superficies) cuando se enfoca la luz monocromática?
23. Un espejo cóncavo y una lente convergente tienen la misma longitud focal en el aire. ¿La tienen también cuando los introducimos en el agua? De no ser así, ¿cuál de ellos tienen mayor longitud focal?
24. ¿En qué condiciones una lente delgada tendrá un aumento lateral *a*) de -1 y *b*) de $+1$?
25. ¿Qué relación existe entre la longitud focal de una lente delgada de vidrio para luz azul y una lente para luz roja, suponiendo que la lente sea *a*) divergente y *b*) convergente?
26. ¿Depende la longitud focal de la lente del medio donde se halla? ¿Es posible que una lente opere como lente convergente en un medio y como divergente en otro?
27. ¿Se aplican los siguientes enunciados a una lente de vidrio en el aire? *a*) Una lente más gruesa en el centro que en los bordes es divergente con luz paralela. *b*) Una lente más gruesa en los bordes que en el centro es divergente con luz paralela?
28. ¿En qué condiciones se volvería infinito el aumento lateral ($m = -i/o$) en las lentes y en los espejos? ¿Ofrece esta condición algún interés práctico?
29. ¿Por qué el aumento de una lupa simple (véase la demostración que da origen a la Ec. 40-31) se define en función de los ángulos, y no del tamaño de la imagen/objeto?
30. Los anteojos ordinarios no amplían la imagen, y una lupa simple sí. ¿Qué función tienen entonces los anteojos?
31. El *número f* de una lente de cámara (Prob. 13) es su longitud focal dividida entre su apertura (diámetro efectivo). ¿Por qué es útil saber esto en fotografía? ¿Cómo puede modificarse el número *f*? ¿Qué relación guarda el tiempo de exposición con él?
32. Una lupa de pequeña longitud focal permite examinar los detalles más finos que una con gran longitud focal. Explique por qué.
33. Calcule la máxima distancia a que el ojo humano puede leer los titulares de un periódico.
34. ¿Importa si producen una imagen recta o invertida *a*) un telescopio astronómico; *b*) un microscopio compuesto; *c*) una lupa simple; *d*) una cámara (una cámara de televisión por ejemplo); *e*) un proyector? ¿Y qué decir de las imágenes reales o virtuales?

35. El ojo humano sin ayuda produce una imagen real pero invertida sobre la retina. *a)* ¿Por qué no percibimos objetos invertidos como las personas o los árboles? *b)* Desde luego que no, pero supóngase que usamos anteojos especiales y que los percibiéramos así. Entonces si pusiéramos el libro de cabeza, podríamos leer esta pregunta con la misma facilidad con que lo hacemos ahora?
36. ¿Cuál de las siguientes lentes —una lente convergente, una divergente, un espejo cóncavo, convexo o plano— se emplea: *a)* como lupa? *b)* ¿Cómo el reflector en la base de un proyector de transparencias? *c)* ¿Como el objetivo de un telescopio de reflexión? *d)* ¿En un caleidoscopio? *e)* ¿Cómo el ocular de unos gemelos de teatro? *f)* ¿Para obtener una vista posterior más completa desde el asiento del conductor en un automóvil?
37. ¿Qué propiedades de una lente la haría un buen vidrio candente (una lente que, alineada con el Sol, rápidamente quema papel o las ramas colocadas detrás de él)?
38. En la novela *El señor de las moscas* de William Golding, el personaje Piggy usa sus anteojos para enfocar los rayos solares y hacer fuego. Más tarde, los niños lo golpean y le rompen los anteojos. No puede identificarlos desde cerca pues es miope. Detecte el error de esta narración. (Boston Globe, December 17, 1985, Letters.)
39. Explique la función de la lente objetivo en un microscopio. ¿Por qué la utilizamos? ¿Por qué no simplemente usamos una lente de aumento muy potente?
40. ¿Por qué los astronautas emplean telescopios ópticos cuando dirigen la vista al cielo? Después de todo, las estrellas están tan lejos que parecen puntos luminosos, sin ningún detalle perceptible.
41. Un fabricante de relojes usa anteojos divergentes cuando conduce, no usa lentes cuando lee, y usa anteojos convergentes en su trabajo. ¿Es miope o hipermétrope? Explique su respuesta (Ej. 40).
42. ¿Por qué todos los telescopios astronómicos modernos son de reflexión, y no de refracción? Piense en los problemas del montaje mecánico de las lentes y de los espejos, en la dificultad de configurar las superficies ópticas en cuestión, en los problemas de las pequeñas fallas de las matrices de vidrio óptico con que se construyen las lentes y los espejos, etcétera.
43. Explique por qué a veces *a)* la luz ultravioleta se usa para iluminar objetos bajo el microscopio, *b)* se utilizan filtros azules para fotografiar una estrella contemplada a través de un telescopio y *c)* se usa luz infrarroja para lograr mayor claridad en las fotografías de paisajes.

EJERCICIOS

40-1 Formación de imágenes por medio de espejos y lentes

40-2 Espejos planos

1. Se encuentra usted delante de un gran espejo plano, contemplando su imagen. Si se mueve hacia el espejo con una velocidad v, ¿a qué velocidad se dirige la imagen hacia usted? Indíquela *a)* en su propio marco de referencia y *b)* en el marco de referencia del cuarto donde el espejo se halla en reposo.
2. Un objeto pequeño está 10 cm delante de un espejo plano. Si usted se halla detrás del objeto a 30 cm del espejo y si contempla su imagen, ¿a qué distancia debe enfocar los ojos?
3. Pruebe que, si hacemos girar un espejo plano un ángulo α, el haz reflejado gira en un ángulo 2α. Demuestre que este resultado es razonable con $\alpha = 45°$.
4. En la figura 40-36 se observa (vista desde arriba) que Bernie B se dirige directamente al centro de un espejo vertical M. ¿A qué distancia de él se hallara cuando Sara S pueda verlo? Suponga que d = 3.0 m.

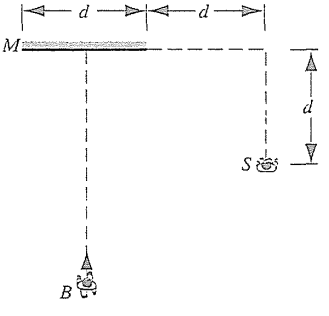


FIGURA 40-36. Ejercicio 4.

5. Se coloca un objeto pequeño O en la tercera parte de la distancia entre dos espejos paralelos planos, según se observa en la figura 40-37. Trace los haces correspondientes de rayos para visualizar las cuatro imágenes situadas más cerca del objeto.

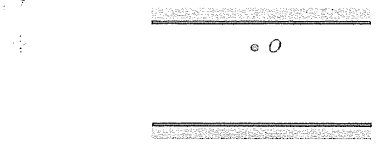


FIGURA 40-37. Ejercicio 5.

6. En la figura 40-4 se gira el espejo 30° en dirección contraria a las manecillas del reloj y alrededor de su borde inferior, dejando en su sitio el objeto puntual O. ¿Se desplaza el punto la imagen puntual? De ser así, ¿dónde se encuentra? ¿Puede el ojo ver todavía la imagen sin que se la mueva? Dibuje una figura que describa la nueva situación.
7. La figura 40-38 contiene una pequeña lámpara suspendida 250 cm arriba de la superficie del agua en una alberca. El agua tiene una profundidad de 186 cm y su fondo es un enorme espejo. ¿Dónde se localiza la imagen de la lámpara cuando se ve desde la incidencia normal cercana?

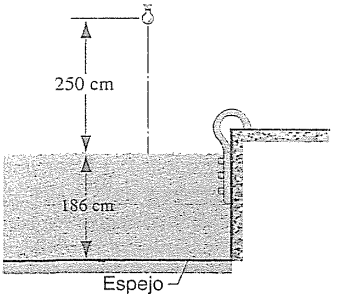


FIGURA 40-38. Ejercicio 7.

8. Dos espejos planos forman un ángulo de 90° entre sí. ¿Cuál es el mayor número de imágenes de un objeto colocado entre ellos que puede verse con un ojo situado en el lugar apropiado? El objeto no se encuentra en el bisector del espejo.
9. Un objeto puntual está a 10 cm de un espejo plano, mientras el ojo de un observador (5.0 mm de diámetro de la pupila) se halla a 24 cm de distancia. Suponiendo que el ojo y el punto se encuentren en la misma línea perpendicular a la superficie, determine el área del espejo que se usa para observar la reflexión del punto.
10. Resuelva el ejercicio 8 si el ángulo entre los espejos es *a*) 45°, *b*) 60° y *c*) 120°; el objeto siempre está situado en el bisector de los espejos.
11. ¿Cuántas imágenes de su persona verá en un cuarto cuyo techo y dos paredes contiguas son espejos? Explique su respuesta.

40-3 Espejos esféricos

12. Vuelva a dibujar la figura 40-39 en una hoja grande de papel y trace con mucho cuidado los rayos reflejados, aplicando para ello la ley de reflexión. ¿Se forma un foco puntual? Comente su respuesta.

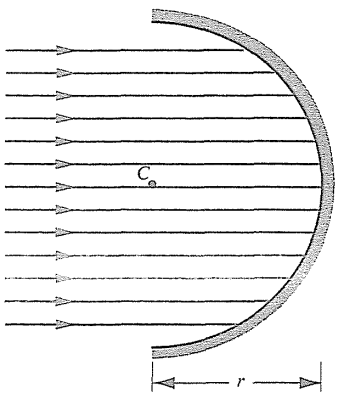


FIGURA 40-39. Ejercicio 12.

13. Un espejo cóncavo de rasurar tiene un radio de 35 cm de curvatura. Lo colocamos de modo que la imagen del rostro de un hombre es 2.7 veces el del tamaño de su rostro. ¿A qué distancia se halla el espejo del rostro?
14. Complete la figura 40-40 para demostrar la trayectoria seguida por los rayos de luz procedentes del objeto puntual *O* después de reflejarse contra el espejo. La longitud focal es 10.0 cm y el objeto está a una distancia de 15.0 cm.

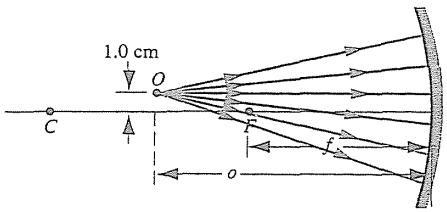


FIGURA 40-40. Ejercicio 14.

15. Llene la tabla 40-1, donde cada columna se refiere a un espejo esférico o plano y a un objeto real. Verifique los resultados mediante el trazado de rayos. Las distancias se dan en centímetros; si un número no tiene delante un signo positivo o negativo, encuentre el signo correcto.
16. Repita la operación que da origen a la ecuación 40-4, utilizando la geometría de la figura 40-15 con el espejo convexo; demuestre que la ecuación 40-4 es válida en este caso sólo si se supone que *i* y *r* son negativos.

40-4 Superficies esféricas refractantes

17. La figura 40-41 muestra la sección transversal de un tubo hueco de vidrio con un radio interno *r*, con un radio externo *R* y con un índice de refracción *n*. *a*) Convénzase de que el rayo *ABC* define el radio interno *r** visto desde el lado. *b*) Demuestre que $r^* = nr$, independientemente de *R*.

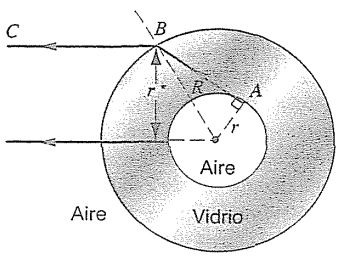


FIGURA 40-41. Ejercicio 17.

TABLA 40-1 Ejercicio 15.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
Tipo	Cóncavo						Cóncavo	
f (cm)	20		+20			20		
r (cm)					−40		40	
i (cm)					−10		4.0	
o (cm)	+10	+10	+30	+60				+24
m		+1.0		−0.50		+0.10		0.50
¿Imagen real?		No						
¿Imagen recta?								No

TABLA 40-2 Ejercicio 18.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
n_1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5	1.5
n_2	1.5	1.5	1.5		1.0	1.0	1.0	
o (cm)	+10	+10		+20	+10		+70	+100
i (cm)		−13	+600	−20	−6.0	−7.5		+600
r (cm)	+30		+30	−20		−30	+30	−30
¿Imagen recta?								

18. Llene la tabla 40-2, donde las columnas se refieren a una superficie esférica que separa dos medios, cuyos índices de refracción son diferentes. Las distancias se miden en centímetros. El objeto es real en todos los casos. Dibuje una figura para cada situación y construya gráficamente los rayos correspondientes. Suponga un objeto puntual.

19. Un haz paralelo de luz proveniente de un láser incide sobre una esfera sólida y transparente cuyo índice de refracción es n, como se muestra en la figura 40-42. *a*) Demuestre que no podemos enfocarlo en la parte posterior de la esfera, a menos que el ancho del haz sea pequeño comparado con el radio de la esfera. *b*) Si la condición en *a*) se cumple, ¿qué índice de refracción tiene ella? *c*) ¿Qué índice de refracción, si es que hay, enfocará el haz en el centro de la esfera?

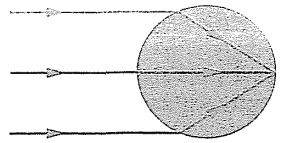


FIGURA 40-42. Ejercicio 19.

40-5 Lentes delgadas

20. Complete la figura 40-43 para demostrar la trayectoria seguida por los rayos luminosos provenientes del objeto puntual O después de cruzar la lente. La longitud focal es 10.0 cm y la distancia del objeto, 6.0 cm.

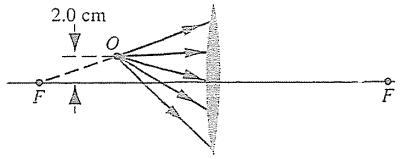


FIGURA 40-43. Ejercicio 20.

21. Un objeto está 20 cm a la izquierda de una lente delgada convergente, cuya longitud focal es −30 cm. ¿Dónde se forma la imagen? Obtenga su posición mediante cálculo y también mediante un diagrama de rayos.

22. Queremos construir una lente convexa doble con vidrio, cuyo índice de refracción es 1.5. Una superficie debe tener el doble del radio de curvatura que el otro y su longitud focal es 60 mm. Determine los radios.

23. Suponga que enfoca una imagen del Sol sobre una pantalla, empleando para ello una lente delgada cuya longitud focal es 27 cm. Calcule el diámetro de la imagen. (En el Ap. C vienen los datos necesarios del Sol.)

24. Una lente está hecha de vidrio que tiene un índice de refracción de 1.5. Un lado es plano y el otro convexo, con un radio de curvatura de 20 cm. *a*) Determine la longitud focal de la lente. *b*) Si un objeto se coloca 40 cm a la izquierda de ella, ¿dónde se localizará la imagen?

25. Tiene un suministro de discos planos de vidrio (n = 1.5) y una cortadora de lentes que puede fijarse para que pula los radios de curvatura de 40 o 60 cm. Le piden preparar un juego de seis lentes como los de la figura 40-44. ¿Cuál será la longitud focal de cada uno? (Nota: escoja el menor radio de curvatura si puede elegir entre varios.)

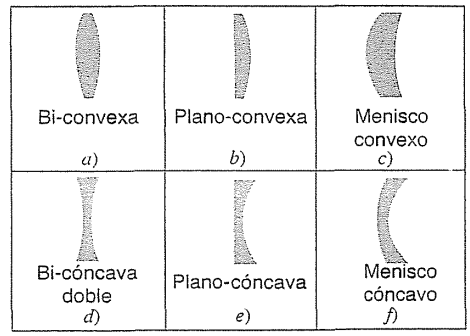


FIGURA 40-44. Ejercicio 25.

26. Se pone un objeto en el centro de curvatura de una lente cóncava doble, cuyos ambos radios de curva tienen la misma magnitud. *a*) Encuentre la distancia de la imagen en función del radio de curvatura r y el índice de refracción n del vidrio. *b*) Describa la naturaleza de la imagen. *c*) Verifique su resultado por medio de un diagrama de radios.

27. A la ecuación 40-15 se le llama forma *gaussiana* de la fórmula de lentes delgados. Otra modalidad de ella es la forma *newtoniana,* la cual se obtiene considerando la distancia x del objeto al primer punto focal y la distancia x' del segundo punto focal a la imagen. Demuestre que

$$xx' = f^2.$$

TABLA 40-1 Ejercicio 28.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
Tipo	Cóncavo								
f (cm)	10	+10	10	10					
r_1 (cm)					+30	−30	−30		
r_2 (cm)					−30	+30	−60		
i (cm)									
o (cm)	+20	+5.0	+50	+50	+10	+10	+10	+ 10	+ 10
n					1.5	1.5	1.5		
m			> 1	< 1				0.50	0.50
¿Imagen real?									Sí
¿Imagen recta?								Sí	

28. En lo posible llene la tabla 40-3, cuyas columnas se refieren todas a una lente delgada. Si no puede calcular una cantidad, anote "X". Las distancias se dan en centímetros; si un número (salvo en el renglón *n*) no tiene delante un signo positivo o negativo, encuentre el signo correcto. Dibuje una figura para cada situación y construya gráficamente los rayos apropiados. El objeto es real en todos los casos.

29. Una transparencia iluminada se monta a 44 cm de la pantalla. ¿A qué distancia de la transparencia debemos colocar una lente de longitud focal 11 cm para que proyecte una imagen sobre la pantalla?

30. Una flecha iluminada produce una imagen real invertida a una distancia $d = 40.0$ cm, medida a lo largo del eje óptico de un lente (Fig. 40-45). La imagen es apenas la mitad del objeto. *a*) ¿Qué clase de lente debe utilizarse para obtener esta imagen? *b*) ¿A qué distancia del objeto debe ponerlo? *c*) ¿Qué longitud focal tiene la lente?

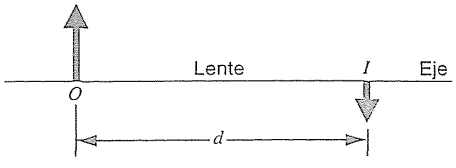


FIGURA 40-45. Ejercicio 30.

31. Una lente convergente con una longitud focal de +20 cm se halla 10 cm a la izquierda de una lente divergente, con una longitud focal de −15 cm. Si ponemos un objeto real 40 cm a la izquierda de la primer lente, localice y describa por completo la imagen formada.

32. *a*) Demuestre que una lente delgada convergente de longitud focal f seguida por una lente delgada divergente de longitud focal $-f$ pondrá una luz paralela en foco más allá de la segunda lente, a condición de que la separación de las lentes L satisfaga $0 < L < f$. *b*) ¿Cambia esta propiedad si los intercambiamos? *c*) ¿Qué sucede cuando $L = 0$?

33. Se coloca un objeto 1.12 m delante de una lente convergente de 58.0 cm de longitud focal, que está 1.97 m delante de un espejo plano. *a*) ¿Dónde está la imagen final, medida desde el lente, que vería un ojo que dirija la mirada hacia el espejo a través del lente? *b*) ¿Es real o virtual la imagen final? *c*) ¿Es recta o invertida? *d*) ¿Cuál es el aumento lateral?

34. Un objeto está 20.0 cm a la izquierda de una lente, con una longitud focal fija de +10.0 cm. Una segunda lente de longitud focal +12.5 cm está 30.0 cm a la derecha de la primera. *a*) Por medio de la imagen formada por la primera lente como el objeto de la segunda, determine la ubicación y el tamaño relativo de la imagen final. *b*) Verifique sus conclusiones dibujando el sistema de lentes a escala y construyendo un diagrama de rayos. *c*) Describa la imagen final.

40-6 Instrumentos ópticos

35. El aumento angular de un telescopio astronómico en un ajuste normal es 36 y el diámetro del objetivo del lente mide 72 mm. ¿Cuál es el diámetro mínimo del ocular que se requiere para concentrar toda la luz que entra en la lente objetivo procedente de una lejana fuente puntual en el eje del instrumento?

36. Algunos de los primeros "microscopios" eran en realidad lupas de una sola lente hechos por Leeuwenhoek. Tenían aumento hasta de 200. Suponga que estuvieran hechos con una lente de vidrio ($n = 1.5$), con dos superficies de igual curvatura R. *a*) Encuentre R. *b*) Calcule el diámetro máximo de estas lentes.

37. La figura 40-46*a* representa un ojo humano normal. Los rayos paralelos que entran en un ojo relajado que mira al infinito producen en la retina una imagen real invertida. Así, el ojo funcio-

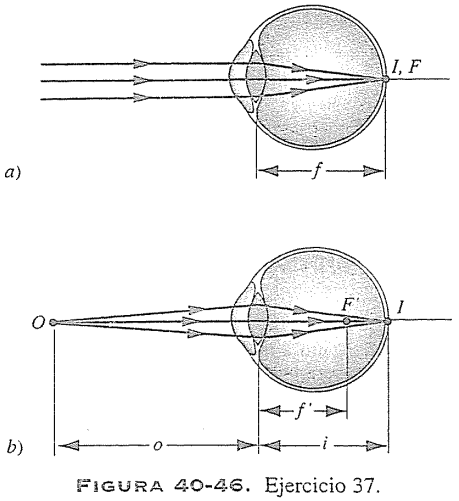


FIGURA 40-46. Ejercicio 37.

na como una lente convergente. La mayor parte de la refracción tiene lugar en la superficie externa del ojo. Suponga una longitud focal f del ojo de 2.50 cm. En la figura 40-46*b* el objeto se acercó a una distancia $o = 36.0$ cm del ojo. Para crear una imagen en la retina, hay que reducir a f' la longitud focal efectiva del ojo. Esto se hace mediante la acción de los músculos ciliares que modifican la forma de la lente y, por tanto, la longitud focal del ojo. *a*) Determine f' basándose en los datos anteriores. *b*) ¿Se volverán más grandes o más pequeños los radios de curvatura en la transición de la figura 40-46*a* a la figura 40-46*b*? (En la figura la estructura del ojo apenas si se bosqueja, y en la Fig. 40-46*b* no se traza a escala.)

38. Un microscopio del tipo descrito en la figura 40-29 tiene una longitud focal de 4.2 cm en la lente objetivo y de 7.7 cm en el ocular. La distancia entre las lentes es 25 cm. *a*) ¿Cuál es la distancia s en la figura? *b*) Para producir las condiciones allí señaladas, ¿a qué distancia conviene colocar F_1 en esa figura? *c*) ¿Cuál es el aumento lateral m de la lente objetivo? *d*) ¿Cuál es el aumento angular m_θ del ocular? *e*) ¿Cuál es el aumento global M del microscopio?

39. En un microscopio compuesto el objeto se halla a 12.0 mm de la lente objetivo. Las lentes están separadas por una distancia de 285 mm y la imagen intermedia se halla a 48.0 mm del ocular. ¿Qué aumento se produce?

40. El ojo *hipermétrope* enfoca los rayos paralelos de modo que la imagen se forma detrás de la retina, como en la figura 40-47*a*. En el ojo *miope*, la imagen se forma delante de ella, según se aprecia en la figura 40-47*b*. *a*) ¿Cómo diseñaría una lente correctiva para ambos defectos? Dibuje un diagrama de rayos en los dos casos. *b*) Si necesita anteojos sólo para leer, ¿es usted miope o hipermétrope? *c*) ¿Qué función desempeñan los anteojos bifocales, donde las partes superiores e inferiores presentan distinta longitud focal?

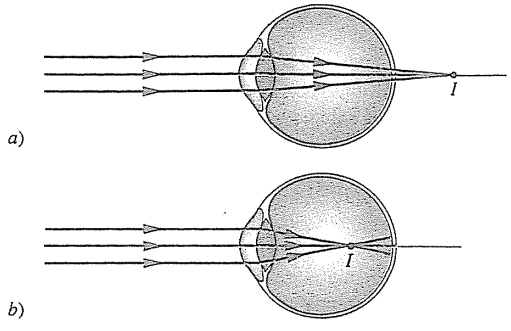


FIGURA 40-47. Ejercicio 40.

PROBLEMAS

1. Si pone usted una fuente puntual de luz S a una distancia d delante de una pantalla A. ¿Qué intensidad habrá en el centro de la pantalla si coloca un espejo M a una distancia d detrás de la fuente, como se ve en la figura 40-48? (Sugerencia: recuerde que la intensidad varía con la distancia respecto a una fuente puntual de luz.)

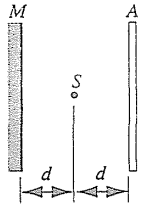


FIGURA 40-48. Problema 1.

2. *a*) Un punto luminoso se desplaza con una velocidad v_o hacia un espejo esférico a lo largo de su eje. Demuestre que la velocidad con que la imagen de este objeto puntual se mueve está dada por

$$v_i = -\left(\frac{r}{2o - r}\right)^2 v_o.$$

b) Suponga que el espejo es cóncavo, con $r = 15$ cm, y que $v_o = 5.0$ cm/s. Determine la velocidad de la imagen si el objeto está lejos del punto focal ($o = 75$ cm); *c*) si está cerca del punto focal ($o = 7.7$ cm); *d*) si está muy cerca del espejo ($o = 0.15$ cm).

3. Un objeto lineal corto de longitud L se halla en el eje de un espejo esférico, a una distancia o de este último. *a*) Demuestre que su imagen tendrá una longitud L', donde

$$L' = L\left(\frac{f}{o - f}\right)^2.$$

b) Demuestre que *el aumento longitudinal* m' $(= L'/L)$ es igual a m^2, donde m es el aumento lateral.

4. Un estrecho haz paralelo incidente llega, desde la izquierda, a una esfera sólida de vidrio en una incidencia normal. El radio de la esfera es R, y su índice de refracción $n < 2$. Calcule la distancia de la imagen respecto al borde derecho de dicha esfera.

5. Demuestre que la longitud focal f de una lente delgada, cuyo índice de refracción es n y que está inmersa dentro de un fluido cuyo índice de refracción es n', está dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{n - n'}{n'}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

6. Suponga que $y = o/|f|$ y $y' = i/|f|$. Demuestre que las ecuaciones 40-4 y 40-15 pueden escribirse como

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y'} = \pm 1.$$

Trace una gráfica de y contra y' cuando la suma anterior es $+1$ y otra gráfica con -1. Use -4 y $+4$ como el intervalo de y y y'. *a*) Marque las gráficas que corresponden a espejos cóncavos, a espejos convexos, a lentes convergentes y a lentes divergentes. *b*) Identifique las partes de cada gráfica que corresponden a objetos reales y virtuales, a imágenes reales y virtuales. *c*) Marque los puntos en cada curva cuando el aumento es ± 2, ± 1 y ± 0.5.

7. Un objeto luminoso y una pantalla se encuentran separados por una distancia fija D. *a*) Demuestre que una lente convergente de longitud focal f formará una imagen real sobre la pantalla en dos posiciones separadas por

$$d = \sqrt{D(D - 4f)}.$$

b) Demuestre que la razón de las dos imágenes en las dos posiciones es

$$\left(\frac{D - d}{D + d}\right)^2.$$

8. Demuestre que la distancia entre un objeto real y su imagen real formada por una lente delgada convergente siempre es mayor o igual que el cuádruple de la longitud focal de la lente.
9. Dos lentes convergentes, con longitudes focales f_1 y f_2 se colocan a una distancia $f_1 + f_2$ entre sí, como se aprecia en la figura 40-49. A esta clase de arreglos se le conoce como *expansores de haces* y a menudo sirve para aumentar el diámetro de los haces luminosos de los láseres. *a*) Si W_1 es el ancho del haz incidente, demuestre que el del haz emergente es $W_2 = (f_2/f_1)W_1$. *b*) Demuestre cómo una combinación de una lente convergente y de otra divergente puede disponerse también como expansor de haces. Los rayos incidentes paralelos al eje deberían salir paralelamente al eje. *c*) Calcule la razón de la intensidad del haz que sale del expansor de haces a la intensidad del haz del láser.

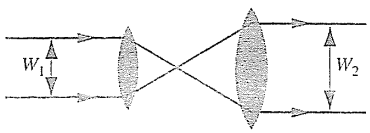


FIGURA 40-49. Problema 9.

10. Una placa delgada y plana de un vidrio parcialmente reflejante se halla a una distancia b de un espejo convexo. Una fuente puntual de luz S se coloca a una distancia a delante de ella (Fig. 40-50), de modo que su imagen en la placa coincida con la del espejo. Si $b = 7.50$ cm y si la longitud focal del espejo es $f = -28.2$ cm, encuentre a y dibuje el diagrama de rayos.

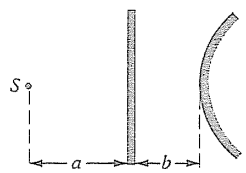


FIGURA 40-50. Problema 10.

11. Dos lentes delgadas de longitudes focales f_1 y f_2 están en contacto. Demuestre que equivalen a una sola lente delgada con una longitud focal dada por

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}.$$

12. Delante de una lente convergente se pone un objeto recto a una distancia igual al doble de la longitud focal f_1 de la lente. En el otro lado de esta última se halla un espejo convergente de longitud focal f_2, separado de la lente por una distancia $2(f_1 + f_2)$ (Fig. 40-51). *a*) Determine la ubicación, la naturaleza y el tamaño relativo de la imagen final, tal como la ve un ojo que mira hacia el espejo a través de la lente. *b*) Dibuje el diagrama de rayos correspondiente.

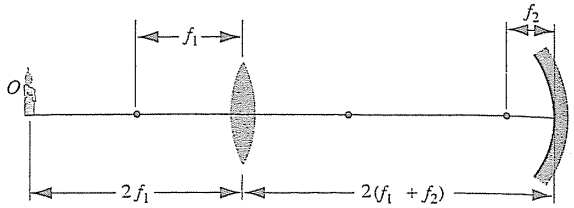


FIGURA 40-51. Problema 12.

13. La figura 40-52 muestra una cámara idealizada enfocada sobre un objeto en el infinito. En la película se forma una imagen real invertida, con la distancia de imagen i igual a la longitud focal (fija) f (= 5.0 cm, por ejemplo) del sistema de lentes. En la figura 40-52*b* el objeto O se halla más cerca de la cámara y la distancia del objeto es, digamos 100 cm. Si queremos enfocar la imagen I sobre la película, debemos alejar la lente de la cámara (¿por qué?). *a*) Determine i' en la figura 40-52*b*. *b*) ¿A qué distancia hay que mover la lente? Nótese que la cámara no es igual al ojo (Ej. 37) en este aspecto. En la cámara f permanece constante y la distancia de la imagen i debe ser ajustada al movimiento de la lente. En el ojo, la distancia i no se altera y la longitud focal f debe ser ajustada distorsionando la lente. Compare con mucho cuidado la figura 40-46 con la figura 40-52. *c*) La longitud focal de una cámara pequeña es 50 mm y el alcance de enfoque se extiende de 1.2 m al infinito. Determine la amplitud de movimiento necesaria entre la lente y la película.

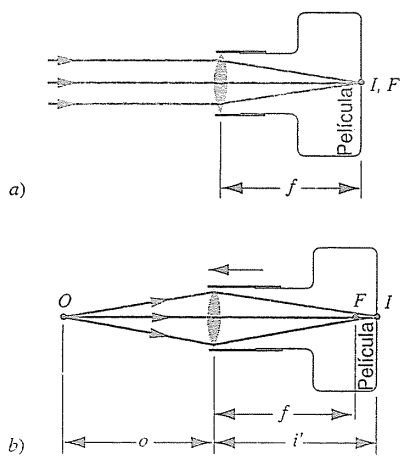


FIGURA 40-52. Problema 13.

14. La potencia P de una lente se define mediante $P = 1/f$, donde f es la longitud focal. La unidad de potencia es la dioptría, donde 1 dioptría = 1/metro. *a*) Dé una definición razonable que pueda emplearse en la potencia de la lente? *b*) Demuestre que la po-

tencia neta de dos lentes en contacto está dada por $P = P_1 + P_2$, donde P_1 y P_2 son las potencias de las lentes individuales.

15. Un fotógrafo se halla a 44.5 m de una vía férrea y la línea de visión es perpendicular a ella. Un tren pasa a 135 km/h y el fotógrafo toma una fotografía. Con una cámara de 3.6 cm de longitud focal, calcule el tiempo de exposición máxima, de modo que lo borroso de la imagen en la película no supere los 0.75 mm.

16. Isaac Newton, habiéndose convencido (erróneamente como se supo después) de que la aberración cromática era una propiedad intrínseca de los telescopios refractantes, inventó un telescopio de reflexión, que aparece esquemáticamente en la figura 40-53. Presentó su segundo modelo del telescopio, con una potencia de aumento de 38, a la Royal Society que todavía lo conserva. En la figura 40-53 la luz incidente llega, muy paralela al eje del telescopio, sobre el espejo objetivo M. Tras reflejarse contra un espejo pequeño M' (la figura no está a escala), los rayos forman una imagen real invertida en el plano focal a través de F. Esta imagen se ve después con un ocular. *a*) Demuestre que el aumento angular m_θ también está dado por la ecuación 40-34, o sea

$$m_\theta = -f_{ob}/f_{ocular},$$

donde f_{ob} es la longitud focal del espejo objetivo y donde f_{ocular} es la del ocular. *b*) El espejo de 200 in en el telescopio de reflexión del Observatorio Mont Palomar en California tiene una longitud focal de 16.8. Determine el tamaño de la imagen que se forma en el plano focal de este espejo cuando el objeto es un metro situado a 2.0 km de distancia. Suponga rayos paralelos incidentes. *c*) El espejo de otro telescopio de reflexión tiene un radio efectivo de curvatura ("efectivo" porque estos espejos presentan una forma parabólica en vez de esférica, con el fin de eliminar los defectos de aberración esférica) de 10 m. Para obtener un aumento angular de 200, ¿cuál debe ser la longitud focal del ocular?

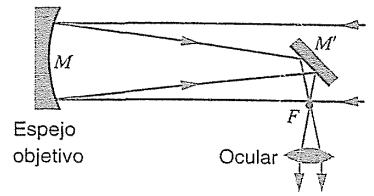


FIGURA 40-53. Problema 16.

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. En un espejo esférico cóncavo real, la luz proveniente de rayos paralelos no se refleja toda en el punto focal. Suponga que tiene uno de estos espejos con 1.0 m de radio de curvatura. *a*) Para rayos incidentes paralelos al eje, escriba un programa de computadora que indique el punto donde el rayo reflejado cruza el eje función de la distancia d del rayo incidente desde el eje. *b*) Con el programa genere una serie de rayos reflejados para la distancias incidentes de $d = 0, 5, 10, 15...$ cm hasta $d = 1.0$ m; dibújelos en un solo diagrama. A la envoltura externa de los rayos se le llama *cáustica*. Este patrón puede verlo cuando la luz brillante se refleja del interior de una cuchara contra una hoja de papel (Ej. 12 y Fig. 40-39).

STATE OF IOWA
DEPARTMENT OF HUMAN SERVICES

CAPÍTULO 41

INTERFERENCIA

En este capítulo y en el siguiente explicamos la interferencia y la difracción de las ondas luminosas. Se presentan en el ámbito de la óptica física (llamada también óptica ondulatoria), donde un haz de luz encuentra obstáculos o aberturas cuyo tamaño es semejante a la longitud de onda de la luz. En contraste con el comportamiento de lentes y de espejos, que se describe con métodos de la óptica geométrica en que la luz se representó como rayos, los fenómenos de la física óptica dependen de la naturaleza ondulatoria de la luz. De hecho, fue a partir de estos experimentos que por primera vez se recabaron pruebas convincentes de la naturaleza ondulatoria de la luz.

41-1 INTERFERENCIA DE DOS FUENTES

Cuando ondas idénticas provenientes de dos fuentes de luz se sobreponen en un punto del espacio, su intensidad combinada allí puede ser mayor o menor que la de una de estas dos ondas. A este efecto lo llamamos *interferencia*. Ésta puede ser *constructiva,* cuando la intensidad neta es más grande que las intensidades individuales, o *destructiva*, cuando la intensidad total es más pequeña que las intensidades individuales. Independientemente de que la interferencia sea constructiva o destructiva depende siempre de la fase relativa de las dos ondas.

Aunque cualquier número de ondas puede en teoría interferir, aquí vamos a ocuparnos exclusivamente de la interferencia de sólo dos ondas. Suponemos que las fuentes de dichas ondas emiten sólo en determinada longitud de onda. (El caso de fuentes que emiten ondas de varias longitudes puede manejarse considerando las interferencias separadas de las componentes de cada longitud de onda.)

La figura 41-1 representa la dependencia temporal de dos ondas idénticas que llegan al mismo punto P en el espacio. En la figura 41-1*a*, las dos ondas arriban *en fase,* es decir, se alinean cresta con cresta y valle con valle. El efecto neto en el punto P se debe a la combinación de las dos ondas y la onda resultante tendría el doble de amplitud de las ondas originales. Ésta es la condición de interferencia constructiva máxima. El patrón de la figura 41-1*a* presentaría el mismo aspecto si cambiáramos una de las ondas en un ciclo completo 2π radianes o en un número entero de ciclos completos. Podemos, pues, afirmar que *la interferencia constructiva máxima de dos ondas se produce cuando su diferencia de fase (en radianes) es* $0, 2\pi, 4\pi, \ldots$

En la figura 41-1*b* las ondas se alinean cresta con valle y valle con cresta. Ésta es la condición de la interferencia destructiva completa, donde las dos ondas cancelan mutuamente su efecto en el punto P. Si queremos pasar de una interferen-

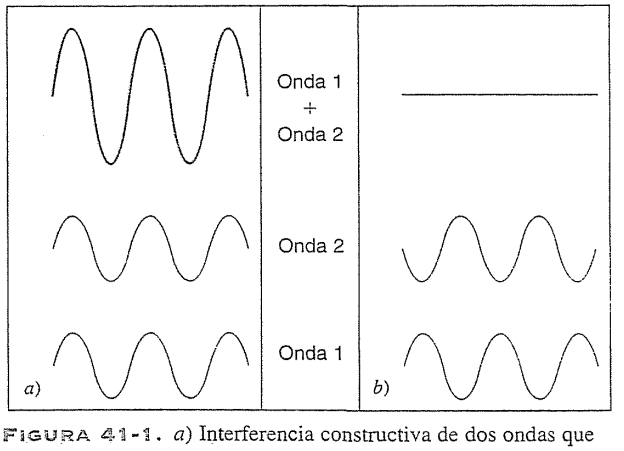


FIGURA 41-1. *a*) Interferencia constructiva de dos ondas que están en fase. *b*) Interferencia destructiva de dos ondas que están 180° fuera de fase.

cia constructiva (como en la Fig. 41-1*a*) a otra destructiva (Fig. 41-1*b*), debemos cambiar una de las ondas en un medio ciclo (π radianes) o en un número entero de ciclos completos más un medio ciclo. En otras palabras, *la interferencia destructiva completa de dos ondas se produce cuando su diferencia de fase (en radianes) es* π, 3π, 5π, ...; en forma equivalente, decimos que las ondas están 180° *fuera de fase.*

Por ahora supondremos que la relación de fase entre estas dos ondas no cambia con el tiempo. Se dice que esas ondas son *coherentes.* Cuando las ondas coherentes interfieren, la intensidad de la onda combinada en cualquier punto del espacio tampoco cambia con el tiempo. En la sección 41-3 se examina a fondo la coherencia, una condición necesaria para que haya interferencia.

No es posible hacer coherentes dos fuentes de luz diferentes, porque la emisión de la luz por los átomos de una fuente es independiente de la emisión de la otra fuente. Los picos y los valles de las procedentes de ambas fuentes no mantienen una relación clara de fase, y entonces se dice que las ondas son *incoherentes.* Para efectuar experimentos de interferencia con la luz, es necesario dividir la luz procedente de una fuente individual en dos componentes y tratarlos como si los emitiera una fuente de luz independiente. Si lo hacemos correctamente, lograremos que los dos componentes interfieran. En este capítulo nos ocupamos de varios esquemas que nos permiten crear esta división de la onda luminosa.

Cuando dos fuentes emiten ondas en una región del espacio, es posible tener simultáneamente una interferencia constructiva en algunos puntos y una interferencia destructiva en otros. Es decir, puede haber algunos puntos en el espacio donde las distancias entre el punto de observación y las dos fuentes sean las que requieren ambas ondas para llegar en fase, según se aprecia en la figura 41-1*a*. Estos puntos son el lugar de la *interferencia máxima.* Puede haber otros sitios donde las distancias con las dos fuentes hagan que ambas ondas arriben fuera de fase al punto de observación, como se indica en la figura 41-1*b*. Estos sitios son los *mínimos de interferencia.* En la figura 41-2 se ve un patrón de máximos y de mínimos producido por ondas de agua interferentes en un tanque de ondas pequeñas. Como veremos en la siguiente sección, las ondas de luz que interfieren producen patrones similares.

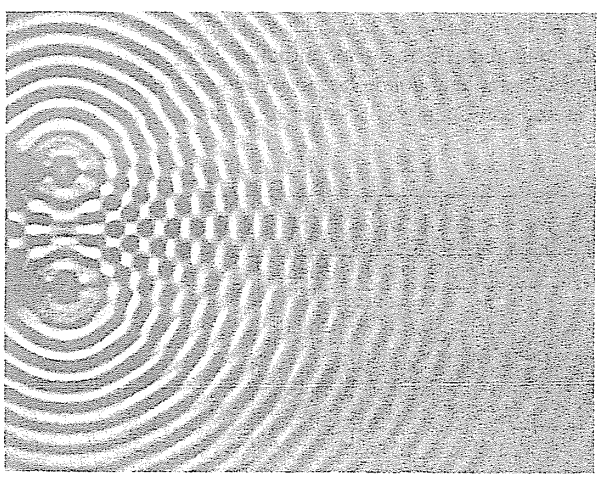


FIGURA 41-2. Patrón de interferencia producido por las ondas de agua en un tanque de ondas. Dos postes vibrantes en la izquierda crean dos patrones de ondas circulares, que se superponen para originar un patrón de máximos y de mínimos en las ondas. Los máximos se identifican por los lugares de la mitad derecha de la fotografía donde las sombras indican las crestas y los valles. Los mínimos aparecen a lo largo de las líneas donde las sombras están definidas con menor claridad.

41-2 INTERFERENCIA DE RENDIJA DOBLE

La figura 41-3 describe el primer método con que se divide un haz de luz en dos componentes que después interfieren entre sí. Un haz de luz, que suponemos es un conjunto de ondas planas como el que podría obtenerse con un láser, incide en una barrera donde se han practicado dos rendijas estrechas. Algunas partes de cada frente de onda incidente pasan por dichas rendijas y, por consiguiente, las rendijas pueden considerarse dos fuentes de ondas de luz coherentes. (La difusión de la luz al cruzar las rendijas, incluidas en la Fig. 41-3, se denomina *difracción* y se explica en el siguiente capítulo. Una difusión parecida ocurre en la difracción de las ondas de agua que atraviesan una abertura pequeña, como se describe en la figura 40-1. Por ahora supondremos que las rendijas son tan pequeñas que pueden considerarse fuentes puntuales de luz: cada una emite ondas esféricas de Huygens, según se comentó en la Sec. 39-4.) Nótese que las dos ondas pueden superponerse e interferir donde chocan contra la pantalla. Para simplificar el análisis supondremos que la distancia D entre las rendijas y la pantalla es mucho mayor que la separación de las rendijas d. (También, de manera alternativa, podemos colocar una lente entre las rendijas y la pantalla para enfocar sobre la pantalla la luz emergente, según veremos más adelante.)

Cuando vemos la pantalla, descubrimos una serie alterna de bandas brillantes y oscuras, llamadas también *franjas de interferencia*, que corresponden, respectivamente, a los máxi-

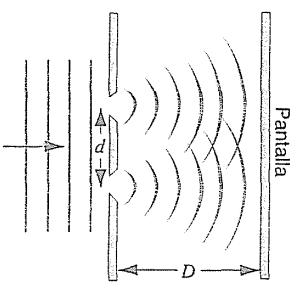


FIGURA 41-3. Un tren de ondas planas de luz (por ejemplo, las provenientes de un láser) incide en una barrera donde se practican dos rendijas separadas por una distancia d. El ancho de las rendijas es pequeño en comparación con la longitud de onda; así que las ondas que cruzan las rendijas se dispersan (difractan) e iluminan la pantalla.

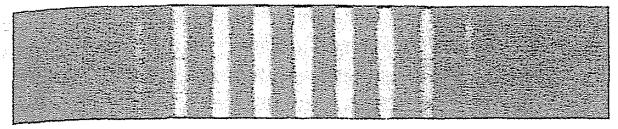


FIGURA 41-4. Patrón de interferencia, formado por bandas o franjas brillantes y oscuras, que aparecerán en la pantalla de la figura 41-3.

mos y mínimos de intensidad de la luz, según se observa en la figura 41-4. El borde derecho del tanque de ondas pequeñas de la figura 41-2 cumple la función de pantalla en la figura 41-3. Además de la "pantalla" del tanque hay una serie alterna de máximos y de mínimos similares a la figura 41-4.

Si queremos analizar el patrón de interferencia, tomamos las ondas de cada rendija que se combinan en un punto arbitrario P sobre la pantalla C de la figura 41-5. El punto P se halla a la distancia de r_1 y r_2 respecto a las rendijas estrechas S_1 y S_2, respectivamente. La línea S_2b se traza de modo que las líneas PS_2 y Pb tengan la misma longitud. Si d, la separación entre rendijas, es mucho menor que la distancia D entre la rendija y la pantalla (la razón d/D en la figura se exagera para hacerla más clara), S_2b será entonces perpendicular a r_1 y r_2. Ello significa que el ángulo S_1S_2b es casi igual al ángulo PaO, que se marcan θ en la figura; de modo equivalente, las líneas r_1 y r_2 pueden considerarse casi paralelas.

Los dos rayos que llegan a P en la figura 41-5 provenientes de S_1 y S_2 estaban originalmente en fase en las rendijas de la fuente: se originan en la misma frente de onda de la onda incidente plana. Como los rayos recorren diversas distancias (correspondientes a varias longitudes de camino óptico), llegan a P con una diferencia de fase. El número de longitudes de onda contenidas en la diferencia de trayectoria S_1b determina el tipo de interferencia en P.

Para tener un *máximo* en P, los dos rayos deben llegar en fase y, por lo mismo S_1b ($= d$ sen θ) debe incluir un número entero de longitudes de onda (lo cual equivale a cambiar una de las ondas de la figura 41-1*a* por un número entero de ciclos), o sea

$$S_1b = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

expresión que puede escribirse así

$$d \text{ sen } \theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{(máximos)}. \tag{41-1}$$

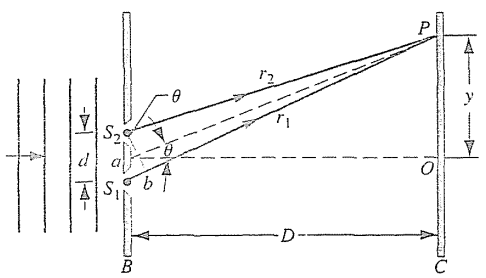


FIGURA 41-5. Los rayos procedentes de S_1 y S_2 se combinan en P. En realidad, $D >> d$; se distorsionó la figura para darle mayor claridad. El punto a es el punto medio entre las rendijas.

Nótese que los máximos arriba de O en la figura 41-5 tienen debajo de O un máximo simétricamente situado; equivalen a emplear $m = -1, -2, \ldots$ en la ecuación 41-1. El máximo central (en el punto O) se describe mediante $m = 0$.

Con un *mínimo* en P, la fase de los dos rayos debe diferir en un múltiplo impar de π (como en la Fig. 41-1*b*), donde S_1b ($= d$ sen θ) debe contener un número semientero de longitudes de onda, o sea

$$d \text{ sen } \theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{(mínimos)} \tag{41-2}$$

Los valores negativos de m colocan los mínimos en la mitad inferior de la pantalla.

A menudo queremos conocer el sitio que un máximo de interferencia ocupa en la pantalla, indicado por la distancia y que se mide del centro del patrón de interferencia en la figura 41-5. Conviene realizar este cálculo cuando y es pequeña comparada con la distancia D entre las rendijas y la pantalla. En este caso, el ángulo θ es pequeño y podemos utilizar la aproximación de ángulo pequeño sen $\theta \approx \tan \theta$. Con sen $\theta = m\lambda/d$ (según la Ec. 41-1) y tan $\theta = y_m/D$ (según la Fig. 41-5, donde y_m representa la ubicación del *emésimo* máximo), tenemos

$$\frac{m\lambda}{d} = \frac{y_m}{D}$$

o bien

$$y_m = m\frac{\lambda D}{d} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{(máximos)}. \tag{41-3}$$

La separación entre los máximos adyacentes es

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = (m + 1)\frac{\lambda D}{d} - m\frac{\lambda D}{d}$$

o bien

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d}. \tag{41-4}$$

Mientras θ sea pequeño, la separación de los máximos no depende de m, es decir, las franjas están espaciadas de manera uniforme como se indica en la figura 41-4. Más aún, el espaciamiento entre los mínimos vecinos es el mismo que el existente entre los máximos.

Desde el punto de vista matemático es más simple tratar con ondas planas que incidan en la rendija doble y que salgan de ella. Sin embargo, los frentes de onda planos no crean una imagen sobre la pantalla en una distancia finita D a partir de las rendijas. Por tanto, usamos a menudo una lente como la de la figura 41-6 para enfocar sobre la pantalla los rayos paralelos procedentes de las rendijas. La luz enfocada en P debe llegar a la lente paralelamente a la línea Px, partiendo de P y atravesando su centro. En tales condiciones, los rayos r_1 y r_2 son estrictamente paralelos a pesar de que el requisito $D >> d$ no se cumpla.

Si se usa una lente entre las rendijas y la pantalla, tal vez parece que una diferencia de fase debe existir entre los rayos más allá del plano representado por S_2b; las longitudes de trayectoria geométrica entre este plano y P son claramente distintas. No obstante, en la sección 40-5 vimos que los rayos

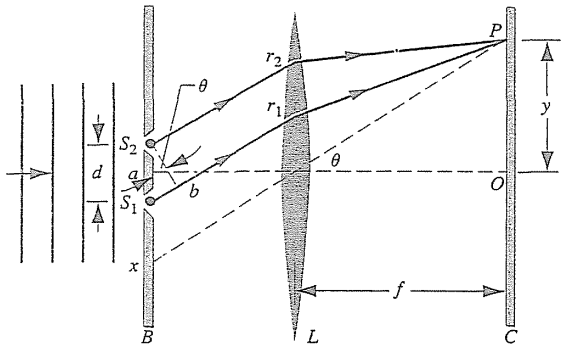


FIGURA 41-6. Se utiliza una lente para producir franjas de interferencia. Compara esta figura con la figura 41-5. En realidad, $f >> d$; una vez más se distorsionó la figura para hacerla más clara.

paralelos enfocados por una lente, las longitudes de camino *óptico* son iguales. Dos rayos con iguales longitudes de camino óptico contienen el mismo número de longitudes de onda; de ahí que no se produzca diferencia de fase alguna por el hecho de que la luz cruce la lente.

Experimento de rendija doble de Young

En 1801 Thomas Young* realizó un experimento de interferencia como el que acabamos de describir. Con este experimento ofreció la primera prueba concluyente de la naturaleza ondulatoria de la luz. Como se indica en la figura 41-3, la ubicación de los máximos de interferencia depende de la longitud de onda; por ello los experimentos de Young fueron útiles para realizar la primera medición directa de la longitud de onda de la luz.

En virtud de que no había láseres en la época de Young; él generó una fuente de luz coherente, dejando que el sol incidiera sobre una pequeña abertura S_0, como se indica en la figura 41-7. La propagación de las ondas secundarias desde S_0 produce frentes de onda coherentes que atraviesan las dos aberturas. En sus experimentos, Young se sirvió de agujeros de alfiler, en vez de rendijas; de ahí que el patrón de interferencia fuera más complicado que el de la figura 41-4. Pese a ello, sus conclusiones concernientes a la naturaleza ondulatoria de la luz fueron inequívocas. Aun cuando se llevó a esta conclusión al utilizar un láser, con frecuencia al experimento de doble rendija se le conoce como el experimento de Young.

* Thomas Young (1773-1829) recibió inicialmente una formación médica. Su interés en la percepción y en la visión lo llevaron a estudiar la física y la luz. Entre sus logros científicos figuran los trabajos dedicados a la tensión superficial y a la elasticidad, que se conocieron con el nombre de módulo elástico y que hoy se llaman módulo de Young en su honor. También tiene fama por su interés en los jeroglíficos y por haber contribuido a descifrar la piedra Rosetta, que permitió entender las antiguas lenguas de Egipto.

PROBLEMA RESUELTO 41-1. El arreglo de doble rendija de la figura 41-5 se ilumina con luz procedente de una lámpara de vapor de mercurio, filtrada de modo que sea visible sólo la luz verde intensa ($\lambda = 546$ nm). Las rendijas tienen una separación de 0.12 mm y la pantalla donde aparece el patrón de interferencia está a 55 cm de distancia. *a)* ¿Cuál es la posición angular del primer mínimo?, y ¿del décimo? *b)* ¿Cuál es la distancia en la pantalla entre los máximos contiguos?

Solución *a)* En el primer mínimo hacemos $m = 0$ en la ecuación 41-2,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d} = \frac{(\frac{1}{2})(546 \times 10^{-9}\ \text{m})}{0.12 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 0.0023.$$

El valor anterior de sen θ es tan pequeño que podemos tomarlo como el valor de θ, expresado en radianes; expresado en grados es 0.13°.

En el décimo máximo (sin contar el máximo central), debemos hacer $m = 10$ en la ecuación 41-1. Al hacerlo y al calcular como antes, obtenemos una posición angular de 2.6°. En tales condiciones, vemos que la propagación angular de aproximadamente la primera docena de franjas es pequeña. *b)* Conforme a la ecuación 41-4 tenemos

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d} = \frac{(546 \times 10^{-9}\ \text{m})(55 \times 10^{-2}\ \text{m})}{0.12 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2.5\ \text{mm}.$$

41-3 COHERENCIA

Para que se produzca un patrón de interferencia, *la diferencia de fase en los puntos de la pantalla no debe cambiar con el tiempo.* Si esto ocurre, decimos que los haces provenientes de las rendijas S_1 y S_2 son completamente *coherentes*. La coherencia se da con cualquier tipo de ondas. Por ejemplo, pueden obtenerse ondas sonoras coherentes al activar dos altavoces de un mismo oscilador de audio; también se producen ondas de radio coherentes cuando dos antenas se conectan al mismo oscilador electromagnético.

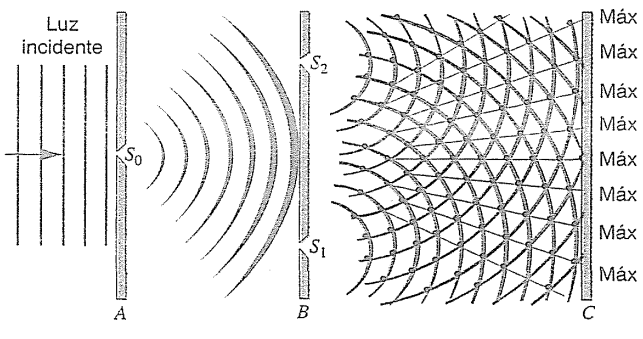


FIGURA 41-7. En el experimento de interferencia de Young, la luz solar difractada en el hoyo de alfiler S_0 incide en los hoyos de alfiler S_1 y S_2 de la pantalla *B*. La luz difractada en estos dos se superpone en la pantalla *C*, produciendo el patrón de interferencia.

Supóngase que las rendijas S_1 y S_2 se reemplazan por dos fuentes de luz totalmente independientes; por ejemplo, dos alambres incandescentes delgados uno al lado de otro. No aparecen franjas de interferencia en la pantalla C, sólo una iluminación relativamente uniforme. Podemos interpretar lo anterior si hacemos la suposición razonable de que, con fuentes luminosas totalmente independientes, la diferencia de fase entre dos haces que lleguen a un punto cualquiera de la pantalla varía con el tiempo de un modo aleatorio. En cierto momento, las condiciones pueden ser propicias para la cancelación y al cabo de poco tiempo (quizá 10^{-8} s) pueden ser idóneas para el reforzamiento. El ojo es incapaz de seguir variaciones tan rápidas y percibe sólo una iluminación uniforme. La intensidad en todos los puntos es igual a la suma de las intensidades que las fuentes S_1 y S_2 producen por separado en dicho punto. En tales condiciones, se dice que los dos haces que salen de S_1 y S_2 son completamente *incoherentes*.

Si queremos determinar la intensidad resultante de la superposición de haces de luz completamente *coherentes,* 1) sumamos las amplitudes de onda teniendo adecuadamente en cuenta la diferencia de fase (constante) y luego 2) elevando al cuadrado la amplitud resultante para obtener una cantidad proporcional a la intensidad resultante. Por otro lado, para calcular la intensidad resultante de la superposición de haces luminosos completamente incoherentes, 1) elevamos al cuadrado las amplitudes individuales para obtener cantidades proporcionales a las intensidades individuales y entonces 2) las sumamos para obtener la intensidad resultante. Los dos procedimientos concuerdan con los hechos experimentales de que, tratándose de fuentes de luz completamente independientes, la intensidad resultante en todos los puntos será siempre mayor que la que en ese punto produce una de las dos luces si actúa por su cuenta; pero en el caso de fuentes coherentes, la intensidad será menor en algunos puntos que la producida por una de las fuentes sola.

¿Cómo podemos obtener ondas coherentes? Una onda electromagnética plana creada por un oscilador de cavidad (Sec. 38-3), conectado a una antena produce una onda que se representa (a gran distancia de la antena) como en la figura 41-8*a*. Esta onda esencialmente es infinita en el tiempo, pues abarca tanto los tiempos futuros ($t > 0$) como los pasados ($t < 0$). En cualquier punto, a medida que la onda pasa por ellos, su perturbación ($\vec{E}$ o $\vec{B}$) varía con el tiempo de manera perfectamente periódica. Más aún, en cualquier instante de *tiempo,* la onda varía con la *distancia* en esa misma forma. Si dos osciladores idénticos producen ondas que se desplazan en la misma dirección, la diferencia de fase entre ellas en un lugar de la dirección de propagación debería ser igual en los otros sitios a lo largo de esa dirección; y en la diferencia de fase en cierto sitio tiene el mismo valor en todo momento. En otro ejemplo, los dos postes vibrantes del tanque de ondas en la figura 41-2 generan dos ondas coherentes en el agua.

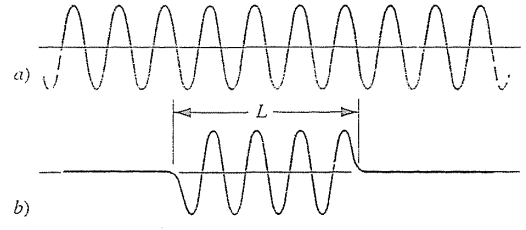


FIGURA 41-8. *a*) Sección de una onda infinita. *b*) Tren de ondas de longitud finita L.

Si ahora nos concentramos en las fuentes comunes de luz visible, por ejemplo, los alambres incandescentes o una descarga eléctrica que cruza un gas, nos percataremos de una diferencia fundamental. En ambas fuentes, los procesos de la emisión básica de luz ocurren en átomos individuales; éstos no operan juntos de manera cooperativa (es decir, *coherente*). En un caso normal, la emisión de luz por un átomo individual tarda alrededor de 10^{-8} s y la luz se describe correctamente como un *tren de ondas* (Fig. 41-8*b*) más que como una onda infinita (Fig. 41-8*a*). Para los tiempos de emisión de este tipo, los trenes de onda tienen unos pocos metros de largo. Para las fuentes reales de luz, como la que proviene de la descarga de un gas comprimido a baja presión en un tubo, los trenes de onda alcanzan unos cuantos centímetros. Éste es el límite de las distancias a lo largo del cual la luz de estas fuentes mantiene su coherencia.

Los efectos de interferencia causados por las fuentes de luz comunes se producen poniendo una rendija muy pequeña (como la rendija S_0 en la Fig. 41-7) delante de ellas. Se garantiza así que los trenes de onda que choquen contra las rendijas S_1 y S_2 en la pantalla B de la figura 41-7 se originen en la misma región de la fuente. Si las longitudes de trayectoria procedentes de todos los puntos en la rendija S_0 a S_1 y S_2 son casi iguales, la luz que las atraviesa está en fase y se produce un patrón de interferencia estacionaria en la pantalla C. Si hacemos la rendija S_0 tan ancha que haya puntos dentro de S_0 cuyas longitudes de trayectoria de S_1 y S_2 difieren en media longitud de onda, estará fuera de fase la luz que en todos los puntos pasa por las rendijas dobles provenientes de las fuentes; aporta máximos en la pantalla donde antes había mínimos y mínimos donde había máximos. El efecto en la pantalla se convierte en una superposición incoherente de la luz proveniente de muchas fuentes, eliminando así el patrón de interferencia.

Si la rendija S_0 es bastante pequeña, una diferencia de fase constante se conserva en cualquier punto de la pantalla C entre los haces que pasan por las rendijas S_1 y S_2. Podemos calificar de coherente esta luz dentro de una distancia caracterizada por su tren de ondas.

Si se aumenta gradualmente el ancho de la rendija S_0 en la figura 41-7, se observa experimentalmente que disminuye la intensidad de los máximos de las franjas de interferencia y que la de los mínimos de las franjas deja de ser estrictamente cero. En otras palabras, las franjas pierden nitidez. Cuando S_0 se abre a un ancho mayor, la reducción de la intensidad máxima y el incremento de la mínima son tales que las franjas desaparecen, dejando apenas una iluminación típica de dos fuentes completamente incoherentes. A medida que crece el ancho de la rendija S_0, sin cesar los haces provenientes de S_1 y S_2 pasan de una condición de coherencia total a otra de incoherencia absoluta. Se dice que los haces son parcialmente coherentes cuando no se encuentran en ninguno de esos dos límites.

A diferencia de los átomos del filamento en una lámpara incandescente, los de un láser emiten su luz en forma completamente cooperativa (Sec. 48-9). Así pues, la luz láser es muy coherente; podemos observar la interferencia con sólo iluminar la rendija doble mediante un haz láser, según se aprecia en la figura 41-3, sin necesidad de utilizar la rendija S_0. El haz láser no es perfectamente coherente; el tren de onda de un láser puede tener longitudes de centenares de kilómetros, lo cual indica la posibilidad de dividir y recombinar el haz y de contemplar los efectos de la interferencia desde largas distancias. Una aplicación de esta coherencia es la holografía (Sec. 43-5), técnica en que uno de los haces divididos se refleja contra un objeto y el patrón de interferencia entre los haces directos y reflejados se guarda en película fotográfica; con ella puede reconstruirse una imagen tridimensional del objeto. Otras aplicaciones basadas en la extensa longitud de coherencia de los láseres son la comunicación a través de largas distancias utilizando señales ópticas y las mediciones de interferencia que siguen el movimiento de las placas tectónicas en la superficie terrestre.

41-4 INTENSIDAD EN LA INTERFERENCIA DE RENDIJA DOBLE

Las ecuaciones 41-1 y 41-2 contienen la ubicación de los máximos y los mínimos del patrón de interferencia. Pero no indican cómo la intensidad varía entre estos máximos y mínimos. En la presente sección obtenemos una expresión de la intensidad I en el punto P situado en el ángulo θ en la figura 41-5.

Supongamos que los componentes del campo eléctrico* de las dos ondas en la figura 41-5 varían con el tiempo en el punto P como

$$E_1 = E_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{41-5}$$

y

$$E_2 = E_0 \operatorname{sen} (\omega t + \phi), \tag{41-6}$$

donde $\omega\ (= 2\pi f)$ es la frecuencia angular de las ondas, y ϕ la diferencia de fase entre ellas. Nótese que ϕ depende de la ubicación del punto P, que se describe mediante el ángulo θ en la figura 41-5. Suponemos que las rendijas son tan estrechas que la luz difractada de cada una ilumina uniformemente la parte central de la pantalla (Fig. 41-3). Ello significa que cerca del centro de la pantalla E_0 no depende de la posición de P, o sea del valor de θ.

Si la separación de las rendijas d es mucho más pequeña que la distancia D respecto a la pantalla, los vectores E provenientes de las dos ondas que interferen son casi paralelos y podemos reemplazar la suma vectorial de E por la de sus componentes.

$$E = E_1 + E_2, \tag{41-7}$$

expresión que, según probaremos luego en esta sección, puede escribirse

$$E_2 = E_\theta \operatorname{sen} (\omega t + \beta), \tag{41-8}$$

donde el ángulo de fase β es

$$\beta = \tfrac{1}{2}\phi \tag{41-9}$$

y la amplitud es

$$E_\theta = 2E_0 \cos \beta \tag{41-10}$$

La amplitud E_0 de la perturbación ondulatoria resultante, que determina la intensidad de las franjas de interferencia, depende de β y éste, a su vez, depende del valor de θ que se encuentra en el lugar del punto P en la figura 41-5. El valor máximo posible de la amplitud E_0 es $2E_0$, igual al doble de la amplitud E_0 de las ondas combinadas, correspondiente a un reforzamiento íntegro.

En la sección 38-6 demostramos que la intensidad I de una onda electromagnética es proporcional al cuadrado de la amplitud de su campo eléctrico E_m (Ec. 38-26):

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_m^2. \tag{41-11}$$

Así pues, la razón de intensidad de las dos ondas de luz puede expresarse como la razón de los cuadrados de la amplitud de sus campos eléctricos. Si I_θ es la intensidad de la onda resultante en P y si I_0 es la intensidad que las ondas producirían actuando solas, entonces

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left(\frac{E_\theta}{E_0}\right)^2. \tag{41-12}$$

Al combinar las ecuaciones 41-10 y 41-12, obtenemos

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 \beta. \tag{41-13}$$

Nótese que la intensidad de la onda resultante en un punto P cualquiera fluctúa entre cero [en un punto donde $\phi\ (= 2\beta) = \pi$ por ejemplo] y cuatro veces la intensidad I_0 de las ondas individuales [en un punto donde $\phi\ (= 2\beta) = 0$, por ejemplo]. Calculemos I_θ en función del ángulo θ de la figura 41-5.

La diferencia de fase ϕ en la ecuación 41-6 se relaciona con la diferencia de trayectoria S_1b en la figura 41-5. Si S_1b es $\frac{1}{2}\lambda$, ϕ es π; si S_1b es λ, ϕ es 2π y así sucesivamente. En general,

$$\frac{\text{diferencia de fase}}{2\pi} = \frac{\text{diferencia de trayectoria}}{\lambda} \tag{41-14}$$

Si suponemos que ϕ es la diferencia de fase y recordamos que la diferencia de trayectoria en la figura 41-5 es d sen θ, podemos escribir así la expresión anterior

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\ (d \operatorname{sen} \theta),$$

o, empleando la ecuación 41-9,

$$\beta = \tfrac{1}{2}\phi = \frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta. \tag{41-15}$$

Por tanto, la intensidad en cualquier θ puede escribirse

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 \tfrac{1}{2}\phi \tag{41-16}$$

o

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right). \tag{41-17}$$

* Podríamos caracterizar la onda de luz por su campo eléctrico $\vec{E}$ o por su campo magnético $\vec{B}$. Por lo regular empleamos ($\vec{E}$ en vez de $\vec{B}$) porque los efectos de $\vec{B}$ en el ojo humano y en varios detectores de la luz son extraordinariamente pequeños.

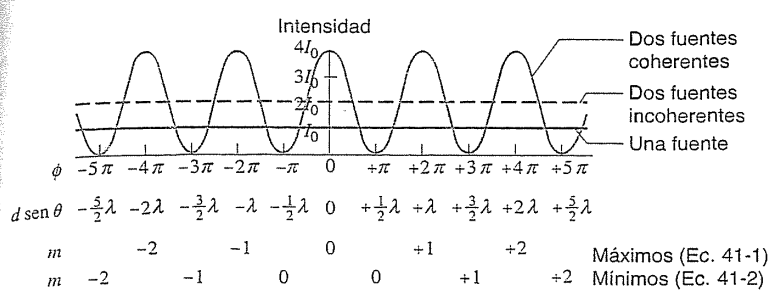


FIGURA 41-9. Patrón de intensidad en la interferencia de rendija doble, suponiendo que las dos ondas de interferencia iluminan uniformemente esta región de la pantalla, es decir, I_0 no depende de la posición.

En la ecuación 41-16 vemos que los máximos de intensidad aparecen donde $\cos^2 \frac{1}{2}\phi = 1$, o sea

$$\phi = 2m\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Por medio de la ecuación 41-15 podemos escribir lo anterior como

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ (máximos),}$$

expresión que es igual a la ecuación 41-1. De acuerdo con la ecuación 41-16, los mínimos de intensidad ocurren cuando $\cos^2 \frac{1}{2}\phi = 0$, es decir,

$$\phi = (2m + 1)\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ,$$

que al usar la ecuación 41-15 podemos escribir como

$$d \operatorname{sen}\theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ (mínimos),}$$

en concordancia con la ecuación 41-2.

En la figura 41-9 se muestra el patrón de intensidad durante una interferencia de rendija doble. La línea llena es I_0; esto describe el patrón (uniforme) de intensidad en la pantalla, si se cubre una de las rendijas. En caso de que las dos fuentes fuesen incoherentes, la intensidad sería uniforme en la pantalla y sería $2I_0$, como lo indica la línea horizontal punteada de la figura 41-9. Tratándose de fuentes coherentes, se prevé que la energía será sólo redistribuida en la pantalla porque la energía no se crea ni se destruye durante el proceso de la interferencia. Así, la intensidad *promedio* del patrón de interferencia debería ser $2I_0$, igual que con las fuentes incoherentes. Esto se deduce de inmediato si, en la ecuación 41-16, sustituimos el valor $\frac{1}{2}$ por el término de coseno elevado al cuadrado, que siempre resulta cuando promediamos el cuadrado del término seno o coseno en uno o más medios ciclos.

Adición de las perturbaciones ondulatorias

A continuación obtenemos las ecuaciones 41-8 a 41-10 para el campo eléctrico combinado de la luz en la interferencia de rendija doble. Esto puede efectuarse algebraicamente mediante los métodos de la sección 18-8. Con todo, el método algebraico se vuelve extremadamente difícil cuando queremos sumar más de dos perturbaciones ondulatorias, como lo haremos en capítulos posteriores. Por eso recurrimos a un método gráfico, que resulta ser adecuado en situaciones más complicadas. Este método se basa en *fasores* giratorios y se asemeja al que se utilizó al analizar los circuitos de corriente alterna en el capítulo 37.

Una perturbación ondulatoria senoidal como la de la ecuación 41-5 puede representarse gráficamente por medio de un fasor giratorio. En la figura 41-10*a* se permite que un fasor de magnitud E_0 gire alrededor del origen en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, con una frecuencia angular ω. La perturbación ondulatoria variable E_1 (= E_0 sen ωt, como en la Ec. 41-5) se representa con la proyección del fasor sobre el eje vertical.

Una segunda perturbación ondulatoria E_2 dada por la ecuación 41-16, que tiene la misma amplitud E_0 pero una diferencia de fase ϕ respecto a E_1, puede representarse gráficamente (Fig. 41-10*b*) como la proyección sobre el eje vertical de un segundo fasor de la misma magnitud E_0, que forma un ángulo ϕ con el primero. En conclusión, $E_2 = E_0$ sen $(\omega t + \phi)$ igual que en la ecuación 41-6.

La suma E de E_1 y E_2 es la suma de las proyecciones de los dos fasores sobre el eje vertical. Ello se muestra más claramente si retrazamos los fasores como en la figura 41-10*c*, colocando la cola de una flecha en la cabeza de la otra, manteniendo la diferencia adecuada de fase y dejando que el arreglo entero gire en dirección contraria a la de las manecillas del reloj alrededor del origen.

En la figura 41-10*c*, E puede considerarse además como la proyección sobre el eje vertical de un fasor de longitud E_θ, que es la suma vectorial de los dos fasores de magnitud E_0. En esta figura vemos que la proyección puede escribirse

$$E = E_\theta \operatorname{sen}(\omega t + \beta),$$

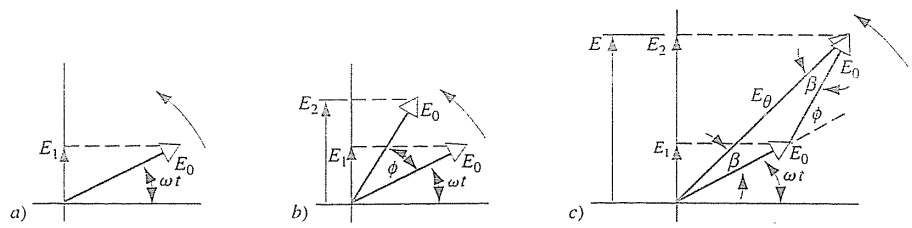


FIGURA 41-10. *a*) Una onda que varía con el tiempo E_1 se representa con un fasor o vector giratorios. *b*) Dos ondas E_1 y E_2 cuya fase difiere en ϕ. *c*) Otra forma de dibujar *b*).

lo cual concuerda con la ecuación 41-8. Nótese que la suma (algebraica) de las proyecciones de los dos fasores es igual a la proyección de su suma (vectorial).

En la mayoría de los problemas de óptica, nos interesa tan sólo la *amplitud* E_θ de la perturbación de onda resultante y no su variación con el tiempo. Ello obedece a que el ojo humano y otros instrumentos comunes de medición reaccionan ante la intensidad resultante de la luz (al cuadrado de la amplitud), y no pueden detectar las rápidas variaciones temporales que caracterizan a la luz visible. Por ejemplo, en la luz de sodio ($\lambda = 589$ nm) la frecuencia $f(= \omega/2\pi)$ es 5.1×10^{14} Hz. Entonces, a menudo no es preciso tener en cuenta la rotación de los fasores; podemos concentrarnos en determinar la amplitud del fasor resultante.

En la figura 41-10*c*, los tres fasores forman un triángulo isósceles, cuyos lados tienen las longitudes E_0, E_0 y E_θ. En cualquier triángulo, un ángulo exterior (ϕ en este caso) es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos (β y β); por tanto,

$$\beta = \tfrac{1}{2}\phi.$$

También es claro en la figura 41-10*c* que la longitud de la base del triángulo es

$$E_\theta = 2E_0 \cos \beta.$$

Los resultados anteriores son idénticos a las ecuaciones 41-9 y 41-10. En un caso más general, quizá queramos obtener la resultante de más de dos perturbaciones ondulatorias que varían senoidalmente. He aquí el procedimiento general:

1. Construya una serie de fasores que representen las funciones que se sumarán. Dibújelos extremo con extremo, conservando las relaciones apropiadas de fase entre los fasores contiguos.

2. Construya la suma de este sistema de fasores, semejante a la de vectores. La longitud del fasor resultante da la amplitud del campo eléctrico. El ángulo entre él y el primer fasor es la fase de la resultante respecto a este último. Su proyección sobre el eje vertical denota las variaciones temporales de la perturbación ondulatoria resultante.

PROBLEMA RESUELTO 41-2. Encuentre gráficamente la resultante $E(t)$ de las siguientes perturbaciones ondulatorias:

$$E_1 = E_0 \operatorname{sen} \omega t,$$
$$E_2 = E_0 \operatorname{sen} (\omega t + 15°),$$
$$E_3 = E_0 \operatorname{sen} (\omega t + 30°),$$
$$E_4 = E_0 \operatorname{sen} (\omega t + 45°).$$

Solución La figura 41-11 muestra el sistema de cuatro fasores que representan a estas funciones. El ángulo de fase ϕ entre los fasores sucesivos es 15°.

En cualquier polígono de n lados, la suma de los ángulos interiores es $(n - 2)\pi$, así que en la figura de cinco lados *abcdea* la suma de ellos es 540°. Los ángulos interiores en *a*, *b*, *c* y *d* son cada uno 180° − 15° = 165°, de donde deducimos

$$\beta = \tfrac{1}{2}[540° - 3(165°)] = 22.5°.$$

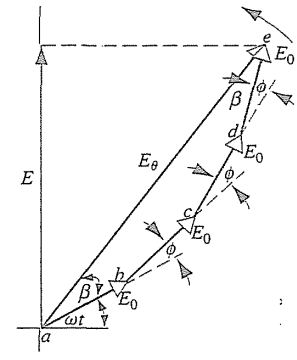


FIGURA 41-11. Problema resuelto 41-2. Se suman gráficamente cuatro ondas por medio del método de fasores.

La longitud del lado *ae* puede escribirse

$$ae = ab \cos \beta + bc \cos (\beta - 15°) + cd \cos (\beta - 15°) + de \cos \beta.$$

Con $ae = E_\theta$ y $ab = bc = cd = de = E_0$ deducimos

$$E_\theta = 3.83\, E_0.$$

La resultante $E(t)$ es entonces la proyección de E_θ sobre el eje vertical:

$$E(t) = E_\theta \operatorname{sen} (\omega t + \beta) = 3.83\, E_0 \operatorname{sen} (\omega t + 22.5°).$$

41-5 INTERFERENCIA PROVENIENTE DE PELÍCULAS DELGADAS

Los colores que vemos cuando la luz solar cae sobre una burbuja de jabón, sobre una capa aceitosa o un colibrí con el pescuezo de color rubí se deben a la interferencia de las ondas de luz reflejadas contra las superficies frontal y posterior de películas delgadas transparentes. El espesor de estas películas suele tener la magnitud de la longitud de onda de luz. Las tenues películas depositadas en los componentes ópticos, como las lentes de las cámaras, pueden reducir la reflexión e incrementar la intensidad de la luz transmitida. El delgado revestimiento de las ventanas incrementa la reflectividad de la radiación infrarroja y su efecto es menor en la radiación visible. De ese modo, es posible atenuar el calentamiento que la luz solar produce sobre un edificio.

Según su espesor, una película delgada puede reflejar o transmitir perfectamente con una luz de determinada longitud de onda como se observa en la figura 41-12. Esos efectos se deben a la interferencia constructiva o destructiva.

La figura 41-13 muestra una película transparente de espesor uniforme d iluminado por luz monocromática de longitud de onda λ proveniente de la fuente puntual *S*. Se coloca el ojo de modo que un rayo incidente *i* proveniente de la fuente entre en el ojo como rayo r_1 luego de reflejarse contra la superficie frontal de la película en *a*. El rayo incidente también penetra en la película en *a* como rayo refractado y se refleja contra la superficie posterior en *b*; después sale de la superficie frontal

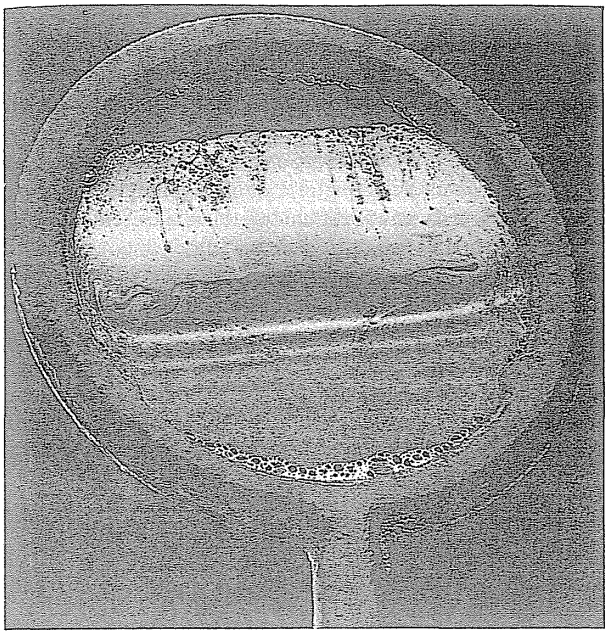


FIGURA 41-12. Película de agua jabonosa en una espira vertical vista bajo luz reflejada. El segmento oscuro de la parte superior no es una película desprendida. Aparece porque la película es tan delgada allí por gravedad que ocurre interferencia destructiva de la luz reflejada entre las superficies frontal y posterior de la película.

de la película en c y entra también en el ojo como rayo r_2. Los rayos r_1 y r_2 son paralelos en la geometría de la figura 41-13. Habiéndose originado en la misma fuente puntual, son coherentes y, por ello, capaces de interferir. En virtud de que estos rayos han recorrido trayectorias de diversa longitud, han atravesado varios medios y, como veremos luego, han experimentado distintas clases de reflexión en a y en b; de ahí que haya una diferencia de fase entre ellos. De esta diferencia de fase depende la intensidad percibida por el ojo, a medida que los rayos paralelos originados en la región ac entran en él.

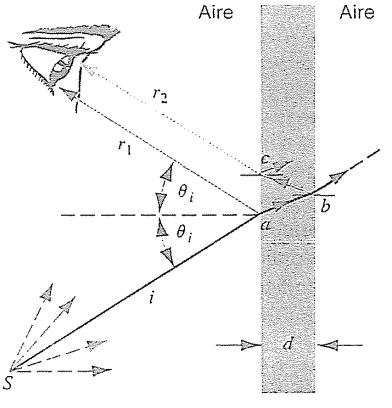


FIGURA 41-13. Una película delgada se ve bajo luz reflejada contra la fuente S. Las ondas reflejadas en las superficies frontal y posterior entran en el ojo como se indica, y la intensidad de la onda de luz resultante se determina mediante la diferencia de fase entre las ondas combinadas. Se supone que el medio a ambos lados de la película es aire.

Esta diferencia de fase recibe dos contribuciones. En la figura 41-13 se observa que el rayo r_2 recorre una trayectoria más larga que el rayo r_1, puesto que r_2 debe pasar dos veces la película antes que llegue al ojo. Esta trayectoria adicional aumenta la diferencia de fase entre los rayos. Otra aportación a la diferencia de trayectoria es el cambio repentino de fase de 180° que puede ocurrir cuando una onda se refleja. Antes de explicar la interferencia de r_1 y r_2, debemos examinar con detenimiento esta segunda aportación al cambio de fase.

Cambio de fase en la reflexión

Consideremos una película muy delgada, donde $2d$ es mucho menor que la longitud de onda. Como la trayectoria adicional que r_2 debe recorrer es aproximadamente $2d$, la contribución a la diferencia de fase al pasar r_2 dos veces por la película deberá aproximarse a cero. Si la referencia de fase que se da entre r_1 y r_2 se debiese exclusivamente a esta trayectoria adicional, la diferencia total se acercaría a cero y entonces r_1 y r_2 interferirían en una forma constructiva. De esta manera, esperaríamos ver la película brillante al reflejar la luz. Pero en la figura 41-12 se observa que no es así. La parte superior de la película, donde es más delgada por la acción de la gravedad, aparece oscura en vez de brillante. Es obvio que se da una interferencia *destructiva*, y no constructiva, en esa porción de la película.

Para explicar este fenómeno y muchos otros similares, concluimos que uno o el otro de los dos rayos de la figura 41-13 deben presentar un cambio abrupto de fase de $\pi (= 180°)$ cuando se reflejan en la interfaz aire-película. Y resulta que sólo el rayo reflejado contra la superficie frontal experimenta este cambio de fase. El otro rayo no altera bruscamente su fase en la trasmisión a través de la superficie frontal ni en la reflexión en la superficie posterior.

En la sección 18-9 explicamos los cambios de fase durante la reflexión tratándose de ondas transversales en cuerdas. Para ampliar estas ideas examine atentamente la cuerda combinada de la figura 41-14, que consta de dos partes con distinta masa por unidad de longitud, estiradas hasta cierta tensión. Un pulso en la cuerda más pesada se dirige a la derecha de la figura 41-14*a*, aproximándose a la unión. Más tarde aparecerá un pulso

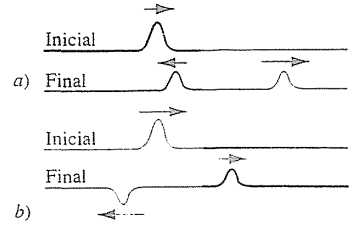


FIGURA 41-14. Cambios de fase tras la reflexión en una unión entre dos cuerdas de distinta densidad lineal de masa. La velocidad de la onda es mayor en la cuerda más ligera. *a)* El pulso incidente se encuentra en la cuerda más pesada. *b)* El pulso incidente se encuentra en la cuerda menos pesada.

reflejado (que vuelve a desplazarse a la izquierda) y un pulso transmitido (que continúa a la derecha). En este caso, el pulso reflejado está *en fase* con el pulso incidente. La situación se invierte en la figura 41-14*b*: ahora el pulso incidente se encuentra en la cuerda más ligera. En este caso la fase del pulso reflejado difiere del pulso incidente en $\pi (= 180°)$. En ambos casos el pulso transmitido está en fase con el pulso incidente.

La figura 41-14*a* muestra una onda de luz en, digamos, un vidrio que se aproxima a una superficie más allá de la cual existe un medio menos denso (con menor índice de refracción) como el aire. En la figura 41-14*b* se ve una onda de luz en el aire que se acerca al vidrio. Así pues, podemos resumir en los siguientes términos la situación óptica de la reflexión en una interfaz:

> *Si el medio más allá de la interfaz tiene un índice de refracción mayor, la onda reflejada experimenta un cambio de π (180°). Si su índice de refracción es menor, la onda reflejada no experimenta cambio de fase.**

En el caso de la figura 41-13, un cambio de fase de π ocurre en la reflexión del rayo r_1 en el punto a, porque el medio que está más allá de la superficie (la película) tiene un índice de refracción más alto que el medio por donde se desplaza (el aire). No se da ningún cambio de fase en la reflexión del rayo r_2 en el punto b, ya que se mueve en la película y el aire más allá de la interfaz tiene un índice de refracción *menor* que ella. No ocurre cambio alguno de fase en la refracción del rayo r_2 en el punto c, pues nunca hay un cambio de fase en la refracción; el rayo que se refracta dentro de la película en el punto a tampoco experimenta cambio de fase.

Ecuaciones para la interferencia en películas delgadas

Conviene precisar lo siguiente: la longitud de onda que determina el tipo de interferencia es λ_n en la película, no λ en el aire. Asimismo podemos decir que nos interesa conocer las *diferencias de camino óptico,* y no las *diferencias de trayectoria geométrica.* Las longitudes de onda λ_n y λ se relacionan por medio de la ecuación 39-14:

$$\lambda_n = \lambda/n, \tag{41-18}$$

donde n es el índice de refracción de la película.

La interferencia constructiva o destructiva de los rayos r_1 y r_2 depende de la diferencia de fase entre ellos. Si la diferencia es $0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, la interferencia será constructiva. En forma equivalente, podemos decir que la diferencia de trayectoria en la interferencia constructiva es $0, \lambda_n, 2\lambda_n, \ldots$, o simplemente $m\lambda_n$ con $m = 0, 1, 2, \ldots$. En el caso de la interferencia destructiva, la diferencia de fase es $\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$, y la diferencia de trayectoria equivalente es $\lambda_n/2, 3\lambda_n/2, 5\lambda_n/2, \ldots$, o $(m + \frac{1}{2})\lambda_n$ con $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Simplificaremos el problema un poco suponiendo una incidencia casi normal, es decir, $\theta_i \approx 0$ en la figura 41-13. En este caso, la contribución a la diferencia de trayectoria debido al recorrido del rayo r_2 por la película es aproximadamente $2d$. Las otras aportaciones posibles a la diferencia de trayectoria total entre r_1 y r_2 corresponden a la diferencia de fase de π (o diferencia de trayectoria de media longitud de onda) que podría ocurrir tras la reflexión en la superficie frontal de la película (si su índice de refracción es mayor que el del medio donde se origina el rayo) y a la diferencia de fase de π (o diferencia de trayectoria de media longitud de onda) que podría ocurrir después de la reflexión en la superficie posterior de la película (cuando el índice de refracción es menor que el del medio que está más allá de dicha superficie). Entonces podemos escribir como sigue una expresión de la diferencia total de trayectoria entre los rayos r_1 y r_2:

$$\text{diferencia de trayectoria} = 2d + \overset{?}{\tfrac{1}{2}\lambda_n} + \overset{?}{\tfrac{1}{2}\lambda_n}. \tag{41-19}$$

(? sobre $\frac{1}{2}\lambda_n$: superficie frontal; ? sobre $\frac{1}{2}\lambda_n$: superficie posterior)

Los signos de interrogación son un recordatorio que, según el índice de refracción relativo de la película en comparación con lo que se encuentra en ambos lados de la película, tal vez no habría que incluir ninguno de los dos términos adicionales; o quizá habría que incluir uno o los dos.

Examinemos de nuevo el ejemplo de la figura 41-13, donde una película con un índice de refracción n está rodeada por el aire. Debemos agregar la media longitud de onda adicional en la superficie frontal, pero no en la posterior. La diferencia total de trayectoria es entonces $2d + \frac{1}{2}\lambda_n$. Para la interferencia constructiva tendríamos

$$2d + \tfrac{1}{2}\lambda_n = m\lambda_n \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \text{ (máximos)}, \tag{41-20}$$

donde hemos eliminado la solución $m = 0$ por no ser significativa desde el punto de vista físico. Para la interferencia destructiva obtenemos

$$2d + \tfrac{1}{2}\lambda_n = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_n \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \text{ (mínimos)}. \tag{41-21}$$

Los resultados anteriores se aplican cuando el índice de refracción de la película es mayor que el del material en ambos lados; por ejemplo, una película de jabón en el aire. En este caso incluimos en la figura 41-19 sólo el primero de los dos términos adicionales. Las ecuaciones se aplican asimismo cuando el índice de refracción de la película es menor que el de los materiales en cualquiera de los dos lados; así, una película delgada de aire entre las dos placas de vidrio. En este caso incluimos sólo el segundo de los dos términos adicionales en la ecuación 41-19, como en el problema resuelto 41-5. El problema resuelto 41-4 ejemplifica un caso en que *no se aplican* las ecuaciones 41-20 y 41-21.

Si el espesor de la película no es uniforme como en la figura 41-12, donde tiene forma de cuña, la interferencia constructiva ocurre en algunas partes de ella, y la interferen-

* Estas afirmaciones, que pueden probarse rigurosamente con las ecuaciones de Maxwell, deben modificarse en el caso de la luz que incide un medio menos denso y que forma un ángulo tal que se produce la reflexión interna total. También hay que modificarlas en el caso de la reflexión proveniente de superficies metálicas.

cia destructiva en otras. Aparecen bandas de intensidad máxima y mínima, denominadas *franjas de espesor constante*. El ancho y el espaciamiento de las franjas dependen de la variación del espesor de la película d. Si la película está iluminada con luz blanca, en vez de monocromática, la luz que se refleja contra varias partes de la película es modificada por varias interferencias constructivas y destructivas. Se explican así los colores brillantes de las burbujas de jabón y de las capas aceitosas.

Sólo cuando la película es "delgada" (d con unas cuantas longitudes de onda luminosa), es posible obtener estos tipos de franjas que aparecen localizadas en la película y asociadas a un espesor variable de película. En las películas gruesas (digamos $d \approx 1$ cm), la diferencia de trayectorias entre los dos rayos de la figura 41-13 es de muchas longitudes de onda; la diferencia de fase en un punto determinado de la película cambia rápidamente al alejarnos inclusive una pequeña distancia de a. Por el contrario, en las películas "delgadas", la diferencia de fase en a también se mantiene en los puntos bastante cercanos; se observa una "brillantez fragmentaria" en cualquier punto de la película, según se observa en la figura 41-12. Pueden producirse franjas de interferencia en películas gruesas; no se localizan en las películas sino en el infinito (Sec. 41-6).

PROBLEMA RESUELTO 41-3. Una película de jabón ($n = 1.33$) en el aire mide 320 nm de espesor. Si se ilumina con luz blanca en la incidencia normal, ¿qué color parecerá tener la luz reflejada?

Solución En este problema queremos encontrar la longitud de onda λ en que se produce la interferencia constructiva. Con $\lambda_n = \lambda/n$ resolvemos la ecuación 41-20 para λ y obtenemos

$$\lambda = \frac{2dn}{m - \frac{1}{2}} = \frac{(2)(320\text{ nm})(1.33)}{m - \frac{1}{2}} = \frac{851\text{ nm}}{m - \frac{1}{2}}.$$

Los máximos de la interferencia constructiva ocurren en las siguientes longitudes de onda: 1702 nm ($m = 1$), 567 nm ($m = 2$), 340 nm ($m = 3$) y así sucesivamente.

Sólo el máximo correspondiente a $m = 2$ se halla en la región visible (entre 400 y 700 nm); la luz de longitud de onda de 567 nm aparece de color amarillo-verde. Si se emplea luz blanca para iluminar la película, se resalta el componente amarillo-verde cuando se ve por reflexión. ¿Qué color tiene la luz que se transmite a través de la película?

PROBLEMA RESUELTO 41-4. A menudo se recubren las lentes con películas delgadas de sustancias transparentes como MgF_2 ($n = 1.38$) a fin de reducir la reflexión contra la superficie del vidrio, según se observa en la figura 41-5. ¿De qué espesor debe ser un revestimiento para que produzca una reflexión mínima en el centro del espectro visible ($\lambda = 550$ nm)?

Solución Suponemos que la luz incide contra la lente en la incidencia casi normal (por razones de claridad, θ se exagera en la Fig. 41-15) y buscamos las condiciones de la interferencia destructiva entre los rayos r_1 y r_2. La ecuación 41-21 no se aplica porque en este caso un cambio de fase de 180° se asocia a *cada* rayo, pues *tanto* en la superficie frontal *como* en la posterior de la película de MgF_2 la reflexión se origina en el medio de mayor índice de refracción. Por tanto, la diferencia de trayectoria en la ecuación 41-19 es $2d + \frac{1}{2}\lambda_n + \frac{1}{2}\lambda_n$, y la condición de la interferencia destructiva es la diferencia de trayectoria $= (m + \frac{1}{2})\lambda_n$, o sea

$$2d + \lambda_n = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_n.$$

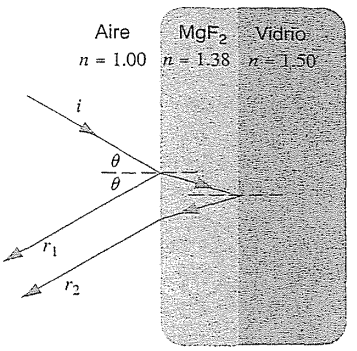


FIGURA 41-15. Problema resuelto 41-4. Las reflexiones indeseables procedentes del vidrio pueden suprimirse (en una longitud de onda escogida) recubriendo el vidrio con una película del espesor adecuado.

Al hacer $\lambda_n = \lambda/n$ y al resolver para d, obtenemos

$$d = \frac{(m - \frac{1}{2})\lambda}{2n} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Buscamos el espesor mínimo en la interferencia destructiva. Cuando $m = 1$, obtenemos

$$d = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550\text{ nm}}{(4)(1.38)} = 100\text{ nm}.$$

PROBLEMA RESUELTO 41-5. La figura 41-16 muestra una lente plana-convexa de radio de curvatura R que se halla en una placa de vidrio exactamente plana e iluminada desde arriba por una luz de longitud de onda λ. En la figura 41-17 se observa que aparecen franjas circulares de interferencia (llamadas *anillos de Newton*), asociadas a la película de espesor variable en el aire entre el lente y la placa. Calcule los radios de los máximos de interferencia circular.

Solución En este caso, el rayo que proviene de la superficie posterior de la película (aire), y no el que proviene de la superficie frontal, es el que experimenta un cambio de fase de 180°, pues éste se refleja contra un medio de mayor índice de refracción. La condición de la inter-

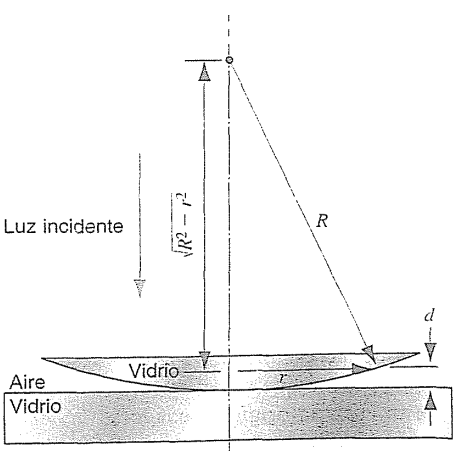


FIGURA 41-16. Problema resuelto 41-5. Aparato para observar los anillos de Newton.

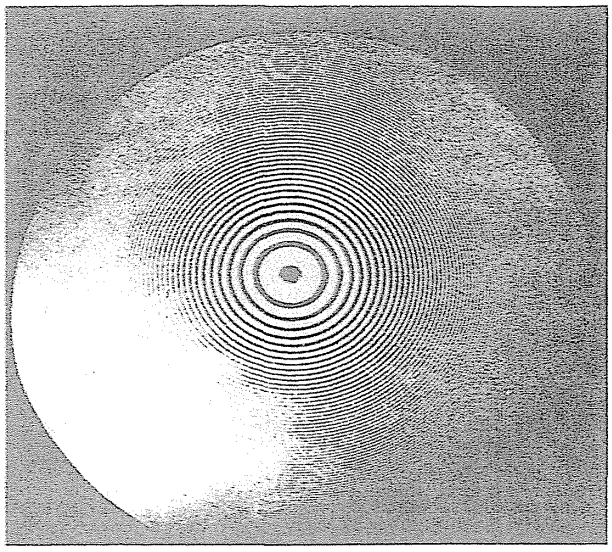


FIGURA 41-17. Franjas circulares de interferencia (anillos de Newton) observados con el aparato de la figura 41-16.

ferencia constructiva permanece inalterada (Ec. 41-20) y es

$$2d = (m - \tfrac{1}{2})\lambda,$$

suponiendo que $n = 1$ en la película en el aire. Con base en la figura 41-16 podemos escribir

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Si $r/R << 1$, podemos expandir el término a la 1/2 mediante el teorema del binomio, conservando sólo dos términos, es decir,

$$d = R - R\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \cdots\right] \approx \frac{r^2}{2R}.$$

Al sustituir para d a partir de la condición de interferencia y al resolver para r, obtenemos

$$r = \sqrt{(m - \tfrac{1}{2})\lambda R} \qquad m = 1, 2, \ldots \text{ (máximos)}.$$

que nos da los radios de los anillos brillantes. Si se emplea luz blanca, cada componente del espectro produce su propio conjunto de franjas circulares y se superponen todos los conjuntos.

Nótese que $r > 0$ con $m = 1$. Es decir, el primer anillo brillante está en $r > 0$ y, en consecuencia, el centro debe ser oscuro como se observa en la figura 41-17. Esta observación puede interpretarse como evidencia experimental ulterior del cambio de fase de 180° en la reflexión con que obtuvimos la ecuación 41-20.

Reversibilidad óptica y cambios de fase en la reflexión (opcional)

G. G. Stokes (1819-1903) se basó en el principio de la reversibilidad óptica para investigar la reflexión de la luz en una interfaz. El principio establece lo siguiente: si no se absorbe luz, un rayo luminoso que se refleje o se refracte volverá a describir su trayectoria original cuando se invierta la dirección. Ello nos recuerda que cualquier sistema mecánico puede desplazarse hacia atrás y también hacia adelante, siempre que no se disipe la energía a causa de la fricción.

La figura 41-18*a* muestra una onda de amplitud E reflejada y refractada en la superficie que separa los medios 1 y 2, donde $n_2 > n_1$. La amplitud de la onda reflejada es $r_{12}E$, donde r_{12} es un *coeficiente de reflexión de amplitud.* La amplitud de la onda refractada es $t_{12}E$, donde t_{12} es un *coeficiente de transmisión de amplitud.*

El signo del coeficiente indica la fase relativa del componente reflejado o transmitido. Si nos concentramos sólo en la posibilidad de los cambios de fase entre 0 y 180°, cuando, por ejemplo, $r_{12} = +0.5$ tenemos una reducción de una mitad en la amplitud después de la reflexión, sin que cambie la fase. Con $r_{12} = -0.5$ tenemos un cambio de fase de 180° porque

$$E \operatorname{sen}(\omega t + 180°) = -E \operatorname{sen} \omega t.$$

En la figura 41-18*b* se invirtió la dirección de los rayos indicados por $r_{12}E$ y $t_{12}E$. El rayo $r_{12}E$, denotado con flechas simples en la figura, se refleja y se refracta produciendo rayos de amplitudes r_{12}^2E y $r_{12}t_{12}E$. El rayo $t_{12}E$, indicado por flechas triples, también se refleja y se refracta, creando los rayos de amplitudes $t_{12}t_{21}E$ y $t_{12}r_{21}E$ como se ve en la figura. Nótese que r_{12} describe un rayo en el medio 1 reflejado desde el medio 2 y que r_{21} describe un rayo en el medio 2 reflejado desde el medio 1. Asimismo, t_{12} describe un rayo que pasa del medio 1 al medio 2; t_{21} describe un rayo que va del medio 2 al medio 1.

Basándonos en el principio de reversibilidad, concluimos que los dos rayos en la parte superior izquierda de la figura 41-18*b* deben equivaler al rayo incidente de la figura 41-18*a*, invertidos. Los dos rayos de la parte inferior de la figura deben cancelarse. Este segundo requisito nos da

$$r_{12}t_{12}E + t_{12}r_{21}E = 0,$$

o bien

$$r_{12} = -r_{21}.$$

El resultado anterior significa lo siguiente: si comparamos una onda reflejada en el medio 1 con otra refractada en el medio 2, se comportarán de manera diferente, pues una de estas ondas experimenta un cambio de fase de 180°.

El experimento revela que el rayo reflejado contra el medio más denso ópticamente presenta un cambio de fase de

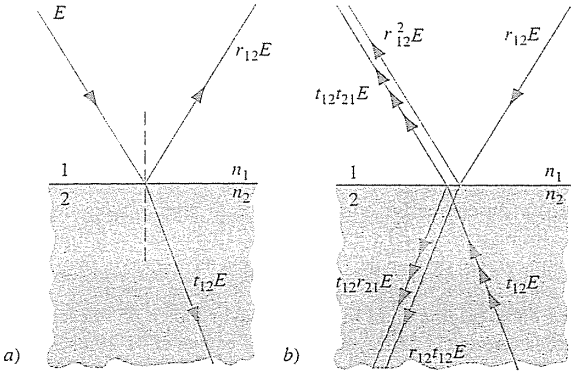


FIGURA 41-18. *a*) Un rayo se refleja y se refracta en una interfaz. *b*) Situación invertida ópticamente: los dos rayos en la parte inferior izquierda deben cancelarse.

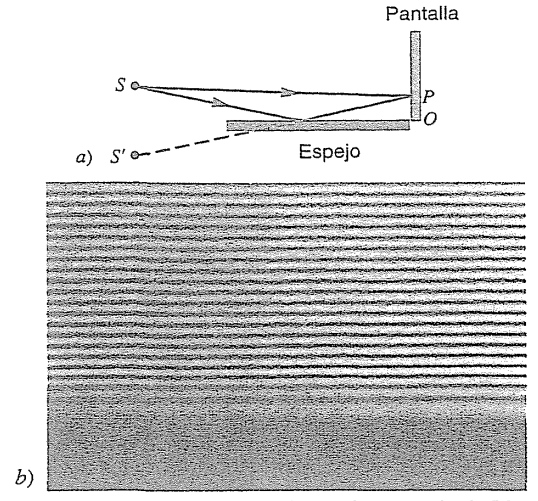


FIGURA 41-19. *a*) Arreglo experimental del espejo de Lloyd. Aparecen franjas en la pantalla a consecuencia de la interferencia entre los haces directos y los reflejados. *b*) Se observan las franjas en el experimento del espejo de Lloyd.

180°. Esto puede demostrarse usando el arreglo de la figura 41-19, que se conoce como el experimento de espejo de Lloyd. La interferencia ocurre sobre la pantalla en un punto arbitrario P, debido a la superposición de haces directos y reflejados. Podemos analizar este experimento como interferencia de dos fuentes, donde una de ellas (S') es la *imagen virtual* de S en el espejo plano. No obstante, existe una diferencia importante entre el aparato de la figura 41-19 y el experimento de rendija doble: la luz proveniente de la fuente virtual S' ha sido reflejada desde el espejo y ha experimentado un cambio de fase de 180°. A raíz del cambio, el borde inferior de la pantalla (en O) presenta una franja oscura en vez de la franja brillante que aparece en el punto correspondiente (el centro de la pantalla) en el experimento de rendija doble. Dicho de otra manera, el aspecto de la franja oscura en O significa que se ha modificado 180° uno de los haces de interferencia. No hay nada que cambie la fase del haz directo SP; entonces debe ser el haz reflejado el que experimente el cambio de fase. Esto indica que la reflexión procedente de un medio ópticamente denso involucra un cambio de fase de 180°. ■

41-6 INTERFERÓMETRO DE MICHELSON*

El *interferómetro* es un dispositivo que sirve para medir con gran precisión las longitudes o los cambios de longitud mediante las franjas de interferencia. Describiremos en seguida la forma en que en 1881 fue construido originalmente por A. A. Michelson (1852-1931).

Consideremos una luz que sale del punto P en la fuente extendida S (Fig. 41-20) y que cae sobre el espejo semiplateado M (algunas veces llamado *divisor de haz*). El espejo tiene un recubrimiento de plata lo bastante grueso para transmitir la mitad de la luz incidente y reflejar la otra mitad; para facilitar la explicación, en la figura hemos supuesto que el espesor del espejo es insignificante. En M la luz se divide en dos ondas. Por transmisión una recorre una distancia d_1 hacia el espejo M_1; por reflexión la otra avanza una distancia d_2 hacia M_2. Las ondas se reflejan en los espejos y son enviadas hacia atrás en dirección de la incidencia; cada una termina por incidir en el ojo E. Las ondas interfieren, pues son coherentes por provenir del mismo punto en la fuente. El ojo percibe un patrón de interferencia de franjas circulares, como los de los anillos de Newton (Fig. 41-17).

La interferencia se produce porque los dos haces luminosos describen trayectorias diferentes entre M y M_1 o M_2. Cada haz recorre dos veces su trayectoria respectiva (hacia el espejo y desde él); así que su trayectoria es $2(d_2 - d_1)$ cuando los haces se recombinan.

La diferencia de trayectoria puede modificarse moviendo el espejo M_2, que está montado en un ajuste preciso de micrómetro. A medida que M_2 se desplaza, las franjas circulares parecen crecer o acortarse (según la dirección del movimiento de M_2); los nuevos anillos aparecen en el centro del patrón de interferencia y crecen hacia afuera, o anillos más grandes se colapsan y desaparecen en el centro al acortarse. Para que el centro del patrón de franjas pase de brillante a oscuro y luego a brillante nuevamente, es necesario que la diferencia de trayectoria entre los dos haces sea modificada por una longitud de onda; ésto significa (porque la onda recorre dos veces la trayectoria entre M y M_2) que el espejo M_2 avanza una distancia de $\frac{1}{2}\lambda$.

El interferómetro sirve para medir los cambios de longitud, para lo cual basta contar el número de franjas de interferencia que cruzan el campo visual al mover el espejo M_2. Las mediciones de longitud hechas de ese modo serán precisas, si se cuentan muchas franjas.

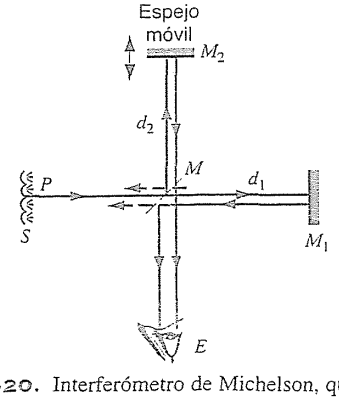


FIGURA 41-20. Interferómetro de Michelson, que muestra la trayectoria de un rayo originado en el punto P de una fuente extendida S. El rayo proveniente de P se divide en M; los dos se reflejan contra los espejos M_1 y M_2 y luego se recombinan en M. Podemos mover el espejo M_2 para modificar la diferencia de trayectoria entre los rayos combinados.

* Véase "Michelson: America's First Nobel Prize Winner in Science", de R. S. Shankland, *The Physics Teacher*, enero de 1977, p. 19. Consúltese también "Michelson and His Interferometer", de R. S. Shankland, *Physics Today*, abril de 1974, p. 36.

Michelson midió la longitud del metro patrón, conservado en París, en función de la longitud de onda de cierta luz monocromática roja emitida por una fuente que contenía cadmio. Demostró que el metro patrón equivalía a 1,553,163.5 longitudes de onda de la luz roja de cadmio. Por este trabajo obtuvo el Premio Nobel en 1907. Su obra sentó las bases para que (en 1961) la barra de metro se abandonara finalmente como patrón de longitud y para que se redefiniera el metro a partir de la longitud de onda. En 1983, como ya dijimos, ni siquiera esta longitud de onda patrón era lo bastante precisa para atender las crecientes exigencias de la ciencia y de la tecnología; así pues, fue reemplazado por otro patrón que se basaba en el valor definido de la velocidad de la luz.

PROBLEMA RESUELTO 41-6. Una luz amarilla ($\lambda = 589.00$ nm) ilumina un interferómetro de Michelson. ¿Cuántas franjas brillantes contaremos al desplazar el espejo 1.0000 cm?

Solución Cada franja corresponde a un movimiento del espejo de media longitud de onda. Por tanto, el número de franjas es el mismo que el de medias longitud de onda en 1.0000 cm, o sea

$$\frac{1.0000 \times 10^{-2}\ \text{m}}{\frac{1}{2}(589.00 \times 10^{-9}\ \text{m})} = 33{,}956 \quad \text{franjas}$$

El interferómetro de Michelson y la propagación de la luz (opcional)

En el capítulo 20 explicamos la hipótesis de Einstein, hoy bien comprobada, de que en el espacio libre la luz se desplaza con la misma velocidad c sin importar la velocidad relativa de la fuente ni del observador. Esta hipótesis contradecía las ideas de los físicos de siglo XIX relativas a la propagación de las ondas. Les era difícil, por su formación en la física clásica de la época, pensar que una onda pudiese propagarse sin un medio. Si se pudiera probar la existencia del medio, la velocidad c de la luz podría considerarse naturalmente como la velocidad *respecto a la velocidad del medio*, del mismo modo que la velocidad del sonido se refiere siempre a un medio como el aire. Aunque no se conocía medio alguno de su propagación, los físicos postulaban uno, el *éter,* y suponían que sus propiedades eran tales que no podía detectarse con medios ordinarios, como pesarlo.

En 1881 (24 años antes que Einstein formulara su hipótesis), Michelson se propuso verificar con medios físicos directos la existencia del éter. En particular, se asoció más tarde a E. W. Morley e intentó medir la velocidad u con que la Tierra pasa por el éter. Su interferómetro fue el instrumento elegido para este experimento hoy famoso de Michelson-Morley.

La Tierra, junto con el interferómetro que se desplaza a una velocidad $\vec{u}$ a través del éter, equivale a este último en reposo, con el éter fluyendo por él a una velocidad $-\vec{u}$, como se observa en la figura 41-21. Considere una onda que recorre la trayectoria MM_1M y otra que recorre la trayectoria MM_2M. La primera equivale clásicamente a una persona que remando impulse un bote a una distancia d corriente abajo y la misma

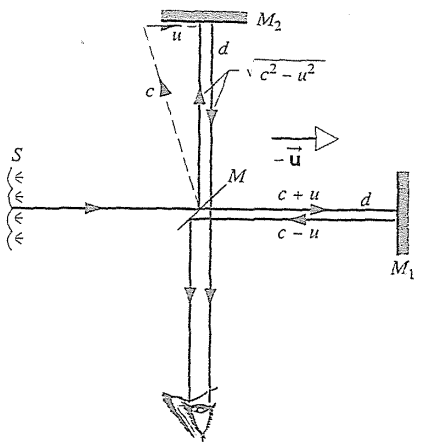


FIGURA 41-21. "Éter" que fluye con la velocidad $-\vec{u}$ a través del interferómetro de Michelson. Las velocidades señaladas se basan en la hipótesis (incorrecta) del éter.

distancia corriente arriba; la segunda equivale a remar en un bote una distancia d de ida y vuelta a través de la corriente.

Con base en la hipótesis del éter, la velocidad de la luz en la trayectoria MM_1 es $c + u$; en la trayectoria de retorno M_1M es $c - u$. El tiempo necesario para completar el recorrido es

$$t_1 = \frac{d}{c+u} + \frac{d}{c-u} = d\frac{2c}{c^2-u^2} = \frac{2d}{c}\frac{1}{1-(u/c)^2}.$$

La velocidad de la luz, una vez más *basada en la hipótesis del éter*, en la trayectoria MM_2 es $\sqrt{c^2 - u^2}$ como se indica en la figura 41-2. Esta misma velocidad se observa en la trayectoria de retorno M_2M; así que el tiempo necesario para completarla es

$$t_2 = \frac{2d}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

La diferencia de tiempo en las dos trayectorias es

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2d}{c}\left\{\left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-1} - \left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}.$$

Suponiendo que $u/c << 1$, podemos expandir las cantidades dentro de los corchetes cuadrados recurriendo al teorema binomial y conservando sólo los dos primeros términos. Ello nos da

$$\Delta t = \frac{2d}{c}\left\{\left[1+\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \cdots\right] - \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \cdots\right]\right\} = \frac{2d}{c}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2\right\} = \frac{du^2}{c^3}. \qquad (41\text{-}22)$$

A continuación giremos el interferómetro entero 90°. Se intercambian así los papeles de las dos trayectorias de la luz:

MM_1M es ahora la trayectoria de "corriente cruzada" y MM_2M es la de "corriente arriba y abajo". La diferencia de tiempo entre las dos ondas que entran en el ojo también está invertida; se altera así la diferencia de fase entre las ondas combinadas y las posiciones de los máximos de interferencia. El experimento consiste en buscar un cambio en las franjas de interferencia, conforme se hace girar el aparato.

El *cambio* en la diferencia de tiempo es $2\Delta t$, que corresponde a una diferencia de fase $\Delta\phi = \omega(2\Delta t)$ donde $\omega(= 2\pi c/\lambda)$ es la frecuencia angular de la onda de luz. El cambio máximo previsto en el número de franjas en una rotación de 90° es

$$\Delta N = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\omega(2\Delta t)}{2\pi} = \frac{2c\Delta t}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2, \quad (41\text{-}23)$$

donde hemos empleado la ecuación 41-22 con Δt.

En el interferómetro de Michelson-Morley sea $d = 11$ m (resultado obtenido por reflexión múltiple en el interferómetro) y que $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m. Si se supone que u es aproximadamente la velocidad orbital de la Tierra, entonces $u/c \approx 10^{-4}$. El cambio máximo esperado de franja cuando se hace girar el interferómetro 90° es

$$\Delta N = \frac{2d}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{(2)(11\text{ m})}{5.9 \times 10^{-7}\text{ m}}(10^{-4})^2 = 0.4.$$

A pesar de esperarse un cambio apenas de aproximadamente 0.4 de un borde, Michelson y Morley estaban seguros de poder observar un cambio de 0.01 de franja. *Sin embargo, en su experimento descubrieron que no existe un cambio observable de franjas.*

La analogía entre una onda de luz en el supuesto éter y un bote que se mueve en el agua, que parecía tan evidente en 1881 es del toda correcta. La demostración basada en esta analogía es incorrecta para las ondas de luz. Cuando el análisis se realiza a partir de la hipótesis de Einstein, el resultado nulo observado se predice con claridad; la velocidad de la luz es c en todas las trayectorias. Desde el punto de vista de Einstein, el movimiento de la Tierra alrededor del Sol y la rotación del interferómetro no tienen efecto alguno en la velocidad de las ondas de luz a través de él.

Conviene aclarar lo siguiente: aunque la hipótesis de Einstein es absolutamente compatible con el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley, éste no prueba la hipótesis de Einstein. Él dijo que los experimentos, por numerosos que fueran, nunca podrían probar que tenía razón, pero que bastaba uno sólo para probar que estaba equivocado. La aceptación actual de su hipótesis se basa en que gran cantidad de experimentos diseñados para probar esta hipótesis arrojan los mismos resultados. Todavía no se realiza ese experimento capaz de probar que Einstein estaba equivocado.

OPCIÓN MÚLTIPLE

41-1 Interferencia de dos fuentes
41-2 Interferencia de rendija doble

1. ¿Cuál es la separación mínima de rendija d para que la interferencia produzca por lo menos un máximo que no sea el central?
   A) $d \geq 5\lambda$ B) $d \geq 3\lambda$ C) $d \geq \lambda$ D) $d \geq \lambda/3$
   E) No hay un *mínimo*.
2. ¿Cuál es la separación máxima de rendija d en que se producirán franjas de interferencia?
   A) No hay un máximo.
   A) $d \leq 5\lambda$ B) $d \leq 3\lambda$ C) $d \leq \lambda$ D) $d \leq \lambda/3$
3. Se instala un aparato de rendija doble como se ve en la figura 41-5. Se usa luz verde para crear el patrón de interferencia. Se sustituye después por luz roja. ¿Cuál de los siguientes cambios permitirá que el espaciamiento de las bandas brillantes sobre la pantalla permanezcan inalteradas por el cambio del color de la luz?
   A) Aumento de D. B) Disminución de d.
   C) Aumento de d o disminución de D.
   D) Aumento de brillantez en la fuente de luz.
4. Suponga que se pone un filtro sobre una de las rendijas de la figura 41-3 para evitar que la luz las atraviese.
   a) ¿Qué sucederá con la intensidad de la luz en el lugar del máximo central en la figura 41-4?
   A) Aumentará. B) Disminuirá.
   C) Permanecerá inalterada.
   D) Depende de qué rendija se cubra.
   b) ¿Qué sucederá con la intensidad de la luz en la ubicación del primer mínimo?
   A) Aumenta. B) Disminuye.
   C) Permanece inalterada.
   D) Depende de qué rendija se cubra.
   c) ¿Qué sucederá con la intensidad de la luz en la ubicación del primer máximo después del máximo central?
   A) Aumenta. B) Disminuye.
   C) Permanece inalterado.
   D) Depende de qué rendija se cubra.
5. Un aparato de rendija doble se usa para observar un patrón de interferencia proyectado sobre una pantalla desde una fuente de luz estacionaria. Si ahora la fuente se dirige hacia las rendijas dobles con velocidad constante, ¿qué se observará en la pantalla?
   A) El patrón de interferencia permanecerá inalterado.
   B) Las franjas se separarán más a una nueva distancia fija.
   C) Las franjas se acercarán más a una nueva distancia fija.
   D) Las franjas seguirán alejándose más y más a medida que acercamos la fuente.
6. En una demostración de rendija doble, un profesor de física introduce una hoja delgada de material transparente con un índice de refracción ligeramente mayor que el aire. ¿Qué sucederá con el patrón de interferencia en la pantalla?
   A) No habrá cambio alguno.
   B) Las franjas se separarán más.
   C) Las franjas se acercarán más.
   D) Las franjas cambiarán de posición, pero no se modificará el espaciamiento.

7. En una demostración de rendija doble, por las *dos* rendijas un profesor de física introduce una hoja delgada de material transparente con un índice de refracción ligeramente mayor que el aire. ¿Qué ocurrirá con el patrón de interferencia en la pantalla?
   A) No habrá cambio alguno.
   B) Las franjas se dispersarán y se separarán más.
   C) Las franjas se compactarán más.
   D) Los franjas cambiarán de posición, pero no de espaciamiento.
8. Dos fuentes luminosas monocromáticas y muy cerca una de la otra crean un patrón fijo de interferencia en una pantalla. Después disminuye la frecuencia de una de ellas. ¿Cómo afectará esto al patrón de interferencia?
   A) El patrón desaparecerá por completo.
   B) Crecerá el espaciamiento entre las franjas.
   C) Las franjas se desplazarán a la izquierda o a la derecha, pero el espaciamiento permanecerá constante.
   D) Disminuirá el espaciamiento entre las franjas.
9. La ecuación 41-4 es una aproximación con ángulos pequeños; en esta aproximación el espaciamiento entre los máximos contiguos es una constante dada por Δy. En realidad, el espaciamiento
   A) es menor que Δy y se hace más pequeño conforme θ aumenta.
   B) es menor que Δy pero crece conforme θ aumenta.
   C) es mayor que Δy, pero disminuye conforme θ aumenta.
   D) es mayor que Δy y crece aún más conforme θ crece.

41-3 Coherencia

10. ¿Cuál de las siguientes magnitudes debe ser idéntica para que dos rayos de luz sean considerados coherentes? (Escoja todas las que caen en esa categoría.)
    A) Frecuencia
    B) Longitud de onda
    C) Velocidad de onda
    D) Fase de onda
    E) Amplitud de onda

41-4 Intensidad en la interferencia de rendija doble

11. Por mera diversión, un estudiante diseña un experimento de interferencia con una *rendija triple*. Si la luz procedente de las tres rendijas alcanza en fase el máximo central, ¿qué relación hay entre la intensidad I y la intensidad I_0 procedente de la rendija simple?
    A) $I = I_0$ B) $I = 3I_0$ C) $I = 6I_0$ D) $I = 9I_0$
12. Tres rayos luminosos coherentes y de igual intensidad llegan al punto P en la pantalla para producir un mínimo de interferencia de intensidad cero. Si bloqueamos dos cualesquiera de ellos, la intensidad de la luz en P es I_1. ¿Qué intensidad tiene la luz en P si se bloquea sólo uno de ellos?
    A) 0 B) $I_1/2$ C) I_1 D) $2I_1$ E) $4I_1$

41-5 Interferencia proveniente de películas delgadas

13. Un rayo luminoso incide en una película delgada. Se muestran dos de los rayos, reflejados y dos de los transmitidos en la figura 41-22.
    a) Suponga que los rayos a y b experimentan un cambio de fase debido a las diferencias de los índices de refracción. ¿Cuál sería el ordenamiento apropiado de ellos?
    A) $n_1 > n_2 > n_3$ B) $n_2 > n_3 > n_1$
    C) $n_3 > n_2 > n_1$ C) $n_3 > n_1 > n_2$
    E) Ninguno de los anteriores; no pueden ocurrir los cambios de fase especificados.
    b) Suponga que los rayos a y c experimentan un cambio de fase debido a las diferencias de los índices de refracción. ¿Cuál sería el ordenamiento apropiado de ellos?
    A) $n_1 > n_2 > n_3$ B) $n_2 > n_3 > n_1$
    C) $n_3 > n_2 > n_1$ C) $n_3 > n_1 > n_2$
    E) Ninguno de los anteriores; no pueden ocurrir los cambios de fase especificados.
    c) Suponga que los rayos a y d experimentan un cambio de fase debido a las diferencias de los índices de refracción. ¿Cuál sería el ordenamiento apropiado de ellos?
    A) $n_1 > n_2 > n_3$ B) $n_2 > n_3 > n_1$
    C) $n_3 > n_2 > n_1$ C) $n_3 > n_1 > n_2$
    E) Ninguno de los anteriores; no pueden ocurrir los cambios de fase especificados.
    d) Suponga que los rayos b y c experimentan un cambio de fase debido a las diferencias de los índices de refracción. ¿Cuál sería el ordenamiento apropiado de ellos?
    A) $n_1 > n_2 > n_3$ B) $n_2 > n_3 > n_1$
    C) $n_3 > n_2 > n_1$ C) $n_3 > n_1 > n_2$
    E) Ninguno de los anteriores; no pueden ocurrir los cambios de fase especificados.

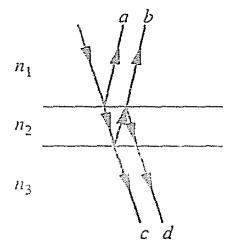


FIGURA 41-22. Pregunta de opción múltiple 13.

14. ¿Por qué no vemos los efectos de la interferencia procedente de películas delgadas cuando contemplamos la hoja de vidrio en una ventana?
    A) La interferencia no se produce en películas gruesas.
    B) Las franjas están muy mal definidas.
    C) Las franjas están demasiado separadas.
    D) Las franjas brillantes y oscuras tienden a superponerse.
15. Una luz de 550 nm incide contra una película delgada normal a la superficie; toda la luz se transmite y no se refleja en absoluto. Un segundo rayo de luz de longitud λ incide contra la misma película en un ángulo muy pequeño con la normal; toda la luz se transmite enteramente sin que se refleje en absoluto. ¿Qué puede concluirse respecto a λ?
    A) $\lambda > 550$ nm B) $\lambda = 550$ nm C) $\lambda < 550$ nm
    D) Nada puede concluirse si no se conocen los índices de refracción de las sustancias en el problema.

41-6 Interferómetro de Michelson

PREGUNTAS

1. ¿Es el experimento de Young un experimento de interferencia, de difracción o de ambas?
2. ¿Por qué se necesita la pantalla *A* en la figura 41-7 en el experimento de interferencia de rendija doble que Young diseñó y en que utilizó una fuente de luz monocromática de laboratorio? No se necesita una pantalla *A* si la fuente de luz es un haz láser. ¿Por qué?
3. ¿Qué cambios, si los hay, ocurren en el patrón de las franjas de interferencia si ponemos en agua el aparato de la figura 41-5?
4. ¿Se producen los efectos de interferencia en las ondas sonoras? Recuerde que el sonido es una onda longitudinal, y que la luz una transversal.
5. No es posible demostrar los efectos de la interferencia entre la luz partiendo de dos lámparas separadas de vapor de sodio, pero sí los que ocurren entre el sonido y dos altavoces activados por osciladores individuales. Explique por qué.
6. Si fuese posible la interferencia entre las ondas de luz de distinta frecuencia, deberíamos observar los pulsos de luz, del mismo modo que se obtienen los pulsos sonoros procedentes de dos fuentes con frecuencia un poco diferente. Explique cómo uno podría observar experimentalmente esta posibilidad.
7. ¿Por qué las rendijas paralelas son preferibles a los diminutos hoyos de alfiler con que Young demostró la interferencia?
8. ¿Es la coherencia importante en la reflexión y en la refracción?
9. Describa el patrón de la intensidad de la luz en la pantalla *C* de la figura 41-5, si se cubre una rendija con un filtro rojo y la otra con un filtro azul y si la luz incidente es blanca.
10. Si se cubre una rendija en la figura 41-5, ¿qué cambio ocurrirá en la intensidad de la luz en el centro de la pantalla?
11. Todos estamos inmersos constantemente en la radiación electromagnética proveniente del Sol, de las señales de radio y de televisión, de las estrellas y de otros objetos celestiales. ¿Por qué estas ondas no interfieren entre sí?
12. Al calcular la perturbación producida por un par de trenes de ondas sobrepuestas, ¿cuándo deberían sumarse las intensidades y cuándo las amplitudes?
13. En el experimento de doble rendija diseñado por Young, suponga que la pantalla *A* de la figura 41-7 contuviera dos rendijas paralelas muy pequeñas en vez de una. *a)* Demuestre que, si el espaciamiento entre ellas se elige adecuadamente, pueden hacerse desaparecer las franjas de interferencia. *b)* ¿En qué condiciones calificaría de coherentes los haces que salen de las rendijas S_1 y S_2 en la pantalla *B*? ¿No producen franjas de interferencia? *c)* Explique lo que sucedería con ellos en el caso de una rendija simple de la pantalla *A*, si disminuyéramos gradualmente su ancho.
14. Defienda el siguiente enunciado: la figura 41-8*a* es una onda de seno (o coseno), no así la figura 41-8*b*. En efecto, no es posible asignarle una frecuencia especial a la curva de la segunda figura. ¿Por qué no? (Sugerencia: piensen en el análisis de Fourier.)
15. Muchos de nosotros estamos familiarizados con las antenas giratorias u oscilatorias de los radares que producen haces también giratorios u oscilatorios de radiación de microondas. Asimismo es posible generar un haz oscilatorio de ella sin ningún movimiento mecánico de la antena transmisora. Se logra cambiando periódicamente la fase de radiación cuando sale de varias secciones de la antena (larga). Convénzase de que, a causa de la interferencia constructiva proveniente de diversas partes de la antena fija, un haz oscilante de microondas puede producirse en esta forma.
16. ¿A qué se deben las oscilaciones de la recepción de radio cuando un avión cruza el aire arriba de nosotros?
17. ¿Es posible tener coherencia entre las fuentes luminosas que emiten luz de diversas longitudes de onda?
18. Un automóvil dirige sus faros hacia el lado de un granero. ¿Por qué no aparecen franjas de interferencia en la región donde se superpone la luz de los dos haces?
19. Suponga que el revestimiento con película en la figura 41-15 tuviese un índice de refracción mayor que el del vidrio. ¿Podría seguirse reflejando? De ser así, ¿qué influencia tendría el revestimiento?
20. ¿Cuáles son los requisitos de la intensidad máxima cuando se ve una película delgada mediante la luz transmitida?
21. ¿Por qué una película (una burbuja de jabón o una capa aceitosa) debe ser "delgada" para que presente los efectos de la interferencia? ¿Lo muestran realmente? ¿Que significa "delgada" en este contexto?
22. ¿Por qué los lentes recubiertos (Prob. res. 41-4) tienen color púrpura bajo la luz reflejada?
23. Las ventanas ordinarias reflejan la luz de sus superficies internas y externas. ¿Por qué no percibimos los efectos de la interferencia?
24. Si humedecemos los anteojos para limpiarlos, nos damos cuenta de que, al evaporarse el agua, pierden bastante capacidad de reflexión durante breve tiempo. Explique por qué.
25. Recubrimos una lente para atenuar la reflexión, como se hace en el problema 41-4. ¿Qué sucede con la energía que se había reflejado antes? ¿La absorbe el revestimiento?
26. Considere los siguientes objetos que producen colores al ser expuestos a la luz solar: 1) burbujas de jabón, 2) pétalos de rosa, 3) la superficie interna de una concha de ostra, 4) capas aceitosas delgadas, 5) revestimientos no reflejantes en las lentes de las cámaras y 6) las plumas de la cola del pavo real. Los colores desplegados por todos ellos, menos uno, son totalmente fenómenos de interferencia, sin que intervengan pigmentos. ¿Cuál es esa excepción? ¿Por qué los demás parecen "coloreados"?
27. Una película de jabón en una espira de alambre sostenida en el aire aparece negra en su parte más delgada al ser vista bajo luz reflejada. Por otra parte, una película delgada de aceite que flota en el agua aparece brillante en su parte más delgada cuando se ve desde el aire. Explique ambos fenómenos.
28. Los cambios muy pequeños en el ángulo de incidencia no modifican mucho las condiciones de interferencia en las películas "delgadas", pero sí en las películas "gruesas". ¿A qué se debe?
29. Un plano óptico es una lámina de vidrio que ha sido aplanada a una pequeña fracción de longitud de onda. ¿Cómo puede usarse para probar la uniformidad de una segunda lámina de vidrio?
30. En un experimento de anillos de Newton, ¿es oscuro o claro el punto central visto bajo la reflexión?
31. En relación con el cambio de fase en la reflexión en una interfaz entre dos medios transparentes, ¿cree posibles los cambios de fase que no sean 0 ni π? ¿Piensa que pueden calcularse rigurosamente con las ecuaciones de Maxwell?

32. Se conocen las características direccionales de cierta antena de radar como un receptor de radiación. ¿Qué puede decirse sobre las de un transmisor?
33. En un cuarto oscuro una persona que ve a través de una ventana pequeña observa a otra que está de pie afuera, bajo la luz brillante del Sol. La segunda persona no puede ver a la primera. ¿Constituye esto una violación del principio de la reversibilidad óptica? Suponga que no se absorbe luz.
34. ¿Por qué es necesario girar el interferómetro en el experimento de Michelson-Morley?
35. ¿Cómo se interpreta el resultado negativo del experimento de Michelson-Morley según la teoría de la relatividad de Einstein?
36. Las franjas empiezan a desaparecer si la longitud de trayectoria hacia el espejo móvil en el interferómetro de Michelson (Fig. 41-20) es mucho mayor que hacia el espejo fijo (más de un metro por ejemplo). Explique por qué. Los rayos láser amplían mucho este intervalo. ¿Por qué?
37. ¿Cómo construiría un interferómetro de Michelson para medir la longitud de onda del sonido? Explique las diferencias basándose en el interferómetro óptico.

EJERCICIOS

41-1 Interferencia de dos fuentes
41-2 Interferencia de rendija doble

1. La luz verde monocromática, longitud de onda = 554 nm, ilumina dos pequeñas rendijas paralelas, separadas por 7.7 μm. Calcule la posición angular de la franja brillante de tercer orden ($m = 3$) *a*) en radianes y *b*) en grados.
2. Una luz monocromática ilumina dos rendijas paralelas, separadas por una distancia *d*. El primer máximo se observa en una posición angular de 15°. ¿En qué porcentaje deberíamos aumentar o reducir *d* para que el *segundo* máximo se observe ahora a 15°?
3. Se efectúa un experimento de rendija doble con luz azul-verde de 512 nm de longitud de onda. Las rendijas están separadas por una distancia de 1.2 mm y la pantalla está a 5.4 m de ellas. ¿A qué distancia están entre sí las franjas brillantes tal como se ven en la pantalla?
4. Encuentre la separación de rendijas en un arreglo de dos rendijas que producirán franjas brillantes de interferencia, distantes entre sí 1.00° en una separación angular. Suponga que la longitud de onda es de 592 nm.
5. Un arreglo de rendija doble produce franjas de interferencia con la luz de sodio ($\lambda = 589$ nm), separadas por 0.23°. ¿En qué longitud de onda será la separación 10% más grande? Suponga que el ángulo θ es pequeño.
6. Un arreglo de rendija doble produce franjas de interferencia en la luz de sodio ($\lambda = 589$ nm), con una separación de 0.20°. ¿Cuál es la separación angular de franjas, si todo el arreglo está sumergido en agua ($n = 1.33$)?
7. En un experimento de rendija doble, la distancia entre ellas es 5.22 mm y las rendijas se hallan a 1.36 m de la pantalla. Dos patrones de interferencia se ven en ella, uno debido a la luz con 480 nm de longitud de onda y el otro a longitudes de onda de 612 nm. Encuentre la separación en la pantalla entre las franjas de interferencia de tercer orden en los dos patrones.
8. En un experimento de interferencia de un gran tanque de ondas (Fig. 41-2), las fuentes vibrantes coherentes se colocan a una distancia de 120 mm entre sí. La distancia entre los máximos a 2.0 m es 180 mm. Si la velocidad de las ondas es 25 cm/s, calcule la frecuencia de las fuentes vibrantes.
9. ¿Qué longitud de onda tiene la luz usada, si la distancia entre el primero y el décimo mínimo de un patrón de rendija doble es 18 mm y si las rendijas están separadas por 0.15 mm con una pantalla a 50 cm de ellas?
10. Dos fuentes puntuales coherentes de radio separadas por 2.0 m irradian en fase con $\lambda = 0.50$ m. ¿Cuántos máximos presentará un detector que movemos en una trayectoria circular alrededor de ellas en un plano que las contenga?
11. Dibuje el patrón de interferencia que se espera cuando se emplean dos agujeros de alfiler diminutos en vez de rendijas estrechas.
12. Una luz de sodio ($\lambda = 589$ nm) incide sobre una rendija doble de separación $d = 0.180$ mm. Una lente delgada ($f = 1.13$ m) se coloca cerca de la rendija como se muestra en la figura 41-6. ¿Cuál es la separación lineal de las franjas en la pantalla situada en el plano focal de la lente?
13. Una luz de sodio ($\lambda = 589$ nm) incide sobre una rendija doble de separación $d = 2.0$ mm. La distancia de las rendijas a la pantalla D es 40 mm. ¿Qué error fraccional se comete al utilizar la ecuación 41-1 para localizar en la pantalla la décima franja brillante?

41-3 Coherencia

14. La longitud de coherencia de un tren de ondas es la distancia en que la constante de fase es la misma. *a*) Si un átomo individual emite luz coherente con 1×10^{-8} s, ¿cuál es la longitud de coherencia del tren de ondas? *b*) Suponga que un espejo parcialmente reflejante lo divide en dos partes que más tarde vuelven a reunirse, después que un haz recorre 5 m y el otro 10 m. ¿Producen las ondas franjas de interferencia observables por el ojo humano?

41-4 Intensidad en la interferencia de rendija doble

15. La fuente A de ondas de radio de largo alcance aventaja 90° a la fuente B. La distancia r_A a un detector es 100 m más grande que la distancia r_B. ¿Cuál es la diferencia de fase en el detector? Ambas fuentes tienen una longitud de onda de 400 m.
16. Encuentre la diferencia de fase entre las ondas procedentes de dos rendijas que llegan a la *emésima* franja oscura en un experimento de rendija doble.
17. Una luz de 600 nm de longitud de onda incide normalmente en dos pequeñas rendijas paralelas, con una separación de 0.60 mm. Dibuje el patrón de intensidad observado en una pantalla lejana en función de un ángulo θ en el intervalo de valores $0 \leq \theta \leq 0.0040$ radianes.
18. Encuentre la suma de las siguientes magnitudes *a*) gráficamente usando fasores y b) usando trigonometría:

$$y_1 = 10 \operatorname{sen} \omega t,$$

$$y_2 = 8.0 \operatorname{sen} (\omega t + 30°).$$

19. S_1 y S_2 en la figura 41-23 son fuentes puntuales efectivas de radiación, excitadas por el mismo oscilador. Son coherentes y están en fase. Colocadas a una distancia $d = 4.17$ m entre sí, emiten igual cantidad de potencia mediante ondas magnéticas de 1.60 m de longitud. *a*) Determine las posiciones de los máximos primero, segundo y tercero de la señal recibida, a medida que movemos el detector D a lo largo del eje x comenzando en O.

b) ¿Es igual a cero la intensidad en el mínimo más cercano? Justifique su respuesta.

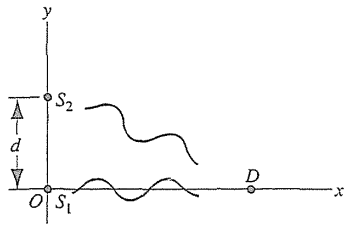


FIGURA 41-23. Ejercicio 19.

20. Sume las siguientes cantidades gráficamente, aplicando el método de fasores (Prob. res. 41-2), y algebraicamente:

$$y_1 = 10 \operatorname{sen} \omega t,$$

$$y_2 = 14 \operatorname{sen}(\omega t + 26°),$$

$$y_3 = 4.7 \operatorname{sen}(\omega t - 41°).$$

41-5 Interferencia proveniente de películas delgadas

21. Queremos cubrir una lámina plana de vidrio ($n = 1.50$) con un material transparente ($n = 1.25$), de manera que no se desvíe la luz de 620 nm de longitud de onda (en el vacío) normalmente incidente. ¿Qué espesor mínimo podría tener la capa?

22. Una película delgada en el aire mide 410 nm de espesor y está iluminada con luz blanca normal a su superficie. El índice de refracción es 1.50. ¿Qué longitudes de onda dentro del espectro visible se intensificarán en el haz reflejado?

23. Un buque cisterna inhabilitado derrama queroseno ($n = 1.20$) en el Golfo Pérsico, creando una gran capa aceitosa en la superficie del agua ($n = 1.33$). *a*) Si desde un avión mira una región de capa aceitosa cuyo espesor es de 460 nm, ¿con qué longitud(es) de onda de luz visible es máxima la reflexión? *b*) Si usted practica el buceo bajo esta misma región, ¿con que longitud(es) de onda de la luz visible alcanza su máximo la intensidad transmitida?

24. En la joyería elegante, las imitaciones de diamante (hechas de vidrio con $n = 1.5$) se cubren a menudo con monóxido de silicio ($n = 2.0$) para hacerlas más reflejantes. ¿Qué espesor ha de tener el recubrimiento para que alcance una fuerte reflexión con una luz de 560 nm, que incida normalmente?

25. Si la longitud de la luz incidente es $\lambda = 572$ nm, los rayos A y B en la figura 41-24 están fuera de fase en 1.50λ. Calcule el grosor d de la película.

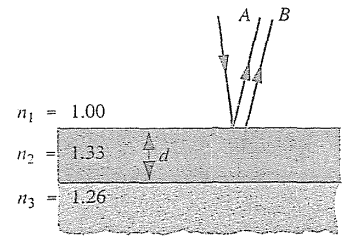


FIGURA 41-24. Ejercicio 25.

26. Una luz con una longitud de onda de 585 nm incide normalmente en una película delgada de jabón ($n = 1.33$) suspendida en el aire. Si la película tiene un grosor de 0.00121 mm, determine si parece brillante u oscura cuando la observamos desde un punto cercano a la fuente luminosa.

27. Una delgada película de acetona (índice de refracción = 1.25) recubre una gruesa placa de vidrio (índice de refracción = 1.50). Unas ondas planas de luz de longitud de onda variable inciden normalmente en la película. Cuando uno ve la onda reflejada, nota que la interferencia constructiva completa ocurre en 600 nm y que la interferencia destructiva ocurre a los 700 nm. Calcule el espesor de la película de acetona.

28. Una luz blanca reflejada en incidencia perpendicular desde una película de jabón en el aire tiene, en el espectro visible, un máximo de interferencia en 600 nm y un mínimo en 450 nm, sin un mínimo intermedio. Si $n = 1.33$ de la película, ¿Cuál es su grosor suponiendo que sea uniforme?

29. Una fuente amplia de luz ($\lambda = 680$ nm) ilumina normalmente dos placas de vidrio de 120 mm de largo que se tocan en un extremo y que están separadas por un alambre de 0.048 mm de diámetro en el otro extremo (Fig. 41-25). ¿Cuántas franjas brillantes aparecen a una distancia de 120 mm?

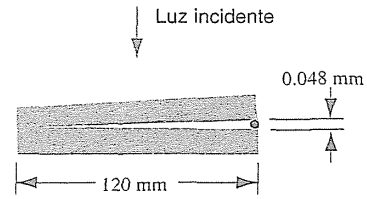


FIGURA 41-25. Ejercicio 29.

30. Una gota de aceite ($n = 1.20$) flota en una superficie de agua ($n = 1.33$) y se observa desde arriba bajo la luz reflejada (Fig. 41-26). *a*) ¿Corresponderán las regiones exteriores (las más delgadas) a la región brillante u oscura? *b*) ¿Qué espesor tiene la película de aceite cuando uno observa la tercera región azul desde el exterior de la gota? *c*) ¿Por qué los colores desaparecen gradualmente a medida que el espesor del aceite se vuelve más grande?

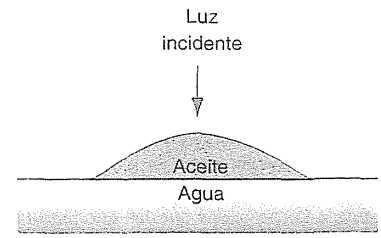


FIGURA 41-26. Ejercicio 30.

31. Una luz de 630 nm de longitud de onda incide normalmente en una película delgada en forma de cuña, cuyo índice de refracción es 1.50. Hay diez franjas brillantes y nueve franjas oscuras en ella. ¿Cuánto cambia el espesor de la película en esta longitud?

32. En una cuña de aire formada por dos placas planas de vidrio que se tocan a lo largo de un borde, hay 4001 líneas oscuras observadas cuando se ven bajo una luz monocromática reflejada. Cuando el aire entre las placas se vacía, se observan sólo 4000 de ellas. Con los datos anteriores calcule el índice de refracción del aire.

33. En el experimento de los anillos de Newton, el radio de curvatura R de la lente mide 5.0 m y tiene un diámetro de 20 mm. *a*) ¿Cuántos anillos se producen? *b*) ¿Cuántos se verían si metiéramos el arreglo en el agua ($n = 1.33$)? Suponga que $\lambda = 589$ nm.

34. El diámetro del décimo anillo brillante en un aparato de los anillos de Newton pasa de 1.42 a 1.27 cm, al introducir líquido entre la lente y la placa. Calcule el índice de refracción del líquido.

35. Un aparato de los anillos de Newton sirve para determinar el radio de curvatura de una lente. Se miden los radios de los anillos brillantes n-*ésimo* y el $(n + 20)$ésimo y se descubre que miden 0.162 cm y 0.368 cm, respectivamente, con una luz de 546 nm de longitud de onda. Calcule el radio de curvatura de la superficie inferior de la lente.

36. Un barco que se acerca al puerto transmite con una longitud de onda de $\lambda = 3.43$ m desde su antena situada a $h = 23$ m sobre el nivel del mar. La antena de la estación receptora se encuentra $H = 160$ m sobre el nivel del mar. ¿Qué distancia horizontal D hay entre el barco y la torre receptora cuando se pierde momentáneamente el contacto por radio la primera vez? Suponga que el mar tranquilo refleja perfectamente las ondas de radio de acuerdo con la ley de reflexión (Fig. 41-27).

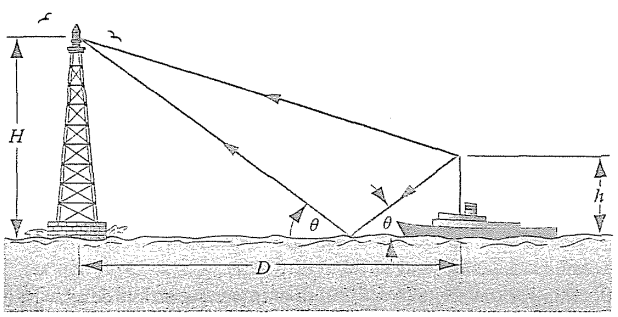


FIGURA 41-27. Ejercicio 36.

37. En el problema resuelto 41-4, suponga que no se refleja en absoluto la luz de 550 nm de longitud de onda en incidencia normal. Calcule el factor en que el revestimiento disminuye la reflexión en *a*) 450 nm y *b*) 650 nm. (Sugerencia: calcule ϕ en la Ec. 41-16.)

41-6 Interferómetro de Michelson

38. Una película delgada, con $n = 1.42$ para una luz de 589 nm de longitud de onda, se coloca en un brazo de un interferómetro de Michelson. Si ocurre un cambio de 7.0 franjas, ¿cuál será el espesor de la película?

39. Se cuentan 792 franjas con un medidor de luz, si desplazamos 0.233 mm el espejo M_2 en un interferómetro de Michelson. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz?

40. Una cámara hermética de 5.0 cm de largo, con ventanas de vidrio se coloca en un brazo de un interferómetro de Michelson, como se indica en la figura 41-28. Se usa una luz de longitud de onda $\lambda = 500$ nm. El aire se vacía lentamente en la cámara por medio de una bomba. Mientras se extrae, se observa que 60 franjas pasan delante. Con los datos anteriores calcule el índice de refracción del aire a presión atmosférica.

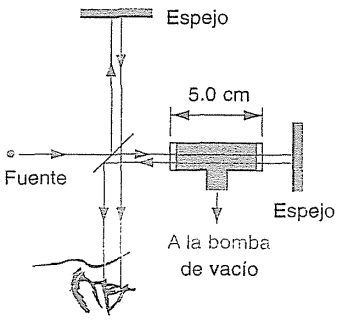


FIGURA 41-28. Ejercicio 40.

PROBLEMAS

1. Enfrente de un salón de actos, un haz coherente de luz monocromática procedente de un láser de helio-neón ($\lambda = 632.8$ nm) ilumina una rendija doble. De aquí recorre una distancia de 20.0 m hasta llegar a un espejo situado en la parte posterior del salón y vuelve a recorrer la misma distancia hasta la pantalla. *a*) ¿Cuál debería ser la distancia entre las dos rendijas para que la existente entre los máximos de interferencia sea 10.0 cm? *b*) Indique lo que verá si el conferencista introduce una delgada hoja de celofán por una de las rendijas. La trayectoria a través del celofán contiene 2.5 más ondas que las que pasan por el aire del mismo espesor geométrico.

2. Un delgado trozo de mica ($n = 1.58$) cubre una rendija en un arreglo de rendija doble. El punto central en la pantalla lo ocupa lo que era antes la franja séptima de brillantez. Si $\lambda = 550$ nm, ¿qué espesor tendrá la mica?

3. Dos fuentes puntuales S_1 y S_2, en la figura 41-29, emiten ondas coherentes. Demuestre que son hipérbolas las curvas como las allí incluidas, donde la diferencia de fase de los rayos r_1 y r_2 es una constante. (Sugerencia: una diferencia de fase constante implica una diferencia constante de longitud, se encuentra entre r_1 y r_2. El sistema OMEGA de la navegación marina se basa en este principio. S_1 y S_2 son transmisores ligados a la fase. El piloto observa en un osciloscopio la diferencia de fase recibida y localiza el barco en una hipérbola. Se requiere recibir las señales provenientes de un tercer transmisor para determinar la posición en esa hipérbola.

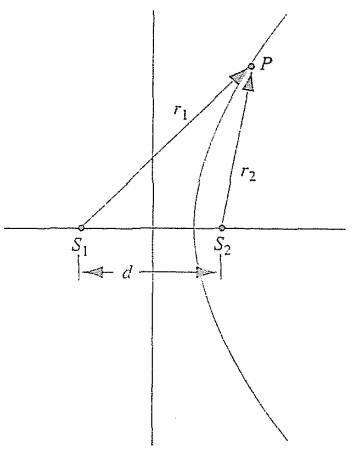


FIGURA 41-29. Problema 3.

4. Una rendija en un arreglo de rendija doble se cubre con una delgada placa de vidrio, cuyo índice de refracción es 1.4, y la otra con una cuyo índice de refracción es 1.7. El punto en la pantalla donde el máximo central estaba antes de introducir las placas de vidrio es ahora ocupado por lo que había sido antes la franja brillante $m = 5$. Suponga que $\lambda = 480$ nm y que las placas tienen el *mismo* espesor t; obtenga el valor de t.
5. Demuestre que el ancho medio $\Delta\theta$ en las franjas de interferencia de doble rendija está dada por

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2d}$$

Si θ es lo bastante pequeño para que sen $\theta \approx \theta$. El ancho medio es el ángulo entre los dos puntos de la franja donde la intensidad es la mitad a la del centro de la franja.
6. Una de las rendijas de un sistema de doble rendija es más ancha que la otra, de modo que la amplitud de la luz que desde una rendija llega a la parte central de la pantalla actúa sola y es el doble de la procedente de la otra rendija, que también actúa sola. Obtenga una expresión para la intensidad I en función de θ.
7. Una onda plana de luz monocromática incide normalmente en una película delgada uniforme de aceite que cubre una placa de vidrio. La longitud de onda de la fuente puede modificarse constantemente. Una interferencia destructiva completa de la luz reflejada se observa en longitudes de onda de 485 y 679 nm y no en longitudes de onda entre ellas. Si el índice de refracción del aceite es 1.32 y el del vidrio es 1.50, calcule el espesor de la película aceitosa.
8. Una hoja de vidrio que tiene un índice de refracción de 1.40 debe recubrirse con una película de material cuyo índice de refracción es 1.55, de manera que se transmita de preferencia la luz verde (longitud de onda = 525 nm). *a*) ¿Cuál es el espesor mínimo de la película que alcanzará el resultado? *b*) ¿Cuáles son otras partes del espectro visible que no se transmiten así? *c*) ¿Se reducirá mucho la transmisión de colores?
9. Dos trozos de placa de vidrio se mantienen juntos de modo que el espacio de aire entre ellos forma una cuña delgadísima. Una luz con 480 nm de longitud de onda choca perpendicularmente contra la superficie superior y se refleja contra la superficie inferior del vidrio de arriba y contra la superficie superior del vidrio de abajo, produciendo así una serie de franjas de interferencia. ¿Cuánto más gruesa es la cuña de aire en la franja decimosexta que en la sexta?
10. Un trozo de vidrio perfectamente plano ($n = 1.50$) se coloca sobre un pedazo de plástico también perfectamente plano ($n = 1.20$) como se muestra en la figura 41-30*a*. Los dos se tocan en *A*. Una luz de 600 nm de longitud de onda incide normalmente desde arriba. La ubicación de las franjas oscuras en la luz reflejada se indica en el bosquejo de la figura 41-30*b*. *a*) ¿Qué espesor tiene el espacio entre el vidrio y el plástico en *B*? *b*) Se desliza agua ($n = 1.33$) hasta el interior de la región entre el vidrio y el plástico. ¿Cuantas franjas oscuras se ven una vez que el agua desplaza todo el aire? (Lo recto y el espaciamiento uniforme de las franjas constituyen una prueba exacta de lo plano del vidrio.)

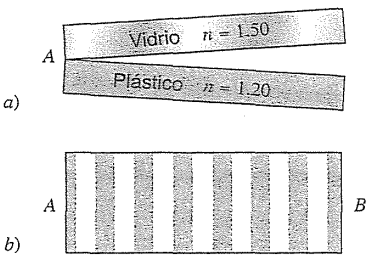


FIGURA 41-30. Problema 10.

11. En el experimento de los anillos de Newton, demuestre *a*) que la diferencia de radio entre los anillos vecinos (máximos) está dada por

$$\Delta r = r_{m+1} - r_m \approx \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda R/m},$$

suponiendo que $m >> 1$; y *b*) que el área entre los anillos contiguos (máximos) está dada por

$$A = \pi\lambda R,$$

suponiendo que $m >> 1$. Nótese que esta área es independiente de m.
12. Obtenga una expresión de la intensidad observada en el interferómetro de Michelson (Fig. 41-20) en función de la posición del espejo móvil. Mida la posición del espejo desde el punto donde $d_1 = d_2$.

CAPÍTULO 42

DIFRACCIÓN

La difracción es el doblez o dispersión de las ondas que encuentran un objeto (una barrera o abertura) durante su trayectoria. En este capítulo estudiamos la difracción de las ondas de luz solamente, pero es un fenómeno que se da en todos los tipos de ondas. Por ejemplo, los objetos ordinarios difractan las ondas sonoras y, en consecuencia, podemos escuchar los sonidos, aunque quizá no estemos en línea directa con su fuente. Para que se realice la difracción, el tamaño del objeto debe ser el orden de la longitud de las ondas incidentes: cuando la longitud de onda es mucho menor que el tamaño del objeto, la difracción rara vez se observa y el objeto proyecta una sombra bien definida.

Los patrones de difracción son bandas claras y oscuras semejantes a los patrones de interferencia expuestos en el capítulo 41. Al examinar estos patrones, conocemos mejor el objeto difractado. Así, la difracción de los rayos X es un método importante cuando se estudia la estructura de los sólidos, y la difracción de los rayos gamma sirve para estudiar los núcleos. La difracción tiene efectos indeseables, como la dispersión de la luz al entrar en la abertura de un telescopio que limita la capacidad de resolver o de separar las estrellas que aparecen cercanas entre sí. Vamos a ocuparnos de esos efectos en este capítulo y en el siguiente.

42-1 LA DIFRACCIÓN Y LA TEORÍA ONDULATORIA DE LA LUZ

Cuando la luz pasa por una abertura estrecha (de ancho similar a su longitud de onda; Fig. 40-1), los haces de luz no sólo brillan mucho más allá de la sombra geométrica de la rendija, sino que además producen una serie de bandas alternas de luz y de oscuridad parecidas a las franjas de interferencia (Fig. 42-1). En el capítulo 41, señalamos que el aspecto de las franjas de interferencia corrobora la naturaleza ondulatoria de la luz. Señalamos asimismo que el aspecto de los patrones de difracción exige que la luz viaje como ondas.

Aunque la difracción ya se conocía en la época de Huygens y de Newton, ellos no pensaban que dicha difracción constituía una prueba de la naturaleza ondulatoria de la luz. En particular, Newton estaba convencido de que la luz se desplazaba como una corriente de partículas.

El ingeniero francés Augustin Fresnel (1788-1827) fue un gran defensor de la teoría ondulatoria. Fresnel explicaba la difracción basándose en esa teoría, que no logró aceptación generalizada, ni siquiera después de que Thomas Young rea-

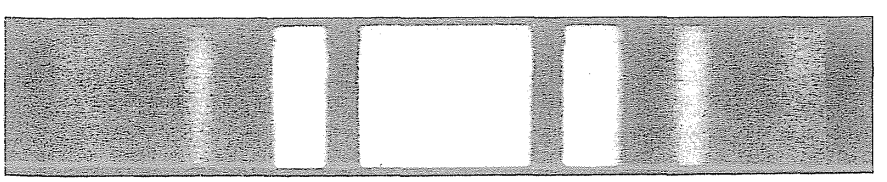


FIGURA 42-1. Patrón de difracción que se produce cuando la luz pasa por una rendija simple estrecha.

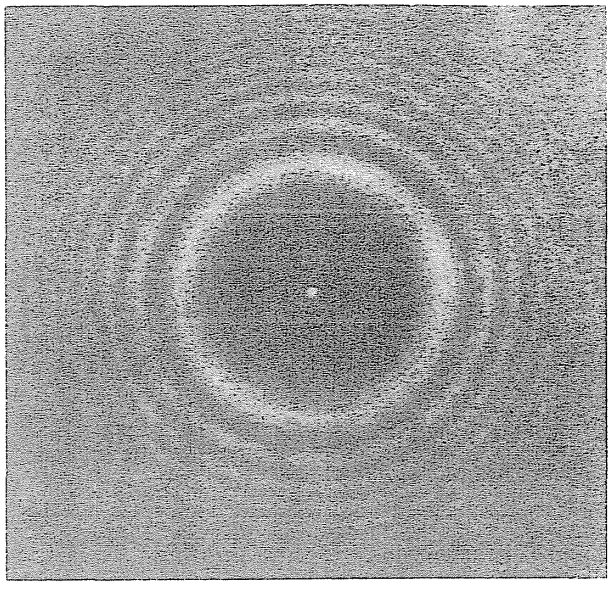


FIGURA 42-2. Patrón de difracción de un disco. Nótese el punto brillante de Poisson en el centro del patrón.

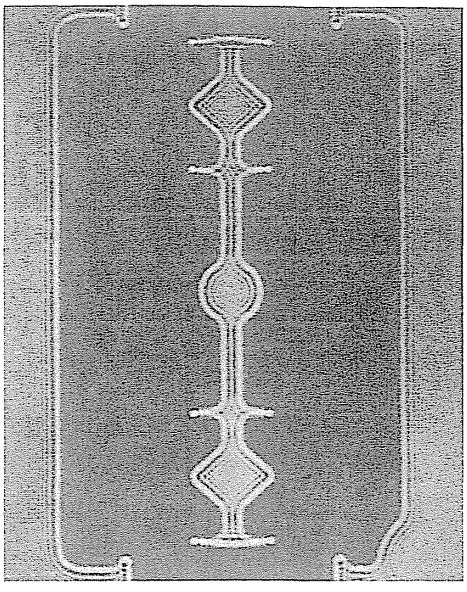


FIGURA 42-3. Patrón de difracción de una hoja de rasurar, vista con luz monocromática. Nótense las franjas de los márgenes.

lizó sus experimentos sobre la interferencia de rendija doble. En 1819 Fersel presentó una ponencia relativa a su teoría de difracción en un concurso patrocinado por la Academia Francesa de Ciencias. Uno de los miembros de la academia, Simeon-Denis Poisson (fuerte opositor de la teoría ondulatoria), ridiculizó la teoría de Fresnel porque, como el propio Poisson demostró, la teoría de la difracción conducía a la "absurda" predicción de que la sombra opaca de un objeto debería tener un punto brillante en su centro. En la figura 42-2 se muestra el patrón de difracción de un disco: el punto de luz brillante claramente visible en su centro (conocido como punto de Poisson) apoya la interpretación de Fresnel.

En la figura 42-3 vemos el patrón de difracción producido cuando un objeto ordinario se ilumina con luz monocromática. En realidad, no se necesita un aparato especial para observar la difracción. Sostenga dos dedos de modo que quede una rendija estrecha entre ellos y observe una lámpara a través de la rendija. Las líneas oscuras que percibe en ella se deben a la difracción. Otro ejemplo común son los "flotadores" que muchas personas observan en su campo visual. Los flotadores son puntos translúcidos o pequeñas cadenas que parecen flotar y deslizarse. Para verlos basta enfocar el ojo de lejos, mientras se contempla un trozo brillantemente iluminado de papel blanco. Los producen las hematocitos y otros desechos microscópicos en el líquido del globo ocular; lo que observamos es el patrón de difracción en la retina.

En la figura 42-4 se describe difracción generalizada. Las superficies curvas de la izquierda representan los frentes de onda de la luz incidente. La luz incide sobre el objeto de difracción B, que se muestra en la figura 42-4, como una barrera opaca que contiene una abertura de forma arbitraria. (Más tarde, vamos a considerar una abertura que es una rendija simple estrecha; esto origina el patrón de difracción de la Fig. 42-1.) C, en la figura 42-4, es una pantalla o película fotográfica que recibe la luz que pasa alrededor del objeto difractante.

Para calcular el patrón de intensidad de la luz en la pantalla C, podemos subdividir el frente de onda en áreas elementales $d\vec{A}$, cada una de las cuales se convierte en una onda secundaria de Huygens de expansión. La intensidad de luz en un punto arbitrario se determina superponiendo las perturbaciones ondulatorias (es decir, los vectores $\vec{E}$) causadas por las ondas secundarias que llegan a P desde estas fuentes elementales.

Las perturbaciones ondulatorias que arriban a P difieren en su amplitud y en su fase porque 1) las fuentes elementales se encuentran a distancias variables de P; 2) la onda sale de las fuentes elementales en varios ángulos con la normal al frente

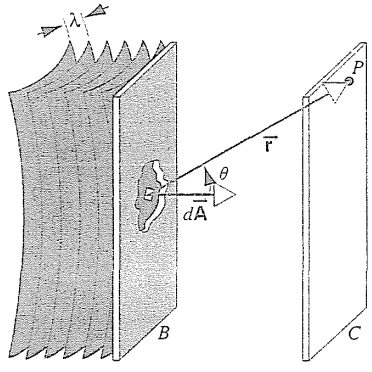


FIGURA 42-4. La difracción tiene lugar cuando los frentes de onda coherentes de la luz inciden sobre la barrera opaca B, que contiene una abertura de forma arbitraria. El patrón de difracción puede verse sobre la pantalla C.

de onda, y 3) algunas fuentes son bloqueadas por la barrera B, no así otras. Los cálculos de difracción, simples en teoría, pueden ser difíciles en la práctica. Debemos repetir los cálculos con todos los puntos en la pantalla C donde queramos conocer la intensidad de la luz. Este método lo seguimos rigurosamente al obtener el patrón de intensidad de rendija doble en la sección 41-4. El cálculo fue sencillo porque se supuso que sólo había dos fuentes elementales: las dos rendijas estrechas.

La figura 42-5 ofrece otra representación de la figura 42-4 por medio de diagramas de rayos. El patrón que se forma en la pantalla depende de la separación entre la pantalla C y la abertura B. En términos generales, pueden considerarse tres casos:

1. *Separación muy pequeña.* Cuando C está muy cerca de B, las ondas recorren una distancia corta luego de salir de la abertura y los rayos divergen muy poco. Los efectos de la difracción son insignificantes y el patrón en la pantalla es la sombra geométrica de la abertura.

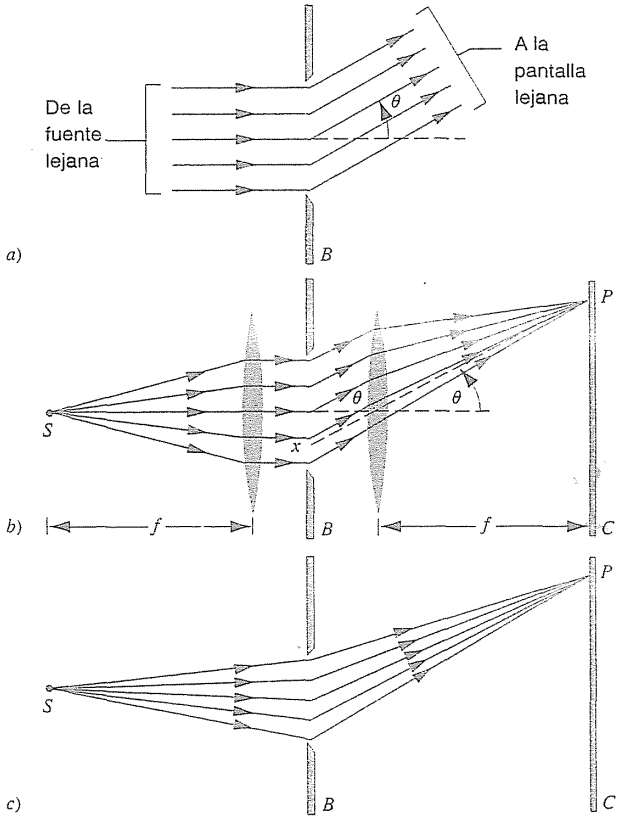


FIGURA 42-5. Una luz de la fuente puntual S ilumina una rendija en la barrera opaca B. La rendija se extiende una larga distancia arriba y debajo del plano de la figura; esta distancia es mucho mayor que el ancho a de la rendija. La intensidad en el punto P de la pantalla C depende de las fases relativas de la luz recibida de diversas partes de la rendija. *a*) Si movemos la fuente S y la pantalla C grandes distancias desde la rendija, tanto la luz incidente como la emergente en B consistirán de rayos casi paralelos. *b*) En vez de utilizar grandes distancias, la fuente y la pantalla puede colocarse en el plano focal de una lente; una vez más, los rayos luminosos paralelos entran de la rendija y salen de ella. *c*) Los rayos no son paralelos sin la lente.

2. *Separación muy grande.* La figura 42-5*a* representa la situación cuando la pantalla está tan lejos de la abertura que podemos considerar paralelos a los rayos o, en forma equivalente, planos a los frentes de onda. (En este caso, además suponemos que la fuente se halla lejos de la abertura, por lo cual los frentes de onda incidentes también son planos. El mismo efecto se logra iluminando la abertura con un láser.) En el laboratorio una forma de crear esta condición, conocida como *difracción de Fraunhofer,* consiste en emplear dos lentes convergentes, como en la figura 42-5*b*. La primer lente convierte en onda plana la luz divergente procedente de la fuente; la segunda enfoca sobre el punto P las ondas planas que salen de la abertura. Todos los rayos que llegan a P lo hacen paralelamente a la línea punteada Px trazada desde P a través del centro del segundo lente.

3. *Separación intermedia.* En el caso presentado en la figura 42-5*c,* la pantalla puede estar a cualquier distancia de la abertura, y los rayos que entran y salen de ella no son paralelos. Al caso general se le llama *difracción de Fresnel.*

Aunque la difracción de Fraunhofer es un caso límite especial de la difracción de Fresnel más general, constituye un caso importante y es más fácil de manejar en forma matemática. Supusimos la difracción de Fraunhofer al analizar la interferencia de rendija doble en el capítulo 41. En este libro nos ocupamos exclusivamente de la difracción de Fraunhofe.

42-2 DIFRACCIÓN DE RENDIJA SIMPLE

El patrón de difracción más fácil de analizar es el creado por una rendija larga y estrecha. En esta sección tratamos la ubicación de los mínimos y máximos en el patrón, como se muestra en la figura 42-1. En la siguiente sección calculamos la intensidad del patrón en función de la posición en la pantalla.

La figura 42-6 contiene una onda plana que llega en la incidencia normal sobre una rendija de ancho a. Consideremos primero el punto central P_0. Los rayos que salen de la rendija paralelos al eje central horizontal son enfocados en P_0.

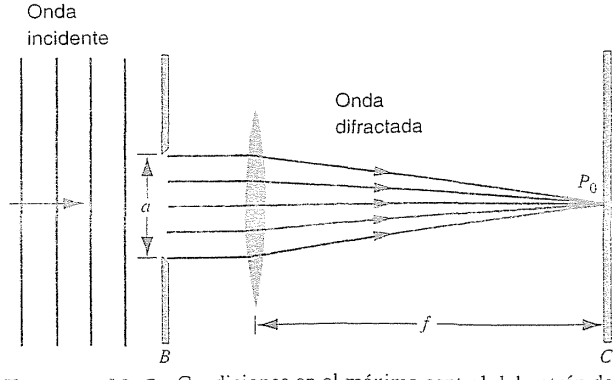


FIGURA 42-6. Condiciones en el máximo central del patrón de difracción.

Ciertamente estos rayos se hallan en fase en el plano de la rendija y permanecen en esta fase cuando la lente las pone en foco (véase, por ejemplo, la Fig. 40-21*a*). Como todos los rayos que llegan a P_0 están en fase, interfieren constructivamente y originan un máximo de intensidad en P_0.

A continuación consideramos otro punto de la pantalla. Los rayos luminosos que arriban a P_1, en la figura 42-7, salen de la rendija en el ángulo θ como se indica. Sin desviarse, el rayo xP_1 pasa por el centro de la lente y, en consecuencia, determina θ. El rayo r_1 se origina en la parte superior de la rendija y el rayo r_2 en su centro. Si escogemos θ de modo que la distancia bb' en la figura sea media longitud de onda, r_1 y r_2 estarán fuera de fase e interferirán destructivamente en P_1. Lo mismo sucede con un rayo justo debajo de r_1 y con otro también justo debajo de r_2. De hecho, por cada rayo que cruce la mitad superior de la rendija hay otro que atraviesa la mitad inferior, originándose en el punto $a/2$ debajo del primero de modo que los dos están fuera de fase en P_1. Cada rayo que llega P_1 desde la mitad superior de la rendija interfiere destructivamente con el que proviene de la mitad inferior de la rendija. Así pues, la intensidad en P_1 es cero, y P_1 el primer mínimo del patrón de difracción.

Puesto que la distancia bb' es igual a $(a/2)$ sen θ, la condición para el primer mínimo puede escribirse

$$\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{2},$$

o

$$a \operatorname{sen}\theta = \lambda. \qquad (42\text{-}1)$$

La ecuación 42-1 muestra que el máximo central se amplía a medida que estrechamos la rendija. Si el ancho es tan pequeño como una longitud de onda ($a = \lambda$), el primer mínimo ocurre en $\theta = 90°$ (sen $\theta = 1$ en la Ec. 42-1); esto significa que el máximo central llena por completo el hemisferio posterior a la rendija. Supusimos una condición que se aproxima a ésta al hablar de la interferencia de rendija doble en la sección 41-2.

En la figura 42-8 se divide la rendija en cuatro zonas iguales; un rayo sale de la parte superior de cada una. Escojamos θ de modo que la distancia bb' sea media longitud de onda. Los rayos r_1 y r_2 se cancelan entonces en P_2. Los rayos r_3 y r_4 también están media longitud de onda fuera de fase y se

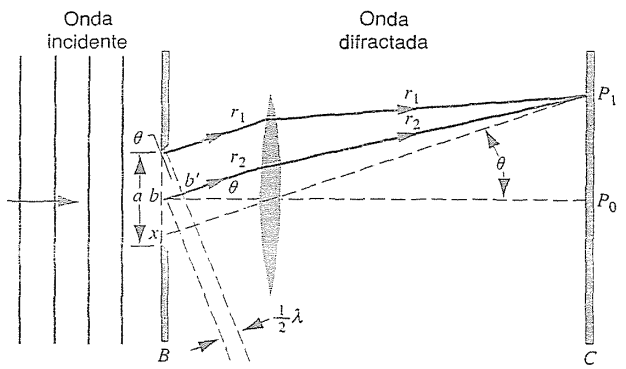


FIGURA 42-7. Condiciones en el primer mínimo del patrón de difracción. El ángulo θ es tal que la distancia bb' es media longitud de onda.

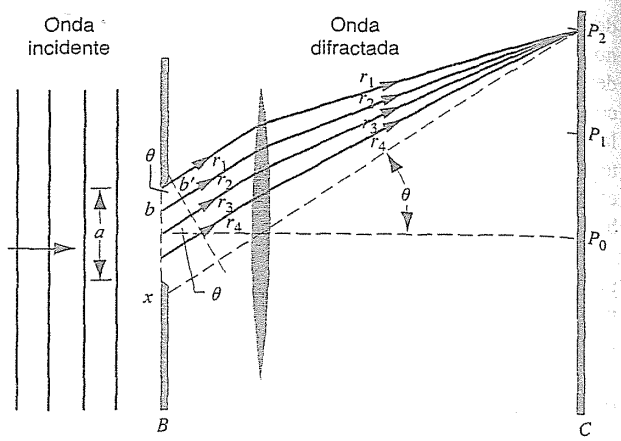


FIGURA 42-8. Condiciones en el segundo mínimo del patrón de difracción. El ángulo θ es tal que la distancia bb' es media longitud de onda.

cancelan. Consideremos otros cuatro rayos que surgen de la rendija a cierta distancia debajo de los cuatro anteriores. Los dos rayos debajo de r_1 y r_2 se cancelan, lo mismo que los debajo de r_3 y r_4. Podemos avanzar por la rendija entera y concluir otra vez que no llega luz a P_2; hemos localizado un segundo punto de intensidad cero.

La condición de la interferencia destructiva exige que bb', que es $(a/4)$ sen θ según la geometría de la figura 42-8, debe ser $\frac{1}{2}\lambda$ y por ello

$$\frac{a}{4}\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{2},$$

o bien

$$a \operatorname{sen}\theta = 2\lambda. \qquad (42\text{-}2)$$

Con determinado ancho de rendija a y longitud de onda λ, la ecuación 42-2 da la posición que en la pantalla ocupa el segundo mínimo en función del ángulo θ. Por extensión de las ecuaciones 42-1 y 42-2, la fórmula general de los mínimos en el patrón de difracción sobre la pantalla C es

$$a \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ (mínimos)}. \qquad (42\text{-}3)$$

Hay un máximo aproximadamente a la mitad entre cada par de mínimos adyacentes. Más adelante en el capítulo obtendremos una fórmula para la intensidad de la luz difractada, en que la ubicación de los máximos puede localizarse con exactitud. Nótese que la ecuación 42-3 indica *dos* mínimos (y sus máximos correspondientes) en cada m: uno en un ángulo θ arriba del eje central y el otro debajo (correspondiente a $m < 0$). Al obtener la ecuación 42-3, observe cómo la suposición de rayos paralelos (difracción de Fraunhofer) ha simplificado el análisis.

PROBLEMA RESUELTO 42-1. Una luz blanca ilumina una rendija de ancho a. ¿Con qué valor de a el primer mínimo de la luz roja ($\lambda = 650$ nm) incide en $\theta = 15°$?

Solución En el primer mínimo, $m = 1$ en la ecuación 42-3. Al resolver para a obtenemos

$$a = \frac{m\lambda}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{(1)(650\text{ nm})}{\operatorname{sen}15°}$$

$$= 2\,510\text{ nm} = 2.51\ \mu\text{m}.$$

Para que la luz incidente se esparza a ese ángulo ($\pm 15°$), la rendija deberá ser muy estrecha y equivale aproximadamente a cuatro veces la longitud de onda (y mucho más pequeña que un cabello humano delgado, que puede medir apenas 100 μm de diámetro).

PROBLEMA RESUELTO 42-2. En el problema resuelto 42-1, ¿cuál es la longitud de onda λ' de la luz cuyo primer máximo de difracción (sin contar el central) incide a 15°, coincidiendo así con el primer mínimo de la luz roja?

Solución El máximo ocurre aproximadamente a la mitad entre los mínimos; hay, pues, un máximo en 15° cuando el primer mínimo se encuentra a 10° y el segundo a 20°. En este caso, con el segundo mínimo,

$$a \operatorname{sen}\theta = 2\lambda',$$

o bien

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}(2\,510\text{ nm})(\operatorname{sen}20°) = 430\text{ nm}.$$

La luz de esta longitud de onda es violeta. El segundo máximo de la luz de 430 nm de longitud de onda siempre coincide con el primer mínimo en la luz de 650 nm de longitud de onda, sin importar el ancho de la rendija. Si ésta es relativamente estrecha, el ángulo θ donde ocurre la superposición es bastante grande y viceversa.

42-3 INTENSIDAD EN LA DIFRACCIÓN DE RENDIJA SIMPLE

En la ecuación 42-2 localizamos la posición de los mínimos en un patrón de difracción de una rendija. Ahora queremos encontrar una expresión de la intensidad del patrón *entero* en función del ángulo de difracción θ. Esta expresión nos permitirá hallar la ubicación y la intensidad de los máximos. Antes de efectuar el cálculo, vamos a examinar algunas conclusiones cualitativas concernientes a los máximos y mínimos.

En la figura 42-9 se muestra una rendija de ancho a dividida en N tiras paralelas, cada una con un ancho δx. Las tiras son muy estrechas, por lo cual pueden considerarse un emisor de las ondas secundarias de Huygens; la luz procedente de una de estas tiras llega al punto P con la misma fase. Las ondas que arriban al punto P desde cualquier par de tiras adyacentes presentan la misma diferencia de fase (constante) $\Delta\phi$, que puede obtenerse a partir de

$$\frac{\text{diferencia de fase}}{2\pi} = \frac{\text{diferencia de trayectoria}}{\lambda}$$

o de

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\delta x \operatorname{sen}\theta, \qquad (42\text{-}4)$$

donde $\delta x \operatorname{sen}\theta$, como se observa en el detalle de la figura 42-9, es la diferencia de trayectoria de los rayos que se originan en los puntos correspondientes de las tiras adyacentes.

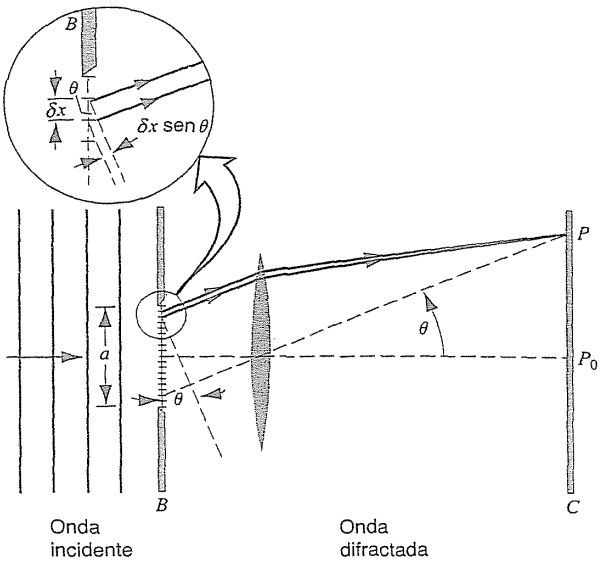


FIGURA 42-9. Una rendija de ancho a está dividida en N tiras de ancho δx. La inserción muestra más claramente las condiciones de la segunda tira. En el límite diferencial, el ancho dx de cada tira se vuelve infinitesimalmente pequeño, y el número de tiras, infinitamente grande. En esta figura y en la siguiente suponemos que $N = 18$ para hacerlas más claras.

Si el ángulo θ no es demasiado grande, una tira genera una onda de la misma amplitud δE_0 en P. El efecto neto aquí se debe a la superposición de N vectores de igual amplitud, cuya fase difiere $\Delta\phi$ del siguiente. Para obtener la intensidad en P, se calcula primero el campo eléctrico neto de los N vectores.

En la sección 41-4 describimos el *método gráfico* mediante el cual se suman las perturbaciones ondulatorias que nos permitieron calcular la intensidad en la interferencia de rendija doble. Es un método que consiste en representar cada perturbación como un fasor (un vector giratorio) y calcular la amplitud resultante de dicho fasor con la adición vectorial, teniendo en cuenta la fase relativa dada por la ecuación 42-4. El campo eléctrico resultante E_θ varía con θ porque la diferencia de fase $\Delta\phi$ varía con θ.

Veamos ahora algunos ejemplos de la adición de fasores en una difracción de rendija simple. Primero consideramos el campo eléctrico resultante en el punto P_0 (el centro del patrón de difracción en la pantalla). En este caso, $\theta = 0$ y la ecuación 42-4 da $\Delta\phi = 0$ como diferencia de fase entre tiras adyacentes. De acuerdo con el método de la sección 41-4, ponemos después N vectores de longitud δE_0 cabeza con cola y paralelos entre sí ($\Delta\phi = 0$). La resultante E_θ se muestra en la figura 42-10*a*. Es claramente el valor máximo que puede adoptar la resultante de estos N vectores; así que los designamos E_m.

Al alejarnos de $\theta = 0$, la diferencia de fase $\Delta\phi$ adopta un claro valor no cero. Una vez más colocamos N vectores cabeza con cola, cuya dirección difiere $\Delta\phi$, respecto al anterior; obtenemos así la resultante que se observa en la figura 42-10*b*. Nótese que E_θ es más pequeño que en la figura 42-10*a*.

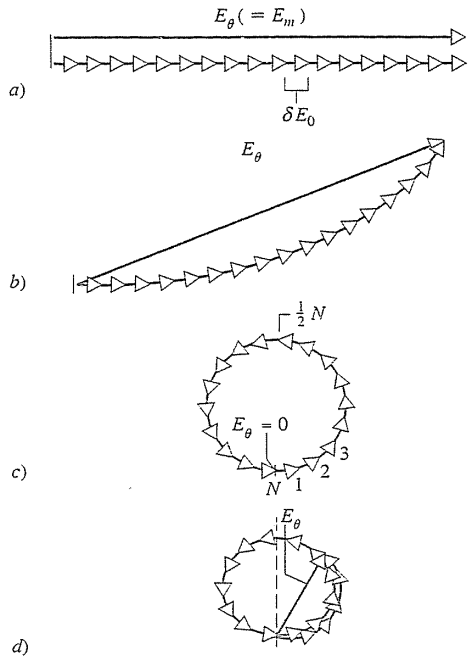


FIGURA 42-10. Fasores en una difracción de rendija simple, que muestra las condiciones en *a*) el máximo central, *b*) una dirección ligeramente alejada del máximo central, *c*) el primer mínimo y *d*) el primer máximo más allá del máximo central. La figura corresponde a $N = 18$ en la figura 42-9.

A continuación consideramos el primer mínimo del patrón de difracción (punto P_1 en la Fig. 42-7). En este punto la intensidad es cero y, por eso, también debe serlo la resultante E_θ. Ello significa que los N fasores, puestos cabeza con cola, deben formar una espira cerrada como se ve en la figura 42-10*c*.

Más allá del primer mínimo, el cambio de fase $\Delta\phi$ es todavía mayor y la cadena de vectores se enrolla formando un ángulo de más de 360°. En cierto ángulo (correspondiente a determinado cambio de fase según se observa en la Fig. 42-10*d*), la resultante E_θ alcanza su máxima longitud dentro de esta espira, correspondiente al primer máximo más allá del central. Nótese que la intensidad de este máximo es mucho menor que la del máximo central representado en la figura 42-10*a*. Con el tiempo la espira se cierra sobre sí misma, dando una resultante cero y correspondiente al segundo mínimo.

Cálculo de la intensidad

Ahora vamos a calcular la intensidad en cualquier lugar θ de la pantalla. El método con que obtendremos la intensidad del patrón de difracción de rendija simple con cualquier θ consiste en evaluar el cambio de fase conforme a la ecuación 42-4 y encontrar la resultante E_θ, como en la figura 42-10*b*. El cuadrado de esta resultante nos da entonces la intensidad relativa, como en la sección 41-4.

La luz que llega a P desde una tira estará en fase sólo si esta última es infinitesimalmente pequeña y si el número de estas tiras es también muy grande. Entonces, la cadena de fasores de la figura 42-10*b* se acerca al arco de un círculo, como se traza en la figura 42-11. La longitud del arco es E_m, y la amplitud que buscamos para el campo resultante está indicada por la cuerda E_θ. El ángulo ϕ es la diferencia total de fase entre los rayos emitidos de la parte superior e inferior de la tira; como se describe en la figura 42-11, ϕ, es el ángulo entre los dos radios R.

Basándonos en esta figura podemos escribir

$$E_\theta = 2R \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}.$$

De acuerdo con la figura 42-11, ϕ, en radianes, es

$$\phi = \frac{E_m}{R}.$$

Al combinar para eliminar R, se obtiene

$$E_\theta = \frac{E_m}{\phi/2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}$$

o

$$E_\theta = E_m \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}, \tag{42-5}$$

donde

$$\alpha = \frac{\phi}{2}. \tag{42-6}$$

A partir de la figura 42-9, y recordando que ϕ es la diferencia de fase entre los rayos procedentes de las partes superior e inferior de la rendija y que la diferencia de trayectoria en ellos es a sen θ, tenemos

$$\frac{\text{diferencia de fase}}{2\pi} = \frac{\text{diferencia de trayectoria}}{\lambda},$$

o bien

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (a \operatorname{sen} \theta).$$

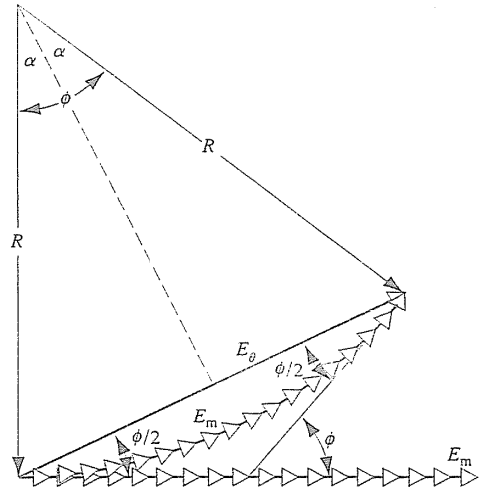


FIGURA 42-11. Construcción con la cual se calcula la intensidad en la difracción de rendija simple. La situación corresponde a la de la figura 42-10*b*.

La combinación con la ecuación 42-6 nos da

$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{sen} \theta. \tag{42-7}$$

La ecuación 42-5, con a evaluada conforme a la ecuación 42-7, da la amplitud de la perturbación ondulatoria en un patrón de difracción de rendija simple con cualquier ángulo θ. La intensidad I_θ del patrón es proporcional al cuadrado de la amplitud; así que

$$I_\theta = I_m \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right)^2. \tag{42-8}$$

La ecuación anterior, combinada con la ecuación 42-7, nos dan el resultado que buscamos para la intensidad del patrón de difracción de rendija simple en un ángulo θ cualquiera. La figura 42-12 contiene las gráficas de la intensidad relativa I_θ/I_m con diversos valores de la razón α/λ. Nótese que el patrón se estrecha más a medida que incrementamos α/λ.

Los mínimos ocurren, en la ecuación 42-8, cuando el sen $\alpha = 0$, o sea

$$\alpha = m\pi \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots . \tag{42-9}$$

Al combinar la expresión anterior con la ecuación 42-7, obtenemos

$$a \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ (mínimos)},$$

que es el resultado obtenido de la sección anterior (Ec. 42-3). Sin embargo, en ella obtuvimos *sólo* este resultado sin que obtuviéramos información cuantitativa sobre la intensidad del patrón de difracción en sitios donde no era cero. Aquí, (Ec. 42-8) contamos con información completa referente a la intensidad.

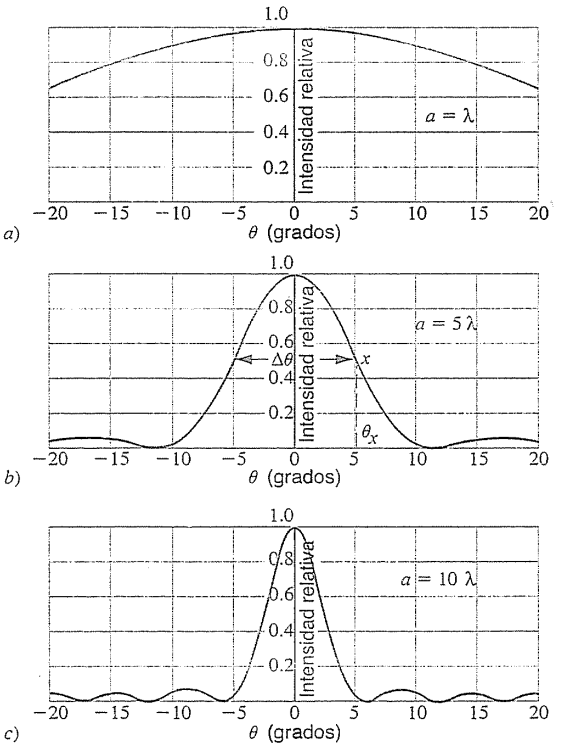


FIGURA 42-12. Distribución de intensidades en una difracción de rendija simple con tres valores de la razón a/λ. Cuanto más ancha sea la rendija, más estrecho será el pico de la difracción central. Como se indica en *b*), $\Delta\theta$ ofrece una medida del ancho del pico.

PROBLEMA RESUELTO 42-3. Calcule aproximadamente las intensidades relativas de los máximos en un patrón de difracción de Fraunhofer de rendija simple.

Solución Los máximos se hallan más o menos a la mitad entre los mínimos y están dados aproximadamente por (Prob. 3)

$$\alpha \approx (m + \tfrac{1}{2})\pi \qquad m = 1, 2, 3, \ldots ,$$

con un resultado similar cuando $m < 0$. La sustitución en la ecuación 42-8 produce

$$I_\theta = I_m \left[\frac{\operatorname{sen} (m + \frac{1}{2})\pi}{(m + \frac{1}{2})\pi} \right]^2,$$

que se reduce a

$$\frac{I_\theta}{I_m} = \frac{1}{(m + \frac{1}{2})^2 \pi^2}.$$

Con ello obtenemos $I_\theta/I_m = 0.045$ ($m = 1$), 0.016 ($m = 2$), 0.0083 ($m = 3$) y así sucesivamente. La intensidad de los máximos sucesivos disminuye rápidamente.

PROBLEMA RESUELTO 42-4. Determine el ancho $\Delta\theta$ del máximo central en una difracción de Fraunhofer de rendija simple (Fig. 42-12*b*). El ancho puede representarse como el ángulo entre dos puntos en el patrón donde la intensidad es la mitad de la del centro del patrón.

Solución El punto x en la figura 42-12*b* se escoge de modo que $I_\theta = \frac{1}{2} I_m$ o, con base en la ecuación 42-8,

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha_x}{\alpha_x} \right)^2.$$

La ecuación anterior no puede resolverse analíticamente para α_x. Con una calculadora o computadora puede conseguirse una solución aproximada con la exactitud deseada. Reescribamos la ecuación como

$$\alpha_x = \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha_x. \tag{42-10}$$

Introducimos el modo "radián" si queremos obtener la solución por medio de una calculadora. Se escoge un valor inicial cualquiera de α_x, digamos, $\alpha_x = 1$. Se pone este valor en el lado derecho de la ecuación 42-10, se resuelve y nos da 1.19. La ecuación 42-10 exige que este valor sea igual a α_x, que claramente no es ($1 \neq 1.19$). Se toma 1.19 como el nuevo valor tentativo y una vez más se evalúa el lado derecho, dándonos 1.31. Todavía no logramos una solución que satisfaga la ecuación 42-10 ($1.19 \neq 1.31$), pero estamos más cerca que en el primer intento. Continúe en esta forma: utilice el resultado de un cálculo como punto inicial del siguiente hasta que la diferencia entre el valor calculado del lado derecho de la ecuación 42-10 y el valor inicial sea tan pequeña como desee usted. (Esto puede incorporarse en un programa de calculadora o de computadora y hacer que realice automáticamente las repeticiones. También puede hacer que se detenga cuando la diferencia entre los valores sucesivos alcanza un valor menor al límite fijado.) A este método se le llama técnica *iterativa* de la solución de ecuaciones. Al cabo de 10 iteraciones el resultado será

$$\alpha_x = 1.39156,$$

y las iteraciones adicionales cambian sólo el quinto lugar decimal. Al introducir este valor en la ecuación 42-7 (y al hacer $a = 5\lambda$, co-

mo en la Fig. 42-12*b*), obtenemos

$$\theta_x = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\alpha_x \lambda}{\pi a}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1.39}{5\pi}\right) = 5.1°.$$

Entonces el ancho de la curva se obtiene por medio de

$$\Delta\theta = 2\theta_x = 10.2°.$$

42-4 DIFRACCIÓN EN UNA ABERTURA CIRCULAR

Al enfocar una imagen, una lente deja pasar sólo la luz que cae dentro de su perímetro circular. Desde este punto de vista, se comporta como una abertura circular en una pantalla opaca. La apertura genera un patrón de difracción parecido al de una rendija simple. Con frecuencia, los efectos de la difracción limitan la capacidad de los telescopios y de otros instrumentos ópticos para formar imágenes precisas.

La imagen creada por una lente puede distorsionarse a causa de otros efectos, entre ellos las aberraciones cromáticas y esféricas. Los efectos se atenúan de modo considerable o se eliminan configurándolo adecuadamente o introduciendo elementos correctivos en el sistema óptico. Pero por ingenioso que sea el diseño no es posible eliminar los efectos de la difracción, que dependen sólo del tamaño de la abertura (diámetro de la lente) y de la longitud de onda de la luz. En la difracción, la naturaleza impone una limitación fundamental a la precisión de los instrumentos.

Cuando utilizamos la óptica geométrica para analizar las lentes, suponemos que no ocurre difracción. No obstante, se trata de una aproximación, pues es el límite de la óptica ondulatoria. Si quisiésemos efectuar un análisis riguroso de este tipo sobre la formación de una imagen por una lente, descubriríamos que los efectos de la difracción ocurren de modo espontáneo.

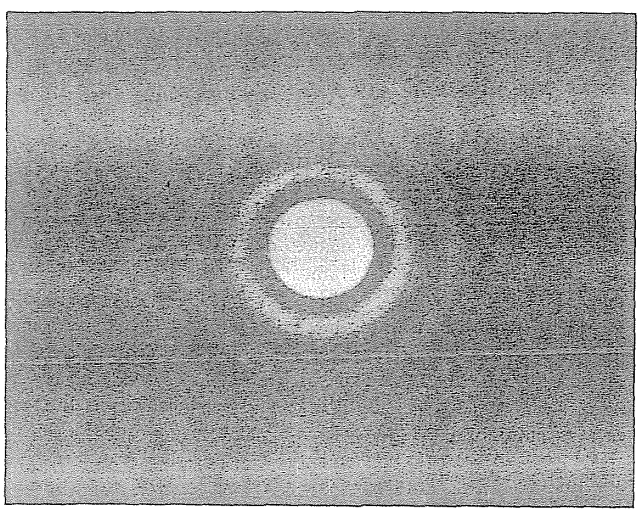


FIGURA 42-13. Patrón de difracción de una abertura circular. El máximo central recibe a veces el nombre de disco de Airy (en honor de Sir George Airy, quien fue el primero en resolver en 1835 el problema de la difracción causada por una abertura circular). Nótense los máximos circulares secundarios.

La figura 42-13 muestra la imagen de una fuente puntual lejana de luz (una estrella) que se formó en una película fotográfica colocada en el plano focal de la lente convergente de un telescopio. No es un punto como sugiere el tratamiento óptico geométrico (aproximado), sino un disco circular rodeado de varios anillos secundarios gradualmente más débiles. La comparación con la figura 42-1 nos corrobora que nos hallamos ante un fenómeno de difracción.

El análisis matemático de la difracción causada por una abertura circular, el cual rebasa el ámbito de este libro, indica que (en las condiciones de Fraunhofer) el primer mínimo ocurre en un ángulo del eje central dado por

$$\text{sen}\,\theta = 1.22\frac{\lambda}{d}, \qquad (42\text{-}11)$$

donde d es el diámetro de la abertura. Hay que comparar la expresión anterior con la ecuación 42-1,

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\lambda}{a},$$

que localiza el primer mínimo de una rendija de ancho a. Estas expresiones difieren en un factor 1.22, que se presentan cuando dividimos la abertura circular en fuentes elementales de Huygens e integramos en dicha abertura.

El hecho de que las imágenes creadas por la lente sean patrones de difracción es importante cuando queremos distinguir dos objetos puntuales distintos, cuya separación angular es pequeña. En la figura 42-14 se aprecian los aspectos visuales y los patrones correspondientes de intensidad de dos objetos puntuales lejanos (estrellas por ejemplo), con pequeña separación angular e intensidad central más o menos igual. En la figura 42-14*a* los objetos no se resuelven, es decir, no pueden distinguirse uno del otro. Están apenas resueltos en la figura 42-14*b*, y totalmente resueltos en la figura 42-14*c*.

En la figura 42-14*b*, la separación angular de dos fuentes puntuales es tal que el máximo central del patrón de difracción de una fuente incide en el primer máximo del patrón del otro. A esto se le conoce como *criterio de Rayleigh*, el cual sirve para resolver imágenes. De acuerdo con la figura 42-11, dos objetos apenas resolvibles con dicho criterio deben tener una separación angular θ_R de

$$\theta_R = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1.22\lambda}{d}\right).$$

Dado que los ángulos son bastante pequeños, podemos reemplazar sen θ_R por θ_R; así que

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{d}, \qquad (42\text{-}12)$$

donde θ_R se expresa en radianes. Si la separación anular θ entre los objetos es mayor que θ_R, podemos resolver los dos objetos, si es menor, no podemos hacerlo. El ángulo θ_R es la menor separación en que es posible la resolución, aplicando el criterio de Rayleigh.

Cuando queremos utilizar una lente para resolver objetos de pequeña separación angular, conviene hacer lo más peque-

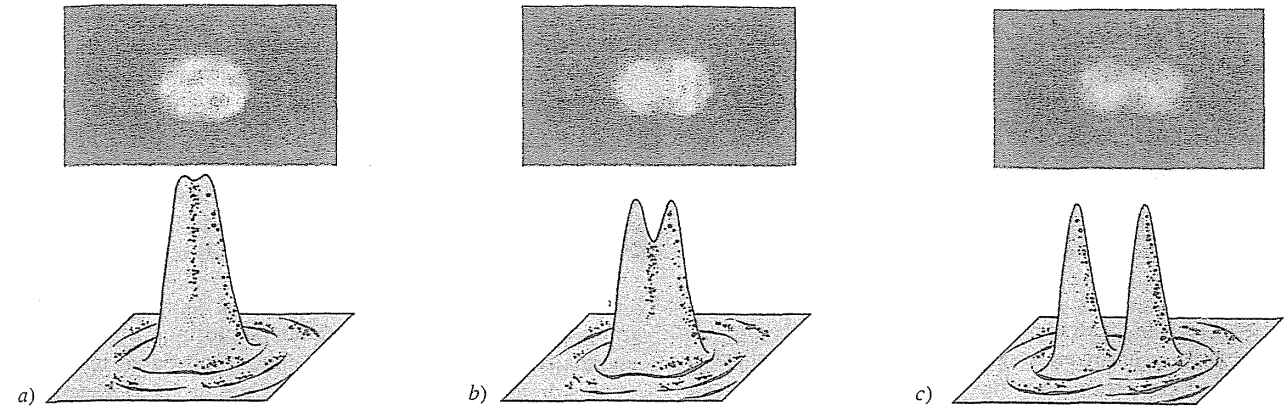


FIGURA 42-14. Imágenes de dos fuentes puntuales lejanas (estrellas) formadas por una lente convergente. El diámetro de la lente (que es la abertura de difracción) mide 10 cm, por lo cual $a/\lambda = 200{,}000$ si la longitud de onda efectiva es de 500 nm aproximadamente. En *a*) las estrellas están tan cerca una de otra que sus imágenes apenas se distinguen, debido a la superposición de sus patrones de difracción. En *b*) las estrellas están más lejos una de otra y su separación cumple con los criterios de Rayleigh para resolver sus imágenes. En *c*) están todavía más separadas y sus imágenes se resuelven bien. Debajo de las imágenes se incluyen gráficas de las intensidades.

ño posible el disco central del patrón de difracción. Se consigue (Ec. 42-12) acrecentando el diámetro de la lente o empleando una longitud de onda más corta. Entre otras razones, se construyen telescopios grandes para obtener imágenes *más nítidas* que nos permitan examinar los objetos astronómicos con mayor detalle. Las imágenes son, además, *más brillantes* no sólo porque la energía se concentra en un disco menor de difracción, sino porque una lente de mayor tamaño capta más luz. Así, es posible percibir los objetos más tenues, entre ellos las galaxias distantes.

Cuando queremos aminorar los efectos que la difracción tiene en los *microscopios,* a menudo nos servimos de la luz ultravioleta porque gracias a su menor longitud de onda permite examinar mejor los detalles finos que con luz visible. En el capítulo 46 veremos que los haces de electrones se comportan como ondas en algunas circunstancias. En el *microscopio electrónico* tales haces tienen, a veces, una longitud de onda efectiva de 4×10^{-3} nm, aproximadamente 10^5 veces más corta que la de la luz visible. Gracias a ello pueden analizarse los objetos diminutos como las bacterias o los virus (Fig. 42-15).

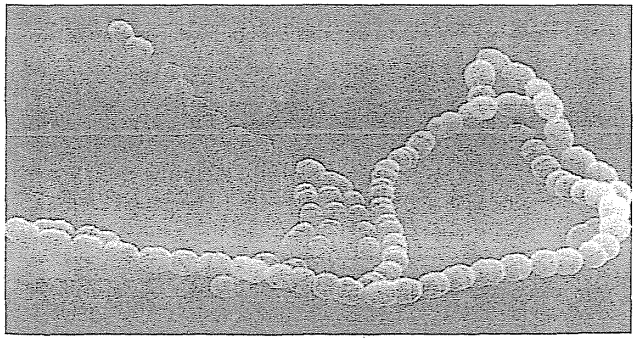


FIGURA 42-15. Imagen de una cadena de estreptococos (diámetro 10^{-6} m), obtenida con un microscopio electrónico. Obsérvese la nitidez de la imagen, que no sería posible usando luz visible.

Si un objeto pequeño se examinara con un microscopio óptico, la difracción cancelaría irremediablemente su estructura.

PROBLEMA RESUELTO 42-5. Una lente convergente de 32 mm de diámetro tiene una longitud focal f de 24 cm. *a*) ¿Qué separación angular deben tener dos objetos puntuales lejanos para cumplir con el criterio de Rayleigh? Suponga que $\lambda = 5.50$ nm. *b*) ¿A qué distancia se hallan los centros de los patrones de difracción en el plano focal de la lente?

Solución *a*) Conforme a la ecuación 42-12,

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{d} = \frac{(1.22)(550 \times 10^{-9}\ \text{m})}{32 \times 10^{-3}\ \text{m}}$$

$$= 2.10 \times 10^{-5}\ \text{rad} = 4.3\ \text{arc segundos.}$$

b) La separación lineal es

$$\Delta x = f\theta_R = (0.24\ \text{m})(2.10 \times 10^{-5}\ \text{rad})$$
$$= 5.0\ \mu\text{m},$$

o unas 9 longitudes de onda de la luz.

42-5 COMBINACIÓN DE INTERFERENCIA Y DIFRACCIÓN DE RENDIJA DOBLE

Al analizar la interferencia de rendija doble (Sec. 41-2) supusimos que las rendijas son arbitrariamente estrechas, esto es, que $a << \lambda$. En ellas, la parte central de la pantalla sobre la que cae la luz está iluminada uniformemente por ondas difractadas provenientes de cada rendija. Cuando las ondas interfieren, producen franjas de interferencia con intensidad uniforme.

En la práctica, rara vez se cumple la condición $a << \lambda$ con la luz visible. En esas rendijas relativamente anchas, la intensidad de los franjas de interferencia formadas en la pantalla *no* es uniforme. Por el contrario, varía con la envolvente causada por el patrón de difracción de una rendija simple.

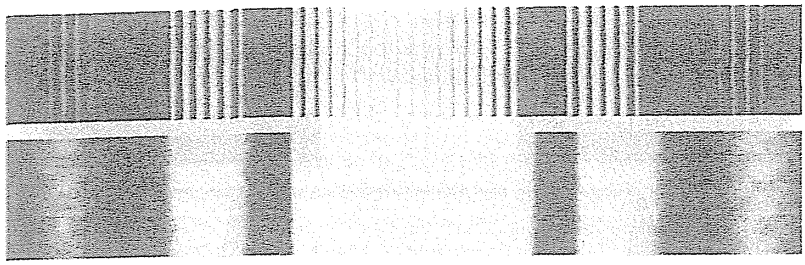


FIGURA 42-16. *a*) Franjas de interferencia en un sistema de rendija doble donde el ancho de ella no es insignificante comparado con la longitud de onda. *b*) Patrón de difracción de una rendija simple del mismo ancho. Adviértase que el patrón de difracción modula la intensidad de los franjas de interferencia, como se aprecia en la parte *a*).

El efecto de la difracción en un patrón de interferencia de rendija doble se ilustra en la figura 42-16, donde se compara este patrón con el patrón de difracción ocasionado por una rendija simple del mismo ancho que las rendijas dobles. En la figura 42-16*a* se observa que la difracción, efectivamente, ofrece una envolvente de intensidad a las franjas de interferencia de rendija doble menos espaciados.

Analicemos ahora el patrón de interferencia y de difracción combinado descrito en la figura 42-16*a*. El patrón de dos rendijas infinitesimalmente estrechas se da en la ecuación 41-13, o con un pequeño cambio de la notación,

$$I_{\theta,\text{int}} = I_{\text{m,int}} \cos^2 \beta, \tag{42-13}$$

donde

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta, \tag{42-14}$$

donde d es la distancia entre las líneas centrales de las rendijas.

La intensidad de la onda difractada en las rendijas está dada por la ecuación 42-8 o, una vez más, con un ligero cambio de la notación,

$$I_{\theta,\text{dif}} = I_{\text{m,dif}} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right)^2, \tag{42-15}$$

donde

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{sen} \theta. \tag{42-16}$$

Obtenemos el efecto combinado al considerar $I_{\text{m,int}}$ en la ecuación 42-13 como una amplitud variable dada por $I_{\theta,\text{dif}}$ de la ecuación 42-15. En el patrón combinado tal suposición nos da

$$I_\theta = I_{\text{m}} (\cos \beta)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right)^2, \tag{42-17}$$

donde hemos suprimido todos los subíndices que se refieren por separado, a la interferencia y a la difracción. Más adelante, en esta sección, obtendremos el resultado anterior por medio de fasores.

Expresemos este resultado en palabras: en cualquier punto de la pantalla, la intensidad disponible de la luz proveniente de cada rendija, tomada por separado, está dada por el patrón de difracción de esa rendija (Ec. 42-15). Los patrones de difracción de las dos rendijas, una vez más consideradas por separado, coinciden porque los rayos paralelos en la difracción de Fraunhofer están enfocados en el mismo punto. Interfieren ya que las dos ondas difractadas son coherentes.

El efecto de la interferencia consiste en redistribuir la energía disponible en la pantalla, produciendo una serie de franjas. En la sección 41-2, donde supusimos $a << \lambda$, la energía disponible era prácticamente la misma en todos los puntos de la pantalla; así que las franjas de interferencia tenían también prácticamente la misma intensidad (Fig. 41-9). Si flexibilizamos la suposición de que $a << \lambda$, dicha energía *no* será uniforme en toda la pantalla, sino que estará dada por el patrón de difracción de una rendija con ancho a. En este caso, las franjas de interferencia tienen intensidades dependientes de la intensidad del patrón de difracción en una franja determinada. La ecuación 42-17 es la expresión matemática de este razonamiento. Esto se muestra con perfecta claridad en la figura 42-17, la cual muestra *a*) el "factor de interferencia" de la ecuación 42-17 (es decir, el factor $\cos^2 \beta$), *b*) el "factor de difracción" (sen α/α^2) y *c*) su producto.

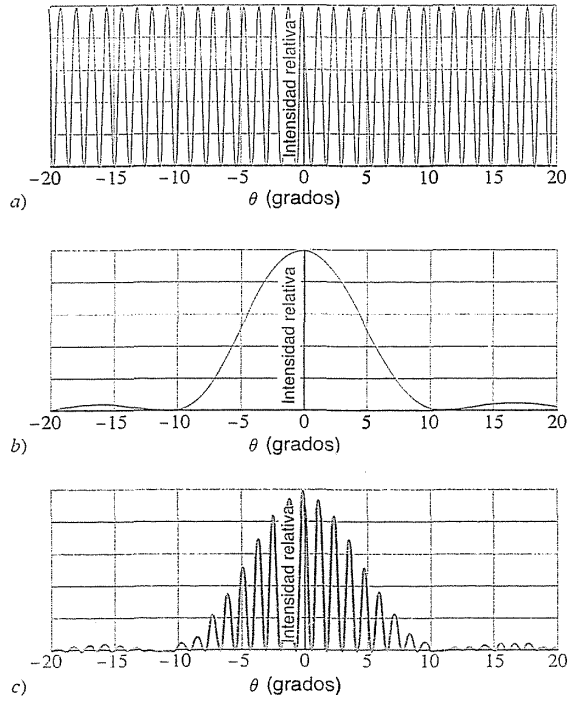


FIGURA 42-17. *a*) Franjas de interferencia que serían producidos por una rendija doble de anchos estrechos desvanecentes. *b*) Patrón de difracción de una rendija de ancho finito. *c*) Patrón de franjas de interferencia creado por dos rendijas del mismo ancho que el de *b*). El patrón equivale al producto de las curvas que aparecen en *a*) y en *b*). Compare esta figura con la figura 42-16*a*.

La figura 42-18 es una gráfica de la intensidad relativa I_θ/I_m dada por la ecuación 42-17 con $d = 50\lambda$ y con tres valores de a/λ. Muestra muy claramente que para las rendijas estrechas ($a = \lambda$) las franjas presentan una intensidad casi uniforme. A medida que las rendijas se ensanchan, la intensidad de las franjas es muy modulada por el "factor de difracción" en la ecuación 42-17, es decir, por el factor $(\text{sen } \alpha/\alpha)^2$; compare esto con la figura 42-12.

Si reducimos el ancho a de la rendija, la envolvente del patrón de franjas se ensancha y el pico central se esparce (compare las Figs. 42-18*a* y 42-18*b*). A medida que el ancho a se aproxima a cero, $\alpha \to 0$ y $\text{sen } \alpha/\alpha \to 1$. Así, pues, la ecuación 42-17 se convierte en la ecuación 42-13; ésta describe la interferencia a causa del desvanecimiento de un par de rendijas estrechas. Si dejamos que su separación d se aproxime a cero, se fusionan en una sola rendija de ancho a. Según la ecuación 42-14, $\beta \to 0$ como $d \to 0$, y la ecuación 42-17 se convierte en la ecuación 42-15, la de difracción para una rendija simple de ancho a.

Si aumentamos el ancho a, la envolvente del patrón de franjas se estrecha más y el pico central aparece más pronunciado (compare las Figs. 42-18*b* y 42-18*c*). No cambia la separación entre las franjas, que depende de d/λ. Si aumentamos la separación d de las rendijas, las franjas se acercarán más una a otra, no así la envolvente de su patrón que depende de a/λ.

Si agrandamos la longitud de onda de la luz incidente, se ensanchan tanto el patrón de difracción como el patrón de interferencia: la envolvente de difracción se ensancha más y aumenta la separación de las franjas. Se da el efecto inverso cuando disminuimos la longitud de onda. Dicho con otras palabras, la relación entre la envolvente de difracción y las franjas de interferencia (por ejemplo, el número de franjas en el pico central) depende de la razón d/a y es independiente de λ.

El patrón de doble rendija ilustrado en la figura 42-17 combina estrechamente la interferencia y la difracción. Ambas son efectos de superposición que se producen al sumar las perturbaciones ondulatorias en un punto determinado, teniendo debidamente en cuenta las diferencias de fase. Al efecto se le llama *interferencia* cuando queremos combinar las ondas procedentes de un número *finito* (casi siempre pequeño) de emisores coherentes elementales como en la rendija doble. Y se le llama *difracción,* cuando hay que combinar las ondas que se obtienen subdividiendo una en emisores *infinitesimales* coherentes como en el tratamiento de una rendija simple. La distinción entre interferencia y difracción es adecuada y útil. Sin embargo, no debería hacernos perder de vista el hecho de que se trata de efectos de superposición y que con frecuencia ocurren simultáneamente, como en el experimento de rendija doble.

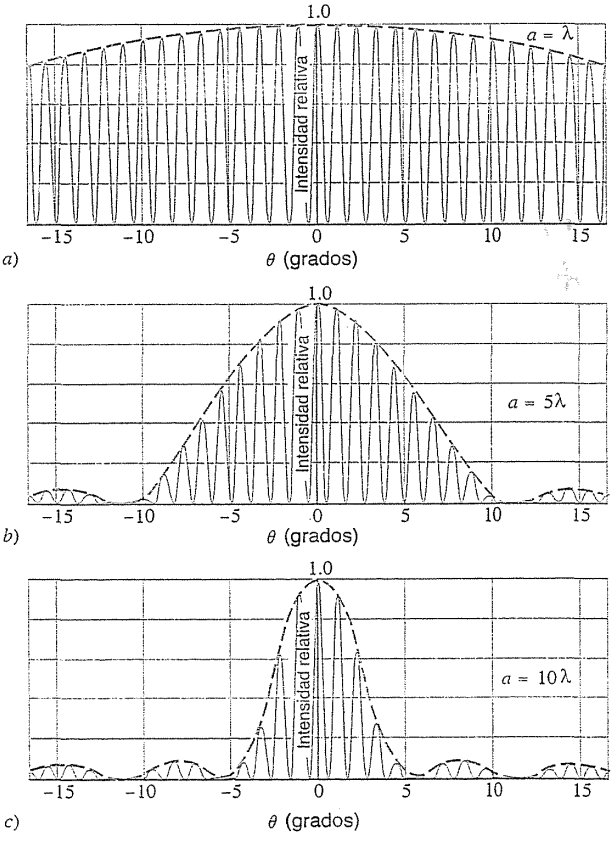


FIGURA 42-18. Franjas de interferencia en una rendija doble, con una separación $d = 50\lambda$. Se muestran tres anchos de rendija.

PROBLEMA RESUELTO 42-6. En un experimento de rendija doble, la distancia D entre la pantalla y las rendijas es de 52 cm; la longitud de onda λ, 480 nm; la separación de rendijas d, 0.12 mm, y el ancho a de rendija, 0.025 mm. *a*) ¿Qué espaciamiento existe entre las franjas contiguas? *b*) ¿Qué distancia hay entre el máximo central y el primer mínimo de la envolvente de franjas?

Solución *a*) El patrón de intensidad está dado por la ecuación 42-17; el espaciamiento de franjas depende del factor de interferencia $\cos^2 \beta$. Con base en la ecuación 41-4 tenemos

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d} = \frac{(480 \times 10^{-9}\text{ m})(52 \times 10^{-2}\text{ m})}{0.12 \times 10^{-3}\text{ m}} = 2.1\text{ mm}.$$

b) La posición angular del primer mínimo se deduce de la ecuación 42-1, o sea

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{480 \times 10^{-9}\text{ m}}{25 \times 10^{-6}\text{ m}} = 0.0192.$$

El resultado es tan pequeño que, con un poco de error, podemos hacer $\text{sen } \theta \approx \tan \theta$ y, por tanto,

$$y = D \tan \theta \approx D \text{ sen } \theta = (52 \times 10^{-2}\text{ m})(0.0192)$$
$$= 10\text{ mm}.$$

El lector puede demostrar que hay unas 9 franjas en el pico central de la envolvente de difracción.

PROBLEMA RESUELTO 42-7. ¿Qué requisitos deben reunirse para que el máximo central de la envolvente de un patrón de interferencia de rendija doble contenga exactamente 11 franjas?

Solución La condición requerida se cumplirá si el sexto mínimo del factor de interferencia ($\cos^2 \beta$ en la Ec. 42-17) coincide con el primer mínimo del factor de difracción [$(\text{sen } \alpha/\alpha)^2$ en la Ec. 42-17].

El sexto mínimo del factor de interferencia ocurre cuando d sen $\theta = \frac{11}{2}\lambda$ en la ecuación 41-2, esto es,

$$\beta = (11/2)\pi$$

en la ecuación 42-14. El primer mínimo en el término de difracción ocurre con a sen $\theta = \lambda$ (Ec. 42-1), o sea

$$\alpha = \pi$$

en la ecuación 42-16. Al dividir las ecuaciones 42-14 y 42-16 se obtiene $\beta/\alpha = d/a$, de ahí que

$$\frac{d}{a} = \frac{11}{2}.$$

Dicho de otra manera, la separación d entre rendijas debe ser $11/2$ veces el ancho a de la rendija. Esta condición se basa exclusivamente en la razón de la separación d a ancho a, y de ninguna manera en la longitud de onda. Con una λ más grande, el patrón es más ancho que con una λ más pequeña, pero siempre hay 11 franjas en el pico central de la envolvente.

Obtención por fasores en la ecuación 42-17 (opcional)

La figura 42-19 muestra la geometría apropiada para analizar las rendijas dobles por medio de fasores. Las subdividimos en N zonas, como lo hicimos con la rendija simple de la figura 42-9. El campo eléctrico neto en P se determinó superponiendo los N vectores del campo eléctrico de la rendija superior a los N vectores procedentes de la rendija inferior. El método de fasores permite combinar las aportaciones anteriores hechas al campo eléctrico en P, teniendo en cuenta sus fases relativas.

En la figura 42-20 se ven los primeros N fasores (correspondientes a la rendija superior de la Fig. 42-19) y su resultante E_1, como en la figura 42-11. Existe una diferencia de fase $\Delta\phi = \phi/N$ entre ellos. Para sumar el segundo grupo de N fasores (correspondientes a la rendija inferior) debemos determinar el ángulo de fase ξ entre el último fasor procedente de la rendija superior y el primero proveniente de la rendija inferior. Después, trazamos los N fasores partiendo de esta última y obtenemos su resultante E_2. La suma de los fasores E_1 y E_2 da la resultante E_θ que caracteriza a la rendija doble.

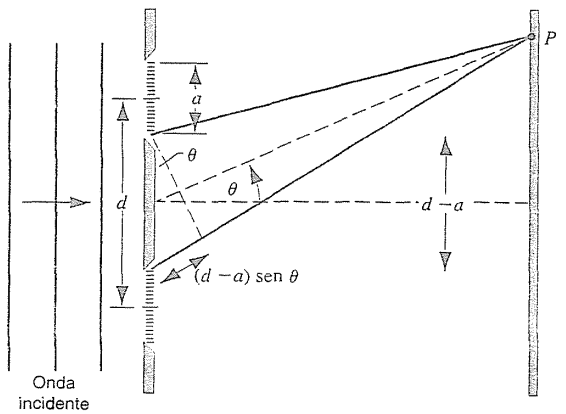


FIGURA 42-19. Las rendijas de una rendija doble se dividen en N tiras. En el límite diferencial, las tiras se vuelven infinitesimalmente pequeñas e infinitamente numerosas. Aquí mostramos $N = 18$, como lo hicimos en la figura 42-9.

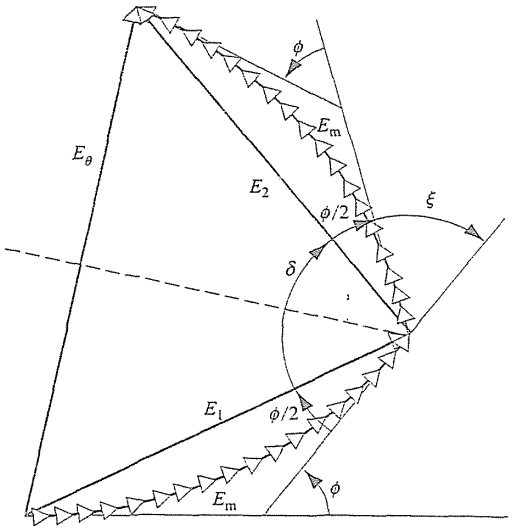


FIGURA 42-20. Diagrama de fasores con que se calcula el campo eléctrico resultante en una interferencia de rendija doble.

En la figura 42-20 vemos que E_θ es la base de un triángulo isósceles cuyos lados tienen las longitudes E_1 y E_2, que están dadas por la ecuación 42-5. Con base en la geometría de la figura 40-20,

$$E_\theta = 2E_1 \operatorname{sen}\frac{\delta}{2}, \tag{42-18}$$

donde δ, el ángulo ápice del triángulo, se puede obtener a partir de

$$\frac{\phi}{2} + \delta + \frac{\phi}{2} + \xi = \pi, \tag{42-19}$$

que nos da

$$\delta = \pi - (\xi + \phi). \tag{42-20}$$

Si con la ecuación 42-20 evaluamos sen $\delta/2$, obtenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\xi + \phi}{2}\right) = \cos\frac{\xi + \phi}{2}. \tag{42-21}$$

Tomamos la expresión

$$\frac{\text{diferencia de trayectoria}}{\lambda} = \frac{\text{diferencia de fase}}{2\pi}$$

con la diferencia de fase entre los dos rayos (del fondo de la rendija superior y de la parte superior de la rendija inferior como se ve en la Fig. 42-19) de ξ y con la diferencia de trayectoria de $(d - a)$ sen θ, obtenemos

$$\frac{\xi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}(d - a)\operatorname{sen}\theta.$$

La combinación de la expresión anterior con la ecuación 42-7, $\phi/2 = (\pi a/\lambda)$ sen θ, nos da

$$\frac{\xi + \phi}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta,$$

que es simplemente β según la ecuación 42-14. Al sustituir en la ecuación 42-21, encontramos

$$\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} = \cos\beta.$$

Al introducir el resultado anterior en la ecuación 42-18 y al usar la ecuación 42-5 para calcular la magnitud de E_1 (o E_2), obtenemos

$$E_\theta = 2E_m \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\cos\beta. \qquad (42\text{-}22)$$

Si elevamos al cuadrado la ecuación 42-22, obtenemos las intensidades como

$$I_\theta = I_m(\cos\beta)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

expresión idéntica a la ecuación 42-17. Nótese que, igual que en la ecuación 41-13, $I_m = 4I_0$.

OPCIÓN MÚLTIPLE

42-1 La difracción y la teoría ondulatoria de la luz

1. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto?
   A) La difracción se produce sólo en ondas transversales?
   B) La difracción es una prueba de que la luz se comporta como onda.
   C) La difracción explica el arco iris.
   D) Las puestas de sol de color roja constituyen un fenómeno de difracción.

42-2 Difracción de rendija simple

2. Compare las bandas brillantes y oscuras provenientes de una rendija simple de ancho a con las de un rendija doble de separación $a/2$. *a*) ¿Existe un máximo central? *b*) En la aproximación de ángulo pequeño están todas las bandas oscuras y brillantes igualmente espaciadas? *c*) ¿Se hallan los máximos y los mínimos en ángulos dados por $\theta \propto k$, donde k es un entero?
   A) Sí, para ambos.
   B) Sólo en la difracción de rendija simple.
   C) Sólo en la interferencia de rendija doble.
   D) No, en ninguno de ellos.
3. El patrón de difracción de una rendija simple se observa con la luz verde. Se reemplaza después por luz roja. ¿Cuál de los siguientes cambios permitirá que los sitios de los mínimos de difracción en la pantalla permanezcan inalterados ante la modificación del color de la luz?
   A) Aumento del ancho de la rendija.
   B) Disminución del ancho de la rendija.
   C) Alejar de la rendija la combinación de lente-pantalla.
   D) Incrementar la intensidad de la fuente luminosa.
4. Se permite que dos colores de luz, el rojo y el violeta, pasen por una rendija simple. Se observa que, con cierto ancho a de ella, se superponen el segundo máximo de la luz violeta y el primer máximo de la luz violeta. Después disminuimos el ancho. ¿Qué sucede con el violeta y los rojos máximos superpuestos?
   A) Los máximos se separan: el ángulo del máximo rojo aumenta más rápidamente que el violeta.
   B) Los máximos se separan: el ángulo del máximo violeta aumenta más rápidamente que el rojo.
   C) El ángulo del máximo rojo crece, mientras que el del violeta disminuye.
   D) El ángulo de los dos máximos crece, de modo que siguen superponiéndose.
5. Se deja que el espectro entero de luz visible cruce una rendija simple. ¿En qué parte, si la hay, las regiones *no* están iluminadas por algún color de la luz visible?
   A) Entre el máximo central y el primer mínimo con el rojo.
   B) Entre el *enésimo* máximo con el violeta y el $(n + 1)$*ésimo* máximo con el rojo, donde n es un entero cualquiera.
   C) Entre el *enésimo* máximo con luz violeta y el $(n + 1)$*ésimo* máximo con el rojo, donde $n > 3$.
   D) Todo ángulo corresponde a un máximo con algún color.

42-3 Intensidad de la difracción de rendija simple

6. La intensidad del máximo central en la difracción de rendija simple
   A) no depende del ancho de la rendija.
   B) es proporcional al ancho de la rendija.
   C) es proporcional al cuadrado del ancho de la rendija.
   D) es inversamente proporcional al ancho de la rendija.
7. ¿A qué porcentaje aproximado de la intensidad del máximo central corresponde la intensidad del primer máximo más allá de él?
   A) 50% B) 25% C) 5%
   D) Depende del ancho de la rendija.
8. Los mínimos del patrón de difracción están situados en los ángulos θ_m, donde m es un entero positivo no cero y
   A) $a \operatorname{sen}\theta_m = m\lambda$. B) $a \operatorname{sen}\theta_m > m\lambda$.
   C) $a \operatorname{sen}\theta_m < m\lambda$.
9. Los máximos del patrón de difracción se encuentran en los ángulos θ_m, donde m es un entero positivo no cero y
   A) $a \operatorname{sen}\theta_m = (m + 1/2)\lambda$.
   B) $a \operatorname{sen}\theta_m > (m + 1/2)\lambda$.
   C) $a \operatorname{sen}\theta_m < (m + 1/2)\lambda$.

42-4 Difracción en una abertura circular

10. Considere la difracción procedente de una abertura cuadrada de lado d. El primer mínimo ocurrirá en $d \operatorname{sen}\theta = k\lambda$, donde k es una constante que puede calcularse exactamente por integración. ¿Cuál valor esperará que tenga k?
    A) $k < 1$ B) $k = 1$ C) $1 < k < 1.22$
    D) $k = 1.22$ E) $1.22 < k$
11. ¿Cuál es la estructura más pequeña que puede resolverse con un microscopio óptico tradicional?
    A) Una bacteria B) Un virus
    C) Una molécula de agua
    D) No hay límite; algún día diseñaremos mejores microscopios.

42-5 Combinación de interferencia y difracción de rendija doble

12. El patrón de rendija doble de la figura 42-21*a* visto con una fuente de luz monocromática se modifica un poco y se parece al patrón de la figura 42-21*b*. Considere los siguientes cambios posibles de las condiciones:
    A) aumentó la longitud de onda de la luz,
    B) disminuyó la longitud de onda de la luz,
    C) aumentó la longitud de onda de las rendijas,
    D) disminuyó el ancho de las rendijas.
    E) aumentó la separación de las rendijas.
    F) disminuyó la separación de las rendijas.

    ¿Cuál selección o selecciones podrían explicar la alteración del patrón?

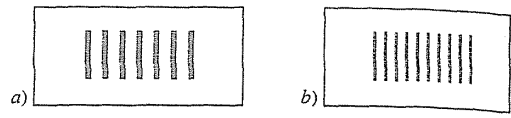


FIGURA 42-21. Pregunta de opción múltiple 12.

PREGUNTAS

1. Distinga entre la difracción de Fresnel y la de Fraunhofer. ¿Se basan en diversos principios físicos? De ser así, ¿cuáles son? Si se apoyan en un mismo principio general, ¿cuál es?
2. ¿En qué se parecen la interferencia y la difracción? ¿Y en qué se diferencian?
3. Suponga que sostiene una rendija simple, estrecha y vertical delante de la pupila de su ojo y contempla una fuente luminosa lejana en la forma de un largo filamento caliente. ¿Es el patrón de difracción que ve el de Fresnel o el de Fraunhofer?
4. ¿Ocurren los efectos de la difracción en las imágenes virtuales y también en las reales? Explique su respuesta.
5. ¿Ocurren los efectos de la difracción en imágenes formadas por *a*) espejos planos y *b*) por espejos esféricos? Explique su contestación.
6. Comente el enunciado: "La difracción se realiza en todas las regiones del espectro electromagnético". Considere, por ejemplo, la región de rayos X y la región de microondas y ofrezca argumentos para aceptar que es correcto o falso.
7. Hemos afirmado (correctamente) que las ecuaciones de Maxwell predicen todos los fenómenos de la óptica clásica. Con todo, en el capítulo 41 (Interferencia) y en éste (Difracción) se mencionan poco. ¿Refleja ello una incoherencia? ¿Dónde se siente el impacto de las ecuaciones de Maxwell? Explique su respuesta.
8. Si quisiéramos rehacer el análisis de las propiedades de los lentes en el capítulo 40 con métodos de la óptica geométrica pero sin limitarlo a los ejes paraxiales ni a las lentes delgadas, ¿surgirían con nuestro análisis los fenómenos de la difracción? Explique su respuesta.
9. ¿Por qué la difracción de las ondas sonoras es más patente en la experiencia diaria que la difracción de las ondas de luz?
10. Podemos difractar las ondas sonoras. ¿Qué ancho aproximado tendrá la rendija simple que utilizará en caso de desear ampliar la distribución de una onda sonora plana incidente de 1 kHz de frecuencia?
11. ¿Por qué las ondas de radio se difractan alrededor de los edificios, no así las ondas de luz?
12. La bocina de un altavoz, que se utilizó en un concierto de música de rock, tiene una abertura rectangular de 1 m de alto y 30 cm de ancho. ¿Será el patrón de intensidad sonora más amplio en el plano horizontal o en el vertical?
13. Se diseña una antena de radar para obtener mediciones exactas de la altitud de un avión, pero menos exactas de su dirección en un plano horizontal. ¿Debe la razón de altura-ancho de la antena ser menor, igual o mayor que la unidad?
14. Describa lo que sucede a un patrón una difracción de rendija simple de Fraunhofer, si sumergimos en agua el aparato entero.
15. En la difracción de rendija simple, ¿qué efecto se consigue al aumentar *a*) la longitud de onda y *b*) el ancho de la rendija?
16. Mientras escucha la radio del automóvil, seguramente se habrá dado cuenta de que, al pasar bajo un puente, se desvanece la señal de amplitud modulada, pero no la de la frecuencia modulada. ¿De alguna manera influye la difracción en este fenómeno?
17. ¿Qué aspecto presentará el patrón de difracción de rendija simple si $\lambda > a$?
18. ¿Cómo será el patrón formado por una rendija doble en una pantalla, si las rendijas no tienen el mismo ancho? ¿Cambiarán de sitio las franjas?
19. Cerca de su base la sombra de un asta vertical proyectada por el Sol ofrece franjas claramente definidos, pero menos bien definidos cerca del extremo superior. ¿Por qué?
20. Cae luz solar sobre una rendija simple de 1 pm de ancho. Describa cualitativamente el aspecto que presenta el patrón de difracción resultante.
21. En la figura 42-8 los rayos r_1 y r_3 están en fase, lo mismo que los rayos r_2 y r_4. ¿Por qué no existe una intensidad máxima en P_2 en vez de un mínimo?
22. Cuando hablamos de difracción por una rendija simple, simplemente queremos decir que su ancho debe ser mucho menor que su longitud. Suponga que, en efecto, la longitud equivaliera al doble del ancho. Haga una conjetura aproximada del aspecto que ofrecerá el patrón de difracción.
23. En la figura 42-6 las longitudes de camino óptico procedentes de la ranura del punto P_0 son todas iguales. ¿Por qué?
24. En la figura 42-10*d*, ¿por qué no es vertical E_θ, el cual representa el primer máximo más allá del máximo central? (Sugerencia: tenga en cuenta los efectos de un pequeño enrollado o no enrollado de la espira de fasores en esta figura.) Consulte el ejercicio 12.
25. Mencione al menos dos razones por las cuales la utilidad de los telescopios grandes aumenta a medida que aumentamos el diámetro de la lente.
26. ¿Encontramos los efectos de la difracción en telescopios de reflexión como el Hubble Space Telescope, que tienen espejos en vez de lentes? De ser así, ¿por qué nos tomamos la molestia de ponerlos en el espacio?
27. Hemos visto que la difracción limita la potencia de resolución de los telescopios ópticos (Fig. 42-14). ¿Tiene las mismas consecuencias en los grandes telescopios de radio?

28. La difracción representa un problema más para un telescopio que para una cámara. Explique por qué
29. En los patrones de interferencia de rendija doble, como el de la figura 42-16*a*, dijimos que el patrón de difracción de una rendija simple modulaba las franjas de interferencia. ¿Podríamos invertir la afirmación y decir que el patrón de difracción de una rendija simple es la intensidad modulada por las franjas de interferencia? Explique su contestación.

EJERCICIOS

42-1 La difracción y la teoría ondulatoria de la luz

42-2 Difracción de rendija simple

1. Cuando una luz monocromática incide en una rendija de 0.022 mm de ancho, el primer mínimo de difracción se observa en un ángulo de 1.8° desde la dirección del haz incidente. Calcule la longitud de onda de la luz incidente.
2. ¿Puede demostrar la naturaleza ondulatoria de los rayos X difractándolos a través de una rendija simple? Determine el ancho máximo de rendija que podría utilizar, si apenas puede detectarse un ancho angular de 0.12 mrad del máximo central y si conjetura que la longitud de onda de los rayos X es 0.10 nm.
3. Una luz monocromática de 441 nm de longitud de onda incide sobre una rendija estrecha. En una pantalla a 2.16 m de distancia, la distancia entre el segundo mínimo y el máximo central es 1.62 cm. *a*) Calcule el ángulo de difracción θ del segundo mínimo. *b*) Determine el ancho de la rendija.
4. Una luz de 633 nm de longitud de onda incide en una rendija estrecha. El ángulo entre el primer mínimo en un lado del máximo central y el primer mínimo del otro es de 1.97°. Obtenga el ancho de la rendija.
5. Una rendija simple se ilumina con una luz cuyas longitudes de onda son λ_a y λ_b, escogidas de modo que el primer mínimo de difracción del componente λ_a coincida con el segundo mínimo del componente λ_b. *a*) ¿Qué relación existe entre las dos longitudes de onda? *b*) ¿Coinciden otros mínimos de los dos patrones?
6. Una onda plana, cuya longitud de onda mide 593 nm, incide en una rendija de 420 μm de ancho. Una lente convergente delgada, con una longitud focal de 71.4 cm, se pone detrás de ella y se enfoca la luz sobre una pantalla. Calcule la distancia en la pantalla entre el centro del patrón y el segundo mínimo.
7. En un patrón de difracción de rendija simple, la distancia entre el primer mínimo de la derecha y el de la izquierda es 5.20 mm. La pantalla donde se proyecta el patrón está a 82.3 cm de la rendija y la longitud de onda es de 546 nm. Calcule el ancho de la rendija.
8. La distancia entre el primer y quinto mínimos de un patrón de rendija simple es 0.350 mm con una pantalla situada a una distancia de 41.3 cm, usando una luz cuya longitud de onda mide 546 nm. *a*) Calcule el ángulo de difracción θ del primer mínimo. *b*) Encuentre el ancho de la rendija.
9. Una rendija de 1.16 mm de ancho está iluminada con una luz de 589 nm de longitud. El patrón de difracción se ve en una pantalla a 2.94 m de distancia. Encuentre la distancia entre los dos primeros mínimos de difracción en el mismo lado del máximo central.

42-3 Intensidad de la difracción de rendija simple

10. Si duplicamos el ancho de una rendija simple, la intensidad del máximo central del patrón de difracción crecerá en un factor de 4, aunque sólo se duplique la energía que la atraviesa. Explique esto en términos cuantitativos.
11. Una luz monocromática cuya longitud de onda es de 538 nm cae sobre una rendija con 25.2 μm de ancho. La distancia entre esta última y la pantalla es de 3.48 m. Considere un punto en la pantalla a 1.13 cm del máximo central. *a*) Calcule θ. *b*) Calcule α. *c*) Calcule la razón de la intensidad en este punto a la intensidad en el máximo central.
12. En la figura 41-20*d* calcule el ángulo que E_θ forma con la vertical; consulte las pregunta 24 y el problema 3.
13. Calcule el ancho del máximo central en un patrón de difracción de rendija simple, donde $a = 10\lambda$. Compare su resultado con la figura 42-12*c*. Consulte el problema resuelto 42-4.

42-4 Difracción en una abertura circular

14. Un astronauta en un satélite asegura ser capaz de resolver apenas dos fuentes puntuales en la Tierra, a 163 km del suelo. Calcule *a*) la separación angular y *b*) la separación lineal de las dos, suponiendo condiciones ideales. Suponga que $\lambda = 540$ nm y que el diámetro de la pupila del astronauta es 4.90 mm.
15. Los dos faros de un automóvil que se acerca están separados por una distancia de 1.42 m. ¿En qué *a*) separación angular y *b*) distancia máxima los resolverá el ojo? Suponga un diámetro de pupila de 5.00 mm y una longitud de onda de 562 nm. Suponga asimismo que los efectos de la difracción sólo limitan la resolución.
16. La pared de un cuarto grande está cubierta con losas acústicas, donde se perforan hoyos pequeños a 5.20 mm de centro a centro. ¿A qué distancia puede encontrarse una persona de una losa y aun así distinguir los hoyos individuales, suponiendo condiciones ideales? Suponga que el diámetro de la pupila del observador es de 4.60 mm y que la longitud de onda es de 542 nm.
17. Determine la separación de dos puntos en la superficie lunar que apenas pueden resolverse mediante un telescopio de 200 in (5.08 m) en Monte Palomar, suponiendo que esta distancia depende de los efectos de la difracción. Suponga una longitud de onda de 565 nm.
18. Un crucero naval emplea un radar con una longitud de onda de 1.57 cm. La antena circular tiene un diámetro de 2.33 m. En un radio de 6.25 km, ¿cuál es la distancia más pequeña a que dos lanchas de carreras pueden encontrarse y aun así ser resueltas como dos objetos separados por un sistema de radar?
19. Si Superman realmente tuviera visión de rayos X con una longitud de 0.12 nm y con un diámetro de pupila de 4.3 mm, ¿a qué altitud podría distinguir entre los buenos y los malos, suponiendo que el detalle mínimo requerido fuera 4.8 cm?
20. Un satélite "espía en el cielo" que gira a 160 km arriba de la superficie terrestre está provisto de una lente con una longitud focal de 3.6 m. Su poder de resolución para los objetos del suelo es 30 cm; podría medir fácilmente el tamaño de las entradas por un avión. ¿Cuál es el diámetro efectivo de la lente, determinado por consideraciones de difracción exclusivamente? Suponga

que $\lambda = 550$ nm. Se sabe que muchos satélites más efectivos se encuentran en operación hoy.

21. Las pinturas de Georges Seurat constan de puntos pequeños poco espaciados ($\approx$ 2 mm de diámetro) de pigmento puro, según se muestra en la figura 42-22. La ilusión de la mezcla de colores se debe a que la pupila del observador difracta la luz que penetra en ella. Calcule la distancia mínima a que el observador debe situarse respecto a la pintura para conseguir la mezcla deseada de colores. Suponga que la longitud de onda de la luz es de 475 nm y que el diámetro de la pupila mide 4.4 mm.

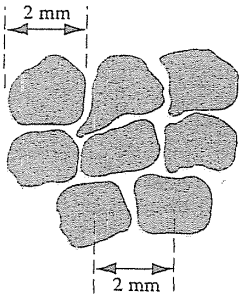


FIGURA 42-22. Ejercicio 21.

22. En junio de 1985, un haz láser fue disparado en la Air Force Optical Station en Maui (Hawai) y se reflejó contra el transbordador *Discovery* que se desplazaba a una velocidad de 354 km en el espacio. El diámetro del máximo central del haz en la posición del transbordador era de 9.14 m y la longitud de onda del haz era 500 nm. ¿Cuál es el diámetro efectivo de la abertura del láser en la estación terrestre Maui? (Sugerencia: un haz láser se dispersa a causa de la difracción; suponga una abertura circular de salida.)
23. *a*) Un diafragma circular de 60 cm de diámetro oscila a una frecuencia de 25 kHz en una fuente subacuática que sirve para detectar submarinos. Lejos de la fuente, la intensidad del sonido se distribuye como un patrón de difracción en un hoyo circular de diámetro igual al del diafragma. Suponga que la velocidad del sonido en el agua es de 1450 m/s y determine el ángulo entre la normal al diafragma, y la dirección del primer mínimo. *b*) repita el ejercicio con una fuente cuya frecuencia (audible) es de 1.0 kHz.
24. Un radar de ondas milimétricas genera un haz más estrecho que el radar ordinario de microondas. Ello lo hace menos vulnerable a los misiles antirradares. *a*) Calcule el ancho angular, del primer mínimo al primer máximo, del "lóbulo" central producido por un haz de radar de 220 GHz, emitido por una antena circular de 55 cm de diámetro. (Se escoge la frecuencia de modo que coincida con una "ventana" atmosférica de poca absorción.) *b*) Calcule la misma cantidad del radar de un barco descrito en el ejercicio 18.

42-5 Combinación de interferencia y difracción de rendija doble

25. Dos rendijas de ancho a y con una separación d están iluminadas con un haz de luz coherente de longitud de onda λ. ¿Cuál es la separación lineal de las franjas de interferencia observadas en una pantalla situada a una distancia D?
26. *a*) Diseñe un sistema de rendija doble donde falte la cuarta franja, sin contar el máximo central. *b*) ¿Cuáles otras franjas, si las hay, faltan también?
27. *a*) Con $d = 2a$ en la figura 42-23, ¿cuántas franjas de interferencia se encuentran en la envolvente central de la difracción? *b*) Si hacemos $d = a$, las dos rendijas se fusionan en una de ancho $2a$. Demuestre que la ecuación 42-17 se convierte en el patrón de difracción en la rendija.

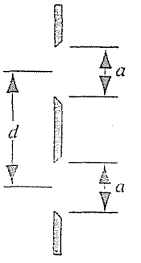


FIGURA 42-23. Ejercicio 27.

28. Suponga que, como en el problema resuelto 42-7, la envolvente del pico central contiene 11 franjas. ¿Cuántas se hallan entre el primer y segundo mínimos de la envolvente?
29. *a*) ¿Cuántas franjas completas aparecen entre los primeros mínimos de la envolvente de franjas a ambos lados del máximo central con un patrón de rendija doble si $\lambda = 557$ nm, $d = 0.150$ mm, y si $a = 0.030$ mm? *b*) ¿Cuál es la razón de intensidad de la tercera franja al lado del centro y la franja central?

PROBLEMAS

1. Los fabricantes de alambre (y de otros objetos de dimensiones pequeñas utilizan a veces un láser para vigilar constantemente el grosor del producto. El alambre intercepta el haz láser, originando un patrón de difracción como el de una rendija simple del mismo ancho que el del alambre (Fig. 42-24). Supóngase que lo ilumina un láser He-Ne, con una longitud de onda de 632.8 nm; el patrón de difracción es proyectado contra una pantalla a 2.65 m de distancia. Si el diámetro deseado del alambre es 1.37 mm, ¿cuál será la distancia observada entre los dos mínimos de décimo orden a ambos lados del máximo central?

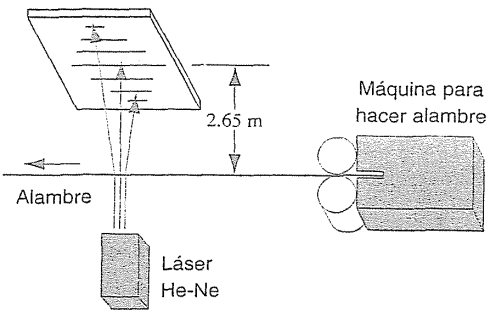


FIGURA 42-24. Problema 1.

2. Un haz monocromático de luz paralela incide en un hoyo "colimador" de diámetro $a >> \lambda$. El punto P está en la región geométrica de sombra en una pantalla lejana, según se observa en la figura 42-25*a*. Dos obstáculos, que aparecen en la figura 42-25*b*, se colocan uno a la vez sobre el hoyo. A es un círculo opaco con un agujero en él, y B su "negativo fotográfico". Aplique los conceptos de superposición y demuestre que la intensidad en P es idéntica en los dos objetos difractarios A y B (a esto se le conoce con el nombre de *principio de Babinet*). Dentro de este contexto puede probarse que el patrón de difracción de un alambre es el mismo que el de una rendija de igual ancho. Consúltese "Measuring the Diameter of a Hair by Diffraction", de S. M. Curry y A. L. Shcawlow, *American Journal of Physics,* mayo de 1974, p. 412.

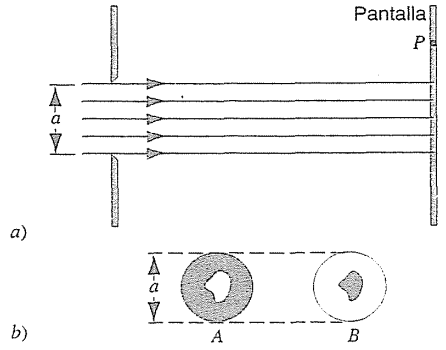


FIGURA 42-25. Problema 2.

3. *a*) Demuestre que los valores de α en que ocurren los máximos de intensidad en la difracción de rendija simple pueden calcularse con precisión, diferenciando la ecuación 42-8 respecto a α e igualando a cero, obteniendo la condición tan $\alpha = \alpha$. *b*) Para obtener los valores de α que satisfagan esta relación grafique la curva $y = \tan \alpha$ y la línea recta $y = \alpha$; a tal efecto puede determinar sus intersecciones o usar una calculadora de bolsillo a fin de calcular un valor apropiado de α por prueba y error. *c*) Determine los valores (no integrales) de m correspondientes a los máximos sucesivos en un patrón de rendija simple. Nótese que los máximos secundarios no se encuentran exactamente a la mitad entre los mínimos.
4. En un experimento franco-soviético cuyo fin era monitorear la superficie lunar con un haz luminoso, se dirigió la radiación pulsada de un haz de rubí ($\lambda = 0.69$ μm) hacia la Luna a través de un telescopio de reflexión, con un radio de espejo de 1.3 m. Un reflector en ella se comportaba como un espejo circular plano de 10 cm de radio, que reflejaba directamente la luz hacia el telescopio situado en la Tierra. Después, la luz reflejada era detectada con un fotómetro, tras ponerlo en foco por medio del telescopio. ¿Qué fracción de la energía luminosa original captaba el detector? Suponga que en las direcciones de desplazamiento toda la energía se concentra en el círculo de difracción central.
5. Puede demostrarse que, salvo con $\theta = 0$, un obstáculo circular produce el mismo patrón de difracción que un hoyo circular de igual diámetro. Más aún si hay muchos de esos obstáculos, como las gotas de aguas puestas al azar, desaparecen los efectos de la interferencia, dejando sólo la difracción debida a un solo obstáculo. *a*) Explique por qué uno ve un "anillo" alrededor de la Luna en una noche con neblina. El anillo suele ser de color rojo. Explique por qué. *b*) Calcule el tamaño de las gotas de agua en el aire si el anillo parece tener un diámetro 1.5 veces mayor que el de la Luna. El diámetro angular de ella en el cielo es 0.5°. *c*) ¿A qué distancia de la Luna podría verse un anillo azulado? Algunas veces los anillos son blancos. ¿Por qué? *d*) El arreglo de colores es contrario al de un arco iris. ¿A qué se debe?
6. Dos altavoces activan un sistema acústico de rendija doble (separación de rendija *d,* ancho de rendija *a*), como se observa en la figura 42-26. La fase de uno de ellos puede modificarse empleando una línea de retraso variable. Describa en forma detallada los cambios que se producen en el patrón de intensidad a grandes distancias, a medida que se cambia la diferencia de fase de cero a 2π. Tenga en cuenta tanto los efectos de la interferencia como los de la difracción.

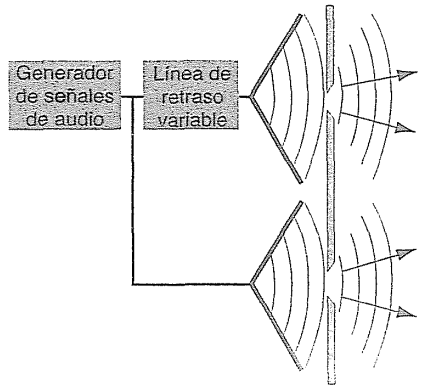


FIGURA 42-26. Problema 6.

7. Una luz de 440 nm de longitud de onda atraviesa una rendija doble, creando el patrón de difracción de intensidad I frente al ángulo de deflexión θ que aparece en la figura 42-27. Calcule *a*) el ancho de la rendija y *b*) la separación de la rendija. *c*) verifique la intensidad mostrada de las franjas de interferencia $m = 1$ y de $m = 2$.

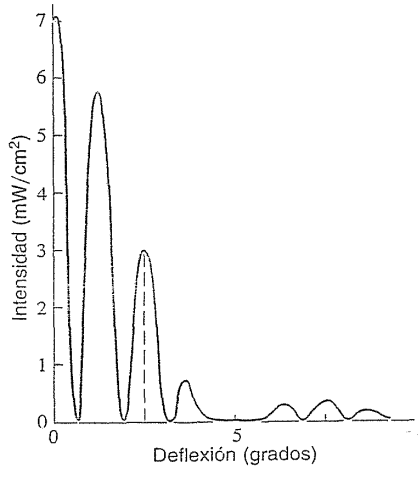


FIGURA 42-27. Problema 7.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Genere numéricamente una gráfica de intensidad en función de un ángulo partiendo del eje central en la difracción debida a una abertura circular. Suponga un diámetro de abertura $d = 5\lambda$. Realice el ejercicio suponiendo que la abertura circular puede aproximarse mediante una red cuadrada de fuentes puntuales, separadas por una distancia de $d/10$. Desde luego, sólo se permite que irradien los puntos de la red dentro del círculo. Verifique el coeficiente 1.22 en la ecuación 42-11.
2. Integre numéricamente la ecuación 42-8 con diversos valores de a y λ para comprobar que la potencia total que incide en la rendija simple es la misma que la que inciden en la pantalla. He aquí algunos valores con que puede probar: $a/\lambda = 0.5$, 1 y 2.

CAPÍTULO 43

REJILLAS Y ESPECTROS

En el capítulo 41 estudiamos el patrón de interferencia que se produce cuando una luz monocromática incide sobre una rendija doble: aparece un patrón de bandas brillantes y oscuras (franjas de interferencia). A las rendijas se les considera fuente de ondas difractadas. En este capítulo ampliaremos nuestro estudio a los casos en que el número de fuentes de difracción es mayor (a menudo mucho más grande) que dos. Vamos a examinar arreglos múltiples de rendijas en un plano y también arreglos tridimensionales de átomos en un sólido (en el cual utilizamos rayos X en vez de luz visible).

43-1 RENDIJAS MÚLTIPLES

Así como Thomas Young utilizó su método de interferencia con rendija doble cuando midió por primera vez la longitud de onda de la luz, también hoy seguimos aplicando varias técnicas para medirla exactamente. Por ejemplo, entre 1960 y 1983 el metro estándar fue definido a partir de la longitud de onda de la luz emitida por los átomos de criptón (Sec. 1-4). Para poder emplearlo como patrón, hubo que determinar el valor de la longitud de onda hasta nueve cifras significativas.

En teoría, es posible emplear un patrón de interferencia de rendija doble para medir la longitud de onda. Si se conoce la separación d de la rendija, se localizan las franjas brillantes en la pantalla y luego por medio de la ecuación 41-1 (d sen $\theta = m\lambda$), se puede calcular la longitud de onda. Muchas veces es preferible determinar la separación entre los máximos contiguos; para calcular esta separación utilizamos la ecuación 41-4 ($\Delta y = \lambda D/d$) para obtener λ. La precisión de este método depende de la capacidad de determinar exactamente el sitio o el espaciamiento de las franjas. En la figura 43-1*a* se ofrece un patrón típico de interferencia de rendija doble; nos damos cuenta de que, al intentar medir el punto medio de una figura al de la siguiente, los puntos medios no se localizan con certeza.

El patrón de interferencia en la figura 43-1*b*, que se obtuvo usando cinco rendijas, constituye un ligero mejoramiento; adviértase que las franjas brillantes son más estrechas, lo cual significa que podemos medir mejor el espaciamiento de las franjas y, por tanto, calcular la longitud de onda con mayor precisión. La separación d entre las rendijas adyacentes posee el mismo valor en ambos casos; al comparar los dos patrones de interferencia, se comprueba que el espaciamiento de las franjas está determinado por la separación d de la rendija,

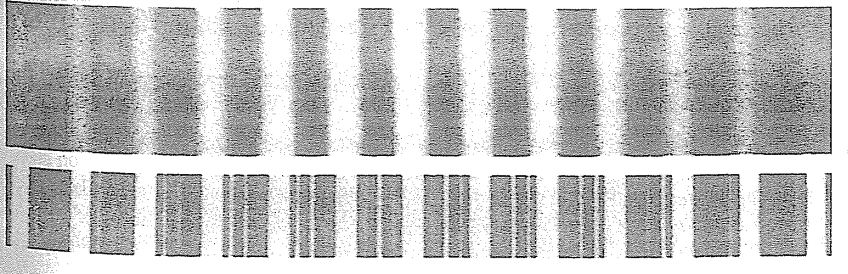


FIGURA 43-1. Patrón de difracción de una rejilla con *a*) dos rendijas y *b*) con cinco rendijas. Nótese que, en el caso de la segunda, las franjas son más pronunciadas (estrechas) y los máximos secundarios de poca intensidad aparecen entre los máximos principales brillantes.

independientemente del número de ellas. Conforme aumentamos el número de rendijas, las franjas brillantes continúan haciéndose más estrechas y aumenta la precisión de la medición de la longitud de onda. Se da el nombre de *rejilla de difracción* al arreglo de múltiples rendijas, en éste el número N de rendijas puede alcanzar 10^4.

En la figura 43-1*b* se aprecia un segundo efecto de aumentar el número de rendijas: *máximos secundarios* débiles (tres en la Fig. 43-1b) aparecen entre las franjas brillantes contiguas. Al incrementarse su número, también crecen los máximos secundarios, pero se atenúa su brillantez; cuando N es grande es posible prescindir por completo de ellos.

En este capítulo vamos a estudiar los patrones de interferencia en las rejillas de difracción. Veremos cómo la nitidez de las franjas depende del número de rendijas de la rejilla y explicaremos el origen de los máximos secundarios. Como lo hicimos en el capítulo 41, nos ocuparemos sólo del arreglo de Fraunhofer, donde se supone una distancia infinita entre la fuente de luz y las rendijas, lo mismo que entre las rendijas y la pantalla. De modo equivalente, la luz paralela incide sobre las rendijas y de ellas sale luz paralela (quizá para ser enfocada por una lente) para producir una imagen en la pantalla.

En la figura 43-2 se muestra una rejilla de cinco rendijas (compare esta figura con la Fig. 41-6). Ocurre un máximo principal cuando la diferencia de trayectoria entre los rayos provenientes de un par cualquiera de rendijas contiguas, dado por $d \operatorname{sen} \theta$ es igual a un número entero de longitudes de onda, o sea

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad (43\text{-}1)$$

donde m es el *número de orden*. La ecuación 43-1 es idéntica a la ecuación 41-1 en los máximos de la rendija doble. Nótese lo siguiente: si la luz que atraviesa un par cualquiera de rendijas *adyacentes* está en fase en un punto de la pantalla, la luz que pasa por un par, incluso de rendijas no adyacentes, también se hallará en fase en ese punto. Con determinada separación d de rendija, los lugares de los máximos principales

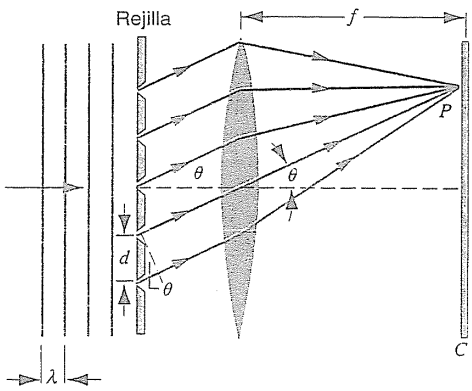


FIGURA 43-2. Rejilla idealizada de difracción que contiene cinco rendijas. Se supone que el ancho a de la rendija es mucho menor que λ, aunque esta condición tal vez no se cumpla en la práctica. También la longitud focal f será mucho mayor que d en la práctica; en la figura se distorsionan estas dimensiones para hacerla más clara.

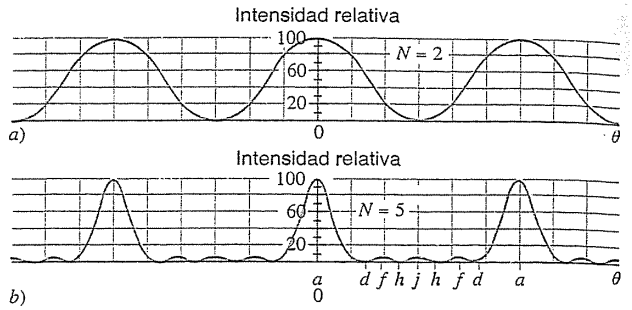


FIGURA 43-3. Patrones calculados de intensidad en *a*) una rejilla de dos rendijas y en *b*) una rejilla de cinco rendijas, que tienen los mismos valores de d y de λ. Obsérvese el aumento de nitidez de los máximos principales y el aspecto de máximos secundarios débiles en *b*); compare esta figura con la figura 43-1. Las letras en *b*) se refieren a la figura 43-6. Este cálculo no incluye los efectos de difracción a causa del ancho de la rendija, es decir, se supone que nos hallamos cerca de la región central de la figura 43-1, donde los máximos principales poseen intensidades esencialmente iguales.

dependen de la longitud de onda conforme a la ecuación 43-1. Los sitios de los máximos no dependen del número N de rendijas, que como veremos rige el ancho o nitidez del máximo principal. En las rendijas de ancho a, la intensidad relativa de los máximos principales dentro de la envolvente de difracción están determinados por la razón a/λ, que no afectan su posición. En la figura 43-3 se comparan los patrones de intensidad de rejillas de dos y cinco rendijas.

Ancho de los máximos

Con el uso de un método gráfico que use fasores se puede entender el incremento de los máximos principales. En las figuras 43-4*a* y 43-4*b* se describen las condiciones en los máximos centrales para tener una rejilla de dos y de cinco rendijas. Las flechas pequeñas representan la amplitud de las perturbaciones ondulatorias de cada rendija que llegan a la pantalla en la posición del máximo central, donde $m = 0$ y, por lo mismo, $\theta = 0$, en la ecuación 43-1.

En lo tocante al máximo central, hay un mínimo de intensidad cero que se encuentra en el ángulo $\delta\theta_0$ fuera del eje central, como se ve en la figura 43-5. Las figuras 43-4*c* y 43-4*d* contienen los fasores en este punto. La diferencia de fase $\Delta\phi$ entre las ondas de rendijas contiguas, que es cero en el máximo principal central, se selecciona de modo que el arreglo de fasores se cierre sobre sí mismo y cause una intensidad resultante cero. Cuando $N = 2$, $\Delta\phi = 2\pi/2$ (= 180°); cuando $N = 5$, $\Delta\phi = 2\pi/5$ (= 72°). En el caso general, está dado por

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{N}. \quad (43\text{-}2)$$

Esta diferencia de fase de las ondas adyacentes corresponde a una diferencia de trayectoria ΔL dada por

$$\frac{\text{diferencia de fase}}{2\pi} = \frac{\text{diferencia de trayectoria}}{\lambda},$$

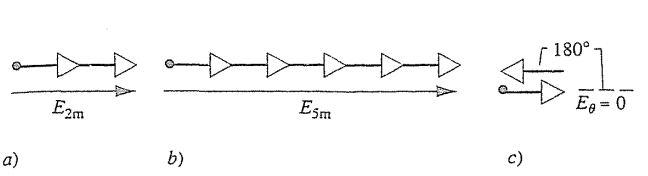


FIGURA 43-4. *a, b*) Condiciones en el máximo central con una rejilla de dos rendijas y una de cinco rendijas, respectivamente. *c, d*) Condiciones correspondientes en un mínimo de intensidad cero que se encuentra a ambos lados de este máximo central.

o

$$\Delta L = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\Delta\phi = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\left(\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{\lambda}{N}. \quad (43\text{-}3)$$

Sin embargo, la diferencia de trayectoria ΔL en el primer mínimo (Fig. 43-2 y 43-5) también está dada por d sen $\delta\theta_0$; así que podemos escribir

$$d \operatorname{sen} \delta\theta_0 = \frac{\lambda}{N},$$

o

$$\operatorname{sen} \delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \quad (43\text{-}4)$$

Dado que $N >> 1$ en estas rejillas, sen $\delta\theta_0$ suele ser muy pequeño (es decir, las líneas son nítidas), y con una buena aproximación podemos reemplazar sen $\delta\theta_0$ por $\delta\theta_0$, expresado en radiaciones, es decir,

$$\delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \quad (43\text{-}5)$$

Esta ecuación muestra concretamente que, si aumentamos N para cierta λ y d, $\delta\theta_0$ disminuye; esto significa que el máximo principal central adquiere mayor nitidez.

Si queremos obtener el resultado con *cualquier* máximo principal, se tiene en cuenta la geometría de la figura 43-5 en que el máximo principal *emésimo* ocurre en un ángulo θ. Nos alejamos de él a través de un desplazamiento angular $\delta\theta$ para llegar al siguiente máximo; suponemos que este ángulo $\delta\theta$ es una medida del ancho angular del máximo. En él la diferencia de trayectoria entre los rayos procedentes de rendijas contiguas es $m\lambda$ (Ec. 43-1). En el siguiente máximo, la diferencia de trayectoria entre los rayos provenientes de rendijas adyacentes, es $m\lambda + \lambda/N$ y la longitud de trayectoria adicional λ/N está dada por la ecuación 43-3. Consideremos, por ejemplo, el caso de $N = 10$. La longitud de trayectoria adicional entre las rendijas adyacentes en el mínimo es 0.1λ. La diferencia de trayectoria entre las rendijas 1 y 6 será entonces $5(m\lambda + 0.1\lambda) = 5m\lambda + 0.5\lambda$; las longitudes de trayectoria difieren en un número semientero de longitudes de onda y, por ello, los rayos interfieren en forma destructiva. Lo mismo sucede con las rendijas 2 y 7, con las rendijas 3 y 8 y así sucesivamente. Si la diferencia de trayectoria adicional es λ/N, entonces los rayos provenientes de las $N/2$ rendijas inferiores experimentan una interferencia destructiva por pares con los rayos procedentes de las $N/2$ rendijas superiores.

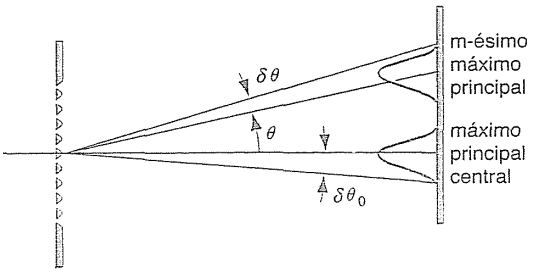


FIGURA 43-5. Un máximo principal se halla en la posición dada por el ángulo θ y el primer mínimo ocurre en el ángulo $\delta\theta$ a partir del máximo. Puede suponerse que el ángulo $\delta\theta$ es una medida del ancho o nitidez de los máximos. El ancho del máximo central está dado por el ángulo $\delta\theta_0$.

En el ángulo $\theta + \delta\theta$, la diferencia de trayectoria entre rayos originados en rendijas adyacentes es

$$\begin{aligned} d \operatorname{sen}(\theta + \delta\theta) &= d(\operatorname{sen}\theta \cos\delta\theta + \cos\theta \operatorname{sen}\delta\theta) \\ &\approx d \operatorname{sen}\theta + (d\cos\theta)\delta\theta, \end{aligned}$$

donde suponemos que $\delta\theta$ es pequeño; esto nos permite aproximar cos $\delta\theta \approx 1$ y sen $\delta\theta \approx \delta\theta$. Al hacer esta diferencia de trayectoria igual a $m\lambda + \lambda/N$, su valor en el mínimo, obtenemos

$$d \operatorname{sen}\theta + (d\cos\theta)\delta\theta = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

o con el uso de la ecuación 43-1,

$$(d\cos\theta)\delta\theta = \frac{\lambda}{N}.$$

Al resolver para $\delta\theta$ tenemos

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}. \quad (43\text{-}6)$$

El resultado anterior da el ancho angular* del máximo principal que se presenta en el ángulo θ correspondiente al orden m. Nótese que la ecuación 43-6 se convierte en la ecuación 43-5 con el máximo central ($\theta = 0$). Con ciertos N, d y λ, el máximo central es el más estrecho (cos $\theta = 1$); los anchos crecen al dirigirnos a un θ más grande (y, por tanto, a órdenes mayores m). La ecuación 43-6 indica que $\delta\theta$ se vuelve más pequeño (los máximos son más nítidos) a medida que aumenta el producto Nd. Este producto (número de rendijas por la distancia entre ellas) da el ancho total de la rejilla. Así pues, los picos se vuelven más pronunciados a medida que va creciendo el ancho de la rejilla.

* Según se definió en la ecuación 43-6, el ancho es el intervalo angular entre el pico y el primer mínimo. La definición usual del ancho de un pico es el intervalo entero cubierto por él en la mitad de su altura máxima (véase, por ejemplo, la Fig. 42-12). Estas dos medidas del ancho son aproximadamente iguales y suponemos que la ecuación 43-6 representa una medida del ancho del pico.

Los máximos secundarios (opcional)

El origen de los máximos secundarios que aparecen cuando $N > 2$, se puede entender también aplicando el método de fasores. En la figura 43-6*a* se describen las condiciones del máximo principal central con una rejilla de cinco rendijas. Los fasores están en fase. Conforme vamos alejándonos del máximo central, θ en la figura 43-2 aumenta a partir de cero y el ángulo entre los fasores contiguos crece de cero a $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)(d \operatorname{sen} \theta)$. Las figuras sucesivas indican cómo la amplitud resultante de onda E_θ varía con $\Delta\phi$. Verifique por medio de una gráfica que una figura determinada representa las condiciones de $\Delta\phi$ y $2\pi - \Delta\phi$. En consecuencia, empezamos en $\Delta\phi = 0$, pasamos a $\Delta\phi = 180°$ y luego retornamos a través de la secuencia, siguiendo las diferencias de fase entre paréntesis hasta llegar a $\Delta\phi = 360°$. Esta secuencia equivale a recorrer el patrón de intensidad del máximo principal central al adyacente. En la figura 43-6, que debería compararse con la figura 43-3*b*, se observa que con $N = 5$ hay tres máximos secundarios correspondientes a $\Delta\phi = 110°$, 180° y 250°. Efectúe un análisis similar en el caso de $N = 3$ y demuestre que sólo ocurre un máximo secundario. En general, en una rejilla de N rendijas hay $N - 2$ máximos secundarios. En las rejillas reales, que normalmente contienen de 10 000 a 50 000 "rendijas", los máximos secundarios están tan cerca de los principales, o se reduce tanto su intensidad, que no pueden ser observados en forma experimental. ■

PROBLEMA RESUELTO 43-1. Una rejilla tiene 10^4 rejillas con un espaciamiento de $d = 2.1\ \mu\text{m} = 2\ 100$ nm. Está iluminada con luz amarilla de sodio ($\lambda = 589$ nm). Encuentre *a*) la posición angular de todos los máximos observados y *b*) el ancho angular del máximo de más alto orden.

Solución *a*) Con base en la ecuación 43-1 tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{m(589\ \text{nm})}{2100\ \text{nm}},$$

que nos da

$$\theta = 16.3°\ (m = 1),\ 34.1°\ (m = 2),\ \text{y}\ \ 57.3°\ (m = 3),$$

con los valores correspondientes en $\theta < 0$ con $m < 0$. Cuando $m = 4$, sen $\theta > 1$. Por tanto, $m = 3$ es el orden más alto observado que nos da un total de siete máximos principales (un máximo central y tres a ambos lados del centro).

b) Para el máximo $m = 3$, la ecuación 43-6 nos da

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} = \frac{589\ \text{nm}}{(10^4)(2\ 100\ \text{nm})(\cos 57.3°)}$$
$$= 5.2 \times 10^{-5}\ \text{rad} = 0.0030°.$$

Que es un máximo principal demasiado estrecho.

Nótese que la ecuación 43-6 es una razón adimensional; y por eso, su resultado se da en radianes. Ello se debe a que la ecuación 43-6 la obtuvimos empleando la aproximación sen $\delta\theta \approx \delta\theta$, que es válida sólo en radianes.

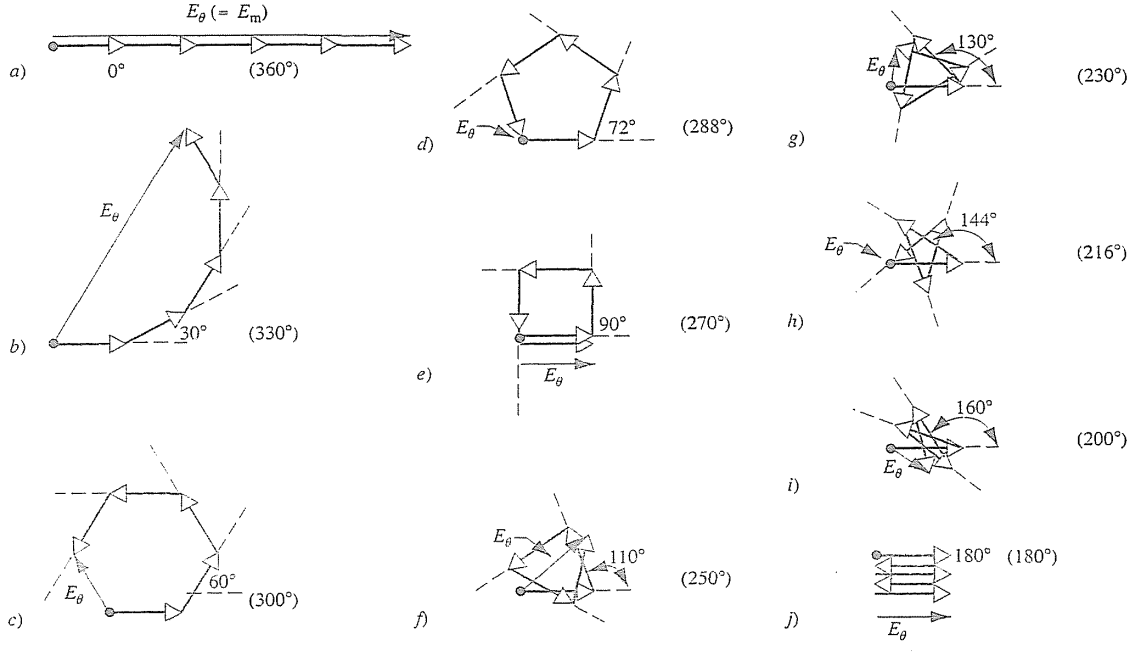


FIGURA 43-6. Las figuras tomadas en la secuencia de *a*) a *j*) y luego en las *j*) a *a*) muestran las condiciones a medida que el patrón de intensidad de una rejilla de cinco rendijas es recorrida desde el máximo principal central hasta un máximo principal adyacente. Las diferencias de fase entre las rendijas contiguas se observan directamente; las que van de *j*) a *a*) están dentro de paréntesis. Los máximos principales ocurren en *a*), los secundarios en o cerca de *f*) y *j*), los mínimos de intensidad cero en *d*) y en *h*). Compare esta figura con la figura 43-3*b*.

43-2 REJILLAS DE DIFRACCIÓN

Una rejilla típica puede contener $N = 10\,000$ rendijas distribuidas en un ancho de unos cuantos centímetros, equivalentes a un espaciamiento d de rejilla de algunos micrómetros. Como vimos en el problema resuelto 43-1, cuando Nd mide unos centímetros, los máximos son muy estrechos; esto permite medir su posición con gran precisión. Así pues, las rejillas sirven para determinar las longitudes de onda para estudiar la estructura y la intensidad de los máximos principales.

Cualquier estructura periódica regular puede servir de rejilla de difracción; por ejemplo, los surcos de un disco compacto que producen un patrón de arco iris al reflejarse la luz contra su superficie. Las rejillas crean imágenes por medio de la luz transmitida como se ve en la figura 43-2; existen además *rejillas de reflexión*, las cuales producen imágenes bajo la luz reflejada. En la rejilla de la figura 43-2 se aprecia un cambio periódico de la *amplitud* (sin que se altere la fase) de la luz en función de la posición en la rejilla. También es posible construir rejillas (de reflexión o transmisión) que alteren periódicamente la *fase* (y un cambio insignificante de la amplitud) de la luz a causa de dicha posición. La generalidad de las rejillas que se emplean con luz visible son de fase, tanto de reflexión como de transmisión.

Las rejillas se construyen haciendo surcos paralelos de igual espaciamiento en una lámina delgada de aluminio o de oro depositados en una placa de vidrio, usando para ello un punto de corte de diamante, cuyo movimiento se controla automáticamente con una máquina. Una vez preparada la rejilla matriz, se obtienen reproducciones vaciando un plástico líquido en ella, dejando que se endurezca y quitándolo después. El plástico así obtenido se sujeta a un trozo plano de vidrio o a otro apoyo y se consigue una buena rejilla.

La figura 43-7 muestra la sección transversal de un tipo común de rejilla de fase de reflexión. (Si fuera transparente, podría servir de rejilla de fase de transmisión, pues la luz que pasa por diversos grosores presentará cambios de fase variables.) Los ángulos de los surcos se escogen de modo que la luz de un orden particular se refleja en cierta dirección. De este modo, la intensidad de un orden particular puede superar a la de otros. Se da el nombre de *resaltado* al corte de rejillas en esta forma. A este tipo pertenece la mayor parte de las rejillas que se utilizan hoy.

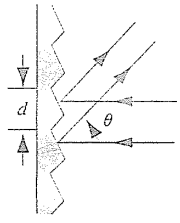


FIGURA 43-7. Sección transversal de una rejilla con resaltado vista bajo luz reflejada. Hay una diferencia de trayectoria de d sen θ entre los dos rayos mostrados.

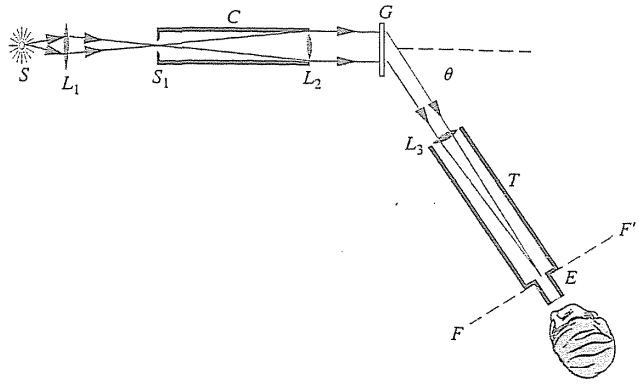


FIGURA 43-8. Tipo simple de espectroscopio de rejilla con el cual se analizan las longitudes de onda de la luz emitida por la fuente S.

La figura 43-8 muestra un espectroscopio de rejilla simple, con el cual se observa el espectro de una fuente luminosa, que se supone emite longitudes de onda discretas. La luz proveniente de la fuente S se enfoca mediante una lente L_1 en una rendija S_1, colocando en el plano focal de la lente L_2. La luz paralela que sale del colimador C incide sobre la rejilla G. Los rayos paralelos asociados a determinado máximo de interferencia que ocurre en el ángulo θ inciden en la lente L_3, y se enfocan en el plano FF'. La imagen formada en este plano se examina por medio de un arreglo de lentes de aumento E (el ocular). El espectro se observa en su totalidad haciendo girar un telescopio T a través de varios ángulos. Los instrumentos usados en la investigación científica o en la industria son más complejos que el arreglo simple de la figura 43-8. Invariablemente se sirven de registros fotográficos o foto-eléctricos y se les conoce como *espectrógrafos*. La figura 43-9 muestra ejemplos de espectros de luz visible registrados por medio de dicho espectrógrafo. Las líneas de la figura son, en efecto, una imagen de la rendija S_1 correspondientes a una de las muchas longitudes de onda emitidas de la fuente. Por tal razón, a esta clase de imágenes se les llama *líneas espectrales*; en un espectro se supone que una "línea" indica un componente particular de la longitud de onda, cualquiera que sea la técnica con que se registra el espectro.

En términos generales, las rejillas pueden generar diversas imágenes de las líneas espectrales, correspondientes a $m = \pm 1$,

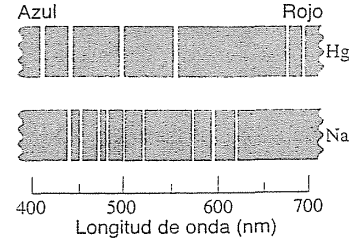


FIGURA 43-9. Ejemplos de espectros de luz visible emitidos por los gases de sodio (Na) y de mercurio (Hg).

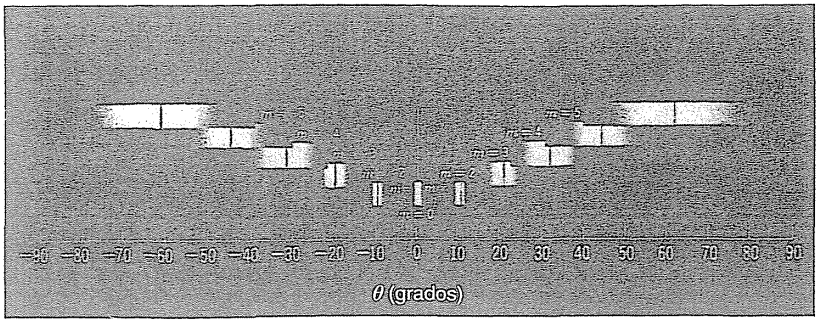


FIGURA 43-10. Espectro de luz blanca vista con un espectroscopio de rejilla como el de la figura 43-8. Los órdenes, identificados mediante el índice m, se muestran separados verticalmente para hacer más clara la ilustración. Cuando se ven en la práctica, no aparecen tan desplazados. La línea central de cada uno corresponde a una longitud de onda de 550 nm. Las rejillas de difracción que se utilizan hoy están diseñadas para concentrar la intensidad de la luz en un orden particular, sin que muestren los patrones simétricos que se aprecian aquí.

$\pm 2, \ldots$, en la ecuación 43-1, y también pueden separar las longitudes de onda que están distribuidas de modo continuo (como en la Fig. 43-10) en líneas espectrales bien definidas. La luz proveniente de un objeto brillante y caliente, digamos el filamento de una lámpara o el Sol, produce un espectro continuo. El espectro del Sol contiene además líneas espectrales pronunciadas, que aparecen como líneas oscuras superimpuestas en el espectro continuo. Estas líneas se deben a la absorción de la luz generada por los átomos de elementos en la atmósfera que rodea al Sol. El helio (palabra que en griego significa Sol) es un elemento que fue descubierto gracias al análisis de dichas líneas.

La luz puede dividirse en sus longitudes de onda componentes cuando reemplazamos la rejilla de la figura 43-8 por un prisma. En una *espectrografía de prisma*, cada longitud de onda de la luz incidente es desviada a través de un ángulo θ, determinado por el índice de refracción del material del prisma referente a esa longitud. Las curvas como las de la figura 39-11, que indican el índice de refracción de cuarzo fundido en función de la longitud de onda, muestran lo siguiente: cuanto menor sea la longitud de onda, más grande será el ángulo de deflexión θ. Las curvas varían de una sustancia a otra y hay que obtenerlas por medición. Los instrumentos de prisma no son adecuados para efectuar mediciones exactas *absolutas* de la longitud de onda, pues el índice de refracción del material del prisma en la longitud de onda en cuestión rara vez se conoce con suficiente precisión. Los instrumentos de prisma y de rejilla permiten efectuar *comparaciones* exactas de la longitud de onda, usando un espectro apropiado de comparación como el de la figura 43-9, en éste se determina en forma rigurosa y absoluta la longitud de onda de las líneas espectrales.

PROBLEMA RESUELTO 43-2. Una rejilla de difracción tiene 10^4 elementos espaciados uniformemente en 25.0 mm. La ilumina en incidencia normal una luz amarilla proveniente de una lámpara de vapor de sodio. Esta luz contiene dos líneas poco espaciadas (el conocido *doblete de sodio*) cuyas longitudes de onda miden 589.00 y 589.59 nm. *a*) ¿A qué ángulo ocurrirá el máximo de primer orden en la primera de las longitudes de onda? *b*) ¿Cuál es la separación angular entre los máximos de primer orden de las líneas?

Solución El espaciamiento d de la rejilla es 2 500 nm. El máximo de primer orden corresponde a $m = 1$ en la ecuación 43-1. Por tanto, tenemos

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(589\text{ nm})}{2500\text{ nm}}\right) = 13.6°.$$

b) La forma más sencilla de obtener la separación angular consiste en repetir el cálculo de la parte *a*) cuando $\lambda = 589.59$ nm y en restar los dos ángulos. La dificultad, que se aprecia muy bien al efectuar el cálculo, es que debemos manejar muchas cifras significativas para obtener un valor significativo de la diferencia entre los ángulos. A fin de calcular *directamente* la diferencia de las posiciones angulares, resolvamos la ecuación 43-1 con sen θ y diferenciemos el resultado, tratando como variables θ y λ:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{m\lambda}{d}$$

$$\cos\theta\, d\theta = \frac{m}{d}\, d\lambda.$$

Si las longitudes de onda están lo bastante cerca una de la otra como en este caso, $d\lambda$ puede reemplazarse por $\Delta\lambda$, la diferencia real de longitud de onda; $d\theta$ se transforma entonces en $\Delta\theta$, la cantidad que buscamos. Esto nos da

$$\Delta\theta = \frac{m\,\Delta\lambda}{d\cos\theta} = \frac{(1)(0.59\text{ nm})}{(2\,500\text{ nm})(\cos 13.6°)}$$

$$= 2.4 \times 10^{-4}\text{ rad} = 0.014°.$$

Nótese lo siguiente: aunque las longitudes de onda contienen cinco cifras significativas, el cálculo efectuado de esta manera incluye sólo dos o tres, con la consecuente reducción de la manipulación numérica.

43-3 DISPERSIÓN Y POTENCIA DE RESOLUCIÓN

La capacidad de una rejilla para producir espectros que permitan medir con exactitud las longitudes de onda se basa en dos propiedades intrínsecas: 1) la separación $\Delta\theta$ entre las líneas espectrales cuya longitud de onda difiere en una cantidad pequeña $\Delta\lambda$, y 2) el ancho o nitidez de las líneas.

En el problema resuelto 43-2, calculamos la separación angular entre las líneas poco espaciadas del doblete amarillo del sodio, en que $\Delta\lambda = 0.59$ nm. En ese caso encontramos una separación de $\Delta\theta = 0.014°$ entre los máximos principales de primer orden de las líneas. A la separación angular $\Delta\theta$ por unidad de intervalo de longitud $\Delta\lambda$ se le llama *dispersión* D de la rejilla, o sea

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}. \qquad (43\text{-}7)$$

Nos gustaría que las rejillas tuviesen la mayor dispersión posible para que las líneas de longitud de onda casi iguales presentarán la máxima separación.

Si queremos ver cuál propiedad física de la rejilla determina su dispersión, diferenciaremos la ecuación 43-1 (d sen $\theta = m\lambda$), tratando como variables θ y λ. Y así obtenemos

$$d \cos\theta \, d\theta = m \, d\lambda,$$

o, en función de diferencias pequeñas en vez de diferenciales,

$$d \cos\theta \, \Delta\theta = m \, \Delta\lambda. \tag{43-8}$$

La dispersión D está dada por $\Delta\theta/\Delta\lambda$, es decir,

$$D = \frac{m}{d \cos\theta}. \tag{43-9}$$

La dispersión crece a medida que disminuye el espaciamiento entre las rendijas. También puede aumentarse trabajando en el orden superior (m grande), como se ilustra en la figura 43-10. Adviértase que la dispersión no depende del número de elementos (líneas de la rejilla).

Potencia de resolución

Si una rejilla genera líneas muy anchas, pueden superponerse los máximos de las líneas espectrales de longitudes de onda poco espaciadas; esto dificulta determinar si tienen uno o más componentes y medir con precisión su longitud de onda. Queremos, pues, seleccionar una rejilla que produzca las líneas lo más estrechas posible.

Por medio del criterio de Rayleigh (Sec. 42-4) obtenemos una medida razonable de la capacidad de resolver líneas cercanas de distinta longitud de onda: si el máximo de una línea cae sobre el primer mínimo de su vecina, debería ser posible resolver las líneas. En la sección 43-1 definimos el ancho de la línea espectral en una sola forma: como el intervalo angular $\delta\theta$ entre el máximo y el primer mínimo. El límite de resolución de la rejilla se presenta cuando dos líneas del espectro las separa un intervalo de longitud de onda $\Delta\lambda$, tal que la diferencia $\delta\theta$ entre sus posiciones angulares está dada por la ecuación 43-6. La *potencia de resolución* R de la rejilla se define así

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \tag{43-10}$$

Si las líneas son demasiado estrechas ($\delta\theta$ es pequeño), el intervalo correspondiente de longitud de onda $\Delta\lambda$ debe ser pequeño y grande la potencia de resolución. Así pues, debemos escoger una rejilla con la R más grande.

A fin de identificar la propiedad física de la rejilla que determina R, vamos a resolver la ecuación 43-8 con el espaciamiento $\Delta\theta$ entre las líneas cercanas y (mediante el criterio de Rayleigh) vamos a hacer el resultado igual al ancho de la línea, $\delta\theta$, dado en la ecuación 43-6, como el que existe entre el máximo y el primer mínimo. Y así obtenemos

$$\frac{m \, \Delta\lambda}{d \cos\theta} = \frac{\lambda}{Nd \cos\theta},$$

y resolviendo con R ($=\lambda/\Delta\lambda$) tenemos

$$R = Nm. \tag{43-11}$$

TABLA 43-1 Propiedades de tres rejillas[a]

Rejilla	N	d(nm)	θ	R	$D(10^{-4}$ rad/nm)
A	5 000	10 000	2.9°	5 000	1.0
B	5 000	5 000	5.7°	5 000	2.0
C	10 000	10 000	2.9°	10 000	1.0

[a] Con $\lambda = 500$ nm y $m = 1$.

La potencia de resolución, como la dispersión, aumenta con el número de orden. A diferencia de la dispersión, R depende de la cantidad de líneas N, pero es independiente de su separación d. Si queremos maximizar la potencia de resolución, debemos seleccionar una rejilla que tenga el mayor número de líneas. Con un espaciamiento cualquiera de d, la rejilla con el máximo ancho total tendrá la potencia más grande de resolución (es decir, producirá las líneas espectrales más bien definidas).

La dispersión y la potencia de resolución miden diversos aspectos de la capacidad de una rejilla para generar líneas muy separadas. Tomemos, por ejemplo, tres rejillas A, B y C, cuyas propiedades se incluyen en la tabla 43-1. Supóngase que están iluminadas con una luz formada por un doblete de líneas a 500 nm, separadas por un intervalo $\Delta\lambda = 0.10$ nm. Hemos seleccionado las propiedades de la rejilla A de manera que las dos líneas del doblete en el máximo de primer orden se encuentren justo en el límite de resolución, esto es, el máximo de una línea cae en el mínimo de la otra, como se indica en la figura 43-11*a*. La rejilla B presenta el doble de dispersión de A, pero la misma potencia de resolución; crea además el espectro de la figura 43-11*b*. En efecto, todos los

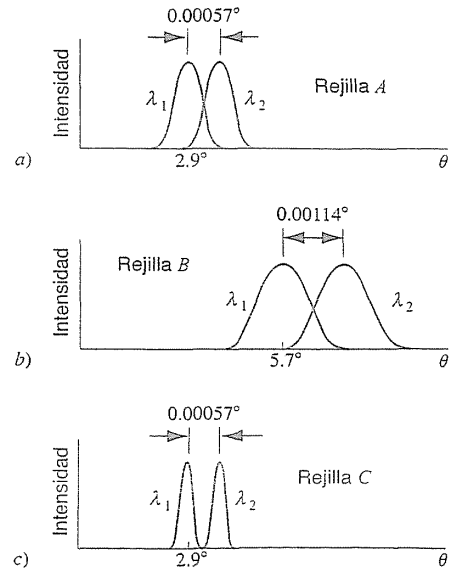


FIGURA 43-11. El patrón de intensidad de dos líneas en $\lambda = 500$ nm separadas por $\Delta\lambda = 0.10$ nm, que son producidas por las tres rejillas de la tabla 43-1. La rejilla B presenta la dispersión más grande, y la rejilla C, el potencial de resolución mayor.

intervalos angulares están reducidos a escala por un factor de 2, incluidos el ancho y las separaciones angulares de los picos. Si la medición de la rejilla *A* hubiera dependido de nuestra capacidad de determinar los intervalos angulares pequeños, la medición se facilitaría al pasar a la rejilla *B*.

La rejilla *C* tiene el doble de potencia de resolución de *A*, pero la misma dispersión. Los picos en la figura 43-11*c* presentan la misma separación angular que los de la figura 43-11*a*, pero anchos menores. Ahora, el máximo de un pico cae claramente fuera del primer mínimo del otro, y las dos líneas se distinguen más nítidamente entre sí usando la rejilla *C*.

El ancho total de las tres rejillas, igual al producto *Nd*, es 50 mm en la rejilla *A*; 25 mm en la rejilla *B*, y 100 mm en la rejilla *C*. Nótese en la figura 43-11 que el ancho de los picos depende inversamente del ancho de la rejilla, según se aprecia en la ecuación 43-6.

PROBLEMA RESUELTO 43-3. Una rejilla tiene 9 600 líneas espaciadas uniformemente en un ancho $W = 3.00$ cm y está iluminada con una luz proveniente de una descarga de vapor de mercurio. *a)* ¿Cuál es la dispersión esperada, en el tercer orden, cerca de una línea verde intensa ($\lambda = 546$ nm)? *b)* ¿Qué potencia de resolución tiene la rejilla en el quinto orden?

Solución *a)* El espaciamiento de la rejilla está dado por

$$d = \frac{W}{N} = \frac{3.00 \times 10^{-2}\ \text{m}}{9600} = 3\ 125\ \text{nm}.$$

Debemos encontrar el ángulo θ donde se localiza la línea en cuestión. Con base en la ecuación 43-1 tenemos

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(3)(546\ \text{nm})}{3\ 125\ \text{nm}}\right) = 31.6°.$$

Ahora podemos calcular la dispersión. De acuerdo con la ecuación 43-9,

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{3}{(3\ 125\ \text{nm})(\cos 31.6°)}$$
$$= 1.13 \times 10^{-3}\ \text{rad/nm}$$
$$= 0.0646°/\text{nm} = 3.87\ \text{arc min/nm}.$$

b) Y, de acuerdo con la ecuación 43-11,

$$R = Nm = (9\ 600)(5) = 4.80 \times 10^4.$$

Así pues, cerca de $\lambda = 546$ nm y en el quinto orden, puede resolverse una diferencia de longitud de onda dada por (Ec. 43-10)

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{546\ \text{nm}}{4.80 \times 10^4} = 0.011\ \text{nm}$$

PROBLEMA RESUELTO 43-4. Una rejilla de difracción tiene 1.20×10^4 elementos espaciados uniformemente en un ancho $W = 2.5$ cm. La ilumina en incidencia normal una luz amarilla proveniente de una lámpara de vapor de sodio. La luz contiene dos líneas poco espaciadas cuyas longitudes de onda miden 589.00 y 589.59 nm. *a)* ¿En qué ángulo ocurre el máximo de primer orden en la primera de las longitudes? *b)* ¿Qué separación angular hay entre las dos líneas (en el primer orden)? *c)* ¿A qué distancia mínima de longitud de onda pueden hallarse (en primer orden) y aun así ser resueltas por la rejilla? *d)* ¿Cuántos elementos puede tener una rejilla y resolver apenas las líneas de los dobletes de sodio?

Solución *a)* El espaciamiento *d* de la rejilla está dado por

$$d = \frac{W}{N} = \frac{2.50 \times 10^{-2}\ \text{m}}{1.20 \times 10^4} = 2\ 083\ \text{nm}.$$

El máximo de primer orden corresponde a $m = 1$ en la ecuación 43-1. Por consiguiente, tenemos

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(589.00\ \text{nm})}{2\ 083\ \text{nm}}\right) = 16.4°.$$

b) Aquí entra en juego la *dispersión* de la rejilla. Conforme a la ecuación 43-9, las dispersiones

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{1}{(2\ 083\ \text{nm})(\cos 16.4°)}$$
$$= 5.00 \times 10^{-4}\ \text{rad/nm}.$$

Basándonos en la ecuación 43-7, la que define la dispersión, tenemos

$$\Delta\theta = D\,\Delta\lambda$$
$$= (5.00 \times 10^{-4}\ \text{rad/nm})(589.59\ \text{nm} - 589.00\ \text{nm})$$
$$= 2.95 \times 10^{-4}\ \text{rad} = 0.0169° = 1.01\ \text{arc min}.$$

Mientras el espaciamiento *d* de la rejilla permanezca fijo, el resultado anterior es válido sin que importe cuántas líneas hay en ella.

c) Aquí interviene la *potencia de resolución*. Según la ecuación 43-11 es

$$R = Nm = (1.20 \times 10^4)(1) = 1.20 \times 10^4.$$

A partir de la ecuación 43-10, la que define la potencia de resolución, tenemos

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{589\ \text{nm}}{1.20 \times 10^4} = 0.049\ \text{nm}.$$

Esta rejilla puede resolver fácilmente las dos líneas de sodio, cuya separación de longitud de onda es de 0.59 nm. Nótese que el resultado anterior depende únicamente del número de elementos de la rejilla y es independiente de *d*, el espaciamiento entre líneas contiguas.

d) De acuerdo con la ecuación 43-10, la que define *R*, la rejilla ha de tener una potencia de resolución de

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589\ \text{nm}}{0.59\ \text{nm}} = 998.$$

Y conforme a la ecuación 43-11, el número de elementos necesarios para alcanzar esta potencia de resolución (de primer orden) es

$$N = \frac{R}{m} = \frac{998}{1} = 998\ \text{rulings}.$$

Dado que la rejilla tiene unas 12 veces más elementos que ésta, puede resolver fácilmente las líneas del doblete de sodio como ya señalamos en la parte *c*).

43-4 DIFRACCIÓN DE RAYOS X

Los rayos X son una radiación electromagnética con longitudes de onda del orden de 0.1 nm (en comparación con los 500 nm de una longitud de onda típica de la luz visible). En la figura 43-12 se describe cómo se producen los rayos X

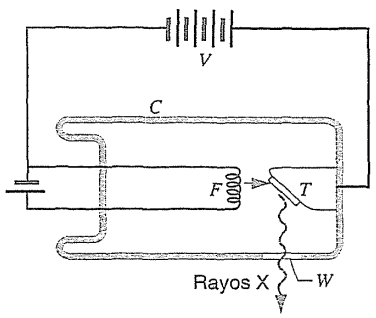


FIGURA 43-12. Se generan rayos X cuando los electrones procedentes del filamento calentado F, acelerados con una diferencia de potencial V, chocan contra un blanco metálico T en una cámara al vacío C. La ventana W es transparente a los rayos X.

cuando los electrones procedentes de un filamento calentado F son acelerados por una diferencia de potencial V y chocan contra un blanco metálico.

Con longitudes de onda tan pequeñas, no puede usarse una rejilla de difracción óptica común; éstas se emplean con mucha frecuencia. Por ejemplo, cuando $\lambda = 0.10$ nm y $d = 3\,000$ nm, la ecuación 43-1 indica que el máximo de primer orden ocurre en

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(0.10\text{ nm})}{3 \times 10^3\text{ nm}}\right)$$

$$= 0.0019°.$$

El resultado anterior se aproxima tanto al máximo central que no es práctico. Conviene una rejilla con $d \approx \lambda$; pero, no puede construirse en forma mecánica porque la longitud de onda de los rayos X es más o menos igual a los diámetros atómicos.

En 1912, al físico Max von Laue se le ocurrió que un sólido cristalino, por estar hecho de un arreglo regular de átomos, podría formar una "rejilla de difracción" tridimensional natural para los rayos X. La figura 43-13 muestra lo siguiente: si dejamos que un haz colimado de rayos X, distribuido continuamente en una longitud de onda, incida sobre un cristal, digamos de cloruro de sodio, aparecen haces intensos en ciertas direcciones bien definidas (correspondientes a la interferencia constructiva proveniente de los muchos centros de difracción de que consta el cristal. Si los haces chocan sobre una película fotográfica, producen un conjunto de "puntos de Laue". La figura 43-14, donde se ofrece un ejemplo de ellos, demuestra que la hipótesis de Laue es, en verdad, correcta. Los arreglos atómicos en el cristal pueden deducirse de un estudio riguroso de las posiciones e intensidades de los puntos de Laue, en forma muy parecida a cómo podríamos deducir la estructura de una rejilla óptica (es decir, el perfil detallado de sus rendijas) estudiando las posiciones e intensidades de las líneas en el patrón de interferencia. Hoy, otros experimentos han venido a suplantar en gran medida la técnica de Laue, pero el principio permanece inalterado (Preg. 23).

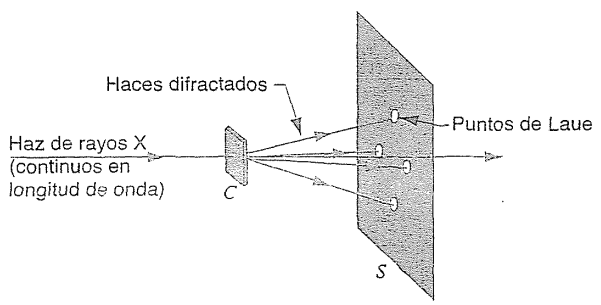


FIGURA 43-13. Un haz de rayos X choca contra una cristal C. En ciertas direcciones aparecen haces fuertemente difractados, produciendo un patrón de Laue sobre la película fotográfica S.

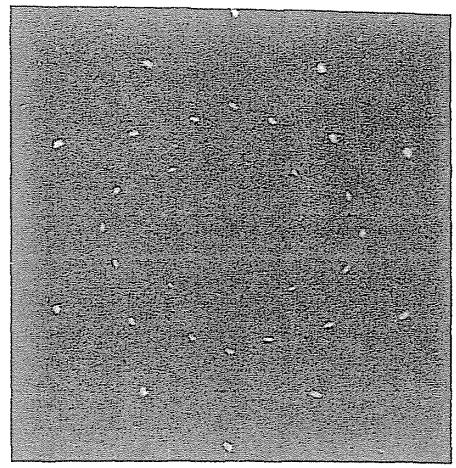


FIGURA 43-14. Patrón de Laue de difracción de rayos X proveniente de un cristal de cloruro de sodio.

La figura 43-15 indica cómo los átomos de sodio y de cloro (en rigor, los iones Na^+ y Cl^-) se apilan y forman un cristal de cloruro de sodio. Este patrón, que presenta una simetría *cúbica*, es uno de los numerosos arreglos atómicos que pueden exhi-

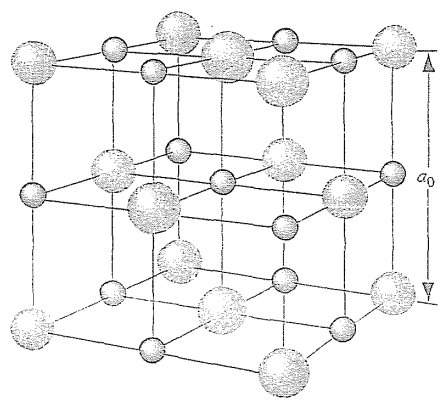


FIGURA 43-15. Modelo de un cristal de cloruro de sodio, que muestra cómo los iones sodio Na^+ (esferas pequeñas) y los iones cloruro Cl^- (esferas grandes) se apilan en la celda unitaria cuyo lado a_0 tiene 0.563 nm de longitud.

bir los sólidos. El modelo representa la *celda unitaria* de cloruro de sodio. Ésta es la unidad más pequeña con la cual puede obtenerse un cristal en tres dimensiones por repetición. Aconsejamos al lector verificar si ningún grupo más pequeño de átomos posee esta propiedad. En el caso del cloruro de sodio, la longitud a_0 del lado del cubo de la celda unitaria mide 0.563 nm.

Cada unidad del cloruro tiene cuatro iones sodio y cuatro iones cloro. En la figura 43-15, el ion sodio en el centro pertenece enteramente a la celda mostrada. Cada uno de los doce iones sodio restantes se comparte como tres celdas contiguas, de manera que le aporta un cuarto ion. Así, el número total de iones sodio será $1 + \frac{1}{4}(12) = 4$. Con un razonamiento similar puede demostrarse que, aunque hay 14 iones cloro en la figura 43-15, sólo cuatro están unidos a la celda unitaria en cuestión.

La celda es la unidad fundamental repetitiva de difracción en el cristal, correspondiente a la rendija (y a su tira opaca vecina) en la rejilla de difracción óptica de la figura 43-1. En la figura 43-16*a* se incluye un plano en un cristal de cloruro de sodio. Se obtiene la figura 43-16*b*, si las celdas unitarias intersectadas por él se representan mediante un cubo. Puede imaginar cada una de las figuras extendida indefinidamente en tres dimensiones.

Trataremos los cubos pequeños de la figura 43-16*b* como un centro elemental de difracción, correspondiente a una rendija en una rejilla óptica. Las *direcciones* (no las intensidades) de todos los haces difractados de rayos X que pueden salir de un cristal de cloruro de sodio (con cierta longitud de onda de los rayos y con cierta orientación del haz incidente) se determinan mediante la geometría de esta red cristalina tridimensional de centro de difracción. Exactamente en la misma forma, las *direcciones* (no las intensidades) de todos los haces difractados que pueden salir de una rejilla óptica en particular (con determinada longitud y orientación del haz incidente) se determinan sólo por medio de la geometría de la rejilla, es decir, a través del espaciamiento d de la rejilla. Representar la celda unitaria por lo que es esencialmente un punto como en la figura 43-16*b*, equivale a representar con líneas las rendijas de una rejilla de difracción, como lo hicimos al referirnos al experimento de rendija doble en la sección 41-2.

Las *intensidades* de las líneas producidas por una rejilla óptica de difracción dependen de las características difractantes de una rendija simple, determinadas en especial por el ancho a de la rendija; véase, por ejemplo, una serie de rendijas en la figura 43-1. El perfil de los elementos de la rejilla óptica determinan las características de la que se utilice.

De manera idéntica, las *intensidades* de los haces difractados provenientes de un cristal dependen de las características difractantes de la celda unitaria. Fundamentalmente los electrones difractan los rayos X, y la difracción por los núcleos es insignificante en la generalidad de los casos. Así, las características difractantes de una celda unitaria dependen de cómo se distribuyan los electrones en todo el volumen de esta celda. Al estudiar las *direcciones* de los haces de rayos X difractados descubrimos la simetría básica del cristal. Y al hacer lo mismo con las *intensidades* descubrimos cómo se distribuyen los electrones en una celda unitaria. La figura 43-17 contiene un ejemplo de esta técnica.

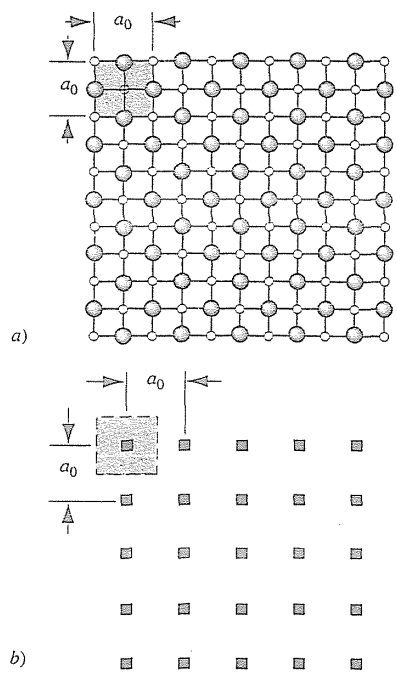


FIGURA 43-16. *a*) Plano a través de un cristal de NaCl, que muestra los iones Na y Cl. *b*) Celdas unitarias correspondientes en esta sección. Cada celda se representa con un cuadrado negro pequeño.

Ley de Bragg

Esta ley predice las condiciones en que es posible que los haces de rayos X se difracten. Al obtenerla, se ignora la estructura de la celda unitaria, que se relacionan sólo con la intensidad de los haces. Las líneas punteadas inclinadas de la figura 43-18*a* representan la intersección con el plano de la figura de un conjunto arbitrario de planos que cruzan los centros elementales de difracción. La distancia perpendicular entre los planos adyacentes es d. Pueden definirse muchas otras familias de este tipo de planos, con distintos *espaciamientos interplanares*.

La figura 43-18*b* muestra una onda incidente que choca contra la *familia* de planos; el rayo incidente forma un ángulo θ con el plano.* En un plano simple tiene lugar una "reflexión" especular con *cualquier* valor de θ. Es necesario que los rayos provenientes de planos separados se refuercen entre sí, para que se produzca una interferencia constructiva en el haz difractado procedente de la familia entera de planos en la dirección θ. Ello significa que la diferencia de trayectoria en los rayos originados en planos adyacentes (*abc* en la Fig. 43-18*b*) debe ser un número entero de longitudes de onda, o sea

$$2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (43\text{-}12)$$

* En la difracción de rayos X se acostumbra especificar la dirección de una onda indicando el ángulo entre el rayo y el plano (el *ángulo de visión*) y, no el existente entre el rayo y la normal.

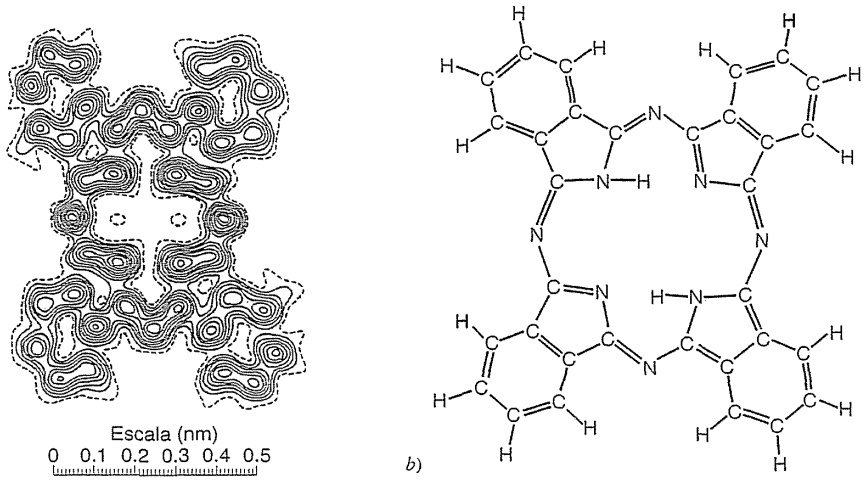


FIGURA 43-17. *a)* Contornos de densidad de los electrones en la ftalocianina ($C_{32}H_{18}N_{18}$), determinados por la intensidad de distribución de la dispersión de rayos X. Las curvas punteadas representan la densidad de un electrón por 0.01 nm^2 y las adyacentes representan un incremento del electrón por 0.01 nm^2. *b)* Representación estructural de la molécula. Nótese que la mayor densidad de los electrones ocurren en *a)* cerca de los *N* átomos, que tienen el máximo número de electrones (7). Nótese, asimismo, que los átomos H, que contienen sólo un electrón simple, no son muchos en *a)*.

A esta relación se le da el nombre de *ley de Bragg* en honor de W. L. Bragg, quien fue el primero en formularla. La cantidad d en esta ecuación (el espaciamiento interplanar) es la distancia perpendicular entre los planos. En los de la figura 43-18*a* vemos que d se relaciona con las dimensiones de la celda unitaria a_0 mediante

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}}. \tag{43-13}$$

Si un haz monocromático incidente de rayos X incide en un ángulo arbitrario θ sobre un conjunto particular de planos atómicos, *no* se producirá un haz difractado porque, en general, la ecuación 43-12 no se satisface. Si la longitud de onda de los rayos incidentes es *continua*, aparecerán haces difractados cuando las longitudes dadas por

$$\lambda = \frac{2d \operatorname{sen} \theta}{m} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

existan en el haz incidente.

La difracción de los rayos X es una poderosa herramienta para estudiar los espectros de los rayos X y el arreglo de los átomos en cristales. A fin de estudiar el espectro de una fuente de rayos X, se escoge una serie de planos del cristal cuyo espaciamiento d se conozca. La difracción de los planos sitúa varias longitudes de onda en diversos ángulos. Un detector capaz de discriminar ángulos se emplea para determinar la longitud de onda de la radiación que llega a él. También puede estudiarse el cristal con un haz monocromático de rayos X para calcular no sólo el espaciamiento de varios planos del cristal, sino además la estructura de la celda unitaria. La molécula de ADN y muchas otras estructuras igualmente complejas han sido analizadas mediante los métodos de difracción de los rayos X.

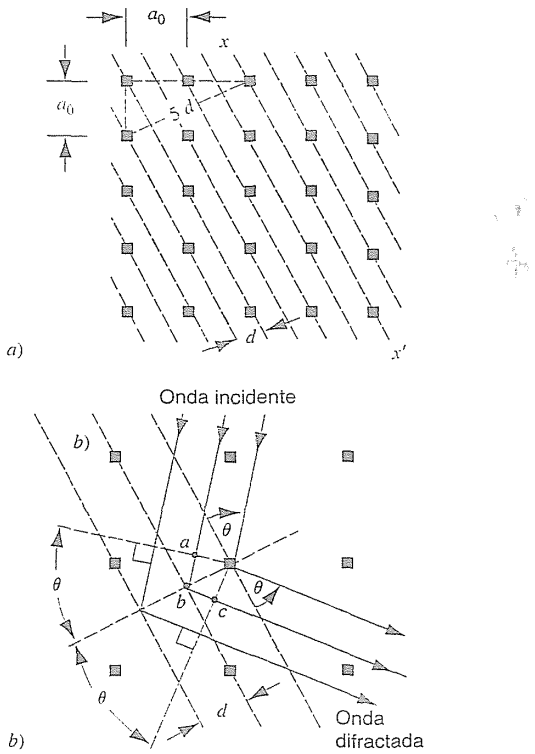


FIGURA 43-18. *a)* Sección en la red cristalina del NaCl de la figura 43-16. Las líneas punteadas representan un conjunto arbitrario de planos paralelos que conectan a las celdas unitarias. El espaciamiento interplanar es d. *b)* Un haz incidente choca sobre una serie de planos. Un haz fuertemente difractado puede observarse si se cumple la ley de Bragg.

PROBLEMA RESUELTO 43-5. ¿En qué ángulos debe un haz de rayos X con $\lambda = 0.110$ nm incidir sobre la familia de planos representados en la figura 43-18*b*, para que se produzca un haz difractado? Suponga que el material es cloruro de sodio ($a_0 = 0.563$ nm).

Solución El espaciamiento interplanar d de los planos anteriores está dado por la ecuación 43-13, es decir,

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}} = \frac{0.563 \text{ nm}}{\sqrt{5}} = 0.252 \text{ nm}.$$

La ecuación 43-12 nos da

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{2d}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{(m)(0.110 \text{ nm})}{(2)(0.252 \text{ nm})}\right).$$

Los haces difractados son posibles cuando $\theta = 12.6°$ ($m = 1$), $\theta = 25.9°$ ($m = 2$), $\theta = 40.9°$ ($m = 3$) y $\theta = 60.8°$ ($m = 4$). No puede haber haces de orden superior porque requieren que sen $\theta > 1$.

En realidad, la celda unitaria en los cristales cúbicos, como NaCl, reúne propiedades de simetría, los cuales exigen que sea cero la intensidad de los haces difractados de rayos X correspondientes a los valores impares de m (Prob. 35). En consecuencia, los únicos haces que se prevén son $\theta = 25.9°$ ($m = 2$) y $\theta = 60.9°$ ($m = 4$).

43-5 HOLOGRAFÍA (opcional)

La luz emitida por un objeto contiene la información completa de su tamaño y de su forma. Suponemos que la información se guarda en los frentes de onda de la luz proveniente del objeto, concretamente en la variación de intensidad y en la fase de los campos electromagnéticos. Si pudiéramos registrar esta información, seríamos capaces de reproducir una imagen tridimensional completa de él. Sin embargo, las películas fotográficas registran sólo las variaciones de intensidad; no son sensibles a las de fase. De ahí la imposibilidad de emplear un negativo para reconstruir una imagen tridimensional.

Una excepción a la restricción precedente es el caso de la difracción de rayos X en un cristal. Dado el espaciamiento regular de los átomos de este material, pueden deducirse fácilmente las fases relativas de las ondas difractadas que llegan a la película desde varios átomos. Esta posibilidad la descubrió W. L. Bragg, quien iluminó un negativo de un patrón de rayos X y así reconstruyó la imagen de un cristal. En este método de "difracción doble", la radiación de un patrón de difracción produce una imagen del objeto original. No da resultado con los objetos cuyos átomos no están dispuestos en un arreglo periódico.

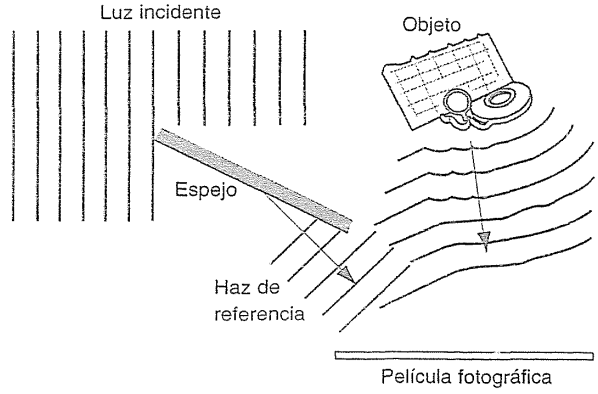


FIGURA 43-19. Aparato con el cual se producen hologramas. Una parte del haz proveniente de una fuente de luz coherente (un láser, por ejemplo) ilumina un objeto. La luz difractada por el objeto interfiere en la película con una parte del haz original, que sirve de referencia.

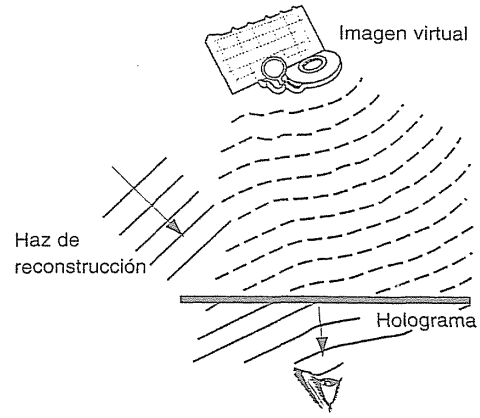


FIGURA 43-20. Para ver un holograma, lo iluminamos con una luz idéntica a la del haz de referencia. La imagen virtual de tres dimensiones se observa en el sitio del objeto original.

En 1948 Dennis Gabor inventó un esquema para registrar la intensidad y la fase de las ondas provenientes de objetos; su descubrimiento le valió el Premio Nobel de Física en 1971. A este tipo de formación de imagen se le conoce como *holografía,* palabra griega compuesta que significa literalmente "imagen entera", y a la imagen obtenida se le llama *holograma*. El procedimiento se describe en la figura 43-19. Una onda difractada proveniente de un objeto interfiere en la película fotográfica con una onda de referencia. La interferencia entre las dos ondas sirve de medio para almacenar en la película la información referente a la fase de la onda proveniente del objeto. Cuando la imagen fotográfica se ve con una luz idéntica al haz de referencia, se reconstruye una imagen virtual tridimensional (Fig. 43-20). Una segunda imagen (la real), que no se muestra en la figura, también se obtiene mediante el holograma.

A la película la iluminan uniformemente la luz difractada procedente del objeto y el haz de referencia; toda la película

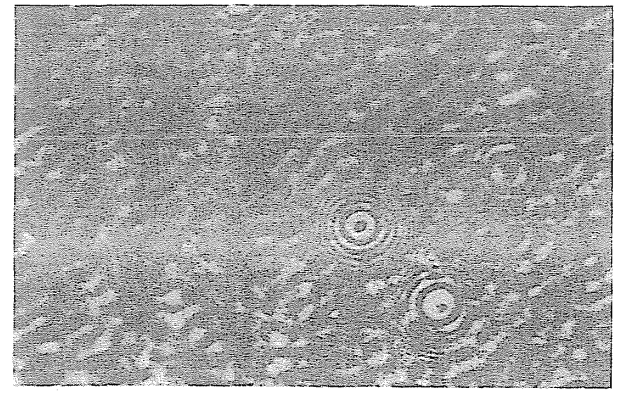


FIGURA 43-21. Vista de cerca de un holograma que muestra el patrón de interferencia.

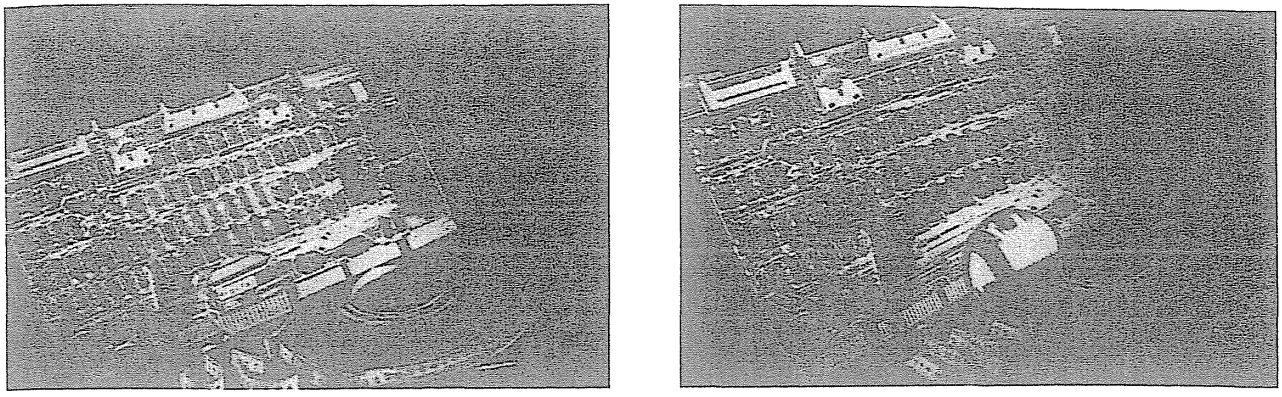


FIGURA 43-22. Dos vistas de un mismo holograma, tomadas de diferentes direcciones. Adviértase el movimiento relativo de los objetos en las imágenes.

contiene la información necesaria para reproducir la imagen tridimensional. También el holograma (Fig. 43-21) muestra únicamente las franjas de interferencia; en términos generales es preciso utilizar un haz monocromático y coherente para reconstruir la imagen. Por tal razón, la holografía se inventó apenas a principios de 1960, cuando los láseres se convirtieron en un instrumento de uso común.

Algunos hologramas pueden verse bajo luz blanca. En ellos se emplea una gruesa emulsión fotográfica, donde la luz es reflejada por capas sucesivas de granos de la película. Aparece interferencia constructiva en ella con la longitud de onda del haz original de referencia; la interferencia destructiva se observa en otras longitudes de onda. Puede obtenerse una imagen en color por medio de haces de referencia de diversos colores.

El holograma reconstruye una imagen tridimensional verdadera; por ejemplo, los objetos cercanos aparecen "delante de" otros más lejanos y al mover la cabeza de un lado a otro puede modificarse la orientación espacial relativa de ellos. En la figura 43-22 se presentan dos vistas de un mismo holograma, que ilustran el efecto de *paralaje;* éste consiste en visualizar este holograma desde dos direcciones.

Los hologramas tienen muchas aplicaciones en ciencia básica y aplicada. Por ejemplo, cuando se obtienen es necesario conservar el objeto absolutamente inmóvil mientras se expone la película: cualquier movimiento, por pequeño que sea, cambiará la fase relativa entre los haces difractados y los de referencia, modificando así el patrón de interferencia guardado en la película. Si el holograma se crea sobreponiendo en la película dos exposiciones sucesivas de un objeto vibratorio como la placa superior o inferior de un violín, los sitios del objeto que se mueven entre las exposiciones debido al número entero de longitudes de onda mostrarán interferencia constructiva; las que se mueven a causa del número semientero de longitudes de onda ($\lambda/2$, $3\lambda/2$, ...) presentarán interferencia destructiva. En la figura 43-23 se da un ejemplo de la aplicación de esta técnica, denominada *interferometría holográfica.*

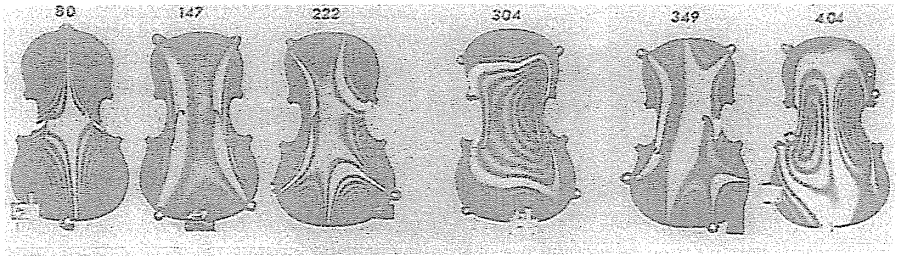


FIGURA 43-23. Patrón de interferencia holográfica de la parte superior de la placa de un violín que vibra a diversas frecuencias. Las que se muestran aquí (en Hz) se hallan arriba de las placas.

OPCIÓN MÚLTIPLE

43-1 Rendijas múltiples

1. ¿Cuál de los siguientes es un efecto de la adición de más rendijas al aparato de interferencia?
   A) Las franjas brillantes se acercan más entre sí.
   B) Las franjas brillantes se separan más.
   C) Aumenta el ancho de las franjas brillantes.
   D) Aumenta el ancho de las franjas oscuras.
2. Considere dos rejillas: una mide 0.5 cm de ancho con 5 000 líneas/cm, la segunda 1.0 cm de ancho con 2 500 líneas/cm. Suponiendo que las dos estén totalmente iluminadas con una luz idéntica, ¿cuál de ellas tiene el máximo central más bien definido?
   A) La primera B) La segunda
   C) Los dos tienen la misma nitidez.
3. Una "rejilla" de difracción apropiada para las ondas sonoras se obtiene cortando rendijas en una gran hoja de hule. Se sostiene esta última delante de un altavoz y se produce un estrecho máximo central. Luego se estira de modo que las rendijas se separen más. ¿Qué cambio se produce en el ancho del máximo central?
   A) Se vuelve más ancho B) Se vuelve más estrecho
   C) Mantiene el mismo ancho.

43-2 Rejillas de difracción

4. ¿Cuáles de las siguientes propiedades son verdaderas *tanto* para un prisma *como* para una rejilla de difracción?
   A) El dispositivo divide la luz blanca en líneas espectrales con distinta posición angular.
   B) El dispositivo genera más de una imagen de una línea espectral.
   C) El dispositivo puede efectuar mediciones precisas absolutas de longitud de onda.
   D) El dispositivo desvía luz violeta más que luz roja.
5. El espectro solar consta de varias líneas oscuras de absorción, sobrepuestas en un espectro continuo. ¿Cuáles de los siguientes cambios permiten a las bandas oscuras ser identificadas más fácilmente mediante una rejilla de difracción?
   A) Aumento del número de rendijas.
   B) Aumento de la separación entre rendijas.
   C) Aumento del ancho de cada rendija.
   D) Ninguna de las posibilidades anteriores.

43-3 Dispersión y potencia de resolución

6. ¿Qué diferencia existe entre dispersión y nitidez?
   A) La dispersión es una medida del ancho de los máximos, en tanto que la nitidez es la facilidad con que se ven.
   B) La dispersión es una medida de los máximos, en tanto que la nitidez es una medida del ángulo entre dos máximos.
   C) La dispersión es una medida del ángulo entre dos máximos, en tanto que la nitidez es una medida del ancho.
   D) La dispersión y la nitidez realmente miden lo mismo.
7. Considere la hoja de hule de la pregunta de opción múltiple 3.
   a) ¿Qué sucede con la potencia de resolución cuando estiramos la hoja?
   A) Aumenta B) Disminuye
   C) No se altera.
   b) ¿Qué sucede con la dispersión cuando estiramos la hoja?
   A) Aumenta B) Disminuye
   C) No se altera.
8. Dos haces monocromáticos de luz con longitudes de onda casi iguales inciden en una rejilla de N elementos, y no son muy resolubles. Pero se resuelven si se incrementa el número de los elementos. Prescindiendo, por ahora, de las fórmulas, ¿cuál de las siguientes explicaciones es la correcta?
   A) Puede pasar más luz por la rejilla.
   B) Los máximos principales se tornan más intensos y, por lo mismo, resolubles.
   C) El patrón de difracción se esparce más y, por ello, se resuelven las longitudes de onda.
   D) Hay mayor número de órdenes.
   E) Los máximos principales se vuelven estrechos y, por lo mismo resolubles.

43-4 Difracción de rayos X

9. En algunos aspectos, la reflexión de Bragg difiere de la difracción de rejilla plana. De los siguientes enunciados, ¿cuál es verdadero para esa reflexión, y no para la difracción de la rejilla?
   A) Pueden superponerse dos longitudes de onda diferentes.
   B) La radiación de cierta longitud de onda puede enviarse en más de una dirección.
   C) Las ondas largas se desvían más que las cortas.
   D) Existe un solo espaciamiento de rejilla.
   E) Los máximos de difracción de cierta longitud de onda ocurren sólo con determinados ángulos de incidencia.

43-5 Holografía

PREGUNTAS

1. Explique esta afirmación: "A una rejilla de difracción también se le puede llamar rejilla de interferencia".
2. ¿Cómo cambiará (si es que cambia) el espectro de una fuente encerrada que se forma por una rejilla de difracción sobre una pantalla, cuando la fuente, la rejilla y la pantalla están sumergidas en agua?
3. *a*) ¿Con qué clase de ondas podría una cerca de estacas considerarse una rejilla útil? *b*) ¿Puede construir una rejilla con hileras paralelas de alambre fino encordado muy cercano?
4. ¿Podría construir una rejilla de difracción para el sonido? De ser así, ¿qué espaciamiento de rejilla es idóneo para una longitud de onda de 0.5 m?
5. Una rejilla de difracción cruzada se marca con líneas en dos direcciones, formando ángulos rectos entre ellas. Prediga el patrón de intensidad de luz sobre la pantalla, si se emite luz a través de la rejilla. ¿Tiene un valor práctico esta última?
6. Suponga que, en vez de una rendija, se coloca una abertura circular pequeña en el plano focal de la lente colimadora del telesco-

pio de un espectrómetro. ¿Qué se vería cuando el telescopio fuera iluminado con la luz de sodio? ¿Cuándo solemos llamar espectros a "los espectros lineales"?

7. En una espectografía de rejilla, varias líneas con distinta longitud de onda y formadas en varios órdenes podrían aparecer cerca de cierto ángulo. ¿Cómo distinguirá sus órdenes?
8. Le dan la fotografía de un espectro donde están marcadas las posiciones angulares y las longitudes de onda de las líneas espectrales. *a*) ¿Cómo saber si el espectro se tomó con un prisma o con un instrumento de rejilla? *b*) ¿Qué información podría conseguirse acerca del prisma o de la rejilla que se utiliza para estudiar el espectro?
9. Un prisma de vidrio crea un espectro. Explique de qué manera. ¿Cuántos "órdenes" de espectros producirá un prisma?
10. En el espectroscopio simple de la figura 43-8 demuestre *a*) que θ aumenta con λ en una rejilla y que *b*) θ disminuye con λ en un prisma.
11. De acuerdo con la ecuación 43-6, cuanto más se ensanchen los máximos principales (es decir, $\delta\theta$), más alto será el orden m (esto es, más grande se vuelve θ). Según la ecuación 43-11, cuanto más crezca la potencia de resolución, más alto será el orden m. Explique esta aparente paradoja.
12. Con sus propias palabras explique por qué los máximos se tornan más nítidos al aumentar el número N de rendijas en una rejilla de difracción. ¿Por qué se logra el mismo efecto al reducir la longitud de onda? ¿Y al aumentar el espaciamiento d de la rejilla?
13. ¿Cuánta información puede conseguirse respecto a la estructura de una rejilla de difracción analizando el espectro que forma una fuente de luz monocromática? Suponga $\lambda = 589$ nm, por ejemplo.
14. Suponga que los límites del espectro visible sean 430 y 680 nm. ¿Cómo diseñaría una rejilla suponiendo que la luz incidente llegue normalmente a ella, de modo que el espectro de primer orden apenas se superponga al de segundo orden?
15. *a*) ¿Por qué una rejilla de difracción tiene elementos espaciados muy cercanos? *b*) ¿Por qué tiene gran cantidad de ellos?
16. La relación $R = Nm$ indica que la potencia de resolución de una rejilla puede hacerse tan grande como se desee, con sólo escoger un orden arbitrariamente superior de difracción. Explique esta posibilidad.
17. Demuestre que, con cierta longitud de onda y ángulo de difracción, la potencia de resolución de una rejilla depende sólo de su ancho $W(= Nd)$.
18. ¿Cómo mediría experimentalmente *a*) la dispersión D y *b*) la potencia de resolución R de un espectrógrafo de rejilla?
19. En una familia de planos de un cristal, ¿puede la longitud de onda de rayos X incidentes *a*) ser demasiado grande o *b*) ser demasiado pequeña para formar un haz difractado?
20. Si se permite que un haz de rayos X paralelo de longitud de onda λ incida sobre un cristal de cualquier material orientado al azar, en general no habrá haces difractados intensos. Aparecerán si *a*) el haz presenta una distribución continua de longitudes de onda y no una sola longitud o *b*) si el espécimen no es un cristal simple, sino un polvo finamente dividido. Explique estos casos.
21. ¿Experimenta refracción un haz de rayos X al entrar y salir de un cristal? Explique su respuesta.
22. ¿Por qué el cubo simple $a_0/2$ de la figura 43-15 no se emplea como celda unitaria del cloruro de sodio?
23. En la figura 43-24*a* mostramos esquemáticamente el experimento de Debye-Scherrer y en la figura 43-24*b* un patrón de difracción correspondiente de los rayos X. *a*) Teniendo presente que el método de Laue utiliza un cristal simple grande y un haz de rayos X distribuidos continuamente en la longitud de onda, explique el origen de los puntos de la figura 43-14. (Sugerencia: Cada punto corresponde a la dirección de la dispersión procedente de una familia de planos.) *b*) Explique el origen de los anillos recordando que el método de Debye-Scherrer usa gran cantidad de cristales simples pequeños orientados aleatoriamente y un haz monocromático de rayos X. (Sugerencia: Se obtienen todos los ángulos posibles de incidencia, ya que los cristales pequeños muestran una orientación aleatoria.)

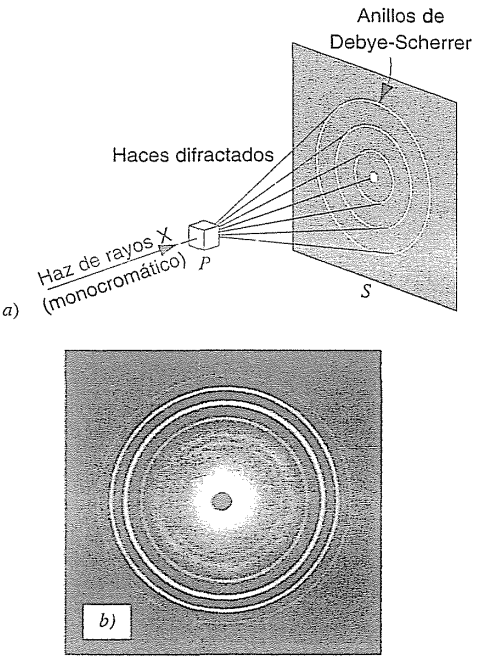


FIGURA 43-24. Pregunta 23.

24. Un holograma monocromático se construye con un láser rojo He-Ne. La película del holograma se ilumina después con luz *verde* de láser. Describa la imagen, si es que se produce.

EJERCICIOS

43-1 Rendijas múltiples

1. Una rejilla de difracción que mide 21.5 mm de ancho tiene 6 140 elementos. *a*) Calcule la distancia d entre las líneas adyacentes. *b)* ¿En qué ángulos ocurrirán los haces de intensidad máxima si la radiación incidente tiene una longitud de onda de 589 nm?
2. Una rejilla de difracción que mide 2.86 cm causa una desviación de 33.2° en el segundo orden con una luz de 612 nm de longitud de onda. Encuentre la cantidad total de elementos de la rejilla.
3. Con la luz proveniente de un tubo de descarga gaseosa que incide normalmente en una rejilla con una distancia 1.73 μm entre los centros adyacentes de la rendija, una luz verde aparece con máximos nítidos en los ángulos medidos de transmisión $\theta = \pm 17.6°, 37.3°, -37.1°, 65.2°$ y $-65.0°$. Calcule la longitud de onda de la línea verde que se ajuste mejor a los datos.
4. Un estrecho haz de luz monocromática incide contra una rejilla en incidencia normal y produce máximos nítidos en los siguientes ángulos con la normal: 6°40′, 13°30′, 20°20′ y 35°40′. No aparecen otros máximos en ningún ángulo entre 0° y 35°40′. La separación entre los centros adyacentes de elementos en la rejilla es 5 040 nm. Encuentre la longitud de onda de la luz utilizada.
5. Una luz con 600 nm de longitud de onda incide normalmente sobre una rejilla de difracción. Dos máximos principales adyacentes aparecen en sen $\theta = 0.20$ y sen $\theta = 0.30$. No existe el cuarto orden. *a)* ¿Qué separación hay entre las rendijas vecinas? *b)* ¿Cuál es el menor ancho posible de rendija individual? *c)* Mencione todos los órdenes que aparecen sobre la pantalla con los valores obtenidos en *a)* y en *b)*.
6. Una rejilla de difracción consta de rendijas que miden 310 nm de ancho, con una separación de 930 nm entre los centros. La iluminan ondas monocromáticas planas, $\lambda = 615$ nm, con un ángulo de incidencia cero. *a)* ¿Cuántos máximos de difracción hay? *b)* Calcule el ancho de las líneas espectrales observadas en el primer orden si la rejilla cuenta con 1120 rendijas.

43-2 Rejillas de difracción

7. Una rejilla tiene 315 elementos/mm. ¿Con qué longitud de onda en el espectro visible puede observarse la difracción de quinto orden?
8. Una rejilla de difracción tiene 200 elementos/mm y se observa un máximo principal en $\theta = 28°$. *a)* ¿Cuáles son las posibles longitudes de onda de la luz visible incidente? *b)* ¿De qué color son?
9. Una rejilla tiene 400 elementos/mm, ¿cuántos órdenes del espectro visible entero (400 a 700 nm) pueden producirse?
10. Demuestre que, en una rejilla con franjas alternativamente transparentes y opacas de igual ancho, todos los órdenes pares están ausentes (excepto $m = 0$).
11. Una luz blanca (400 nm $< \lambda <$ 700 nm) incide en un rejilla. Demuestre que, sin importar el valor de su espaciamiento d, se superponen los espectros segundo y tercero.
12. Suponga que la luz incide en una rejilla formando un ángulo ψ como se indica en la figura 43-25. Demuestre que la condición de un máximo de difracción es

$$d(\text{sen } \psi + \text{sen } \theta) = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Sólo el caso especial $\psi = 0$ puede tratarse en este capítulo (compare la expresión anterior con la Ec. 43-1).

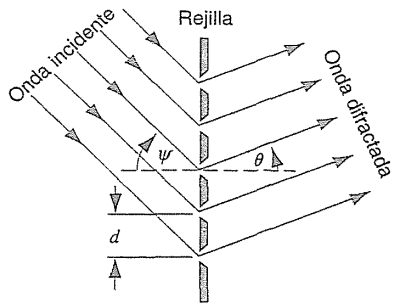


FIGURA 43-25. Ejercicio 12.

13. Una luz de 600 nm de longitud ilumina una rejilla de transmisión con $d = 1.50$ μm en varios ángulos de incidencia. En función del ángulo de incidencia (de 0° a 90°) grafique la desviación angular del haz difractado de primer orden a partir de la dirección incidente (Ej. 12).
14. Suponga que los límites del espectro visible se escogen arbitrariamente como 430 y 680 nm. Calcule el número de elementos por mm de una rejilla que dispersará el espectro de primer orden en un intervalo angular de 20.0°.
15. Una rejilla tiene 350 elementos/mm y la ilumina una luz blanca en incidencia normal. Aparece un espectro en una pantalla a 30 cm de ella. Si se hace un hoyo cuadrado de 10 mm en la pantalla, con su lado interior a 50 mm del máximo central y paralelo a él, ¿qué intervalo de longitudes de onda pasa por el hoyo?

43-3 Dispersión y potencia de resolución

16. Una rejilla tiene 620 elementos/mm y mide 5.05 mm de ancho. *a)* ¿Cuál es el intervalo más pequeño de longitud de onda susceptible de resolverse en el tercer orden cuando $\lambda = 481$ nm? *b)* ¿Cuántos órdenes superiores pueden verse?
17. El "doblete de sodio" en el espectro de este elemento es un par de líneas cuyas longitudes de onda miden 589.0 y 589.6 nm. Calcule el número mínimo de elementos de una rejilla necesarios para resolver el doblete en el espectro de segundo orden.
18. *a)* ¿Cuántos elementos debe tener una rejilla de difracción de 4.15 cm de ancho para resolver las longitudes de onda de 415.496 y 415.487 nm en el segundo orden? *b)* ¿En qué ángulo se encuentran los máximos?
19. Una fuente que contiene una mezcla de átomos de hidrógeno y deuterio emite luz con dos colores rojos poco espaciados en $\lambda = 656.3$ nm, cuya separación es 0.180 nm. Encuentre el número mínimo de elementos necesarios en una rejilla de difracción que puede resolver las líneas en el primer orden.
20. Demuestre que la dispersión de una rejilla puede escribirse como

$$D = \lambda^{-1} \tan \theta.$$

21. En una rejilla, el doblete de sodio (Ej. 17) se ve en el tercer orden en 10.2° a la normal y apenas se resuelve. Determine *a*) el espaciamiento de los elementos y *b*) el ancho total de la rejilla.

22. Una luz que contiene una mezcla de dos longitudes de onda, 500 y 600 nm, incide normalmente sobre una rejilla de difracción. Se desea 1) que los máximos principales primero y segundo de cada longitud de onda aparezcan en $\theta \leq 30°$. 2) que la dispersión sea lo más grande posible y 3) que el tercer orden de 600 nm sea un orden faltante. *a)* ¿Qué separación debería haber entre las rendijas contiguas? *b)* ¿Cuál es el menor ancho posible de rendija individual? *c)* Mencione todos los órdenes de 600 nm que aparecen realmente en la pantalla con los valores obtenidos en *a)* y en *b)*.
23. Una rejilla tiene 40 000 elementos esparcidos en 76 mm. *a)* ¿Cuál es su dispersión esperada D en °/nm para la luz de sodio ($\lambda = 589$ nm) en los tres primeros órdenes? *b)* ¿Cuál es la potencia de resolución de ellos?

43-4 Difracción de rayos X

24. Se observa que unos rayos X de longitud de onda 0.122 nm se reflejan en el segundo orden contra la cara de un cristal de fluoruro de litio en un ángulo de Bragg de 28.1°. Calcule la distancia entre los planos adyacentes de los cristales.
25. Un haz de rayos X de 29.3 pm de longitud de onda incide sobre un cristal de calcita con un espaciamiento de red de 0.313 nm. Determine el ángulo más pequeño entre los planos del cristal y el haz que producirá una reflexión constructiva de los rayos.
26. Unos rayos X monocromáticos de alta energía inciden sobre un cristal. Si la reflexión de primer orden se observa en un ángulo de Bragg, de 3.40°, ¿en qué ángulo se prevé que sea la reflexión de segundo orden?
27. Un haz de rayos X, que contiene radiación de dos longitudes de onda, se dispersa desde un cristal, originando el espectro de intensidad de la figura 43-26. El espaciamiento interplanar de los planos de dispersión es 0.94 nm. Determine la longitud de onda de los rayos presentes en el haz.

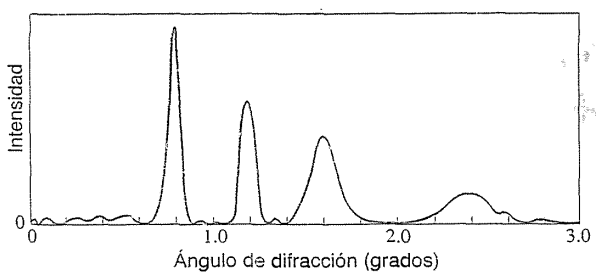


FIGURA 43-26. Ejercicio 27.

28. Al comparar la longitud de onda de dos líneas de rayos X monocromáticas, se comprueba que la línea A causa un máximo de reflexión de primer orden en un ángulo de visión de 23.2° con la cara de un cristal. La línea B, que mide 96.7 pm de longitud de onda, produce un máximo de tercer orden en un ángulo de 58.0° con la misma cara del cristal. *a)* Calcule el espaciamiento interplanar. *b)* Determine la longitud de onda de la línea A.
29. Unos rayos X monocromáticos inciden en una serie de planos de cristal de NaCl, cuyo espaciamiento interplanar es 39.8 pm. Cuando giramos el haz 51.3° respecto a la normal, se observa la reflexión de primer orden de Bragg. Encuentre la longitud de onda de los rayos.
30. Demuestre que, en la difracción de Bragg por un haz monocromático de rayos X, no se obtienen máximos intensos si su longitud de onda es mayor que el doble de la separación más grande entre los planos del cristal. Véase pregunta 19.
31. Pruebe que, si se miden los ángulos de reflexión de Bragg en varios órdenes, no es posible determinar en un cristal la longitud de onda de la radiación y el espaciamiento de los planos de la reflexión.
32. Suponga que el haz de rayos incidentes en la figura 43-27 no es monocromática, sino que contiene longitudes de onda en una banda entre 95.0 y 139 pm. ¿Habrá algunos haces difractados, asociados a los planos que aparecen en la figura? De ser así, ¿qué longitudes de onda se difractan? Suponga que $d = 275$ pm.

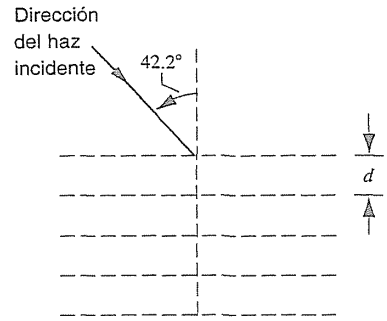


FIGURA 43-27. Ejercicios 32 y 34.

33. La dispersión de primer orden de Bragg procedente de un cristal ocurre en un ángulo de incidencia de 63.8° (Fig. 43-28). La longitud de onda de los rayos X es 0.261 nm. Suponiendo que la difusión procede de los planos punteados de la figura, determine el tamaño de la celda unitaria a_0.

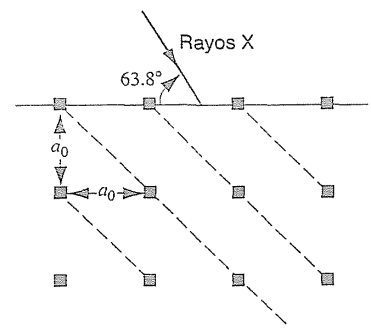


FIGURA 43-28. Ejercicio 33.

34. Unos rayos X monocromáticos ($\lambda = 0.125$ nm) inciden sobre un cristal de cloruro de sodio, formando un ángulo de 42.2° con la línea de referencia que se muestra en la figura 43-27. Los planos son los de la figura 43-18*a*, donde $d = 0.252$ nm. ¿A través de qué ángulos debe girarse el cristal para que produzca un haz difractado asociado a los planos? Suponga que se gira el cristal alrededor de un eje perpendicular al plano de la página.

43-5 Holografía

PROBLEMAS

1. Obtenga la siguiente expresión con un patrón de intensidad de una "rejilla" de tres rendijas:

$$I = \frac{1}{9} I_m (1 + 4 \cos \phi + 4 \cos^2 \phi),$$

donde

$$\phi = \frac{2\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda}.$$

Suponga que $a << \lambda$ y guíese por la obtención de la fórmula correspondiente de rendija doble (Ec. 42-17).

2. *a*) Con el resultado del problema 1 demuestre lo siguiente: suponiendo que θ sea bastante pequeño para que sen $\theta \approx \theta$, el ancho medio de las franjas en un patrón de difracción de tres rendijas es

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{3.2d}.$$

b) Compare lo anterior con la expresión obtenida para el patrón de dos rendijas en el problema 5 (Cap. 41) y pruebe que estos resultados corroboran la conclusión de que, en un espaciamiento fijo de rendijas, los máximos de interferencia adquieren mayor nitidez al aumentar el número de ellas.

3. *a*) Por medio del resultado del problema 1, demuestre que una "rejilla" de tres rendijas tiene sólo un máximo secundario. Encuentre *b*) su ubicación y *c*) su intensidad relativa.

4. Una rejilla de tres rendijas tiene una separación d entre las contiguas. Si cubrimos la rendija de en medio, ¿el ancho medio de los máximos de intensidad crecerá o disminuirá y en qué factor lo hará? Consulte el problema 2.

5. Una rejilla de difracción tiene un gran número N de rendijas, cada una con un ancho a. Denotemos con $I_{máx}$ la intensidad en algún máximo principal y con I_k la intensidad de *k-ésimo* máximo adyacente. *a*) Si $k << N$, demuestre a partir del diagrama de fasores que aproximadamente $I_k/I_{máx} = 1/(k + \frac{1}{2})^2\pi^2$. (Compare esto con la fórmula de rendija simple.) *b*) En los máximos secundarios que se hallan más o menos a la mitad entre dos máximos principales contiguos, demuestre que aproximadamente $I_k/I_{máx} = 1/N^2$. *c*) Tenga en cuenta el máximo central principal y los secundarios adyacentes donde $k << N$. Demuestre que esta parte del patrón de difracción se asemeja cuantitativamente al de una rendija simple de ancho Na.

6. Una rejilla de difracción tiene una potencia de resolución $R = \lambda/\Delta\lambda = Nm$. *a*) Demuestre que el correspondiente intervalo de frecuencia Δf que apenas puede resolverse está dado por $\Delta f = c/Nm\lambda$. *b*) A partir de la figura 43-2 demuestre que $\Delta t = (Nd/c)$sen θ es la diferencia de los "tiempos de vuelo" de dos rayos extremos. *c*) Demuestre que $(\Delta f)(\Delta t) = 1$, con esta relación independiente de varios parámetros de rejilla. Suponga que $N >> 1$.

7. Considere una red cuadrada infinita de dos dimensiones como la de la figura 43-16*b*. Un espaciamiento interplanar es evidentemente a_0. *a*) Calcule los siguiente cinco espaciamientos interplanares dibujando figuras semejantes a la figura 43-18*a*. *b*) Demuestre que la fórmula general es

$$d = a_0/\sqrt{h^2 + k^2},$$

donde los valores de h y k son enteros relativamente primos que no tienen otro factor común que la unidad.

8. En el problema resuelto 43-5, el haz $m = 1$, permitido por consideraciones de interferencia, tiene una intensidad cero por las propiedades difractantes de la celda unitaria en esta geometría de haces y cristales. Pruébelo. (Sugerencia: Demuestre que la "reflexión" causada por el plano atómico a través de la parte superior de una capa de celdas unitarias se cancela mediante una "reflexión" por un plano a través de la mitad de la capa. Todos los haces de orden impar resultan tener una intensidad cero.)

CAPÍTULO 44

POLARIZACIÓN

En el capítulo 38 mostramos que las ondas electromagnéticas que se desplazan de modo tal que el vector del campo eléctrico $\vec{E}$ y el del campo magnético $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí además de la dirección en que se propagan. En otras palabras, las ondas electromagnéticas son transversales. *Esta predicción se deduce de las ecuaciones de Maxwell.*

En muchos de los experimentos descritos hasta ahora, las ondas de luz no manifiestan su naturaleza transversal. Por ejemplo, la reflexión, refracción, interferencia y difracción pueden tener lugar en las ondas longitudinales (el sonido, entre otras), y en las ondas transversales. En el presente capítulo vamos a estudiar los fenómenos que no sólo dependen de la naturaleza transversal de la radiación magnética, sino también de la orientación particular que los vectores del campo eléctrico y magnético tengan en el espacio.

44-1 POLARIZACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Es probable que el lector alguna vez haya movido un radio portátil hacia una u otra dirección para mejorar la recepción de la estación que escuchaba. O quizá haya ajustado la posición u orientación de la antena conectada a su sistema de estéreo para intensificar la intensidad de la señal. Si se tiene una antena de televisión en el techo, se debe alinear en la orientación apropiada para recibir las señales que emite la estación. Tales ajustes se requieren porque algunos tipos de antena responden al campo eléctrico $\vec{E}$ de una onda electromagnética y la señal puede recibirse sólo si el campo eléctrico de la onda puede ocasionar que los electrones fluyan a lo largo de los alambres para generar una corriente. La orientación de la antena se escoge de modo que corresponda a la orientación del campo $\vec{E}$ de la onda al ser producido por la antena emisora. Así, en Estados Unidos las señales de televisión se transmiten en forma tal que el campo $\vec{E}$ oscila en un plano horizontal; por eso, la antena del techo también debe ser horizontal (Fig. 44-1). En otros países, las señales de televisión se emiten con el campo $\vec{E}$ oscilando en un plano vertical; de ahí que para recibir la señal se requiera orientar de manera diferente la antena.

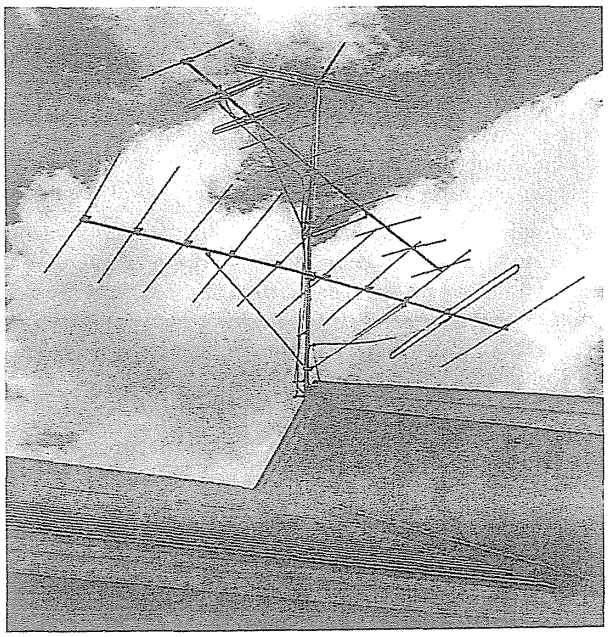


FIGURA 44-1. Antenas de televisión en los techos de las casas de Estados Unidos.

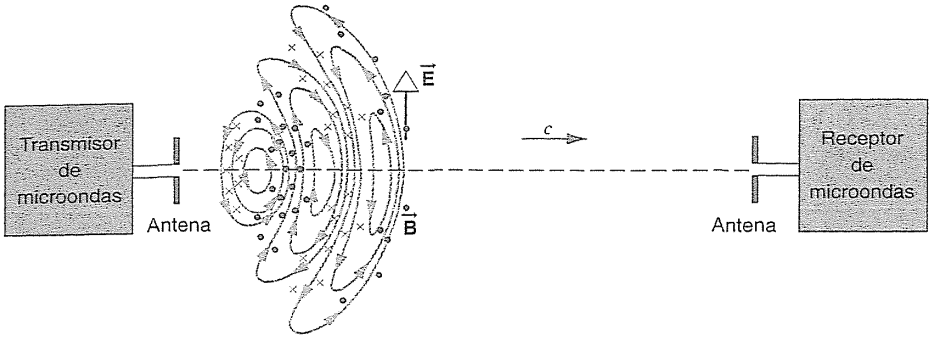


FIGURA 44-2. La onda electromagnética generada por el transmisor se polariza en el plano de la página, con su vector $\vec{E}$ paralelo al eje de la antena transmisora. La antena receptora puede detectarla con la máxima eficiencia, si su antena también se halla en el plano y es paralela a $\vec{E}$. No se detecta señal alguna cuando la hacemos girar 90° alrededor de la dirección de propagación.

En la figura 44-2 se muestra un arreglo experimental que demuestra el efecto anterior. Un transmisor de microondas a la izquierda se conecta a una antena dipolar. Las cargas, moviéndose hacia arriba y abajo en la antena producen una onda electromagnética cuyo vector $\vec{E}$ es (a grandes distancias del dipolo) paralelo a su eje. Cuando la onda incide sobre la antena del receptor de microondas, a la derecha, su vector $\vec{E}$ ocasiona que las cargas se desplacen hacia arriba y hacia abajo por la antena. Estas cargas en movimiento originan una señal en el receptor.

Si giráramos el transmisor 90° alrededor de la dirección en que se propaga la onda, la señal en el receptor se reduciría a cero. En este caso, el vector $\vec{E}$ de la onda formaría ángulos rectos con el eje de la antena receptora; la onda no causaría movimiento alguno de la carga a través de la antena receptora y, por lo mismo, tampoco habría señal alguna en el receptor. Se obtendría un resultado semejante si girásemos el receptor en vez del transmisor.

La figura 44-3 representa una onda electromagnética plana como la que se observaría lejos de la antena transmisora de la figura 44-2. Como siempre sucede, los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí y a la dirección en que se propaga la onda, que es la imagen básica de una onda transversal. Por convención, la *dirección de polarización* de una onda se define como la dirección del vector $\vec{E}$ (la dirección y en la figura 44-3). El plano determinado por el vector $\vec{E}$ y la dirección de propagación (el plano xy en la Fig. 44-3) reciben el nombre de *plano de polarización* de la onda. Nótese que, al indicar dos direcciones de la onda electromagnética (la de propagación y la de $\vec{E}$), especificamos completamente la onda, porque las dos direcciones fijan la dirección de $\vec{B}$ conforme va propagándose.*

Se dice que la onda ilustrada gráficamente en la figura 44-3 está *polarizada linealmente* (llamada también plano polarizado). Ello significa que el campo $\vec{E}$ permanece en una dirección fija (la dirección y en la Fig. 44-3) a medida que se propaga la onda. Igual que en el experimento de la figura 44-2, las ondas electromagnéticas polarizadas linealmente, como las que se emplean en la transmisión de radio y de televisión, pueden obtenerse orientando en cierta dirección el eje de una antena dipolar transmisora. El movimiento de los electrones en la antena es *coherente;* actúan al unísono para transmitir una onda electromagnética polarizada. La figura 44-4*a* ofrece una vista de la onda polarizada linealmente de la figura 44-3, tal como podría verse si se saliera del papel hacia nosotros. El campo eléctrico oscila en una sola dirección (en este caso, hacia arriba y abajo a lo largo del eje y).

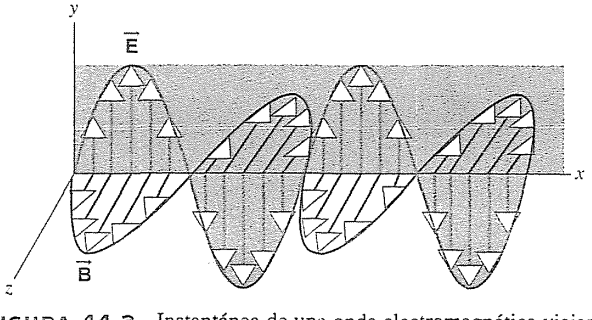


FIGURA 44-3. Instantánea de una onda electromagnética viajera que muestra los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$. La onda está polarizada linealmente, en este caso en la dirección y. El *plano de polarización* se define como el que contiene al vector $\vec{E}$ y la dirección de propagación; en este caso el plano de polarizaciones es el plano xy.

* Recordar el vector de Payting, $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$, estudiado en la sección 38-6, donde $\vec{S}$ está en la dirección de la propagación de la onda. Dados $\vec{S}$ y $\vec{E}$, podemos encontrar la magnitud y dirección de $\vec{B}$.

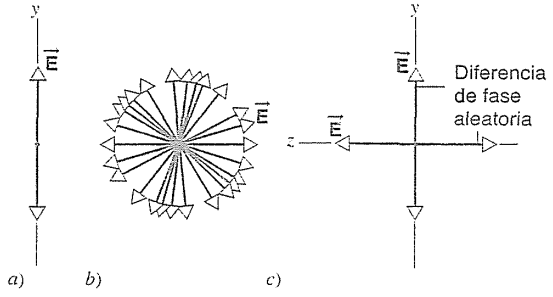


FIGURA 44-4. *a*) Onda polarizada linealmente, como la de la figura 44-3, vista desde la dirección de propagación. La onda sale del plano de la página. Sólo se muestra el vector $\vec{E}$. *b*) Una onda no polarizada, que puede considerarse una superposición aleatoria de muchas ondas polarizadas. *c*) Forma equivalente de mostrarla como dos ondas linealmente polarizadas que forman ángulos rectos entre sí, con una diferencia de fase aleatoria entre ellas. La orientación de los ejes y y z respecto de la dirección de propagación es totalmente arbitraria.

Los átomos se comportan de modo independiente en vez de cooperativa en otras fuentes de ondas electromagnéticas, como el Sol o una lámpara incadescente. En conjunto, sus emisiones no presentan un plano único de polarización; más bien, la radiación consta de muchos componentes cuya polarización se distribuye aleatoriamente alrededor de la dirección de propagación, como se observa en la figura 44-4*b*. Esta luz es transversal pero *no polarizada*, es decir, no existe un plano preferido de polarización.

En la figura 44-4*c* se ve otra manera de representar una onda no polarizada. Los vectores aleatorios $\vec{\mathbf{E}}$ se representan mediante sus componentes netos en dos ejes perpendiculares cualesquiera (en este caso, y y z). En las ondas no polarizadas, los componentes poseen igual amplitud, y la diferencia de fase entre ellos varía aleatoriamente con el tiempo.

44-2 HOJAS DE POLARIZACIÓN

En la figura 44-5 se muestra una luz no polarizada que incide sobre una hoja de material polarizador comercial llamado *Polaroid.** En la hoja hay una cierta dirección típica de polarización, que se indica con líneas paralelas. La hoja transmite sólo los componentes del tren de ondas cuyos vectores de campo eléctrico vibran paralelamente a esa dirección y absorbe aquellas que lo hacen en ángulo recto con esa dirección. La luz proveniente de la hoja se polariza en forma lineal. La dirección polarizadora de la hoja se establece durante el proceso de manufactura incrustando algunas moléculas de cadena larga en una hoja flexible de plástico y alargándola luego, para que las moléculas se alineen paralelamente unas a otras. La radiación con su vector $\vec{\mathbf{E}}$ alineada paralelalemente a las moléculas largas se absorbe intensamente, mientras que la radiación con su vector $\vec{\mathbf{E}}$ perpendicular a esa dirección pasa a través de la hoja.

En la figura 44-6, la hoja de polarización (llamada también *polarizador*) se encuentra en el plano de la página y la dirección de la propagación se dirige hacia afuera. El vector $\vec{\mathbf{E}}$ indica el plano de vibración de un tren de ondas seleccionado aleatoriamente que incide sobre la hoja. Dos componentes vectoriales, $\vec{\mathbf{E}}_z$ (de magnitud E sen θ) y $\vec{\mathbf{E}}_y$ (de magnitud E cos θ), pueden reemplazar $\vec{\mathbf{E}}$, uno paralelamente a la dirección de polarización y el otro en ángulo recto con ella. Sólo el componente $\vec{\mathbf{E}}_y$ se transmite; el componente $\vec{\mathbf{E}}_z$ se absorbe dentro de la hoja.

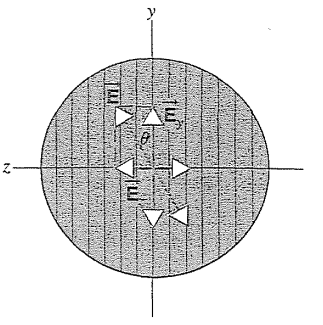


FIGURA 44-6. Otra vista de la acción de una hoja de polarización. Una onda polarizada linealmente (quizás una de las que aparecen en la Fig. 44-4*b*) orientada en una dirección aleatoria θ incide sobre ella. Se transmite el componente y de $\vec{\mathbf{E}}$ y se absorbe el componente z.

Cuando la luz no polarizada incide en una hoja ideal de polarización, la intensidad de la luz polarizada que se transmite a través de la hoja equivale a la mitad de la intensidad incidente, sin que importe la orientación de la hoja. Esto lo comprobamos en la representación de la luz incidente no polarizada dada en la figura 44-4*c*, donde todos los componentes tienen, en promedio, la mitad del valor de la intensidad de la luz incidente. Por ser arbitraria la orientación de los ejes en esa figura, podemos escoger cualquiera de ellos y asignarle la dirección de transmisión de la hoja de polarización sobre la que incide. La hoja transmite el 50% de la luz incidente, pues este componente de la luz se transmitirá por completo, y el otro será absorbido en su totalidad. A la misma conclusión puede llegarse partiendo de la figura 44-6, donde una onda polarizada en una dirección arbitraria incide en una hoja de polarización. El componente E_y ($= E$ cos θ) se transmite y, por lo mismo, la intensidad transmitida será proporcional a $E_y^2 = E^2$ cos^2 θ. Si la luz incidente no está polarizada, obtenemos la intensidad total transmitida promediando la expresión anterior en todas las posibles orientaciones del plano de polarización de la luz incidente; es decir, en todos los valores posibles de θ. El valor promedio de cos^2 θ es $\frac{1}{2}$, por lo cual volvemos a concluir que se transmite la mitad de la luz incidente. Las hojas reales de polarización pueden transmitir apenas 40% de la intensidad incidente, debido a la reflexión y a la absorción parcial de la luz en la dirección de polarización. En nuestras explicaciones suponemos polarizadores ideales.

Coloquemos la segunda hoja de polarización P_2 (generalmente llamada *analizador* cuando se usa en esta forma) como en la figura 44-7. Si giramos P_2 alrededor de la dirección de propagación, hay dos posiciones, separadas 180° donde la intensidad de la luz transmitida cae a cero; éstas son las posiciones donde la dirección de polarización de P_1 y P_2 forma ángulos rectos.

* Hay otras formas de producir luz polarizada sin utilizar este producto comercial tan conocido. Más adelante mencionaremos algunas. Consúltense en "The Amateur Scientist", de Jearl Walker, *Scientific American*, diciembre de 1977, p. 172, algunas formas de construir hojas de polarización y placas de cuarto de onda y de media onda, así como los experimentos que pueden realizarse con ellas.

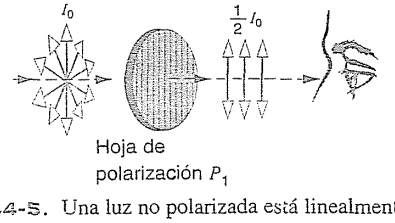


FIGURA 44-5. Una luz no polarizada está linealmente polarizada (y su intensidad se reduce a la mitad) después de pasar por una hoja de polarización simple. Las líneas paralelas, que no son visibles en las hojas, indican las direcciones de su polarización.

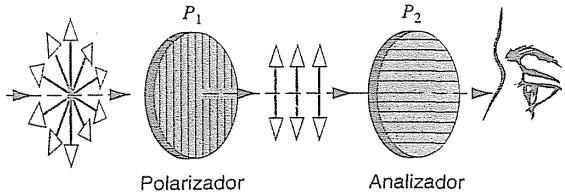


FIGURA 44-7. Una luz no polarizada no se transmite por medio de dos hojas de polarización, cuyas direcciones son perpendiculares entre sí.

Si la amplitud de la luz polarizada linealmente incidente en P_2 es E_m, la de la luz que sale será $E_m \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre las direcciones de polarización de P_1 y P_2. Al recordar que la intensidad del haz de luz es proporcional al cuadrado de la amplitud, comprobamos que la intensidad transmitida I varía con θ, según

$$I = I_m \cos^2 \theta, \qquad (44\text{-}1)$$

donde I_m, el valor máximo de la intensidad transmitida, ocurre cuando las direcciones de polarización de P_1 y P_2 son paralelas, es decir, cuando $\theta = 0$, o sea 180°. En la figura 44-8*a*, donde dos hojas de polarización sobrepuestas están en posición paralela ($\theta = 0$ o 180° en la Ec. 44-1), muestra que la intensidad de la luz transmitida a través de la región de sobreposición alcanza su valor máximo. En la figura 44-8*b* se ha girado 90° una de las hojas, de modo que θ tiene el valor de 90 o 270°; ahora es mínima la intensidad de la luz transmitida a través de la región de sobreposición. La ecuación 44-1, denominada *ley de Malus,* fue descubierta experimentalmente por Etienne Louis Malus (1775-1812) aplicando varias técnicas de polarización (Sec. 44-3).

Históricamente, los estudios de polarización se efectuaron para investigar la naturaleza de la luz (por ejemplo, los de Malus y Thomas Young, quienes además de demostrar la naturaleza ondulatoria de la luz por la interferencia de rendija doble, probaron su naturaleza transversal en sus experimentos de polarización). Hoy invertimos el procedimiento y deducimos algo sobre la naturaleza de un objeto a partir del estado de polarización de la luz emitida por él y dispersada desde él. Los estudios de la polarización de la luz reflejada contra ellos ha permitido inferir que los granos de polvo cósmico de nuestra galaxia han sido orientados en el campo magnético galáctico débil (alrededor de 10^{-8} T); de ahí que su dimensión larga sea paralela a ese campo. Los estudios de la polarización señalan que los anillos de Saturno se componen de cristales de hielo. El tamaño y la forma de las partículas virales se determinan por la polarización de la luz ultravioleta dispersada por ellos. La información referente a la estructura de los átomos y los núcleos se obtiene mediante estudios de polarización, de sus radiaciones emitidas en todas las partes del espectro electromagnético. Disponemos, pues, de un método muy útil para investigar estructuras, cuyos tamaños van desde el de una galaxia (10^{+22} m) hasta el de un núcleo (10^{-14} m).

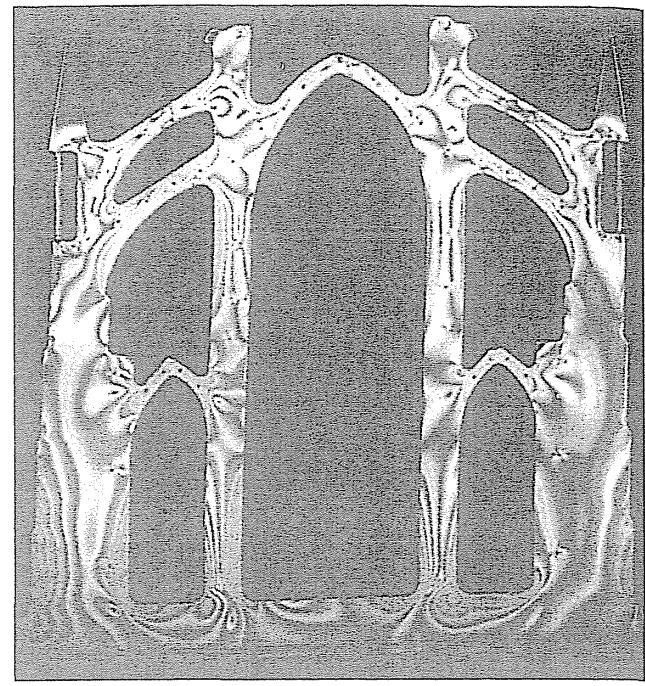


FIGURA 44-9. Vista de un pedazo de plástico que está entre dos hojas de polarización entrecruzadas. Los patrones oscuros y claros muestran las regiones de tensión en la estructura; ésta es la silueta de una catedral gótica.

La luz polarizada tiene muchas aplicaciones en la industria e ingeniería. En la figura 44-9 vemos un trozo de plástico que ha sido tensando y puesto entre hojas de polarización. Aparece el patrón de esfuerzo, lo cual permite a los ingenieros perfeccionar su diseño y reducir el esfuerzo en sitios críticos de

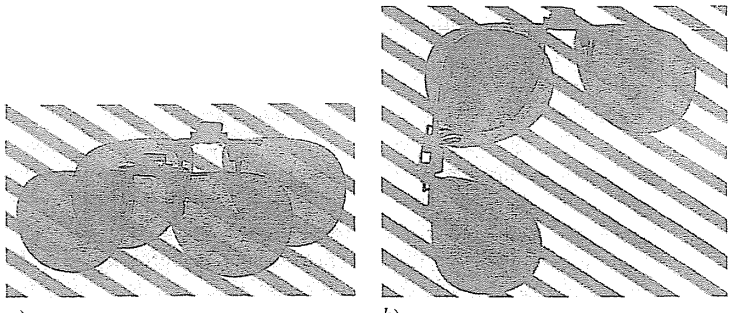


FIGURA 44-8. Dos hojas de un material polarizador (en este caso, anteojos polarizadores) se colocan sobre un patrón de líneas. En *a*) las direcciones de polarización de ellas son paralelos, de modos que pasa la luz; en *b*) las direcciones son perpendiculares; por tanto, no pasa luz por los dos lentes superpuestos.

FIGURA 44-10. Asistente digital personal (APD) con una pantalla de cristal líquido.

la estructura.* En la figura 44-10 se muestra una pantalla común de cristal líquido que utiliza luz polarizada para formar letras y números, como los de las carátulas de los relojes y calculadores. El cristal líquido es un material con moléculas estiradas como hojas de polarización; sin embargo, puede lograrse que la dirección larga siga un campo eléctrico aplicado. Se dispone el cristal líquido de modo que transmita normalmente la luz a través del polarizador y del analizador. Cuando el campo eléctrico (proveniente de una batería) se aplica a ciertas regiones, las moléculas se alinean en forma tal que no se transmite luz a través de estas regiones que forman los patrones oscuros de la carátula.

PROBLEMA RESUELTO 44-1. Dos hojas tienen direcciones de polarización paralelas, de modo que la intensidad I_m de la luz transmitida alcanza su máximo. ¿En qué ángulo deben girarse para que la intensidad disminuya a la mitad?

Solución De la ecuación 44-1, dado que $I = \frac{1}{2} I_m$, tenemos

$$\tfrac{1}{2} I_m = I_m \cos^2 \theta$$

o bien

$$\theta = \cos^{-1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm 45°, \pm 135°.$$

El mismo efecto se logra sin importar que la hoja se gira ni la dirección con que se gira ésta.

44-3 POLARIZACIÓN POR REFLEXIÓN

En 1809 Malus descubrió que la luz podía ser polarizada parcial o completamente por reflexión. Quien haya observado al Sol reflejarse en el agua con unos anteojos oscuros, probablemente habrá observado este efecto. Basta inclinar un poco la cabeza de un lado a otro, con lo cual se giran las hojas de polarización, para ver que la intensidad de la luz solar reflejada pasa por un mínimo.

En la figura 44-11 se muestra un haz no polarizado que incide sobre una superficie de vidrio. Los vectores $\vec{E}$ se resuelven en dos componentes (según se aprecia en la Fig. 44-4*c*), uno perpendicular al plano de incidencia (el plano de la Fig. 44-11), y el otro paralelo a él. En promedio, ambos componentes poseen igual amplitud, con una luz incidente no polarizada en absoluto.

En el vidrio u otros materiales dieléctricos existe un ángulo especial de incidencia, denominado *ángulo de polarización* θ_p (o *ángulo de Brewster*), donde el coeficiente de reflexión de la componente de polarización en el plano de la figura 44-11 es cero. Ello significa que el haz reflejado contra el vidrio, aunque de poca intensidad, presenta polarización lineal y su plano de polarización es perpendicular al plano de incidencia. Para verificar fácilmente esta polarización del haz reflejado basta analizarlo con una hoja de polarización.

Cuando la luz incide en el ángulo de polarización, el componente con polarización paralela al plano de incidencia se refracta en su totalidad, mientras que el componente perpendicular se refleja y se refracta de manera parcial. Así pues,

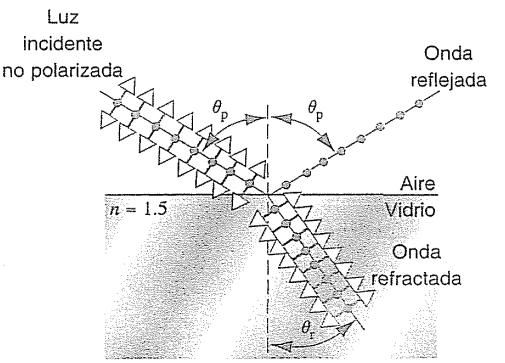


FIGURA 44-11. En un ángulo particular de incidencia θ_p, la luz reflejada está polarizada por completo. La luz refractada está parcialmente polarizada. Los puntos indican los componentes de polarización perpendiculares al plano de la página y las flechas dobles, los componentes de polarización paralelos al plano.

* Se dan ejemplos de cómo se utilizan estos modelos en el estudio de la arquitectura clásica en "The Architecture of Christopher Wren", de Harold Dorn y Robert Mark, *Scientific American*, julio de 1981, p. 160, y en "Gothic Structural Experimentation", de Robert Mark y William W. Clark, *Scientific American*, noviembre de 1984, p. 176.

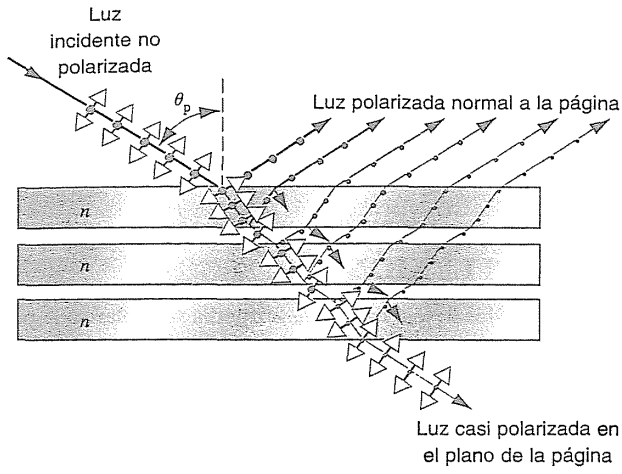


FIGURA 44-12. Polarización de la luz por una pila de placas de vidrio. La luz no polarizada incide en el ángulo θ_p. Se polarizan todas las ondas reflejadas que son perpendiculares al plano de la página. Luego de atravesar varias capas, la onda transmitida ya no contiene un componente polarizado apreciable, que sea perpendicular a la página.

el haz refractado que presenta gran intensidad se polariza en parte. Si del vidrio pasara al aire y luego incidiera en la superficie de un segundo vidrio (una vez más con un ángulo θ_p), el componente perpendicular se reflejaría y el haz refractado mostraría una polarización ligeramente mayor. Con una pila de placas de vidrio obtenemos reflexiones de fuentes sucesivas y es posible incrementar la intensidad del haz reflejado emergente (Fig. 44-12). Los componentes perpendiculares se eliminan poco a poco del haz transmitido; esto lo polariza más completamente en el plano de la figura 44-12.

En el ángulo de polarización se comprueba, mediante experimentos, que los haces reflejados y refractados forman ángulos rectos, o sea (Fig. 44-11)

$$\theta_p + \theta_r = 90°.$$

Conforme a la ley de Snell,

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_p = n_2 \operatorname{sen} \theta_r.$$

La combinación de las ecuaciones anteriores nos da

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_p = n_2 \operatorname{sen}(90° - \theta_p) = n_2 \cos \theta_p$$

o

$$\tan \theta_p = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (44\text{-}2)$$

donde el haz incidente se halla en el medio 1, y el haz refractado en el medio 2. Si el medio 1 es el aire $n_1 = 1$, la expresión anterior queda así

$$\tan \theta_p = n, \qquad (44\text{-}3)$$

donde n es el índice de refracción del medio donde incide la luz. A la ecuación 44-2 se le conoce como *ley de Brewster*, en honor de Sir David Brewster (1781-1868), quien la dedujo empíricamente en 1812. Es posible probarla en forma rigurosa a partir de las ecuaciones de Maxwell (Preg. 13).

PROBLEMA RESUELTO 44-2. Queremos utilizar como polarizador una placa de vidrio ($n = 1.50$) en el aire. Determine el ángulo de polarización y el de refracción.

Solución Con base en la ecuación 44-3

$$\theta_p = \tan^{-1} 1.50 = 56.3°.$$

El ángulo de refracción se obtiene de la ley de Snell:

$$\operatorname{sen} \theta_p = n \operatorname{sen} \theta_r,$$

o

$$\operatorname{sen} \theta_r = \frac{\operatorname{sen} 56.3°}{1.50} = 0.555 \quad \text{o} \quad \theta_r = 33.7°.$$

44-4 REFRACCIÓN DOBLE

En capítulos precedentes supusimos que la velocidad de la luz y, por lo mismo, el índice de refracción no depende de la dirección de propagación en el medio ni del estado de polarización de la luz. Los líquidos, los sólidos amorfos como el vidrio y los sólidos cristalinos con simetría cúbica suelen presentar este comportamiento y se dice que son *ópticamente isotrópicos*. Muchos otros sólidos cristalinos son *ópticamente anisotrópicos* (es decir, no isotrópicos).* La anisotropia óptica es la causa del patrón de esfuerzos ilustrado en la figura 44-9, aunque en este caso el material no es cristalino.

La figura 44-13, donde un cristal pulido de calcita ($CaCO_3$) se coloca sobre un patrón impreso, muestra la anisotropía óptica de este material: *la imagen aparece doble.*

* Los sólidos pueden ser anisotrópicos en muchas propiedades: mecánicas (la mica se adhiere fácilente en un solo plano), eléctricas (un cubo de grafito cristalino no tiene la misma resistencia eléctrica entre todos los pares de caras opuestas), magnéticas (un cubo de níquel cristalino se magnetiza más fácilmente en ciertas direcciones que en otras), y así sucesivamente.

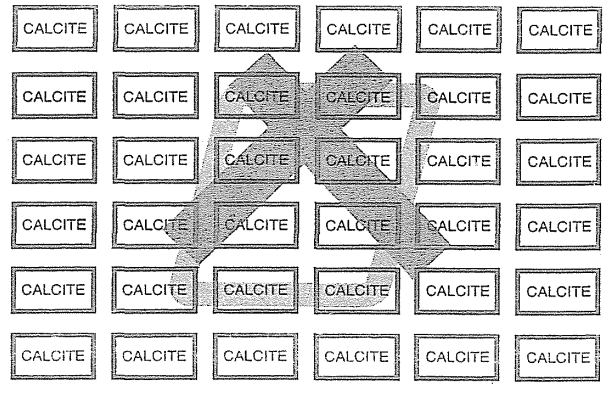


FIGURA 44-13. Vista a través de un cristal birrefringente, que muestra las dos imágenes resultantes de los dos índices de refracción. Las imágenes dobles pueden verse donde no hay un tira del material polarizante. El eje de polarización de las tiras es paralelo a su dirección larga. Nótese que ambas imágenes tienen polarizaciones perpendiculares.

Más aún, las dos imágenes muestran polarizaciones perpendiculares según se indica en la figura 44-14; ésta muestra un haz de luz no polarizada que incide sobre un cristal de calcita en ángulo recto con una de sus caras. El haz simple se divide en dos en la superficie del cristal. Se da el nombre de *refracción doble* o *birrefrigencia* a la "doble inclinación" de un haz transmitido a través de la calcita, que se ilustra en las figuras 44-13 y 44-14. Huygens estudió este fenómeno y lo describió en su *Tratado sobre la luz,* obra publicada en 1678.

Si con una hoja de polarización se analizan los dos haces emergentes en la figura 44-14, se descubre que presentan polarización lineal con sus planos de vibración, formando ángulos rectos entre sí. En la figura 44-13 se observa que los dos polarizadores cruzados transmiten sólo una de las dos imágenes (pero no la otra).

Algunos materiales de refracción doble absorben muy bien un componente de polarización, mientras el otro componente pasa por él con poca absorción. A estos materiales se les conoce como *dicroicos.* Un ejemplo de ellos son las hojas de polarización.

Si se efectúan experimentos con varios ángulos de incidencia, se comprueba que uno de los haces de la figura 44-14 (representado por el *rayo ordinario,* llamado también rayo *o*) cumple con la ley de Snell referente a la refracción en la superficie de cristal, como cualquier otro rayo que pasa de un medio isotrópico a otro. No la cumple el segundo haz (representado por el *rayo extraordinario,* o rayo *e*). Por ejemplo, en la figura 44-14 el ángulo de incidencia de la luz es cero; pero en contraste con la predicción de dicha ley el ángulo de refracción del rayo *e* no es cero. En términos generales, el rayo *e* ni siquiera se encuentra en el plano de incidencia.

Esta diferencia entre las ondas representada por los rayos *o* y *e* en lo tocante a la ley de Snell puede explicarse en los siguientes términos:

1. La onda *o* se desplaza en el cristal con la misma velocidad v_0 en todas direcciones. Es decir, para ella el cristal tiene un solo índice de refracción n_0, como cualquier sólido isotrópico.

2. La onda *e* se desplaza en el cristal con una velocidad que cambia con la dirección de v_0 a v_e. En otras palabras, el índice de refracción, definido como c/v, varía con la dirección de n_0 a n_e.

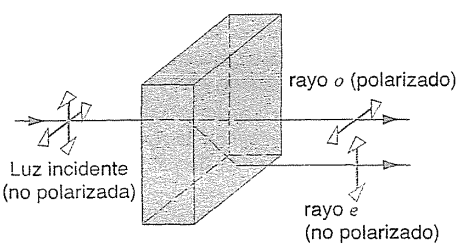


FIGURA 44-14. Una luz no polarizada que incide sobre un material birrefringente (como un cristal de calcita) se divide en dos componentes: el rayo *o* (que obedece a la ley de refracción de Snell) y el rayo *e* (que no obedece a ella). Los dos rayos refractados tienen polarizaciones perpendiculares, como se muestra en la figura.

TABLA 44-1 Índices de refracción principales en varios cristales de refracción doble[a]

Cristal	*Fórmula*	n_o	n_e	$n_e - n_o$
Hielo	H_2O	1.309	1.313	+0.004
Cuarzo	SiO_2	1.544	1.553	+0.009
Wurcita	ZnS	2.356	2.378	+0.022
Calcita	$CaCO_3$	1.658	1.486	−0.172
Dolomita	$CaO \cdot MgO \cdot 2CO_2$	1.681	1.500	−0.181
Siderita	$FeO \cdot CO_2$	1.875	1.635	−0.240

[a] Con luz de sodio; $\lambda = 589$ nm.

A las cantidades n_0 y n_e se les llama *índices principales de refracción* del cristal. El problema 7 sugiere cómo medirlos. La tabla 44-1 contiene los índices principales de refracción de seis cristales de refracción doble. En tres de ellos la onda *e* es más lenta; en los tres restantes es más rápida que la onda *o*. Algunos cristales de refracción doble (como la mica y el topacio) presentan mayor complejidad óptica que la calcita y requieren *tres* índices principales de refracción para describir completamente sus propiedades ópticas. Los cristales con una estructura básica cúbica (como NaCl; Fig. 43-15) son ópticamente isotrópicos, pues requieren sólo *un* índice de refracción.

El comportamiento de las velocidades de dos ondas que se desplazan en calcita se resume en la figura 44-15; ésta contiene dos superficies de ondas de Huygens que se propagan desde una fuente puntual imaginaria *S* incrustada en el cristal. La dirección típica en el cristal, donde $v_0 = v_e$, recibe el nombre de *eje óptico.* Éste es una propiedad del cristal sin que dependa de la polarización ni de la dirección de propagación de la luz. Las velocidades son muy diferentes en una dirección perpendicular al eje óptico; en esa dirección la superficie de las ondas *e* y *o* alcanza su máxima separación.

La superficie de la onda *o* en la figura 44-15 es una esfera, porque el medio es isotrópico para las ondas *o*. La superficie de la onda *e* no puede ser esférica, pues su velocidad varía con la dirección respecto al eje óptico. La superficie de la onda *e* es un elipsoide de revolución alrededor del eje óptico.

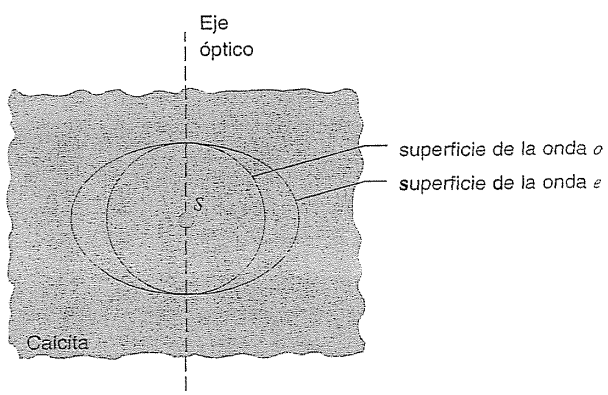


FIGURA 44-15. Superficies de onda de Huygens producidas por una fuente puntual *S* incrustada en la calcita.

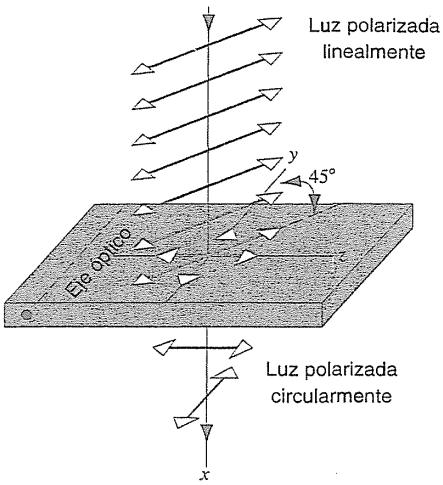


FIGURA 44-16. Una luz polarizada linealmente incide sobre una lámina de refracción doble cortada con su eje óptico paralelo a la superficie. El plano de polarización forma un ángulo de 45° con el eje óptico. De la lámina salen dos estados de polarización que estaban en fase antes de entrar en ella y se hallan fuera de fase cuando salen.

44-5 POLARIZACIÓN CIRCULAR

En la figura 44-16 se describe una onda polarizada linealmente que incide sobre una lámina delgada de un material birrefringente como la calcita. La onda sigue la dirección x, perpendicular a la cara de la lámina (el plano yz). Se cortó el material de modo que el eje óptico es paralelo a la cara de la lámina. Decidimos que el plano de polarización forme un ángulo de 45° con el eje óptico, a fin de que los componentes del campo $\vec{E}$ a lo largo del eje y perpendiculares a él tengan la misma amplitud.

Como se ilustra en la figura 44-15, la dirección perpendicular al eje óptico es aquella en que las velocidades de las ondas *o* y *e* difieren más. Sabemos también que la polarización de dichas ondas es perpendicular entre ellas. Si descomponemos la onda incidente en dos, una polarizada en el plano xy y la otra en el plano xz, estas ondas pueden representar las ondas *o* y *e* y viajar a diferentes velocidades a través de la lámina. Los dos estados de polarización que aparecen debajo de la lámina en la figura 44-16 representan los campos $\vec{E}$ que originalmente formaban parte del mismo frente de onda, antes de cruzar dicha lámina; una vez hecho esto, hay una diferencia de fase entre ellas que depende del espesor de la lámina y de sus dos índices de refracción.

Escojamos el espesor de la lámina de modo tal que esta diferencia de fase sea 90°, es decir, un componente alcanza su magnitud máxima cuando la amplitud del otro es cero. (Puesto que los índices de refracción varían con la longitud de onda, el espesor también variará con la longitud de onda de la luz.) En este caso a la lámina se le llama *placa de cuarto de onda,* porque 90° representan 1/4 del ciclo de oscilación.

En la figura 44-17 se describen los dos estados de polarización perpendicular 90° fuera de fase, en el momento que salen de la placa de cuarto de onda. En cualquier punto, el campo eléctrico neto es la suma vectorial de ambos componentes. Al desplazarse la onda, la dirección del campo da la impresión de girar alrededor de la dirección de propagación (el eje x de la Fig. 44-17). Desde la perspectiva de un punto en el eje x, la punta del campo neto $\vec{E}$ describe un círculo alrededor del eje x; por tal razón, a este tipo de onda se le conoce como *onda polarizada circularmente*. En contraste con una onda polarizada plana, donde la dirección de polarización permanece fija, aquí la dirección cambia continuamente al irse desplazando la onda. Esta rotación de la dirección tiene lugar con una frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de la onda electromagnética. La rotación es demasiado rápida para observarla de modo directo, pues las ondas luminosas tienen frecuencia en el intervalo de 10^{15} Hz.

A medida que la onda deja atrás a un observador situado frente a la luz y en un punto fijo del eje x de la figura 44-17, el vector $\vec{E}$ parece girar en dirección de las manecillas del reloj; ésta se conoce como *polarización circular derecha.* Al modificar la orientación de la polarización lineal incidente respecto al eje óptico de la figura 44-16, podemos crear una situación donde el vector $\vec{E}$ parezca girar en dirección contraria; a ésta se le llama *polarización circular izquierda.*

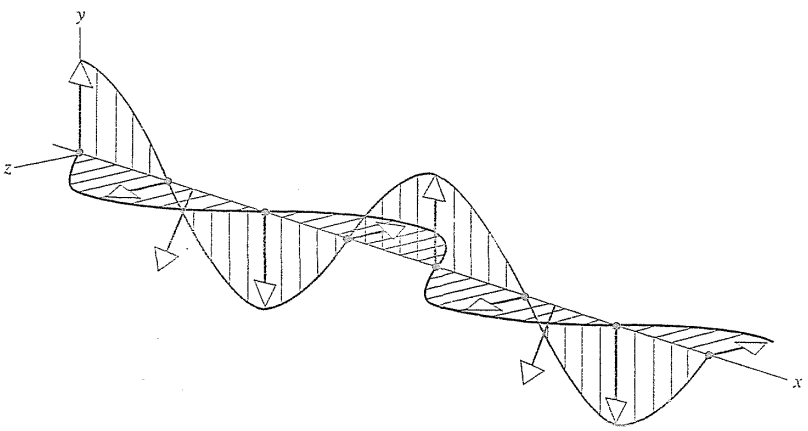


FIGURA 44-17. Dos ondas de igual amplitud y con polarización lineal en direcciones perpendiculares se desplazan en la dirección x. Únicamente se muestran los vectores $\vec{E}$. La fase de las ondas difiere 90°, de modo que una alcanza su máximo cuando la otra es cero. Con el tiempo el vector resultante $\vec{E}$ parece girar en dirección de las manecillas del reloj ante un observador situado en un lugar fijo del eje x.

Igual que en el caso de la luz no polarizada, la luz emergente es polarizada plana y tiene la mitad de la intensidad de la luz incidente cuando una luz circularmente polarizada incida sobre una hoja de polarización. Así pues, la hoja no puede usarse para distinguir entre ambos tipos de luz. Si queremos hacer la distinción, basta invertir el experimento de la figura 44-16: cuando la luz polarizada incida en una placa de cuarto de onda, se introducirá *otra* diferencia de fase de 90°; ésta (según la orientación del eje de la placa) se sumará o se restará a la diferencia original de fase de 90° para obtener una diferencia de 0 o de 180°. En consecuencia, los dos componentes alcanzan su máximo al mismo tiempo y la luz emergente está polarizada linealmente en un ángulo de ±45° con el eje óptico. Podríamos demostrar esta polarización lineal pasando la luz a través de una hoja de polarización y girándola para demostrar que la intensidad se reduce a cero cuando el eje de ella forma un ángulo de 45° con el eje óptico de la placa de cuarto de onda.

PROBLEMA RESUELTO 44-3. Una placa de cuarzo de cuarto de onda debe usarse con una luz de sodio ($\lambda = 589$ nm). ¿Cuál es su espesor mínimo?

Solución Dos ondas se desplazan por la lámina con velocidades correspondientes a los dos índices principales de refracción de la tabla 44-1 ($n_e = 1.553$ y $n_o = 1.544$). Si el cristal tiene un espesor x, el número de longitudes de onda de la primera onda contenida en dicho cristal es

$$N_e = \frac{x}{\lambda_e} = \frac{xn_e}{\lambda},$$

donde λ_e es la longitud de onda e en el cristal, y λ la del aire. En la segunda onda, el número de longitudes de onda es

$$N_o = \frac{x}{\lambda_o} = \frac{xn_o}{\lambda},$$

donde λ_o es la longitud de la onda θ en el cristal. La diferencia $N_e - N_o$ debe ser $m + \frac{1}{4}$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$. El espesor mínimo corresponde a $m = 0$ y entonces

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{\lambda}(n_e - n_o).$$

La ecuación anterior nos da

$$x = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = \frac{589 \text{ nm}}{(4)(1.553 - 1.544)} = 0.016 \text{ mm}.$$

Esta placa es bastante delgada. La mayor parte de las placas de cuarto de onda están hechas de mica; la hoja se rebaja para obtener el espesor correcto por prueba y error.

PROBLEMA RESUELTO 44-4. Una onda de luz polarizada linealmente, cuya amplitud es E_0, incide sobre una placa de calcita de cuarto de onda con su plano de polarización a 45° del eje óptico que es el eje y (Fig. 44-18). La luz emergente estará polarizada circularmente. ¿En qué dirección parecerá girar el vector eléctrico? La propagación se dirige hacia afuera de la página.

Solución El componente de onda cuyas vibraciones son paralelas al eje óptico (la onda e), al salir de la placa, puede representarse así

$$E_y = (E_0 \cos 45°) \operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \operatorname{sen} \omega t = E_m \operatorname{sen} \omega t.$$

El componente de onda cuyas vibraciones forman un ángulo recto con el eje óptico (la onda o) puede representarse como

$$E_z = (E_0 \operatorname{sen} 45°) \operatorname{sen}(\omega t - 90°) = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \cos \omega t$$

$$= -E_m \cos \omega t,$$

el cambio de fase de 90° representa la acción de la placa de cuarto de onda. Obsérvese que E_z alcanza su valor máximo de un cuarto de ciclo *más tarde* que E_y, porque en la calcita la onda E_z (la onda o) se mueve *con mayor lentitud* que la onda E_y (la onda e).

Para decidir la dirección de la rotación, vamos a localizar la punta del vector eléctrico rotatorio en dos instantes (Fig. 44-18*a*) $t = 0$ y (Fig 44-18*b*) un corto tiempo t_1 más tarde, escogido de modo que ωt_1 sea un ángulo pequeño. Cuando $t = 0$, las coordenadas de la punta del vector giratorio (Fig. 44-18*a*) son

$$E_y = 0 \quad \text{y} \quad E_z = -E_m.$$

En $t = t_1$ estas coordenadas se convierten aproximadamente en

$$E_y = E_m \operatorname{sen} \omega t_1 \approx E_m \omega t_1,$$

$$E_z = -E_m \cos \omega t_1 \approx -E_m.$$

En la figura 44-18*b* se observa lo siguiente: el vector que representa la luz emergente polarizada circularmente gira en dirección contraria a la de las manecillas del reloj; por convención, se le llama *polarizada circularmente a la izquierda*, porque siempre se supone que el observador está situado frente a la fuente luminosa.

El lector debería verificar que, si el plano de vibración de la luz incidente de la figura 44-18 se gira ±90°, la luz emergente estará *polarizada circularmente a la derecha.*

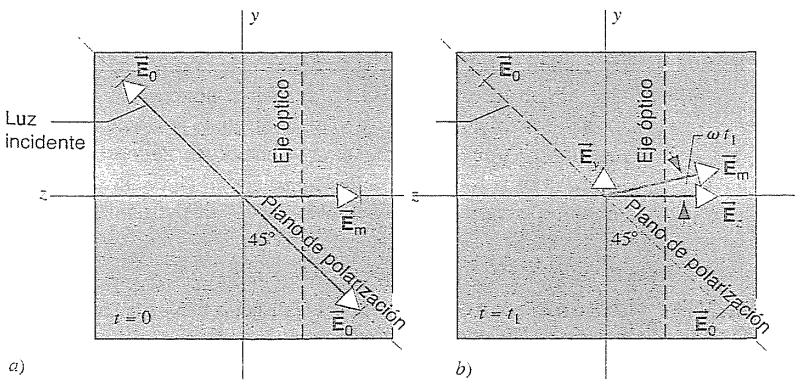


FIGURA 44-18. Problema resuelto 44-4. Una luz polarizada linealmente incide (desde atrás de la página) sobre una placa de cuarto de onda. La luz incidente polariza a 45° con los ejes y y z. *a*) En un momento dado $t = 0$, el vector saliente $\vec{E}$ apunta en la dirección $-z$. *b*) Después de un corto intervalo t_1 el vector ha girado y ocupado una posición nueva. En este caso el vector $\vec{E}$ gira en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, como lo advierte un observador que esté en el eje x y frente a la fuente de luz.

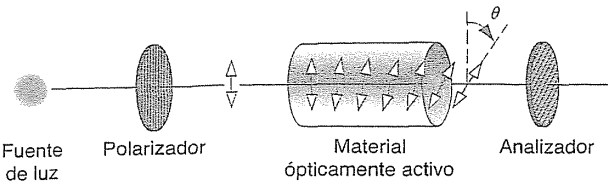


FIGURA 44-19. Un material ópticamente activo gira en el ángulo θ la dirección de polarización de la luz polarizado linealmente.

Actividad óptica

Cuando la luz polarizada linealmente pasa por ciertos materiales, observamos que el plano de polarización gira alrededor de la dirección de propagación en un ángulo que depende de las propiedades del material y de la distancia que la luz recorre a través de dicho material. A este efecto se le da el nombre de *actividad óptica* y a los materiales que poseen esta propiedad se les denomina materiales ópticamente activos. Los cristales de cuarzo y las soluciones en azúcar son ejemplos de materiales ópticamente activos. En la figura 44-19 se da un ejemplo de cómo medir la rotación. El polarizador y el analizador pueden alinearse cuidadosamente cuando no hay un material ópticamente activo entre ellos; cuando los hay, el ángulo θ en que el analizador debe girar para lograr la transmisión máxima indica la rotación del plano de polarización al cruzar el material.

Podemos suponer que la luz polarizada plana es una superposición de la luz polarizada circularmente a la derecha y a la izquierda. Imagine un vector $\vec{E}$ que gira en dirección de las manecillas del reloj y otro en sentido contrario, de modo que su suma vectorial (la cual siempre está a lo largo del bisector del ángulo entre ellos) simplemente oscila en la misma dirección. Al pasar por un material ópticamente activo, un componente de polarización circular se mueve con mayor rapidez que el otro. Se produce así un cambio en la fase relativa de ambos componentes y se altera la dirección de su suma vectorial. Este efecto es directamente proporcional a la distancia cubierta a través del material.

Muchos materiales ópticamente activos son líquidos orgánicos. Los compuestos orgánicos derivados de plantas y animales tienen a menudo una estructura helicoidal asimétrica; cuando la luz pasa por dichos materiales la forma de la molécula mejora el paso de un componente de polarización circular en relación con el otro. Por lo demás, es posible sintetizar compuestos orgánicos a partir de materiales no vivos; ya que contienen cantidades iguales de las dos formas helicoidales asimétricas. Se comprueba que dichos materiales no son ópticamente activos.

44-6 POLARIZACIÓN POR DISPERSIÓN

Una onda luminosa, al incidir en un sólido transparente, ocasiona que los electrones que forman el sólido oscilen periódicamente en respuesta al vector eléctrico que varía con el tiempo de la onda incidente. La onda que atraviesa el medio es la resultante de la onda incidente y de las radiaciones que proceden de los electrones oscilantes. La onda resultante alcanza su intensidad máxima en dirección del haz incidente, cayendo después rápidamente a uno de los dos lados. La ausencia de dispersión lateral, que sería esencialmente completa en un gran cristal "perfecto", se debe a que las cargas oscilantes en el medio operan en forma cooperativa o coherente.

Cuando la luz pasa por un líquido o un gas, se observa una mayor dispersión lateral. En este caso, los electrones oscilantes se hallan separados por distancias relativamente grandes y no están unidos por una estructura rígida; por ello, actúan de modo independiente en lugar de manera cooperativa. Así pues, es poco probable que ocurra una cancelación rígida de las perturbaciones de onda que no se desplacen hacia el frente; se produce una mayor dispersión lateral.

La luz dispersada hacia los lados desde un gas puede estar polarizada parcial o totalmente, a pesar de que la luz incidente no está polarizada. En la figura 44-20 se muestra un haz no polarizado que se dirige hacia arriba en la página y que choca contra un átomo de gas en O. Los electrones en O oscilan en respuesta a los componentes eléctricos de la onda incidente; su movimiento equivale a dos dipolos oscilantes cuyos ejes siguen las direcciones y y z en O. En las ondas electromagnéticas transversales, un dipolo oscilante no irradia a lo largo de su propio eje. Por tanto, un observador situado en O no recibirá radiación del dipolo en O que oscila en la dirección z. L radiación que llegue a O' provendrá en su totalidad del dipolo oscilante en O la dirección y, y estará polarizado linealmente en la dirección y.

A medida que el observador O' se desplaza por el eje z, la radiación ya no está totalmente polarizada porque el dipolo en O que oscila en el eje z puede irradiar un poco en esas direcciones. En los puntos del eje x, la radiación transmitida ($x > 0$) o dispersada hacia atrás ($x < 0$) no está polarizada, porque ambos dipolos pueden irradiar con la misma eficacia en la dirección x.

Un ejemplo común de tal efecto es la dispersión de la luz solar por las moléculas de la atmósfera terrestre. Si no hubiera atmósfera, el cielo aparecería negro, salvo en la dirección

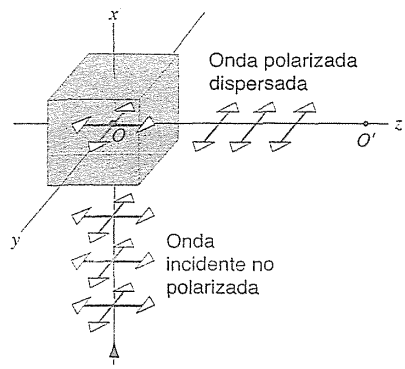


FIGURA 44-20. Un átomo en O dispersa una onda incidente no polarizada. La onda dispersada hacia O' en el eje z está polarizada linealmente.

UNIVERS 600

del Sol, como lo observan los astronautas que giran por encima de la atmósfera. Con un polarizador es fácil comprobar que la luz proveniente de un cielo sin nubes está polarizado por lo menos en parte. En la exploración polar este hecho se aplica en la *brújula solar.* Con este instrumento determinamos la dirección al observar la naturaleza de la polarización de la luz solar dispersada. Como se sabe, las brújulas magnéticas no son útiles en esas regiones. Se ha comprobado* que las abejas se orientan en el vuelo hacia la colmena y las fuentes de polen mediante la polarización de la luz del cielo; sus ojos contienen dispositivos que perciben la polarización.

Hace falta explicar por qué la luz dispersada desde el cielo es principalmente de color azul y por qué roja la que se recibe directamente del Sol, sobre todo durante el ocaso, cuando es mayor la longitud de la atmósfera que debe recorrer. La sección transversal de un átomo o una molécula en la dispersión de la luz depende de la longitud de onda; la luz azul se dispersa más eficazmente que la luz roja. Debido a esa circunstancia, la luz transmitida tiene el color de la luz solar normal en que los azules han sido suprimidos en su mayor parte; de ahí su aspecto más rojizo.

La conclusión de que la sección transversal de dispersión de la luz azul es más grande que la de la luz roja puede corroborarse razonablemente por medio de una analogía mecánica. Una intensa fuerza restauradora liga un electrón en un átomo o una molécula. El electrón tiene una frecuencia natural bien definida, como una masa pequeña suspendida en el espacio por un sistema de resortes. La frecuencia natural suele aparecer en una región correspondiente a la luz violeta o ultravioleta.

Cuando se deja que la luz incida sobre los electrones ligados, crea oscilaciones forzadas en la frecuencia del haz de luz incidente. En los sistemas mecánicos resonantes es posible "excitarlos" más eficazmente si aplicamos una fuerza externa cuya frecuencia se aproxima lo más posible a la frecuencia natural resonante. En el caso de la luz, la frecuencia de la luz azul es casi igual a la frecuencia resonante natural del electrón ligado que la frecuencia de la luz roja. Cabe suponer que la luz azul logra que exista una mejor oscilación de los electrones y que se disperse más eficazmente.

Dispersión doble (opcional)

Los experimentos como el de la figura 44-20 demuestran que las ondas electromagnéticas deben ser transversales, es decir, no hay un componente del vector $\vec{E}$ paralelo a la dirección de propagación. Supóngase que hubiera dicho compenente en dirección de la onda incidente (la dirección x en la Fig. 44-20). Entonces, los electrones en O oscilarían en las tres direcciones y la onda dispersada que se dirige hacia O' indicaría las tres direcciones posibles de polarización (dos transversales y una longitudinal). Así, esta radiación sería no polarizada. Si la radiación incidente es sólo transversal, como en la figura 44-20, la radiación propagada a O' presentará polarización lineal. Por tanto, la pregunta en cuanto a la naturaleza transversal de la radiación equivale a determinar si la que se dirige a O' está polarizada o no polarizada.

Existe otra forma de responder a la pregunta anterior. Pongamos un segundo dispersor en O'. Aquí, un dipolo oscilará en respuesta a la onda incidente (polarizada) en una dirección solamente (la dirección y', la del vector incidente $\vec{E}$ como se indica en la Fig. 44-21). La radiación dispersada por ese dipolo puede desplazarse en las direcciones $\pm x'$, pero (para la radiación transversal) *no en la dirección* y'. Así, un detector D que mida la *intensidad* de la radiación verá un máximo en las direcciones $\pm x'$ y un mínimo de intensidad cero en las direcciones $\pm y'$. Como se ilustra en la figura 44-21, a este experimento se le conoce como experimento de *dispersión doble.* Nótese que la *polarización* de la radiación dispersada por el primer blanco se obtiene mediante la *intensidad* de la radiación dispersada por el segundo blanco. Si la radiación que se desplaza hacia O' no estuviera polarizada (y o fuera totalmente transversal), el detector D registraría la misma intensidad en todas las direcciones.

Puede establecerse la naturaleza transversal de la radiación electromagnética ya sea midiendo la polarización de la radiación dispersada desde el primer blanco (como se observa en la Fig. 44-20) o midiendo la distribución de intensidad de la radiación dispersada desde el segundo blanco (como se indica en la Fig. 44-21). En algunas radiaciones (la luz, por ejemplo), es bastante fácil medir su polarización; sin embargo, el método de dispersión doble no es útil para este propósito. En otras radiaciones (como la de rayos X o rayos

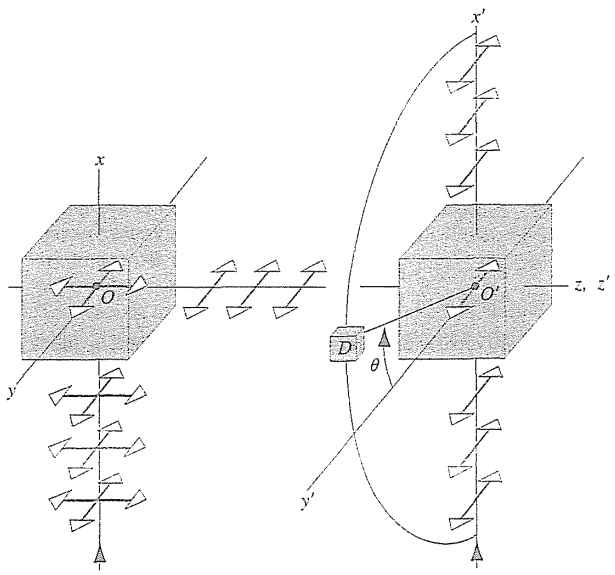


FIGURA 44-21. Otro átomo en O' puede dispersar la radiación polarizada dispersada en O. Un detector D mide la intensidad de la radiación por O' en varias posiciones θ del plano $x'y'$.

* Véase "Polarized-Light Navigation by Insects", de Rudiger Wehner, *Scientific American,* julio de 1976, p. 106.

gamma), este método es el preferido. En efecto, tras el descubrimiento de los rayos X en 1898, se discutió si eran ondas o partículas. En un experimento de dispersión doble efectuado en 1906 por Charles Barkla, se demostró que los rayos X, como la luz visible, son transversales y se confirmó que forman parte del espectro electromagnético.

OPCIÓN MÚLTIPLE

44-1 Polarización de las ondas electromagnéticas

44-2 Hojas de polarización

1. Una hoja ideal de polarización, orientada verticalmente, transmite 50% de luz incidente no polarizada. La giramos 45°. ¿Qué fracción de la intensidad incidente pasa ahora?
   A) 0% B) 50% C) 100%
   D) Cualquiera % o 100%

2. Una hoja ideal de polarización, orientada verticalmente, transmite 50% de luz incidente polarizada. La giramos 45°. ¿Qué fracción de la intensidad incidente pasa ahora?
   A) 0% B) 50% C) 100%
   D) Cualquiera % o 100%

3. Una hoja ideal de polarización transmite 90% de la luz *parcialmente* polarizada incidente.
   a) ¿Qué porcentaje de ella está polarizada?
   A) Entre 0 y 10%
   B) Entre 0 y 20%
   C) Entre 80 y 90%
   D) Entre 80 y 100%
   E) 100%

   b) ¿Qué fracción de la luz transmitida está polarizada?
   A) Entre 0 y 10%
   B) Entre 0 y 20%
   C) Entre 80 y 90%
   D) Entre 80 y 100%
   E) 100%

   c) La hoja de polarización se gira ahora 45°; durante el proceso de rotación disminuye la intensidad de la luz transmitida monótonamente. ¿Qué fracción de la intensidad incidente pasa ahora?
   A) 0%
   B) Entre 0 y 50%
   C) 50%
   D) Entre 50 y 80%
   E) Entre 40 y 90%

4. Dos hojas ideales de polarización se apilan de manera que no se transmita luz incidente *no polarizada*. Una tercera hoja se desliza entre las dos primeras en un ángulo de 45° con la del fondo. La fracción de la luz transmitida por todo el montón es
   A) cero todavía. B) 1/8. C) 1/4. D) 1/2.

5. Se disponen 10 filtros de polarización de manera que el ángulo $\Delta\theta$ entre la dirección de polarización de dos filtros adyacentes sea el mismo. Este ángulo se escoge en forma tal que cada filtro permita pasar sólo 10% de la luz proveniente del anterior.
   a) La luz incidente está polarizada y sigue una dirección de polarización $\Delta\theta$ desde la primera hoja. ¿Qué fracción de la intensidad luminosa cruza el montón entero?
   A) 0 B) $(0.1)^{10}$ C) $(0.9)^{10}$ D) $(0.1)^9$
   b) La luz incidente polarizada se reemplaza con luz no polarizada. ¿Qué fracción de la intensidad luminosa cruza ahora el montón entero?
   A) 0.05 B) $\frac{1}{2}(0.1)^9$ C) $\frac{1}{2}(0.9)^9$ D) $(0.1)^9$

6. ¿Qué debería ocurrir con el patrón de interferencia producido con un aparato de dos rendijas, si la luz procedente de una atraviesa una hoja de polarización vertical y si hacemos pasar por una hoja de polarización horizontal la que atraviesa la otra rendija?
   A) El patrón de interferencia se parecerá a un patrón normal de rendija doble.
   B) El patrón de interferencia será más débil que un patrón normal de rendija doble.
   C) El patrón de interferencia será más difuso que el normal de rendija doble
   D) No habrá patrón de interferencia.

44-3 Polarización por reflexión

7. La luz reflejada contra la superficie de una carretera tiene 1/3 de polarización vertical y 2/3 de polarización horizontal.
   a) ¿En qué ángulo deberíamos orientar la dirección de polarización de una hoja para conseguir la reducción máxima de la intensidad luminosa?
   A) vertical
   B) 30° de la vertical
   C) 30° de la horizontal
   D) horizontal
   b) ¿Qué fracción de luz pasa por el filtro si la orientamos para que produzca la máxima reducción de la intensidad luminosa?
   A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 0

8. Una luz no polarizada choca contra una interfaz aire-agua en un ángulo tal que el rayo reflejado está completamente polarizado como se muestra en la figura 44-22*a*. Un segundo rayo de luz no polarizada se desplaza *hacia atrás*, paralelamente al rayo refractado antes como se observa en la figura 44-22*b*. Describa la polarización del rayo reflejado en esta figura.
   A) El rayo está completamente polarizado.
   B) El rayo está parcialmente polarizado.
   C) El rayo experimenta reflexión interna total.
   D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

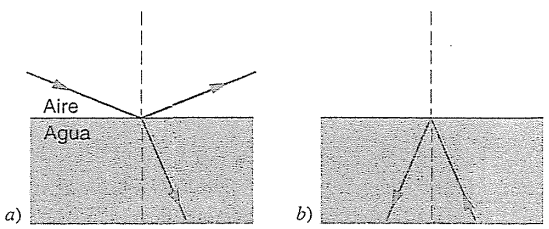


FIGURA 44-22. Pregunta de opción múltiple 8.

44-4 Refracción doble

44-5 Polarización circular

9. Una luz polarizada circularmente a la izquierda se refleja contra un espejo plano. ¿Cuál es el estado de polarización del rayo reflejado?
- A) Polarización circular a la izquierda.
- B) Polarización circular a la derecha.
- C) Polarización plana.
- D) La respuesta depende del ángulo de incidencia.

44-6 Polarización por dispersión

10. Vea directamente hacia arriba cuando el Sol se encuentre en el horizonte al este. ¿Qué estado de polarización tiene la luz azul procedente del cielo arriba de usted?
- A) No está polarizada.
- B) Está polarizada fundamentalmente en la dirección este-oeste.
- C) Está polarizada fundamentalmente en la dirección norte-sur.
- D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

11. Un haz de luz pasa por un filtro de polarización antes de ser proyectado horizontalmente en una solución diluida de leche en agua. ¿Qué orientación del eje de transmisión de la hoja de polarización aumentará al máximo la intensidad de la luz dispersada vista desde arriba?
- A) Vertical
- B) Horizontal
- C) La intensidad dispersada no depende de la dirección de polarización.
- D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.

PREGUNTAS

1. Se dice que la luz proveniente de fuentes ordinarias no está polarizada. ¿Se le ocurren algunas fuentes comunes que emitan luz polarizada?

2. La luz procedente de un tubo de descarga de gas de laboratorio no está polarizada. ¿Cómo conciliamos esto con el hecho de que los átomos y las moléculas irradian como dipolos eléctricos cuya radiación presenta polarización lineal?

3. Unas hojas de polarización contienen largas cadenas de hidrocarburo que se alinean en un arreglo paralelo durante el proceso de producción. Explique de qué manera una hoja puede polarizar la luz. (Sugerencia: Los electrones tienen relativa libertad de movimiento alrededor de estas cadenas.)

4. Tal como las experimentamos en condiciones normales, las ondas de radio casi siempre están polarizadas y la luz visible casi siempre está no polarizada. ¿A qué se debe?

5. ¿Qué determina la longitud y la orientación adecuadas de las orejas de conejo en un televisor portátil?

6. ¿Por qué las ondas sonoras no están polarizadas?

7. ¿Por qué los anteojos de sol hechos con materiales polarizadores ofrecen gran ventaja sobre los que se basan simplemente en los efectos de absorción? ¿Cuáles podrían ser sus desventajas?

8. Una luz no polarizada cae sobre dos hojas de polarización orientadas de manera que no se transmite luz. Si entre ellas se pone una hoja de polarización, ¿puede transmitirse luz? Si la respuesta es afirmativa, explique por qué.

9. El problema resuelto 44-1 muestra que, cuando el ángulo entre dos direcciones de polarización se modifica de 0 a 45°, la intensidad del haz transmitido se reduce a la mitad de su valor inicial. ¿Qué sucede con esta energía "faltante"?

10. Se le dan varias hojas de polarización. Explique cómo podría usarlas para girar en un ángulo determinado el plano de polarización de una onda con polarización lineal. ¿Cómo podría hacerlo con la menor pérdida de energía?

11. A comienzos de la década de 1950, las películas en tercera dimensión gozaron de gran popularidad. Los espectadores usaban anteojos polarizados y se colocaba una hoja de polarización delante de los dos proyectores que se necesitan. Explique cómo funcionaba el sistema. Mencione alguno o algunos problemas que llevaron a abandonarlo.

12. Una rejilla de alambre, que consiste en un arreglo de alambres dispuestos paralelamente, puede polarizar un haz incidente no polarizado de ondas electromagnéticas que la atraviesan. Explique *a*) el hecho que el diámetro de los alambres y el espaciamiento entre ellos debe ser mucho menor que la longitud de onda incidente para obtener una polarización eficaz y *b*) el hecho de que el componente transmitido es aquel cuyo vector eléctrico oscila en una dirección perpendicular a los alambres.

13. La ley de Brewster, ecuación 44-2, determina el ángulo de polarización en la reflexión contra un material dieléctrico como el vidrio (Fig. 44-11). He aquí una interpretación plausible de la reflexión cero del componente paralelo en ese ángulo: se hace que las cargas en el dieléctrico oscilen paralelamente al rayo reflejado por este componente, sin que produzca radiación en esa dirección. Explique esto y comente la verosimilitud del fenómeno.

14. Explique de qué manera la polarización por reflexión podría ocurrir si la luz incide sobre la interfaz desde el lado del mayor índice de refracción (vidrio a aire por ejemplo).

15. Encuentre una manera de identificar la dirección de una hoja de polarización. No aparecen marcas en ella.

16. ¿Es el eje óptico de un cristal de refracción doble simplemente una línea o una dirección en el espacio? ¿Tiene un sentido de dirección como la flecha? ¿Qué decir de la dirección característica de una hoja de polarización?

17. Si el hielo refracta doblemente (Tabla 44-1), ¿por qué no percibimos dos imágenes de los objetos vistos a través de un cubo de hielo?

18. ¿Es posible, recombinándolos, obtener los efectos de interferencia entre el haz *o* y el haz *e*, que en la figura 44-14 están separados por un cristal de calcita respecto al haz incidente no polarizado?

19. Con base en la tabla 44-1, ¿cabe suponer que una placa de cuarto de onda hecha de calcita sea más gruesa que otra hecha de cuarzo?

20. ¿Siempre se desplaza con una velocidad dada por c/n_e la onda *e* en cristales de refracción doble?

21. Invente la manera de identificar la dirección del eje óptico en una placa de cuarto de onda.

22. Describa la luz transmitida, si una luz polarizada linealmente incide sobre una placa de cuarto de onda con su plano de vibración que forma un ángulo *a*) de 0° o *b*) de 90° con el eje de ella. *c*) Si se escoge arbitrariamente este ángulo, a la luz transmitida se le llama polarizada elípticamente; descríbala.

23. Se le da un objeto que puede ser *a*) un disco de vidrio gris, *b*) una hoja de polarización, *c*) una placa de cuarto de onda o *d*) una placa de media onda (Ej. 15). ¿Cómo lo identificaría?

24. ¿Puede un haz de luz polarizado linealmente representarse como la suma de dos haces polarizado circularmente de rotación contraria? ¿Qué efecto tiene el cambio de fase de uno de los componentes circulares en el haz resultante?
25. ¿Podríamos polarizar circularmente un haz de radar?
26. ¿Cómo puede un haz de luz polarizada circularmente a la derecha ser transformnado en un haz polarizado circularmente a la izquierda?
27. Se dice que un haz de luz no está polarizado, que está polarizado linealmente o circularmente. ¿Cómo podría escoger entre ellos con técnicas experimentales?
28. Un haz de luz paralelo es absorbido por un objeto colocado en su trayectoria. ¿En qué circunstancias se transferirá a él *a*) un momento lineal y *b*) un momento angular?
29. Cuando se observa el cielo claro a través de una hoja de polarización, puede comprobarse que la intensidad cambia al hacerla girar. No sucede lo mismo cuando vemos una nube a través de la hoja. ¿Por qué?
30. En 1949 se descubrió que la luz de las estrellas lejanas de nuestra galaxia presenta una ligera polarización lineal y que el plano preferido de vibración es paralelo al de la galaxia. Se debe probablemente a la dispersión no isotrópica de su luz por acción de granos interestelares alargados y un poco alineados (Prob. 16 del Cap. 22). ¿Como hay que orientar el campo magnético respecto al plano galáctico, si orientamos los granos con sus ejes largos paralelamente a las líneas interestelares del campo magnético como se comentó en la sección 44-2, y si absorben e irradian ondas electromagnéticas como los electrones oscilantes en una antena de radio?
31. ¿Es la polarización o la interferencia una prueba más adecuada para identificar las ondas? ¿Aportan la misma información?

EJERCICIOS

44-1 Polarización de las ondas electromagnéticas

1. Las ecuaciones del campo magnético aplicables a una onda electromagnética en el espacio abierto son $B_x = B$ sen $(ky + \omega t)$, $B_y = B_z = 0$. *a*) ¿En qué dirección se propaga? *b*) Escriba las ecuaciones del campo eléctrico. *c*) ¿Está polarizada la onda? De ser así, ¿en qué dirección?
2. Pruebe que no pueden producir efectos de interferencia dos ondas de luz polarizadas linealmente y de igual amplitud, con sus planos de vibración formando ángulos rectos. (Sugerencia: Demuestre que la intensidad de la onda luminosa resultante, promediada en uno o más ciclos de oscilación, es la misma sin importar la diferencia de fase que existe entre las dos ondas.)

44-2 Hojas de polarización

3. Un haz de luz no polarizada con una intensidad de 12.2 mW/m^2 llega en incidencia normal sobre una hoja de polarización. *a*) Determine el valor máximo del campo eléctrico del haz transmitido. *b*) Calcule la presión de radiación ejercida sobre la hoja de polarización.
4. Una luz no polarizada incide sobre dos hojas de polarización puestas una encima de otra. ¿Qué ángulo debe haber entre las direcciones características de ellas si la intensidad de la luz transmitida equivale a un tercio de la del haz incidente? Suponga que las hojas de polarización son ideales, es decir, que reducen exactamente un 50% la intensidad de la luz no polarizada.
5. Se apilan tres placas de polarización. La primera y la tercera están cruzadas; la del medio tiene su eje en 45° con los ejes de las dos restantes. ¿Qué fracción de la intensidad de un haz incidente no polarizado transmite el arreglo?
6. Un haz de luz polarizado linealmente incide contra dos hojas de polarización. La dirección característica de la segunda es 90° respecto a la luz incidente. Y la de la primera forma un ángulo θ con la luz incidente. Determine el ángulo θ de una intensidad de haz transmitido que sea 0.100 veces la del haz incidente.
7. Un haz de luz no polarizada incide sobre cuatro hojas apiladas de polarización alineadas de modo que su dirección característica se gira 30° en dirección de las manecillas del reloj respecto a la hoja anterior. ¿Qué fracción de la intensidad incidente se transmite?
8. Un haz de luz está polarizado linealmente en dirección vertical. Llega en incidencia normal sobre una hoja de polarización, con su dirección de polarización a 58.8° con la vertical. El haz transmitido llega, también en incidencia normal, sobre una segunda hoja con su dirección de polarización horizontal. La intensidad del haz original es 43.3 W/m^2. Determine la intensidad del haz transmitido por la segunda hoja.
9. Suponga que en el ejercicio 8 el haz incidente no estaba polarizado. ¿Qué intensidad tiene ahora el haz transmitido por la segunda hoja?

44-3 Polarización por reflexión

10. La luz que se desplaza en el agua con un índice de refracción de 1.33 incide sobre una placa de vidrio cuyo índice de refracción es 1.53. ¿En qué ángulo de incidencia la luz reflejada presenta una polarización lineal completa?
11. *a*) ¿En qué ángulo de incidencia la luz reflejada por el agua estará totalmente polarizada? *b*) ¿Depende este ángulo de la longitud de onda de la luz?
12. Cuando una luz roja en el vacío incide en el ángulo de polarización sobre cierta lámina de vidrio, el ángulo de refracción es 31.8°. ¿Cuáles son *a*) el índice de refracción del vidrio y *b*) el ángulo de polarización?
13. Calcule el intervalo de los ángulos de polarización con luz blanca incidente sobre un cuarzo fundido. Suponga que los límites de longitud de onda son 400 y 700 nm y utilice la curva de dispersión de la figura 39-11.

44-4 Refracción doble

14. Una luz linealmente polarizada de 525 nm de longitud de onda llega, en incidencia normal, contra un cristal de wurcita que se corta con sus caras paralelas al eje óptico. ¿Cuál es el espesor más pequeño posible del cristal si los rayos emergentes o y e se combinan para producir una luz polarizada linealmente? Consulte la tabla 44-1.

44-5 Polarización circular

15. ¿Cuál sería la acción de una placa de media onda (es decir, que tenga el doble de espesor de una placa de cuarto de onda) en *a*) una luz polarizada linealmente (suponga que el plano de la vibración es de 45° con el eje óptico de ella), *b*) en una luz polarizada circularmente y *c*) en una luz no polarizada?
16. Encuentre el mayor número de placas de cuarto de onda, que se emplearán con luz de 488 nm de longitud de onda y que podrían cortarse de un cristal de dolomita cuyo espesor mide 0.250 mm.

44-6 Polarización por dispersión

PROBLEMAS

1. Cierto día, en una playa cerca del ocaso, el componente horizontal del vector de campo eléctrico es 2.3 veces el componente vertical. Una persona que toma el sol se pone anteojos polarizantes que suprimen el componente horizontal del campo. *a*) ¿Qué fracción de la energía luminosa recibida antes de ponerse los anteojos llega ahora a los ojos? *b*) La persona se recuesta en un costado, con los anteojos todavía puestos. ¿Qué fracción de la energía luminosa recibida antes de ponérselos llega ahora a los ojos?
2. Una haz de luz es una mezcla de luz polarizada y no polarizada. Cuando se envía a través de una hoja de polarización, observamos que la intensidad transmitida puede modificarse en un factor de cinco según la orientación de la hoja. Calcule la intensidad relativa de los dos componentes del haz incidente.
3. Un grupo de hojas de polarización se dispone de modo que el ángulo entre dos hojas adyacentes es α. Las hojas se colocan en forma tal que N hojas giran el plano de polarización en θ, donde $\theta = N\alpha$. Calcule la fracción de luz que pasará por ellas en el límite cuando $N \rightarrow \infty$. Suponga que θ está fijo, por cuando $\alpha \rightarrow 0$.
4. Se quiere hacer girar 90° el plano de vibración de un haz de luz polarizada. *a*) ¿Cómo podría lograrse empleando hojas de polarización? *b*) ¿Cuántas hojas se necesitan para que la pérdida total de la intensidad sea menos de 5.0%?
5. Una hoja de polarización y una placa de cuarto de onda se pegan en forma tal que, si la combinación se pone con la cara A contra una moneda brillante, la cara de ésta puede verse cuando la ilumina una luz de longitud de onda apropiada. Cuando la combinación se coloca con la cara A lejos de la moneda, ésta no puede verse. *a*) ¿Cuál componente se encuentra en la cara A y *b*) cuál es la orientación relativa de los componentes?
6. Un haz estrecho de luz no polarizada incide sobre un cristal de calcita cortado con su eje óptico como se muestra en la figura 44-23. *a*) Con $t = 1.12$ cm y con $\theta_i = 38.8°$ calcule la distancia perpendicular entre los dos rayos emergentes x y y. *b*) ¿Cuál es el rayo o y cuál el rayo e? *c*) ¿Cuáles son los estados de polarización de los rayos emergentes? *d*) Describa lo que sucede si un polarizador se coloca en el haz incidente y se gira. (Sugerencia: Dentro del cristal las vibraciones del vector $\vec{E}$ de un rayo siempre son perpendiculares al eje óptico, y las del otro siempre son paralelas. Los dos rayos se describen mediante los índices n_o y n_e; *en este plano*, cada rayo cumple la ley de Snell.)

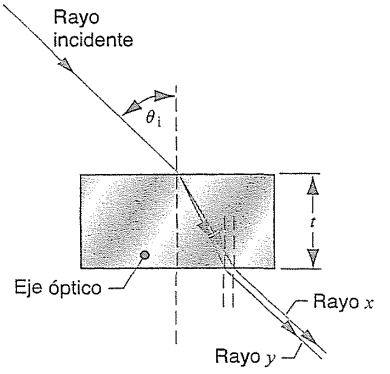


FIGURA 44-23. Problema 6.

7. De un pedazo de calcita se corta un prisma de modo que el eje óptico sea paralelo al lado del prisma, según se señala en la figura 44-24. Describa cómo el prisma podría servir para medir los dos índices principales de refracción de la calcita. (Sugerencia: Consulte la sugerencia del Prob. 6 y también el Prob. res. 39-4.)

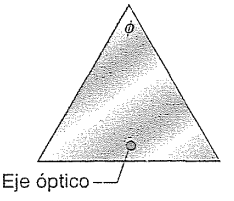


FIGURA 44-24. Problema 7.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
SAN DIEGO

CAPÍTULO 45

LA NATURALEZA DE LA LUZ

En este capítulo, el primero de los ocho dedicados a la física cuántica, vamos a concentrarnos en la naturaleza de la luz. En el capítulo 41 ofrecimos pruebas contundentes de que podemos considerarla una onda electromagnética. En este capítulo nada se opone a ese punto de vista ni invalida los experimentos que lo corroboran. Con todo, presentamos un segundo punto de vista —igualmente basado en experimentos: también podemos concebirla como una partícula, llamada fotón.

Señalamos aquí que la onda y la partícula son conceptos meramente clásicos y, por lo mismo, no es posible extenderlos ampliamente en el campo cuántico. El punto de vista ondulatorio y el corpuscular son válidos en gran número de experimentos. Si queremos conocer la verdadera naturaleza de la luz es preciso profundizar más.

45-1 INTRODUCCIÓN AL FOTÓN

En la sección 41-2, que debería volver a leer, vimos que el experimento de rendija doble realizado por Thomas Young en 1801, aporta pruebas fidedignas de que la luz visible es de naturaleza ondulatoria. En ese importante experimento, la luz proveniente de una sola fuente incide sobre una barrera que contiene dos rendijas. La luz que pasa por ellas incide después sobre una pantalla detectora, que podría ser una película fotográfica. En algunos puntos del material fotográfico, los haces que se superponen tienden a reforzarse, y en otros a cancelarse, formando una serie de franjas de interferencia como los de la figura 41-4. Este fenómeno de *interferencia* es un seguro indicador de que la luz es de una onda.

Con el término "luz" designamos no sólo la luz visible sino también todas las radiaciones del espectro electromagnético, desde las largas ondas de radio hasta los rayos X y los rayos gamma. Mediante varios tipos de experimentos de interferencia demostramos que todas las radiaciones del espectro presentan un aspecto ondulatorio.

Por ejemplo, en la sección 43-4 describimos un experimento de interferencia, donde hicimos que un haz de rayos X incidiera sobre un cristal. Los átomos de este cristal producen un arreglo periódico tridimensional de centros de dispersión para el haz incidente de rayos X. En ciertas direcciones —y en ellas solamente— los rayos dispersados desde los átomos individuales interfieren de modo constructivo para generar rayos intensos muy bien definidos. Estos rayos pueden crear un patrón característico en una película fotográfica que los intercepte (Fig. 43-14). Este experimento ofrece una prueba contundente de que los rayos X son de naturaleza ondulatoria como la luz visible.

Pero, existe otra propiedad de la luz que parece contradecir la teoría de que "la luz es una onda". Cuando la luz incide en una película fotográfica, la energía es absorbida por granos individuales de haluro de plata de la emulsión, un grano a la vez. En ningún momento es posible predecir cuál de dichos granos absorberá a continuación su paquete fijo de energía. Si la luz incide sobre un dispositivo fotoeléctrico —digamos un fotodiodo—, a la salida del fotodiodo se observa en un pantalla de osciloscopio como una serie de pulsos discretos, espaciados aleatoriamente en el tiempo. Por el contrario, si conectamos el fotodiodo a un altavoz, su salida se escucha como una serie de "clics" espaciados aleatoriamente.

Al incidir la luz sobre un detector como una película fotográfica o un dispositivo fotoeléctrico, la luz incidente no le transfiere energía uniformemente a la superficie sobre la que

incide, sino sólo en puntos discretos situados aleatoriamente. Más aún, si la luz es monocromática, es decir, si consta de una sola longitud de onda, se transfiere energía del haz al detector no únicamente en los puntos discretos sino también en todos ellos con una cantidad discreta bien definida. Este comportamiento indica la naturaleza corpuscular, más que ondulatoria, de la luz incidente.

La luz como fotones

En 1905 Einstein, basándose en el trabajo innovador de Max Planck* propuso que la luz podría realmente existir como haces discretos de energía, a los que llamó *fotones*. Desde su punto de vista, la energía E relacionada con un fotón individual es

$$E = hf. \tag{45-1}$$

En 1917 Einstein fue más allá y a cada fotón le asignó un momento lineal de magnitud

$$p = h/\lambda. \tag{45-2}$$

En las ecuaciones anteriores f y λ son, respectivamente, la frecuencia y la longitud de onda de la luz incidente, h, una constante cuyo valor con cuatro cifras significativas es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}.$$

La *constante de Planck,* nombre con que esta cantidad se conoce hoy, resulta ser la constante fundamental de la física cuántica.

Una ojeada a las ecuaciones 45-1 y 45-2 revela cuán sutil es la naturaleza de la luz. En el lado izquierdo de ellas tenemos energía y momento, propiedades que asociamos a las partículas. En el lado derecho tenemos frecuencia y longitud de onda, propiedades que asociamos a las ondas.

"Partícula" y "onda" son conceptos que la mente humana ha desarrollado a lo largo de milenios, partiendo de la familiaridad con objetos como las piedras arrojadas, por una parte, y por la otra, las ondas en el agua. No es posible extender sin variaciones estos conceptos clásicos al mundo de los cuantos. Ni lo intente. En ese mundo los físicos han aprendido a no utilizar esta clase de imágenes mentales concretas, salvo cuando la índole de un experimento aconseje hacerlo.

Revisión del experimento de rendija doble

Retomemos ahora el experimento de la rendija doble de la sección 41-2. Descubriremos el patrón de interferencia al reemplazar la pantalla con una película fotográfica y haremos la fuente tan débil que en cualquier momento la energía del aparato no sea mayor que la de un fotón individual. Si pudiéramos examinar la película minuto tras minuto, distinguiríamos un patrón de puntos que al inicio parece estar distribuido de manera aleatoria, pero que al ir apareciendo más y más puntos empieza a tomar forma el patrón de franjas de interferencia constructiva y destructiva.

La interacción con un fotón individual oscurece un grano de la película. Si suponemos que la fuente de luz es tan débil que emite fotones individuales uno a la vez, uno sale de ella y más tarde llega a la película. Basándonos en nuestra experiencia con la física clásica, podríamos estar tentados a preguntar cómo un fotón se dirige de la fuente a la película. ¿Cuál es su trayectoria? Más concretamente, ¿por cuál ranura pasa?

Si tratamos de contestar tal pregunta, estaremos hablando evidentemente de la naturaleza corpuscular de la luz. Las partículas tienen trayectoria; las ondas no. Si pensamos que la luz está constituida por paquetes individuales concentrados de energía, éstos deben cruzar una de las ranuras. Pero como vimos en el capítulo 41, el experimento de rendija doble supone que la luz se comporta como una onda, para que podamos dividir el frente de onda en dos partes y recombinarlas después. Las dos descripciones, basada una en las partículas y otra en las ondas, son claramente incompatibles entre sí. ¿Es la luz una partícula o una onda?

Esta pregunta tan desconcertante admite dos respuestas igualmente desconcertantes: *a)* la luz *no* es una partícula ni una onda y *b)* es *a la vez* una partícula y una onda. Con la primera respuesta queremos decir que la luz no satisface los conceptos clásicos excluyentes de un comportamiento rigurosamente corpuscular u ondulatorio. Con la segunda queremos decir que la naturaleza corpuscular y ondulatoria está contenida en lo que llamamos luz; ésta puede manifestar uno u otro tipo de comportamiento según el tipo de experimento en cuestión. La luz tiene un comportamiento más misterioso y complejo del que indican las simples nociones de "onda" o "partícula".

En el siguiente capítulo veremos que los electrones y otras partículas también muestran esta naturaleza dual tan compleja. En este capítulo describiremos primero los experimentos que revelan la naturaleza fotónica de la luz y luego un aparato simple que, a discreción del experimentador, puede revelar la naturaleza corpuscular u ondulatoria de la luz que ya se encuentra en el aparato.

45-2 RADIACIÓN TÉRMICA

El concepto de fotón se introdujo en física a raíz de los estudios sobre la radiación emitida por objetos calentados. Estos estudios se remontan a mediados del siglo XIX y culminan en 1905, cuando Einstein propuso la noción de fotón. En la presente sección vamos a reseñar este adelanto, que ocurrió en un periodo cuando empezaban a establecerse las ideas de la termodinámica. De hecho, estas dos líneas de avance estuvieron estrechamente relacionadas.

A la mayoría de los objetos los vemos por la luz que reflejan. Pero también *emiten* radiación electromagnética; si su temperatura es lo bastante elevada, podemos ver la radiación emitida o detectarla en otras formas. Por ejemplo, podemos percibir calor al poner la mano cerca de una lámpara, o el fuego que se debe a la radiación infrarroja emitida. Se da el nom-

* Max Planck (1858-1947) fue un físico teórico alemán cuya especialización en termodinámica lo llevó a estudiar la radiación térmica y a descubrir la cuantización de la energía; por este descubrimiento le fue otorgado en 1918 el Premio Nobel de Física.

bre de *radiación térmica* a la que emite un cuerpo por su temperatura. Se distribuye continuamente en longitud de onda, pues tiene una intensidad mensurable en una gran extensión del espectro electromagnético.

En el siglo XIX los investigadores descubrieron dos propiedades importantes de la radiación térmica: 1) *a medida que aumenta la temperatura de un cuerpo, crece rápidamente la intensidad de la radiación térmica emitida.* 2) *Cuanto más alta sea la temperatura, más corta será la longitud de onda de la parte más intensa del espectro de radiación.* Los intentos de expresar las observaciones anteriores en términos cuantitativos se toparon con un problema: la naturaleza de la radiación térmica proveniente de un cuerpo a determinada temperatura depende del material de que esté hecho y de factores como la textura de la superficie. Al parecer, una cantidad tan grande de datos experimentales sensibles al material no ocultaban ninguna ley fundamental de la física.

La solución del problema se logró en 1859 cuando el alemán Gustav Kirchhoff (1824-1887) propuso que, si formamos una cavidad en un cuerpo sólido, si mantenemos sus paredes a una temperatura uniforme T y si perforamos un hoyo pequeño en la pared, la radiación que salga de él no debería depender del material ni del modo en que se construya la cavidad, sino sólo de la temperatura. La figura 45-1 muestra la distribución de longitud de onda de esta *radiación de cavidad*, nombre con que se le conoce. Por su relativa simplicidad, la radiación de cavidad (radiación dentro de una caja) desempeña en los estudios térmicos la misma función que el gas ideal (materia dentro de una caja) en el estudio de los gases.

Ahora podemos expresar en términos cuantitativos el primero de los dos enunciados cualitativos anteriores. Escribimos la intensidad radiante $I(T)$ (potencia total irradiada en todas las longitudes de onda por unidad de superficie) de la radiación de cavidad así

$$I(T) = \sigma T^4, \tag{45-3}$$

donde T es la temperatura absoluta (kelvin), σ y es una constante universal denominada *constante de Stefan-Boltzmann*; su valor actualmente aceptado es $5.670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$. A la ecuación 45-3 se le llama *ley de Stefan-Boltzmann*. El austriaco Josef Stefan (1835-1893) la dedujo en 1879 mediante una serie de mediciones; Boltzmann la dedujo teóricamente algunos años más tarde, aplicando conceptos de las teorías termodinámica y electromagnética. La intensidad $I(T)$ representa la potencial irradiada *total*, sumada o integrada en todas las longitudes de onda. En la figura 45-1 la intensidad para una temperatura se indica con el área total debajo de los puntos correspondientes de datos; estas superficies aumentan mucho con la temperatura.

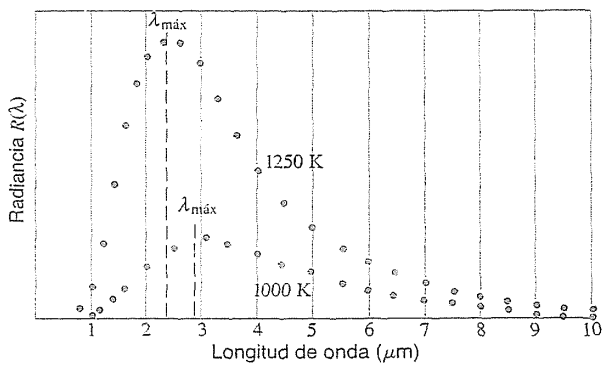


FIGURA 45-1. Posible resultado de la medición de la radiancia en muchas longitudes de onda con dos temperaturas distintas. El pico $\lambda_{máx}$ se corre a longitudes de onda más cortas al ir elevándose la temperatura.

Podemos expresar el segundo de los enunciados cualitativos anteriores por medio de

$$\lambda_{máx}\, T = \text{una constante.} \tag{45-4}$$

donde $\lambda_{máx}$ es la longitud de onda en que la radiación emitida por una cavidad a una temperatura T alcanza su intensidad máxima. La constante en la ecuación 45-4 tiene hoy el valor aceptado de 2 898 μm · K. El alemán Wilhelm Wien (1864-1928) dedujo esta ecuación de los principios termodinámicos y se le conoce como *ley de desplazamiento de Wien*. Esta ley también es evidente en la figura 45-1: cuanto más alta sea la temperatura, más corta será la longitud de onda en que la radiación alcanza su intensidad máxima. Esta ley concuerda con una experiencia común. Al calentar un trozo de metal en el fuego, primero empieza a mostrar un color rojo oscuro y luego, al aumentar la temperatura, su color presenta longitudes de onda más pequeñas y adquiere un color amarillo-anaranjado. La ley de Wien sirve para inferir la temperatura superficial de las estrellas a partir de su color; por ejemplo, las estrellas azules son más calientes que las rojas.

Las leyes de Stefan-Boltzmann y de Wien no explican todo lo concerniente a la radiación térmica. Hace falta una expresión de la intensidad de la radiación de cavidad en función de la longitud de onda, es decir, una ecuación correspondientes a los puntos individuales de datos de la figura 45-1. Tratamos de encontrar una expresión de la *radiancia espectral* $R(\lambda, T)$, que se define de modo que el producto $R(\lambda, T)\, d\lambda$ sea igual a la potencia emitida por unidad de superficie cuyas longitudes de onda se encuentren en el intervalo λ a $\lambda + d\lambda$. La intensidad $I(T)$ se relaciona con la radiancia espectral integrando R en el intervalo entero de longitudes de onda, es decir,

$$I(T) = \int_0^\infty R(\lambda, T)\, d\lambda, \tag{45-5}$$

donde la integración se realiza sobre todas las longitudes de onda. La ecuación anterior muestra que $I(T)$ se representa gráficamente en la figura 45-1 con la superficie bajo la curva que conecta los puntos a una temperatura determinada T.

A fines de la década de 1800 se hicieron varias sugerencias relativas a la función $R(\lambda, T)$. Ninguna concordaba con los datos experimentales en todas las longitudes de onda. En 1900 Planck propuso una expresión, escrita en la notación moderna como

$$R(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \tag{45-6}$$

y conocida hoy como *ley de radiación de Planck*. En ella c es la velocidad de la luz, k la constante de Boltzmann y h una nue-

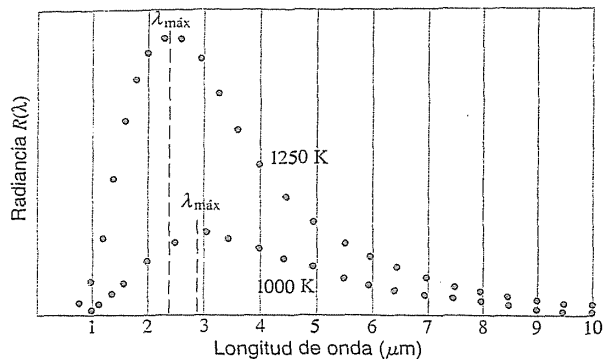


FIGURA 45-2. La función de Planck coincide a la perfección con los datos observados.

va constante, introducida en física por primera vez y actualmente conocida como constante de Planck. La ecuación 45-6 coincide con los datos experimentales en todas las longitudes de onda y temperaturas a las cuales ha sido probado, como se observa en la figura 45-2. Por ejemplo, en 1990, se observó lo siguiente: las mediciones de la radiación cósmica de fondo, supuestamente un residuo del Big Bang, obtenidas por el satélite Cosmic Background Explorer (COBE) se ajustaban a la ley de Planck con extraordinaria precisión: la temperatura deducida de la concordancia era 2.725 ± 0.002 K (como se señala en el Cap. 52).

Al sustituir la ecuación 45-6 en la ecuación 45-5 y al efectuar la integración, podemos obtener la ecuación 45-3, la ley de Stefan-Boltzmann, y demostrar que la constante σ de ella se relaciona con otras constantes fundamentales a través de

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}. \qquad (45\text{-}7)$$

Por medio del mejor valor experimental de la constante de Stefan-Boltzmann disponible en 1900, Planck logró obtener para su nueva constante un valor de $h = 6.56 \times 10^{-34}$ J · s, que difiere apenas 1% del valor actual. Más aún, puede obtenerse la ecuación 45-4, la ley de desplazamiento de Wien, diferenciando la ecuación 45-6 en busca del valor de λ en que la radiancia espectral alcanza su valor máximo. Se demuestra además que la constante de esa ecuación se relaciona con otras constantes fundamentales por medio de

$$\lambda_{máx}T = \frac{hc}{4.9651k}, \qquad (45\text{-}8)$$

que concuerda con la ecuación 45-4 y que reproduce el valor experimental de la constante en esa ecuación. Planck (1918) y Wien (1911) recibieron el Premio Nobel de Física por sus descubrimientos revolucionarios en la radiación térmica que sentaron las bases de la teoría cuántica.

Al obtener la ecuación 45-6, Planck supuso que los átomos que formaban las paredes de la cavidad se comportaban como diminutos osciladores armónicos. Supuso además que estas oscilaciones no podían oscilar con cualquier energía arbitraria y debían hacerlo sólo con las que fueran múltiplos enteros de hf, donde f es la frecuencia de radiación con que los osciladores absorben y emiten al interactuar con la radiación atrapada en la cavidad. Su asombrosa suposición introdujo la cuantización y la constante de Planck en física y marcó el inicio del desarrollo pleno de la física cuántica, tal como la conocemos hoy. A los físicos de la época, entre ellos el propio Planck, les resultaba difícil creer que un oscilador no pudiera absorber o emitir energía en *cualquier* cantidad dentro de un intervalo razonable. En 1905 Einstein, concentrando su enorme ingenio en la demostración de Planck, volvió a obtener la ecuación 45-6 con otra suposición básica: la radiación de la cavidad, en su interacción con las paredes de ella, se comportaba como si constara de cuantos de energía en la cantidad indicada por la ecuación 45-1, a saber: $E = hf$. Así, Einstein introdujo en la física *el fotón*, nombre que se dio después a estos cuantos de luz. En 1916 propuso un método ulterior para obtener la ecuación 45-6; su sencillez y su facilidad vinieron a reforzar aún más el concepto del fotón.

En las dos secciones siguientes vamos a examinar las pruebas experimentales que corroboran la realidad de los fotones de Einstein.

PROBLEMA RESUELTO 45-1. ¿Qué temperatura tiene una estrella? Su "superficie" no es una frontera tan bien definida como la de la Tierra. La mayor parte de la radiación que emite guarda equilibrio térmico con los gases calientes que constituyen las capas exteriores. Así pues, sin un error demasiado grande podemos tratar la luz estelar como radiación de cavidad. He aquí las longitudes de onda en que la radiancia espectral de tres estrellas alcanza su valor máximo:

Estrella	$\lambda_{máx}$	*Aspecto*
Sirio	240 nm	Azul-blanco
Sol	500 nm	Amarillo
Betelgeuse	850 nm	Rojo

a) ¿Cuál es la temperatura superficial de estas estrellas? *b*) ¿Cuál es su intensidad radiante? *c*) El radio r del Sol es 7.0×10^8 m y el de Betelgeuse es aproximadamente 500 veces mayor, o sea 4.0×10^{11} m. ¿Cuál es la salida total de potencia irradiada (es decir, la *luminosidad L*) de ellas?

Solución *a*) A partir de la ecuación 45-4 obtenemos en el caso de Sirio (con $\lambda_{máx} = 240$ nm $= 0.240$ μm)

$$T = \frac{2\,898\ \mu\text{m}\cdot\text{K}}{\lambda_{máx}} = \frac{2\,898\ \mu\text{m}\cdot\text{K}}{0.240\ \mu\text{m}} = 12\,000\ \text{K}.$$

La temperatura del Sol y de Betelgeuse se comportan de la misma manera y son de 5 800 y 3 400 K, respectivamente. A 5 800 K, la mayor parte de la radiación de la superficie solar se encuentra dentro de la región del espectro visible. Ello significa que, a través de una larga evolución, los ojos se adaptaron al Sol para hacerse más sensibles a las longitudes de onda que irradia con mayor intensidad.

b) Conforme a la ley de Stefan-Boltzmann (Ec. 45-3), en Sirio tenemos

$$I = \sigma T^4 = (5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4)(12{,}000\ \text{K})^4$$
$$= 1.2 \times 10^9\ \text{W/m}^2.$$

La intensidad radiante del Sol y de Betelgeuse resulta ser 6.4×10^7 W/m^2 y 7.7×10^6 W/m^2, respectivamente.

(*c*) Para calcular la luminosidad de una estrella se multiplica su intensidad radiante por el área superficial. Por tanto, en el caso del Sol,

$$L = I(4\pi r^2) = (6.4 \times 10^7\ \text{W/m}^2)(4\pi)(7.0 \times 10^8\ \text{m})^2 = 3.9 \times 10^{26}\ \text{W}.$$

En Betelgeuse, la luminosidad resulta ser 1.5×10^{31} W, alrededor de 38 000 veces más grande. El enorme tamaño que tiene, por el cual se clasifica como un "gigante rojo", compensa con creces la intensidad relativamente pequeña de su baja temperatura superficial.

Los colores de las estrellas no son evidentes para el observador común porque los conos de la retina, encargados de la visión cromática, no funcionan bien bajo luz tenue. De no ser así, por la noche el cielo resplandecería con colores.

45-3 EL EFECTO FOTOELÉCTRICO

Si dejamos que una luz monocromática incida sobre una superficie metálica, los electrones pueden ser arrojados de ella. En la figura 45-3 se incluye el arreglo experimental con que se estudia este *efecto fotoeléctrico*. Si producimos una diferencia de potencial adecuada ΔV entre la superficie E (el emisor) y la superficie C (el receptor), podemos recoger los electrones lanzados y medirlos como una corriente fotoeléctrica i en el circuito externo.

La figura 45-4 (curva *a*) muestra la corriente fotoeléctrica en función de la diferencia de potencial ΔV. Advertimos lo siguiente: si el receptor está en un potencial más alto que el emisor y si ΔV es lo bastante grande, la corriente fotoeléctrica alcanza una saturación constante en que se recogen *todos* los electrones que salen del emisor.

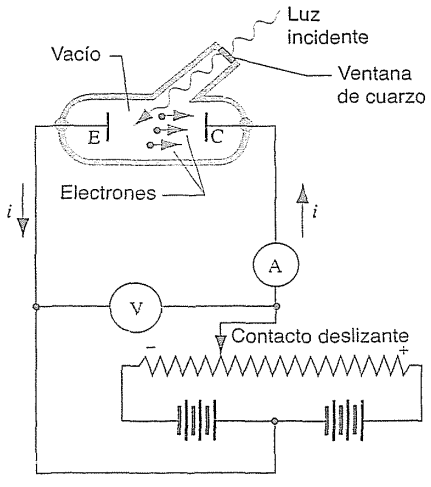


FIGURA 45-3. Aparato con el cual se estudia el efecto fotoeléctrico. Las flechas indican la dirección de la corriente fotoeléctrica en el circuito externo, que se opone al movimiento de los electrones (con carga negativa). La diferencia de potencial efectiva entre el emisor E y el receptor C, que mida el voltímetro V, es la suma algebraica de la diferencia de potencial relacionada con las baterías y de la relacionada a la diferencia de potencial de contacto entre el emisor y el receptor. Estos componentes forman una "batería" por estar hechos de materiales distintos.

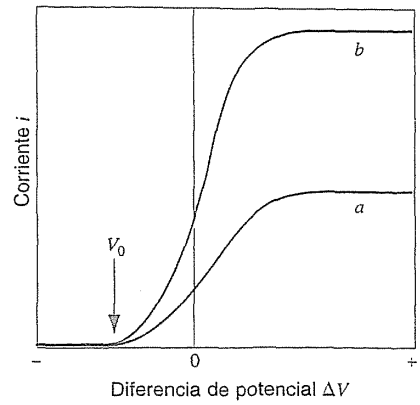


FIGURA 45-4. Gráfica (no a escala) de los datos tomados con el aparato de la figura 45-3. La intensidad de la luz incidente es el doble en la curva *b* que en la curva *a*. El emisor y la longitud de onda de la luz incidente son iguales en ambas series. Nótese que el potencial de frenado es idéntico en ellas.

Si reducimos a cero ΔV, la corriente fotoeléctrica no disminuye a cero, pues los electrones se emiten con un intervalo definido de velocidades. Pero si invertimos el signo de la diferencia de potencial y si hacemos ΔV lo bastante grande, con el tiempo llegaremos a un punto donde inclusive los electrones con mayor energía que se emitan son devueltos antes de chocar contra el receptor, y la corriente fotoeléctrica i efectivamente se reduce a cero. La magnitud de esta diferencia (negativa) de potencial recibe el nombre de *potencial de frenado* V_0; es decir, $V_0 = |\Delta V|$ en el punto donde la corriente fotoeléctrica disminuye a cero (Fig. 45-4).

Cuando ΔV es negativa, los electrones pierden energía cinética y adquieren energía potencial al pasar del emisor al receptor; el cambio de esta última en ellos es $\Delta U = q\,\Delta V = -e\,\Delta V$, una cantidad positiva cuando ΔV es negativa. Los electrones con mayor energía poseen energías cinéticas $K_{\text{máx}}$. El potencial de frenado corresponde a la máxima diferencia de potencial necesaria para que pierdan toda su energía cinética. La conservación de energía ($\Delta U = -\Delta K$) nos da entonces

$$eV_0 = K_{\text{máx}}. \tag{45-9}$$

La curva *b* en la figura 45-4 indica el resultado cuando se repite la medición del potencial de frenado en la que se duplicó la intensidad de la luz incidente. Al comparar las curvas *a* y *b*, se advierte el primero de tres hechos importantes relativos al efecto fotoeléctrico:

> *Hecho 1. Si la luz de determinada longitud de onda incide sobre un emisor, el potencial de frenado no depende de la intensidad de ella.*

Midamos el potencial de frenado V_0 cuando la luz de *distintas* longitudes de onda incide sobre un emisor. La figura 45-5,

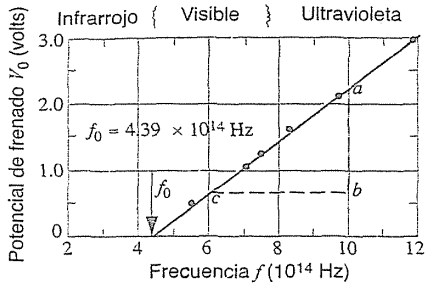


FIGURA 45-5. Potencial de frenado en función de la frecuencia para un emisor de sodio. Nótese la frecuencia de corte f_0. No se expulsarán los fotoelectrones si la frecuencia de la luz incidente no alcanza este valor.

donde lo graficamos en función de la frecuencia (no de la longitud de onda) de la luz incidente, muestra el resultado para el caso de un emisor hecho de sodio. La gráfica es una línea recta con una intersección f_0 en el eje de la frecuencia; esto indica un segundo hecho en torno al efecto fotoeléctrico:

Hecho 2. La frecuencia de la luz que incide sobre un emisor debe ser mayor que la de cierto valor f_0. En caso contrario no se producirá el efecto fotoeléctrico.

Esta *frecuencia de corte* f_0 depende sólo del material del cual está hecho el emisor y es totalmente independiente de la intensidad de la luz incidente.

Un tercer hecho sobre el efecto fotoeléctrico se ha demostrado con seguridad en experimentos independientes:

Hecho 3. Los fotoelectrones se emiten de inmediato una vez que la luz incidente llega a la superficie del emisor.

El experimento prueba que la palabra "de inmediato" significa "en un lapso aproximado de 10^{-9} s".

Análisis del efecto fotoeléctrico de Einstein

En 1905 Einstein demostró que su concepto de fotón podía explicar los tres hechos anteriores concernientes al efecto fotoeléctrico. Escribió la siguiente ecuación, conocida hoy como *ecuación fotoeléctrica de Einstein:*

$$hf = \phi + K_{máx}. \qquad (45\text{-}10)$$

Esta ecuación indica que un fotón individual lleva una energía hf al interior del emisor, donde se transfiere esencialmente a un electrón. Parte de esta energía, llamada *función de trabajo* ϕ del material que constituye al emisor, se consume al hacer que el electrón escape del emisor; podemos concebirla como una especie de impuesto de la energía superficial. La energía remanente ($hf - \phi$) es la energía máxima $K_{máx}$ que el electrón posee una vez que ha salido de la superficie del emisor.

Considere cómo la ecuación 45-10 coincide con los tres hechos experimentales de la fotoelectricidad que acabamos de describir:

Hecho 1: Esto se infiere porque si duplicamos la intensidad de la luz incidente, no hacemos más que duplicar la cantidad de interacciones fotón-electrón en el emisor. El doble de estos electrones sale del emisor; pero no se altera la energía cinética y, por lo mismo, tampoco el potencial de frenado.

Hecho 2: Al combinar las ecuaciones 45-9 y 45-10 podemos escribir

$$V_0 = (h/e)f - (\phi/e). \qquad (45\text{-}11)$$

Tanto h como e son constantes físicas fundamentales y ϕ es una constante de determinado material emisor. La ecuación 45-4 predice, pues, que una gráfica de V_0 en función de f en un emisor debería ser una línea recta y h/e su pendiente. Como conocemos el valor de la carga eléctrica e, podemos emplear la pendiente medida en la figura 45-5 para calcular un valor de la constante de Planck h:

$$\text{pendiente} = \frac{ab}{bc} = \frac{2.30\text{ V} - 0.68\text{ V}}{10 \times 10^{14}\text{ Hz} - 6.0 \times 10^{14}\text{ Hz}}$$

$$= 4.1 \times 10^{-15}\text{ V}\cdot\text{s}.$$

En virtud de que la pendiente es igual a h/e (Ec. 45-11), podemos obtener la constante de Planck h multiplicando esta razón por la carga electrónica e,

$$h = (h/e)(e) = (4.1 \times 10^{-15}\text{ V}\cdot\text{s})(1.6 \times 10^{-19}\text{ C})$$

$$= 6.6 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s},$$

de acuerdo con el valor determinado por otros métodos independientes. En 1921 Einstein fue galardonado con el Premio Nobel "por sus servicios a la física teórica y, especialmente, por el descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico".

Sin embargo, desde 1927 (22 años después de que Einstein propuso la hipótesis del fotón) se sabe que el efecto fotoeléctrico puede explicarse en forma igualmente satisfactoria sin recurrir al fotón. En 1969 W. E. Lamb y M. O. Scully lo demostraron de modo explícito al aplicar las leyes de la física cuántica a los átomos del emisor, pero tratando la luz incidente como una onda electromagnética clásica. En conclusión, no puede decirse que los experimentos en torno al efecto fotoeléctrico demuestran de una manera *convincente* la existencia de los fotones; hemos, pues, de acudir a otros experimentos para hacerlo.

PROBLEMA RESUELTO 45-2. Un emisor de sodio con una superficie de $A = 1.5\text{ cm}^2$ se coloca a una distancia $r = 25$ cm de una fuente de luz cuya salida de potencia es $P_0 = 1.0$ W. La luz es monocromática con una frecuencia muy por arriba de la frecuencia de corte del sodio. La función de trabajo ϕ del sodio es 2.3 eV. ¿Con qué rapidez máxima pueden emitirse los fotoelectrones desde el emisor de sodio?

Solución Si la fuente irradia uniformemente en todas direcciones, cosa que damos por cierta, la intensidad I de la luz a una distancia r estará dada por

$$I = \frac{P_0}{4\pi r^2} = \frac{1.0\text{ W}}{4\pi(0.25\text{ m})^2} = 1.27\text{ W/m}^2.$$

La máxima rapidez posible de los fenómenos fotoeléctricos se presenta cuando el proceso fotoeléctrico absorbe la totalidad de la energía de la luz incidente. Con 2.3 eV por evento, esta rapidez es

$$R = \frac{IA}{\phi} = \frac{(1.27\ \text{W/m}^2)(1.5\ \text{cm}^2)(10^{-4}\ \text{m}^2/\text{cm}^2)}{(2.3\ \text{eV/evento})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}$$
$$= 5.2 \times 10^{14}\ \text{eventos/s}.$$

Demuestre que lo anterior corresponde a una corriente fotoeléctrica de 83 μA. En la práctica no se alcanza la velocidad máxima anterior.

PROBLEMA RESUELTO 45-3. Encuentre la función de trabajo del sodio partiendo de los datos graficados en la figura 45-5.

Solución La intersección de la línea recta en la figura 45-5 sobre el eje de *frecuencia es la frecuencia de corte* f_0. Al hacer $V_0 = 0$ y $f = f_0$ en la ecuación 45-11 obtenemos

$$\phi = hf_0 = (6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(4.39 \times 10^{14}\ \text{Hz})$$
$$= 2.91 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.82\ \text{eV}.$$

En la ecuación 45-11 se observa que una determinación de la constante de Planck h involucra sólo la pendiente de la línea recta en la figura 45-5 y que una determinación de la función de trabajo ϕ involucra únicamente la intersección.

45-4 EL EFECTO COMPTON

En 1923 Arthur Holly Compton, entonces en la Washington University de St. Louis, descubrió lo siguiente: cuando un haz de rayos X se dispersa por un blanco, la longitud de onda de estos rayos dispersados es ligeramente mayor que la longitud de onda del haz incidente.

En la figura 45-6 se muestra el arreglo experimental que utilizó para observar este *efecto Compton*, nombre con el que se le conoce en la actualidad. Un haz de rayos X de longitud λ incide sobre un blanco de carbono (grafito) T. Compton observó que los rayos X se dispersaban en varios ángulos ϕ del haz incidente y midió su intensidad y su longitud de onda en varios de estos ángulos.

La figura 45-7 muestra los resultados experimentales de cuatro valores de ϕ. Vemos que, aunque el haz incidente consta esencialmente de una longitud de onda individual λ, los rayos X dispersados tienen picos de intensidad en dos longitudes de onda. Una de ellas λ es la misma que la longitud de onda incidente, pero la otra (λ') es $\Delta\lambda$ más grande. Este *corrimiento Compton* $\Delta\lambda$ varía con el ángulo ϕ donde se observan los rayos X dispersados.

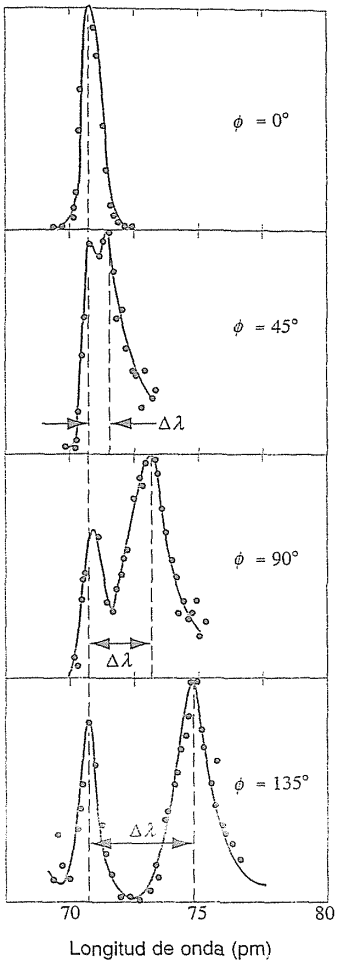


FIGURA 45-7. Resultados experimentales de Compton con cuatro valores del ángulo de dispersión ϕ. El pico en 71 pm se debe a la dispersión de la radiación incidente (de 71 pm de longitud de onda) por los electrones internos fuertemente ligados del átomo. El segundo pico representa la radiación dispersada desde los electrones externos casi libres y poco ligados. Cuando $\phi = 135°$, el corrimiento de Compton $\Delta\lambda$ es aproximadamente 4 pm.

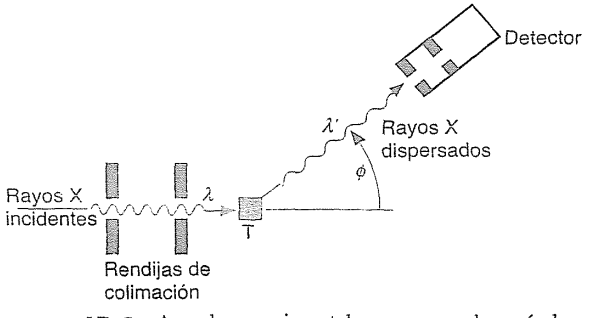


FIGURA 45-6. Arreglo experimental con que se observó el efecto Compton. El detector, que puede ponerse en el ángulo ϕ que se desee, midió la intensidad y la longitud de onda de los rayos X dispersados.

Compton obtuvo su expresión relativa a $\Delta\lambda$ analizando la interacción entre un fotón del haz incidente de rayos X con un electrón libre en el blanco, como si se tratase de una colisión entre dos partículas. Vamos a analizar primero la situación desde el punto de vista cualitativo. En virtud de que el fotón incidente de energía E (= hf) cede parte de su energía al electrón que retrocede, por lo cual el fotón dispersado debe tener menos energía E' (= hf'). Como $E' < E$ debemos tener $f' < f$, lo cual exige que $\lambda' > \lambda$. En otras palabras, la longitud de la onda de los rayos dispersados debe ser mayor que la de los rayos incidentes, exactamente como se observa en la figura 45-7.

Analicemos ahora la situación desde el punto de vista cuantitativo. En la figura 45-8 se muestran los estados inicial y final. Suponemos que al inicio el electrón se encuentra en reposo y que es esencialmente libre, esto es, no está ligado a los átomos del dispersador. La suposición se cumple de modo bastante satisfactoria en los electrones externos ligados a los átomos un poco ligeros de carbono que forman el blanco de grafito. Planeamos encontrar una expresión para $\Delta\lambda$ aplicando, a la interacción de la figura 45-8, las leyes de conservación de la energía y del momento lineal.

Debemos abordar el análisis en forma relativista, pues los fotones se desplazan con la velocidad de la luz, y la velocidad del electrón dispersado puede acercarse a la de la luz.

La conservación de energía en el sistema fotón-electrón requiere que

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$$

o

$$hf + mc^2 = hf' + mc^2 + K, \qquad (45\text{-}12)$$

donde mc^2 es la energía en reposo del electrón, y K su energía cinética (relativista) tras la interacción. Al sustituir f por c/λ (y f' por c/λ') y al utilizar la ecuación 20-27 con la energía cinética relativista, tenemos

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1\right]. \qquad (45\text{-}13)$$

como ecuación de conservación de la energía.

Apliquemos ahora la ley (de vectores) de conservación del momento lineal a la interacción de la figura 45-8. Según las ecuaciones 20-23 y 45-2, la magnitud de los momentos lineales del electrón y del fotón son, respectivamente,

$$p_{\text{electrón}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{y} \quad p_{\text{fotón}} = \frac{h}{\lambda}. \qquad (45\text{-}14)$$

En el caso de la conservación del componente x del momento lineal, podemos escribir

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\phi + \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\cos\theta \qquad (45\text{-}15)$$

y en el caso del componente y

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\operatorname{sen}\phi + \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\operatorname{sen}\theta. \qquad (45\text{-}16)$$

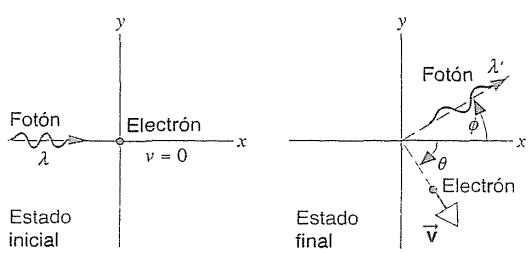


FIGURA 45-8. La interacción fotón-electrón de Compton se trata como una colisión entre dos partículas. En el estado inicial, un fotón de longitud de onda λ choca contra un electrón en reposo. En el estado final, el fotón se desplaza un ángulo ϕ con una longitud de onda mayor λ' y el electrón se desplaza con velocidad v en un ángulo θ.

Como se define en la figura 45-8, el ángulo θ es negativo y por eso el segundo término de la ecuación 45-16 también lo es. Nuestro objetivo es emplear las tres ecuaciones de conservación (Ecs. 45-13, 45-15 y 45-16) para obtener una expresión relativa al corrimiento Compton $\Delta\lambda$ ($= \lambda' - \lambda$) y así poder compararla con los resultados experimentales que obtuvo Compton.

De las cinco variables (λ, λ', v, ϕ y θ) que aparecen en las tres ecuaciones de conservación, pueden eliminarse dos dejando tres incógnitas. Optamos por suprimir v y θ que se refieren sólo al electrón (que Compton no observó).

La realización de los pasos algebraicos necesarios (Probl. 10) produce este resultado en el corrimiento Compton:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi). \qquad (45\text{-}17)$$

Teniendo en cuenta el error experimental, la ecuación anterior coincide con los corrimientos Compton observados y que se muestran en la figura 45-7.

Nótese en la ecuación 45-17 que $\Delta\lambda$ no depende de la longitud de onda λ de la radiación incidente. Por tanto, el *cambio* de la longitud de onda $\Delta\lambda$ es el mismo que en la luz visible ($\lambda \approx 500\text{ nm} = 5 \times 10^{-7}$ m) y en los rayos X ($\lambda \approx 70\text{ pm} = 7 \times 10^{-11}$ m). Sin embargo, el *cambio fraccional* de longitud de onda $\Delta\lambda/\lambda$ es mucho mayor con los rayos X que con la luz visible en un factor aproximado de 70 000 en los ejemplos citados. Así, el corrimiento Compton resulta mucho más fácil de observar en el caso de los rayos X que en el de la luz visible.

Queda por explicar la presencia del pico de intensidad en la figura 45-7, donde la longitud de onda no cambia en la dispersión. El pico se produce cuando el fotón de entrada interactúa no con el electrón casi libre del blanco, sino con el que está ligado estrechamente al átomo del blanco. Como el átomo blanco retrocede durante una interacción, hay que reemplazar la masa de electrones m en la ecuación 45-17 por M, la masa de un átomo de carbono. Con un carbono $M = 12.0$ u, que es de unos 22 000m. Si sustituimos m por M en la ecuación 45-17, vemos que en concordancia con el experimento es insignificante el corrimiento Compton en las interacciones con electrones estrechamente ligados.

¿Revela este efecto la existencia del fotón? En parte Compton recibió el Premio Nobel de 1927 "por el descubrimiento del efecto que lleva su nombre". Recuérdese que el efecto fotoeléctrico incluye sólo la energía del fotón y no su momento. El efecto Compton, cuyo análisis requiere ambas magnitudes, es una prueba aún más convincente del concepto de fotón. Pero desde 1927 (cuatro años después que Compton efectuara sus experimentos) se ha demostrado que es posible obtener la ecuación relativa al corrimiento Compton (Ec. 45-17) sin recurrir al fotón. Igual que respecto al efecto fotoeléctrico, podemos decir que puede demostrarse que el efecto Compton coincide con el concepto de fotón y con el de onda. Hemos de seguir buscando un experimento que pueda interpretarse *exclusivamente* por medio de la hipótesis de que la "luz es un fotón".

PROBLEMA RESUELTO 45-4. Los rayos X con $\lambda = 100$ pm son dispersados por un blanco de carbono. La radiación dispersada se ve a 90° con el haz incidente. *a*) ¿Cuál es el corrimiento Compton $\Delta\lambda$? *b*) ¿Qué energía cinética se imparte al electrón que retrocede?

Solución *a*) Al hacer $\phi = 90°$ en la ecuación 45-17, para el corrimiento Compton tenemos

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$
$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}(1 - \cos 90°)$$
$$= 2.43 \times 10^{-12}\ \text{m} = 2.43\ \text{pm}.$$

b) Al sustituir c/λ por f (y c/λ' por f') en la ecuación 45-12, podemos escribir

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K.$$

Al sustituir $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ y resolviendo para K nos da

$$K = \frac{hc\,\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)}$$
$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})(2.43 \times 10^{-12}\ \text{m})}{(100 \times 10^{-12}\ \text{m})(100\ \text{pm} + 2.43\ \text{pm})(10^{-12}\ \text{m/pm})}$$
$$= 4.72 \times 10^{-17}\ \text{J} = 295\ \text{eV}.$$

Podemos demostrar que en este caso la energía inicial $E\,(= hf = hc/\lambda)$ del fotón es en este caso de 12 400 eV, de modo que el fotón perdió alrededor de 2.4% de su energía original durante la interacción.

45-5 DESCUBRIMIENTO DEL FOTÓN

Es interesante señalar lo siguiente: aunque la existencia del fotón fue propuesta por Einstein en 1905, puede afirmarse que pruebas experimentales verdaderamente convincentes se recabaron apenas en 1974 y, sobre todo, en 1986, con el trabajo que comentamos en esta sección. Buscamos un experimento que no sólo confirme el concepto de fotón, sino que también *no pueda* explicarse mediante el concepto de onda.

La figura 45-9 describe los lineamientos generales de un experimento posible. La luz emitida por la fuente S incide sobre un *divisor de haces B.* Éste es un dispositivo óptico que divide un haz de luz en dos subhaces: un haz transmitido (haz X) y un haz reflejado (haz Y), éstos poseen la mitad de la intensidad del haz incidente. En la nomenclatura de fotones, un fotón que se acerque a un divisor tiene 50% de probabilidades de ser transmitido y 50% de ser reflejado.

D_1 y D_2 en la figura 45-9 son detectores fotoeléctricos de luz que responden, respectivamente, a los haces X y Y. La fuente de luz S se hace intencionalmente lo bastante más débil para que en cualquier momento la energía total de luz del aparato no sea en promedio mayor que la de un fotón. En tales condiciones, la salida de los detectores será una serie de pulsos electrónicos discretos.

Si el modelo fotónico de la luz es correcto, esperamos que cuando en cierto momento aparezca un pulso en la terminal de salida de uno de los dos detectores, no haya un pulso en la terminal de salida del otro en ese mismo momento. Estas *anticoincidencias,* nombre que se les da, pueden descubrirse y registrarse con medios electrónicos mediante arreglos que no se incluyen en la figura 45-9.

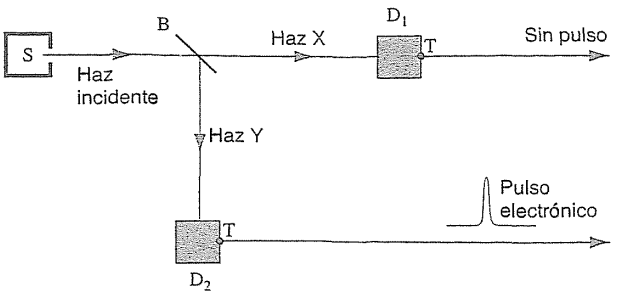


FIGURA 45-9. Aparato de anticoincidencia. La luz procedente de la fuente S incida sobre el divisor de haces B, donde una mitad se transmite al detector D_1, y la otra se refleja contra el detector D_2. T indica la terminal donde aparece la salida electrónica de ellos. Para demostrar la existencia de los fotones debería ser verdad lo siguiente: si, en cierto momento, un pulso electrónico aparece en la salida de un detector (digamos, D_2), no aparecerá pulso alguno en la salida del otro (D_1). Se muestra una autocoincidencia representativa.

Los primeros experimentos de este tipo no revelaron un patrón convincente de anticoincidencias y, por eso, tampoco confirmaron el modelo de fotón de la luz. Más tarde se demostró que los resultados negativos podrían atribuirse, entre otros factores, a pequeñas fluctuaciones de intensidad de la fuente de luz. Así, el experimento que hemos venido describiendo no constituye todavía una prueba rotunda de la existencia ni de la inexistencia de los fotones.

Nótese que el aparato de la figura 45-9 no puede revelar la naturaleza ondulatoria de la luz. Aunque el haz incidente de luz se divide en dos subhaces, igual que en el experimento de rendija doble, estos rayos entran en detectores aislados y nunca se recombinan. Por eso no pueden interferir uno con otro ni tampoco producir los efectos de interferencia que caracterizan el modelo ondulatorio.

Uso de fotones designados

En 1986 P. Grangier, G. Roger y A. Aspect, inspirándose en el trabajo que J. F. Clauser efectuó en 1974, modificaron el aparato de la figura 45-9 para suprimir sus deficiencias. Primero hicieron que los detectores D_1 y D_2 no funcionaran (OFF) en su estado normal. Pero podían encenderlos (ON) a discreción —y durante un intervalo breve— aplicándoles una "señal de compuerta" de corta duración.

La principal modificación que realizaron estos investigadores consistió en reemplazar la fuente S en la figura 45-9 por otro arreglo más complejo. Hicieron que un haz de átomos de calcio pasara por la posición de la fuente y, bombardeando con luz láser, lograron que algunos de ellos alcanzaran un estado excitado, denotado con x en la figura 45-10. Al retornar espontáneamente a su estado base, indicado con 0 en ella, cada átomo emitía dos fotones en una cascada rápida. Por razones que explicaremos luego, al primero de los fotones lo llamamos *fotón desencadenador;* y al otro, *fotón designado.*

La caja rectangular de la figura 45-11 contiene la *fuente de fotones designados* que se empleó en este nuevo experi-

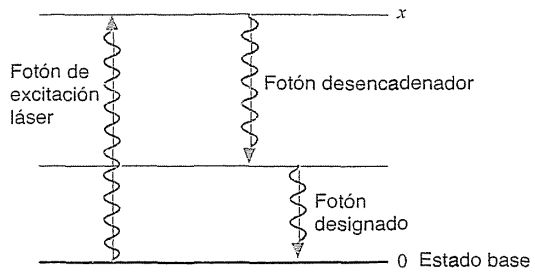


FIGURA 45-10. Se muestran tres niveles de energía en los átomos de calcio; el nivel denotado con 0 es el estado base. Se excita al átomo hasta que alcance el estado x absorbiendo un fotón de un haz de rayos láser. Después el átomo decae a su estado base en un proceso en cascada de dos pasos; aparecen al mismo tiempo los dos fotones de decaimiento (el "fotón desencadenador" y el "fotón designado").

mento: reemplaza la fuente S en la figura 45-9. En esta nueva fuente el fotón desencadenador de la figura 45-10 entra en un detector G que genera una señal electrónica de compuerta en su terminal T. La señal, aplicada a los detectores D_1 y D_2 de la figura 45-9, los activa (ON) en un intervalo brevísimo. En términos generales, el fotón desencadenador "les dice": "¡Despierten! Se aproxima un fotón. Ciérrense una vez que lo hayan registrado."

Nótese que el fotón desencadenador se emite y absorbe dentro de la caja fuente, sin que entre en el aparato de la figura 45-9. Sin embargo, el fotón designado en la figura 45-10 sí penetra en el aparato, dirigiéndose hacia el divisor de haces B. Cuando se logra que los detectores sólo se activen (ON) cuando deben hacerlo, se garantiza que no se vean inundados con otros que inevitablemente están presentes.

Una vez introducidas las modificaciones anteriores, el experimento funcionó de modo admirable. Se observaron las anticoincidencias esperadas y —por primera vez en forma irrefutable el modelo de fotón de la luz se demostró directa y convincentemente por medio de experimentos. No parece posible interpretar los resultados a partir de las ondas.

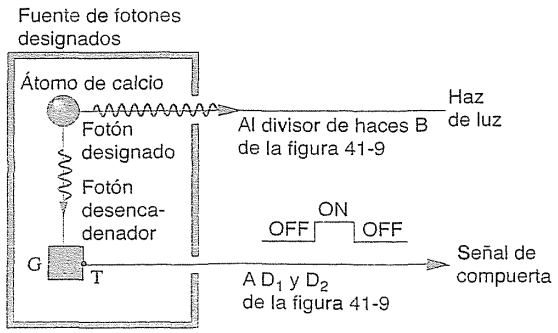


FIGURA 45-11. El aparato dentro de la caja rectangular es una fuente de fotones designados que se utiliza en vez de la fuente S en la figura 45-9. En sucesión rápida, el átomo de calcio de la figura 45-10 emite un fotón desencadenador y un fotón designado. El primero se envió a un generador electrónico de compuerta G, el cual a su vez emite una señal electrónica de compuerta a los detectores D_1 y D_2 de la figura 45-9, activándolos brevemente. El fotón designado cae sobre el divisor de haces de la figura 45-9.

45-6 FOTONES Y ONDAS

En el momento actual, contamos con datos experimentales en favor de dos modelos muy distintos de la luz. El experimento de ranura doble favorece la hipótesis de "la luz es una onda". Y el experimento de anticoincidencias de la figura 45-9 corrobora la de "la luz es un fotón". En la figura 45-12 se describe una extensión del aparato de esa figura, con el cual se hace una simple modificación y puede demostrarse la existencia de ondas o de fotones. Los experimentos donde se emplean estos aparatos, nos permiten conocer mejor la naturaleza fundamental de la luz.

Experimentos que muestran que la luz son ondas

La fuente luminosa S de la figura 45-12 es la fuente de fotones designados en la figura 45-11. El haz incidente proveniente de ella se divide en un divisor de haces B_1 en dos subhaces, igual que antes. El haz X se refleja entonces contra el espejo M_1 y el haz Y contra el espejo M_2. Este último está fijo en su sitio, pero el espejo M_1 puede moverse hacia atrás y adelante en una extensión controlable. Al mover M_1, el experimentador puede modificar a discreción la longitud de la trayectoria X y de ese modo cambiar la diferencia de fase entre la luz que sigue la trayectoria X y la que sigue la trayectoria Y.

Si se dibujan las trayectorias de la figura 45-12, se verá que puede hacerse que los rayos X y Y (generados en el divisor de haces B_1) se recombinen (por acción del divisor de haces B_2) en D_1 y también, por separado, en D_2. La diferencia de fase entre los haces combinados en ambos detectores puede alterarse moviendo el espejo M_1. Así pues, las salidas electrónicas de D_1 y D_2 deberían mostrar un patrón de franjas de interferencia al mover este espejo el experimentador. La figura

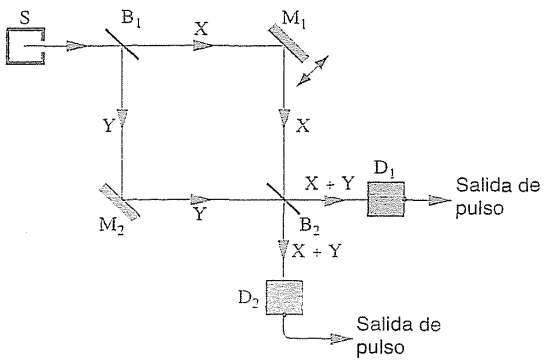


FIGURA 45-12. Extensión del aparato de la figura 45-9, diseñado para demostrar las propiedades ondulatorias y de fotón de la luz. Los fotones de prueba procedentes de la fuente S siguen dos trayectorias, indicadas por X y Y, a través de él. La luz que sigue las trayectorias se recombina en el detector D_1 y también en el detector D_2.

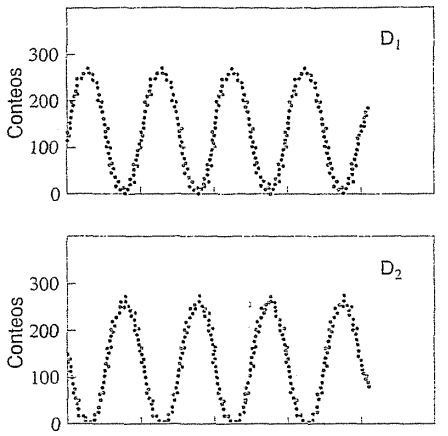


FIGURA 45-13. Conteos acumulados en los detectores D_1 y D_2 de la figura 45-12 en función de la posición del espejo móvil M_1. Los detectores muestran franjas de interferencia, que pueden interpretarse diciendo que la luz es una onda en este experimento.

45-13 muestra el pulso que cuenta las rapideces en la salida de los detectores D_1 y D_2 de la figura 45-12 en función de la posición del espejo M_1. Se observa que los patrones de interferencia concuerdan con la naturaleza ondulatoria de la luz.

En este modo de operación el aparato de la figura 45-12 es esencialmente de rendija doble, pues los dos subhaces se generan en el divisor de haces B_1, siguen trayectorias de distinta longitud y, finalmente, vuelven a encontrarse en los detectores D_1 y D_2. No importa si en el experimento de rendija doble, el detector era una pantalla y en este caso son dos dispositivos electrónicos independientes, cada uno de los cuales muestra un patrón de interferencia.

Experimentos que muestran la existencia de los fotones

Si eliminamos el divisor de haces B_2, desde un punto de vista funcional el aparato de la figura 45-12 es idéntico al de la figura 45-9, es decir, los dos subhaces entran a detectores separados y nunca se recombinan. En tales circunstancias las salidas mostraron un patrón de anticoincidencias, compatibles con la naturaleza de fotón de la luz.

Concluimos que, si el divisor de haces B_2 está fijo en su sitio, el experimento apoya el modelo ondulatorio de la luz. Si eliminamos B_2, apoya el modelo del fotón. Tenemos el derecho de preguntar: "¿Cuál es la naturaleza de la luz en tránsito por el aparato de la figura 45-12, *después* de salir del divisor de haces B_1 pero *antes* de llegar al divisor B_2?". Dicho de otra manera: ¿"sabe" la luz si el divisor de haces B_2 está fijo en su sitio antes de llegar al lugar de B_2?

Experimentos de decisión retrasada

Unos ingeniosos *experimentos de decisión retrasada* aclaran la pregunta que acabamos de formular. Un experimento sumamente revelador consistiría en dejar el divisor de haces B_2 en su sitio, como en la figura 45-12. Después, poco antes que la luz llegue al lugar de B_2, sacar el divisor de su trayectoria. Aunque no es posible extraer e introducir mecánicamente el divisor con suficiente rapidez, los resultados de un experimento equivalente consistente en redirigir los haces luminosos mediante interruptores electro-ópticos fueron descritos en 1987 por investigadores del Max Planck Institute for Quantum Optics cerca de Munich. Vamos a explicarlos *como si* el divisor de haces B_2 hubiera sido introducido y extraído mecánicamente.

Supóngase que el experimento comenzó con un divisor de haces B_2 fijo en su sitio. Es la situación adecuada para revelar las franjas de interferencia en las salidas del detector y, por tanto, la naturaleza ondulatoria de la luz. ¿Es posible que la luz perciba de alguna manera la presencia de B_2 y que por ello adopte su aspecto de onda? Sin embargo, una vez que la luz cruza el divisor de haces B_1 pero antes que llegue al sitio del divisor B_2, lo quitamos rápidamente de su trayectoria. El experimento indica que no se observa interferencia alguna. Si la luz "pensó" que era una onda después de salir de B_1, debe haber "cambiado de opinión" cuando llegó al sitio de B_2 y no encontrará en su lugar al divisor de haces.

Comencemos ahora el experimento una vez eliminado B_2. Es la situación idónea para revelar las anticoincidencias en las salidas del detector y, por lo mismo, la naturaleza de fotón de la luz. ¿Es posible que ésta, habiendo atravesado B_1 perciba de alguna manera que B_2 no está allí y asuma su aspecto de fotón? Entonces, antes que llegue al sitio de B_2, rápidamente interponemos este divisor en su trayectoria. El experimento muestra que la interferencia se observa siempre. Si la luz "pensó" que es un fotón después de salir de B_1, debe haber "cambiado de opinión" al llegar al sitio de B_2 y al descubrir "inesperadamente" que el divisor de haces se encuentra en su sitio.

El experimento muestra que es posible introducir un divisor de haces B_2 en cualquier momento —desde su inicio hasta el último picosegundo— y que el resultado observado en las salidas del detector será el mismo: la luz es una onda. Por el contrario, puede extraerse B_2 en cualquier momento —desde el inicio del experimento hasta el último picosegundo— y el resultado observado en las salidas del detector será el mismo: la luz son fotones.

¿Qué concluimos de todo esto? Simplemente que, cuando la luz está en tránsito en el aparato, no tiene sentido ni el modelo ondulatorio ni el de fotón, y tampoco alguna combinación de estos conceptos clásicos. No es más que "luz" y hasta la fecha nadie ha logrado proponer una forma aceptable de visualizarla basada en el sentido común. Podemos establecer un modelo en el aparato de la figura 45-12 sólo cuando nos concentramos en las salidas pulsadas de dos detectores. Si el divisor de haces B_2 está fijo en su sitio, las salidas presentarán interferencia y diremos "onda". Si B_2 está ausente siempre, las dos salidas mostrarán anticoincidencias y diremos "fotones". No podemos afirmar absolutamente nada sobre la luz mientras pasa por el aparato. Todo lo anterior viene a corroborar nuestra opinión inicial de que la luz es un fenómeno sutil difícil de visualizar o de etiquetar. Según comentamos al principio de este capítulo, no es exclusivamente corpuscular ni exclusivamente ondulatoria. Esas

dos naturalezas están íntimamente relacionadas y podemos conseguir que manifieste uno de los dos comportamientos según la clase de experimento que decidamos efectuar.

45-7 REDUCCIÓN DE LA VELOCIDAD DE LOS ÁTOMOS POR BOMBARDEO CON FOTONES

Si queremos medir las propiedades de un objeto cualquiera, casi siempre la forma más fácil de hacerlo es cuando no esté moviéndose, sobre todo si se trata de un átomo. Por desgracia, como se comprueba en el problema resuelto 45-5, los átomos de un gas a temperatura ambiente distan mucho de estar en reposo, pues generalmente se desplazan con velocidades superiores a las de un avión de propulsión. En la presente sección deseamos explicar cómo, mediante el bombardeo con fotones, puede reducirse la velocidad de los átomos a partir de velocidades tan elevadas. Al hacerlo, aportaremos más datos experimentales, directos y convincentes, en favor de la validez del concepto de fotón.

En la figura 45-14 se incluye un átomo de masa m en su estado base, iluminado por luz de longitud de onda λ que se generó con un láser. Supongamos que se desplaza con una velocidad inicial v_i en dirección contraria a la de la luz que lo ilumina. En otras palabras, se mueve corriente arriba respecto al haz de láser. Supóngase además que absorbe un solo fotón de momento (Ec. 45-2) $p = h/\lambda$ proveniente de este haz. El fotón desaparece y su momento se transfiere enteramente al átomo, disminuyendo a v_f su velocidad corriente arriba.

La conservación del momento de la interacción fotón-átomo exige que

$$mv_i - h/\lambda = mv_f,$$

donde hemos supuesto que la dirección del átomo en movimiento es positiva. El rearreglo nos da

$$h/\lambda = m(v_i - v_f) = -m\,\Delta v, \qquad (45\text{-}18)$$

donde Δv, una magnitud negativa, es el cambio de velocidad del átomo después que ha absorbido al fotón. En el problema resuelto 45-5 calculamos un valor representativo de Δv y descubrimos que es de unos cuantos cm/s, más o menos la velocidad de un insecto en vuelo. Recuérdese que v_i a temperatura ambiente suele ser mayor que la velocidad de un avión de propulsión. Así, la absorción de un solo fotón puede alterar la velocidad de un átomo, aunque no mucho. Si queremos reducir su velocidad inicial de modo considerable, habrá que iluminarlo con un haz muy intenso de rayos láser para bombardearlos una y otra vez con fotones.

Cuando un átomo absorbe un fotón, su energía aumenta de E_0, la de su estado base, a un nivel superior E_x, la de uno de sus estados excitados. En un lapso muy breve (normalmente unos 10^{-8} s), retornará espontáneamente a su estado base, emitiendo un fotón al hacerlo. En efecto, si no regresara a su estado base, no estaría en posibilidades de absorber un segundo átomo del haz de rayos láser. El proceso de reducción de velocidad requiere una secuencia estacionaria de muchos procesos de emisión y absorción de fotones.

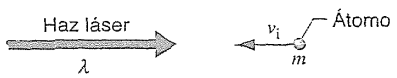


FIGURA 45-14. Un haz de luz láser de longitud de onda λ ilumina un átomo de masa m que se dirige corriente arriba contra la dirección del haz. La velocidad inicial del átomo es v_i.

La emisión de fotones relacionada con el retorno del átomo a su estado base lo hará retroceder. No obstante, los retrocesos ocurrirán en direcciones aleatorias de modo que, promediados en muchos procesos de absorción-emisión de fotones, no influirán mucho en la magnitud del movimiento dirigido del átomo, aunque pueden fijar un límite a la reducción alcanzable de velocidad.

Ahora supóngase que el átomo tuviera que moverse a la derecha en la figura 45-14, es decir, corriente abajo respecto al haz de rayos láser. Entonces su velocidad aumentaría en vez de disminuir, en caso que absorbiera un fotón. Estudiando el problema resuelto 45-5 convénzase usted mismo de que, si un átomo absorbe un fotón, su cambio de velocidad Δv tiene la misma magnitud, sin importar si se mueve corriente arriba o abajo. En forma tentativa podríamos decir que, si bombardeamos un grupo de átomos con un haz de rayos láser, la mitad de ellos disminuirá su velocidad y la otra la aumentará, sin producir una alteración neta en la velocidad promedio del grupo.

Para captar el ingenio con que los experimentadores han superado este problema, es preciso examinar más a fondo el proceso de absorción de los fotones. Aunque E_0, la energía del átomo en estado base, se define con toda claridad no sucede lo mismo con la energía E_x de su estado excitado. La figura 45-15 es una gráfica de la probabilidad relativa $P(\lambda)$ de que un átomo —supuestamente en reposo y en su estado base— absorba un fotón, elevando al primero a determinado estado excitado de energía E_x. Vemos que existe cierta longitud de onda λ_x en que la absorción es muy probable; pero puede ocurrir en longitudes de onda un poco más (muy) altas o ligeramente (muy) inferiores a este valor.

En la figura 45-16 se muestra un átomo iluminado por *dos* haces de rayos láser, L y R, que apuntan directamente uno

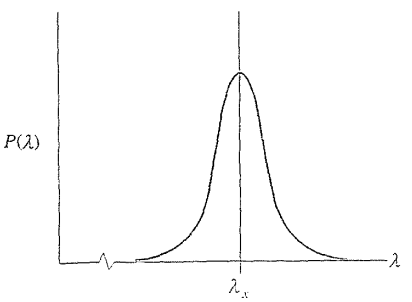


FIGURA 45-15. Probabilidad relativa $P(\lambda)$ de que un átomo en reposo en su estado base, iluminado por una luz de longitud de onda λ absorba un fotón y pase a un estado excitado de mayor energía E_x. Con una luz de cierta longitud λ_x la probabilidad es máxima. Sin embargo, un fotón puede ser absorbido aún, aunque con probabilidad menor, con longitudes de onda un poco más altas o más bajas que λ_x.

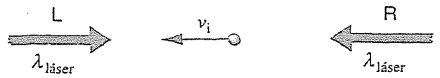


FIGURA 45-16. Un átomo en su estado base es iluminado por dos haces de luz láser, L y R, que tienen una longitud de onda $\lambda_{láser}$. Se dirige a la izquierda, corriente arriba respecto al haz L y corriente abajo respecto al haz R.

a otro. Por motivos que en seguida explicaremos a la longitud de onda $\lambda_{láser}$ de cada haz se le fija no λ_x, sino un valor ligeramente mayor, como se indica en la figura 45-17.

El átomo de la figura 45-16 se dirige a la izquierda, corriente arriba respecto al haz L y corriente abajo respecto al haz R. De lo que hemos dicho hasta ahora se deduce que los fotones absorbidos en el haz L deberían disminuir la velocidad del átomo, mientras que los absorbidos en el haz R deberían disminuirla. Ambos efectos no se cancelan por una consideración que hemos olvidado mencionar: el efecto Doppler (Sec. 39-6).

A causa de este efecto el átomo de la figura 45-16, al moverse corriente arriba en el haz L "percibe" una frecuencia de luz más grande —y, en consecuencia, una longitud de onda más corta— de lo que tendría si estuviese en reposo. En otras palabras, el átomo que se dirige corriente arriba "percibe" una longitud de onda λ_L donde $\lambda_L < \lambda_{láser}$ (Prob. res. 45-6). Una ojeada a la figura 45-17 indica que la probabilidad de absorción de fotones —y por lo mismo la reducción de la velocidad— mejora mucho con este efecto Doppler.

No obstante, respecto al haz R el átomo se mueve corriente abajo y "percibirá" una longitud de onda λ_R un poco más grande que $\lambda_{láser}$. Ahora la figura 45-17 indica una gran disminución de la probabilidad de que se absorban fotones y, en consecuencia, de que se aumente la velocidad. Gracias a un arreglo tan ingenioso, la velocidad de un átomo que se mueva hacia la izquierda disminuye mucho más por la acción de un haz L de lo que se aumentaría por la acción del rayo R. Hay, pues, una reducción de la velocidad. Convénzase usted mismo de que un átomo que se dirija a la derecha en la figura 45-16 experimentará además una disminución neta de su velocidad.

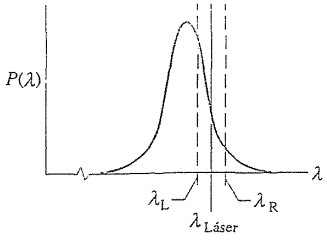


FIGURA 45-17. Al átomo de la figura 45-16 lo ilumina una luz láser cuya longitud de onda $\lambda_{láser}$ se ajusta a propósito para que esté a la derecha del máximo de la curva en forma de campana. Al dirigirse el átomo a la izquierda en la figura 45-16, el efecto Doppler hará que perciba una longitud de onda más corta (λ_L) de luz en el haz L y más larga (λ_R) en el haz R. Por tanto, la probabilidad de que un fotón sea absorbido en el haz L es mucho mayor y mucho menor la de que un fotón sea absorbido en el haz R. Si el átomo se desplaza a la derecha en la figura 45-16, la probabilidad de que un fotón sea absorbido en el haz R aumentará de manera considerable y disminuirá mucho la de que sea absorbido en el haz L. Sin importar la dirección que siga el átomo, el mecanismo de absorción de los fotones disminuirá su velocidad.

Los átomos de un gas no se desplazan en una u otra dirección a lo largo de un solo eje, sino que pueden hacerlo en cualquier dirección. Para tener en cuenta lo anterior, los experimentadores iluminaron un grupo de átomos con seis haces de rayos láser, puestos en parejas y orientados en tres direcciones mutuamente perpendiculares. Así, sin importar la dirección de un átomo en movimiento la magnitud de los componentes de su velocidad se reducirían mediante el mecanismo de Doppler que acabamos de describir. Un átomo que se halla en la intersección de seis haces se comportará como un insecto atrapado en un líquido viscoso. Se disminuirá su velocidad, cualquiera que sea la dirección en que se mueva. Los experimentadores dicen que los átomos así confinados están atrapados en las *melazas ópticas*. El método anterior recibe el nombre de *enfriamiento con rayos láser* porque la disminución de la velocidad promedio de un grupo de átomos corresponde a la reducción de su temperatura.

Hacia 1985 Steven Chu y sus colegas en los Bell Laboratories lograron disminuir, con este tipo de enfriamiento, la velocidad de un grupo de alrededor de 1 millón de átomos de sodio. A simple vista los grupos parecían una nube brillante del tamaño de un guisante, situado en la intersección de seis haces de rayos láser. No quedaron atrapados a pesar de que se disminuyó su velocidad (aproximadamente a 30 cm/s). Para mantenerlos en su sitio contra la tendencia a caer bajo la acción de la gravedad, los experimentadores incorporaron en su aparato una trampa provista de fuerzas magnéticas para contrarrestar la fuerza descendente de la gravedad. Así pudieron estudiar con comodidad las propiedades de los átomos, una vez atrapados y disminuida su velocidad.

Steven Chu, actualmente en la Stanford University, Claude Cohen-Tannoudji, del Colegio de Francia y de la Escuela Normal Superior, y William D. Phillips, del National Institute for Standards and Technology en Gaithersburg (Maryland) compartieron en 1997 el Premio Nobel de Física "por inventar los métodos para enfriar y atrapar los átomos con luz láser". El grupo encabezado por Cohen-Tannoudji logró bajar la temperatura de un grupo de átomos de helio aproximadamente a 1.8×10^{-7} K (= 0.18 μK), a la cual su velocidad media era de unos 2 cm/s. Además de los estudios fundamentales de física, el trabajo colectivo de esos tres grupos y de otros culminó en la invención del reloj atómico en el National Institute of Standards and Technology (el reloj de fuente de cesio; consúltese la Sec. 1-3) que constituye el actual patrón nacional de frecuencia.

PROBLEMA RESUELTO 45-5. *a*) ¿Qué velocidad raíz cuadrada media v_{rcm} tiene un átomo de gas de argón a temperatura ambiente (T = 300 K)? La masa m de un átomo de argón es de 40.0 *u*. *b*) Un átomo de argón que se desplaza a su velocidad raíz cuadrada media se dirige corriente arriba hacia un haz de rayos láser cuya longitud de onda mide 105 nm. ¿Cuánto cambia su velocidad si absorbe un fotón proveniente del haz?

Solución *a*) Al utilizar la ecuación 22-20, donde k es la constante de Boltzmann, tenemos

$$v_{rms} = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2} = \left[\frac{(3)(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{(40.0\ \text{u})(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg/u})}\right]^{1/2}$$
$$= 430\ \text{m/s}.$$

El resultado equivale a 960 mi/h, cantidad que también puede expresarse como Mach 1.3, velocidad mucho mayor que la de un avión comercial de propulsión. Según se aprecia en la figura 22-6, más del 40% de los átomos de argón tienen velocidades mayores que esta raíz cuadrada media.

b) El momento lineal debe conservarse en las interacciones de fotón-átomo. La solución de la ecuación 45-18 con la reducción de velocidad Δv nos da

$$\Delta v = -\frac{h}{m\lambda} = -\frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(40.0\ \text{u})(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg/u})(105 \times 10^{-9}\ \text{m})}$$
$$= -9.45 \times 10^{-2}\ \text{m/s} \approx -9\ \text{cm/s}.$$

Es aproximadamente la velocidad de un insecto en vuelo. Recuérdese que la velocidad inicial del átomo era 430 m/s.

PROBLEMA RESUELTO 45-6. Un átomo de sodio en reposo puede ser elevado de su estado base a un estado excitado, si absorbe un fotón procedente de un haz de rayos láser cuya longitud de onda mide 589 nm, cantidad que suponemos exacta para simplificar el problema. A causa del efecto Doppler, ¿qué cambio de longitud de onda "percibe" el átomo de sodio en ese haz, si se dirige corriente arriba de él con una velocidad de 500 m/s?

Solución El átomo se desplaza lentamente respecto a la velocidad de la luz; así que podemos emplear la ecuación 39-21 y prescindir de los términos que no sean lineales. Una vez revisada para tener en cuenta el movimiento y expresada en función de la longitud de onda y no de la frecuencia, esta ecuación queda así

$$\lambda = \lambda_0 (1 + v/c)^{-1} \approx \lambda_0 (1 - v/c).$$

Aquí v es la velocidad del átomo, y λ_0 la longitud de onda de la luz láser. Como de costumbre, c es la velocidad de la luz. Podemos reescribir esta ecuación otra vez, expresándola como un corrimiento de la longitud de onda de Doppler:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda = \lambda_0 (v/c)$$
$$= (589\ \text{nm})(500\ \text{m/s})/(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})$$
$$= 9.8 \times 10^{-4}\ \text{nm}.$$

Por tanto, el átomo en movimiento "percibe" la longitud de onda de la luz láser aumentada en esa cantidad pequeña. El cambio fraccional de la longitud de onda a causa del efecto Doppler es $(9.8 \times 10^{-4}\ \text{nm})/(589\ \text{nm})$ o 1.7×10^{-6}, cantidad que representa sólo 0.00017%.

OPCIÓN MÚLTIPLE

45-1 Introducción al fotón
45-2 Radiación térmica

1. La radiación espectral de un radiador de cavidad alcanza su máximo con la longitud de onda $\lambda_{máx} = \lambda_0$. La temperatura del cuerpo cambió ahora, de modo que la radiancia espectral obtiene su máximo en $\lambda_{máx} = \lambda_0/2$. El cambio de temperatura ocasiona que la intensidad radiante del cuerpo crezca un factor de
   A) 2. B) 4. C) 8. D) 16.
2. Un radiador de cavidad presenta su radiancia espectral máxima con una longitud de onda de 28.98 μm en la región infrarroja del espectro. Ahora la temperatura del cuerpo creció de modo que se duplica su intensidad radiante $I(T)$.
   a) ¿Cuál es esta nueva temperatura?
   A) $\sqrt[4]{100}$ K B) $\sqrt[4]{200}$ K
   C) $\sqrt[4]{2}$ 100 K C) $\sqrt{4}$ 100 K
   b) ¿En qué longitud de onda alcanzará ahora su valor máximo la radiancia espectral?
   A) $\sqrt[4]{28.98}$ μm B) $\sqrt[4]{28.98/2}$ μm
   C) $\sqrt[4]{1/2}$ 28.98 μm D) $\sqrt{1/4}$ 28.98 μm
3. ¿Cuál de los enunciados siguientes es consecuencia de la obtención de la ley de radiación por Planck?
   A) Los osciladores atómicos pueden emitir y absorber energía sólo en valores discretos.
   B) Los osciladores atómicos pueden emitir y absorber energía sólo en frecuencias discretas.
   C) Tanto A) como B)
   D) Ni A) ni B)

45-3 El efecto fotoeléctrico

4. ¿Qué efecto se produce al aumentar la longitud de onda de la luz que incide sobre el emisor en un aparato de efecto fotoeléctrico?
   A) Disminuye la función de trabajo.
   B) Disminuye la frecuencia de corte.
   C) Disminuye el potencial de frenado.
   D) Aumenta el retraso de tiempo en la emisión de fotoelectrones.
   E) Ninguno de los efectos anteriores.
5. ¿Qué efecto se produce al aumentar la intensidad de la luz que incide sobre el emisor en un aparato de efecto fotoeléctrico?
   A) Disminuye la función de trabajo.
   B) Disminuye la frecuencia de corte.
   C) Disminuye el potencial de frenado.
   D) Aumenta el retraso de tiempo en la emisión de fotoelectrones.
   E) Ninguno de los efectos anteriores.
6. Una luz monocromática con una frecuencia muy por arriba de la de corte incide sobre un emisor en un aparato de efecto fotoeléctrico. Su frecuencia se duplica entonces mientras se mantiene constante a la intensidad.
   a) ¿Cómo afecta lo anterior al potencial de frenado?
   A) El potencial aumentará.
   B) El potencial disminuirá.
   C) El potencial permanecerá inalterado.
   b) ¿Cómo afecta lo anterior a la corriente fotoeléctrica?
   A) La corriente aumentará.
   B) La corriente disminuirá.
   C) La corriente permanecerá inalterada.

45-4 El efecto Compton

7. La dispersión de Compton describe una colisión entre un fotón y un electrón. ¿Cuál de los siguientes enunciados es falso?
   A) La dispersión de Compton conserva el momento.
   B) La dispersión de Compton es elástica.

C) La dispersión de Compton es una prueba de la naturaleza corpuscular de la luz.
D) La ecuación 45-17 supone que el electrón se hallaba en reposo originalmente.

8. ¿Cómo el corrimiento de Compton máximo $\Delta\lambda_{máx}$ depende de la longitud de onda λ?
A) $\Delta\lambda_{máx} \propto \lambda^2$ B) $\Delta\lambda_{máx} \propto \lambda$
C) $\Delta\lambda_{máx}$ es independiente de λ
D) $\Delta\lambda_{máx} \propto 1/\lambda$

9. Un fotón de longitud de onda λ entra en un gas de electrones. ¿Cuál es el número mayor de colisiones que pueden producirse en el fotón al ser absorbido completamente por el gas?
A) $\approx \lambda mc/2h$ B) $\approx \lambda mc/h$
C) $\approx 2\lambda mc/h$ D) $\approx \lambda mc^2/h$

10. Un fotón *A* posee el doble de energía de un fotón *B*. ¿Qué razón de momento existe entre *A* y *B*?
A) 4:1 B) 2:1 C) 1:1 D) 1:2

45-5 Descubrimiento del fotón

11. Considere los primeros experimentos acerca de la anticoincidencia. ¿Cuál de los siguientes enunciados explica de modo razonable por qué ambos detectores producirán un pulso?
A) Dos fotones se emitieron simultáneamente desde la misma fuente.
B) Los dos fotones se emitieron en momentos diferentes desde la misma fuente, pero los detectores muestran algunas incertidumbres intrínsecas.
C) La luz se comporta como una onda con una amplitud arbitrariamente pequeña.
D) Los tres enunciados anteriores son explicaciones plausibles.

12. ¿Cuál de los siguientes enunciados es más importante respecto a las modificaciones introducidas en 1986 a los experimentos de anticoincidencias?
A) Con dos fotones emitidos las señales alcanzarían el doble de magnitud.
B) El uso de átomos excitados de calcio ayudó a cerciorarse de que los fotones se emitieran uno a la vez.
C) El fotón desencadenador ayudó a cerciorarse de que sólo un fotón estuviera presente en las regiones detectores en un momento dado.
D) El uso de luz láser hizo que sólo se emitiesen ondas coherentes.

45-6 Fotones y ondas

13. Se deja que una fuente de luz muy débil, la cual emite sólo un fotón a la vez, emita luz a través de una rendija doble. Después la luz brilla sobre una película fotográfica.
a) ¿Qué se verá en la película si se expone un breve periodo?
A) La película mostrará únicamente puntos discretos donde los fotones chocan contra ella, sin señales de un patrón de interferencia.
B) La película deberá mostrar puntos discretos donde los fotones chocan contra ella, pero los puntos se distribuirán como un patrón de interferencia.
C) La película mostrará un patrón continuo de interferencia.
b) En seguida se expone la película durante largo tiempo.
A) La película mostrará sólo puntos discretos donde los fotones chocan contra ella, sin signos de un patrón de interferencia.
B) La película debería mostrar puntos discretos donde los fotones chocan contra ella, pero los puntos se distribuirán como un patrón de interferencia.
C) La película mostrará un patrón de interferencia continuo.

45-7 Reducción de la velocidad de los átomos por bombardeo con fotones

14. ¿Cuál de los siguientes enunciados es indispensable para que se realice el enfriamiento por los rayos láser? Seleccione los que lo sean.
A) Los átomos pueden absorber fotones que posean energía sólo dentro de intervalos pequeños.
B) La fuente de luz debe ser coherente.
C) La luz debe cumplir el efecto Doppler.

PREGUNTAS

1. Los "paquetes" formados por los carbones en un fuego hecho con ellos parecen más brillantes que los propios carbones. ¿Es su temperatura mucho más elevada que la de la superficie de un carbón al rojo vivo expuesto? Explique este fenómeno tan común.
2. La relación $I(T) = \sigma T^4$ (Ec. 45-3) es exacta con cavidades verdaderas y se cumple en todas las temperaturas. ¿Por qué no la utilizamos como base para definir la temperatura a, digamos, 100°C?
3. ¿Se cumple en todos los sólidos incandescentes la ley de la cuarta potencia de la temperatura, como parece sugerirlo la ecuación 45-3?
4. ¿Basta ver el cielo por la noche para descubrir estrellas más calientes que el Sol? ¿Más frías que él? ¿Qué busca cuando las mira? ¿Es una pista la brillantez de la estrella?
5. Betelgeuse, la estrella roja prominente en la constelación de Orión, tiene una temperatura superficial mucho menor que la del Sol; pero irradia energía al espacio con una rapidez considerablemente más rápida que el Sol. ¿A qué se debe?
6. Menos de un bajo porcentaje de la energía suministrada a una lámpara de 100 W aparece en forma de luz visible. ¿Qué sucede con el resto? ¿Que podría hacerse para aumentar el porcentaje? ¿Por qué no se ha hecho todavía?
7. La temperatura cutánea del cuerpo humano es de 300 K aproximadamente. ¿En qué región del espectro electromagnético emite radiación térmica con mayor intensidad?
8. Las curvas de radiancia espectral en los radiadores de cavidad no se intersectan en temperaturas diferentes (Fig. 45-1). Pero suponga que lo hicieran. ¿Puede demostrar que se violaría la segunda ley de la termodinámica?
9. Decimos que todos los objetos irradian energía en virtud de su temperatura y, sin embargo, no podemos verlos en la oscuridad. ¿Por qué no?
10. Demuestre que la constante de Planck presenta las dimensiones del momento angular. ¿Significa ello necesariamente que éste es una cantidad cuantizada?
11. Para que los efectos cuánticos sean un fenómeno "común" en nuestra vida, ¿qué orden de valor de magnitud necesitaría tener *h*? [Consúltese a G. Gamow, *Mr. Tompkins in Wonderland* (Cambridge University Press, Cambridge, 1957) donde se describe un mundo donde aparecen las constantes físicas *c*, *G* y *h*.]
12. Explique por qué un tubo con que se examina la emisión fotoeléctrica *a*) se evacua y *b*) se equipa con una ventana hecha de cuarzo en vez de vidrio.

13. Determine si se necesita o no la mecánica relativista para verificar la ecuación fotoeléctrica (Ec. 45-10) con 1% de incertidumbre. Recuerde que los potenciales normales de frenado miden unos cuantos volts.
14. En la figura 45-4, ¿no alcanza su máximo valor vertical (saturación) la corriente fotoeléctrica, cuando la diferencia de potencial aplicada es ligeramente más positiva que v_0?
15. En el efecto fotoeléctrico, ¿por qué la existencia de una frecuencia de corte favorece la teoría del fotón y rechaza la teoría ondulatoria?
16. ¿Por qué las mediciones fotoeléctricas son tan sensibles a la naturaleza de la superficie fotoeléctrica?
17. Una placa metálica aislada genera fotoelectrones cuando la ilumina por primera vez una luz ultravioleta, pero después deja de hacerlo. Explique el fenómeno.
18. ¿Por qué inclusive en la radiación incidente monocromática los fotoelectrones se emiten con distribución de velocidades?
19. Decimos que toda la energía de un fotón absorbido se cede a un fotoelectrón emitido. ¿Por qué prescindimos de la que recibe la red?
20. ¿Apoya el efecto Compton más la teoría del fotón de la luz que el efecto fotoeléctrico? Explique su respuesta.
21. Considere los siguientes procedimientos: *a*) bombardear un metal con electrones, *b*) colocar un fuerte campo eléctrico cerca de un metal, *c*) iluminarlo con luz, *d*) calentarlo a temperatura elevada. ¿Cuál de estos procedimientos da por resultado la emisión de electrones?
22. Una placa metálica se ilumina con una luz de cierta frecuencia. ¿Cuál de las siguientes características decidirán si se emiten o no fotoelectrones: *a*) la intensidad de la iluminación, *b*) la duración de la exposición a la luz, *c*) la conductividad térmica de la placa, *d*) su superficie, *e*) el material de la placa?
23. ¿Invalida la teoría de la fotoelectricidad de Einstein, según la cual la luz es una corriente de fotones, el experimento de interferencia de rendija doble donde se postula que la luz es una onda?
24. Explique la afirmación de que el ojo humano no podría detectar una tenue luz estelar si la luz no fuera corpuscular.
25. ¿Cómo puede la energía del fotón estar dada por $E = hf$ cuando la mera presencia de la frecuencia f en la fórmula implica que la luz es una onda?
26. Un fotón no tiene masa en reposo, pues nunca puede estar en ese estado respecto a ningún observador. Si la energía es igual a mc^2, ¿cómo es posible que un fotón tenga energía?
27. El momento p de un fotón está dado por $p = h/\lambda$. ¿Por qué c, la velocidad de la luz, no aparece en esta expresión?
28. Al hablar de la propagación de la luz, algunas veces utilizamos rayos rectos, otras veces ondas y otras más fotones discretos. ¿En qué medida son compatibles estos puntos de vista distintos? ¿Hay casos en que uno de ellos es evidentemente superior a los demás?
29. Dado que $E = hf$ en un fotón, el corrimiento de Doppler en la frecuencia de la radiación proveniente de una fuente de luz en retroceso parecería indicar reducción de la energía de los fotones emitidos. ¿Es verdad este hecho? De ser así, ¿qué sucedió con el principio de conservación de la energía? (Véase "Questions Studentes Ask", *The Physics Teacher*, diciembre de 1983, p. 616.)
30. ¿En qué se distingue un fotón de una partícula material?
31. ¿Qué dirección sigue el electrón dispersado de Compton con la energía cinética máxima, en comparación con la del haz de fotones monocromático incidente?
32. ¿Por qué en la imagen de dispersión de Compton (Fig. 45-8), esperaría que $\Delta\lambda$ no dependa de los materiales de que se compone el dispersor?
33. ¿Por qué no observamos el efecto Compton con luz visible?
34. Por el efecto Compton, los electrones libres en el espacio exterior dispersan muchas veces la luz procedente de estrellas lejanas antes que llegue a nosotros. Ello hace que la luz se corra hacia el rojo. ¿Cómo podemos distinguir este corrimiento del corrimiento al rojo de Doppler a causa del movimiento de las estrellas que retroceden?
35. En el efecto fotoeléctrico y en el efecto Compton hay un fotón incidente y un electrón expulsado. ¿En qué se distinguen ambos efectos?
36. *Mencione y explique* las suposiciones que hizo Planck en el problema de radiación de cavidad, las que hizo Einstein en relación con el efecto fotoeléctrico y las que hizo Compton al estudiar el efecto que lleva su nombre.
37. Describa varios métodos experimentales que sirven para determinar el valor de la constante h de Planck.
38. Un láser proyecta un haz de luz sobre una mesa de laboratorio. Si coloca usted una rejilla de difracción en su trayectoria y observa el espectro, declarará que el haz es una onda. Pero si pone una superficie metálica limpia en la trayectoria y si observa los fotoelectrones expulsados, declarará que el mismo haz es una corriente de partículas (fotones). ¿Qué puede decir del haz si no pone nada en su trayectoria?

EJERCICIOS

45-1 Introducción al fotón

1. *a*) Por medio de los valores "óptimos" de las constantes fundamentales que se incluyen en el apéndice B, demuestre que la energía E de un fotón se relaciona con su longitud de onda λ a través de

$$E = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{\lambda}$$

El resultado anterior es útil cuando se resuelven algunos problemas. *b*) La luz de color anaranjado proveniente de una lámpara de sodio de carretera tiene una longitud de onda de 589 nm. ¿Cuánta energía posee un fotón individual de la lámpara?

2. Considere una luz monocromática que incide sobre una película fotográfica. Los fotones incidentes se registrarán si tienen suficiente energía para disociar una molécula AgBr en la película. La energía mínima requerida para ello es 0.60 eV aproximadamente. Calcule la longitud de corte de onda máxima de la luz a la que no la registrará la película. ¿En qué región del espectro está dicha longitud de onda?

3. Un átomo absorbe un fotón cuya longitud de onda es de 375 nm y de inmediato emite otro que tiene una longitud de onda de 580 nm. ¿Cuál es la energía neta absorbida por el átomo durante el proceso?
4. En condiciones ideales el ojo normal registra una sensación visual a 540 nm, si los fotones incidentes se absorben con una rapidez mínima de 100 s^{-1}. ¿A qué nivel de potencia corresponde esto?
5. En general, los procesos de ionización gaseoso exigen cambios de energía de 1.0×10^{-18} a 1.0×10^{-16} J. ¿Qué región del espectro electromagnético del Sol es entonces la causa principal de la ionosfera en la atmósfera terrestre?
6. En la imagen de fotón de la radiación demuestre lo siguiente: para que dos haces de luz paralelos de distinta longitud de onda presenten la misma intensidad, la rapidez por unidad de superficie con que pasan los fotones por una sección transversal cualquiera de los haces tiene la misma razón que las longitudes de onda.
7. Una lámpara de luz ultravioleta, que emite radiación a 400 nm, y una lámpara de luz infrarroja, que lo hace a 700 nm, tienen una potencia de 130 W. *a*) ¿Cuál de las dos lámparas irradia fotones con mayor velocidad? *b*)¿Cuántos más fotones genera por segundo que el otro foco?
8. Una clase especial de lámpara emite luz monocromática con una longitud de onda de 630 nm. Tiene una potencia de 70.0 W y una eficiencia de 93.2% en la conversión de energía eléctrica en luz. ¿Cuántos fotones emitirá a lo largo de su vida de 730 h?

45-2 Radiación térmica

9. En 1983 el Infrared Astronomical Satellite (IRAS) detectó una nube de partículas sólidas que rodeaban la estrella Vega, irradia normalmente con una longitud de onda de 32 pm. ¿Cuál es la temperatura de la nube? Suponga una emisividad de uno.
10. Los físicos que estudian las temperaturas bajas no juzgarán que una temperatura de 2.0 mK (0.0020 K) es demasiado bajo. ¿Con qué longitud de onda alcanza su nivel máximo la radiancia espectral de una cavidad a esta temperatura? ¿A qué región del espectro electromagnético pertenece esta radiación? ¿Qué problemas prácticos plantea operar un radiador de cavidad a una temperatura tan baja?
11. Calcule la longitud de onda de una radiancia espectral máxima e identifique la región del espectro electromagnético a que pertenece en los siguientes casos: *a*) una radiación cósmica de fondo de 2.7 K, un residuo de un meteoro primordial; *b*) su cuerpo, suponiendo una temperatura cutánea de 34°C; *c*) el filamento de lámpara de tungsteno a 1 800 K; *d*) El Sol, a una temperatura superficial de 5 800 K; *e*) un aparato termonuclear que explota, a una temperatura de meteoro de 10^7 K; *f*) el universo inmediatamente después del Big Bang, a una temperatura de 10^{38} K. En todos los casos suponga una condición de radiación de cavidad.
12. *a*) La temperatura superficial efectiva del Sol es 5 800 K. ¿Con qué longitud de onda esperaría que irradie con la máxima intensidad? ¿En qué región del espectro ocurre? ¿Por qué entonces el Sol aparece de color amarillo? *b*) ¿A qué temperatura es la radiación de cavidad más visible al ojo humano? (Fig. 39-6).
13. Una cavidad cuyas paredes se conservan a 1 900 K tiene perforado en su pared un hoyo pequeño de 1.00 mm de diámetro. ¿Con qué velocidad escapa la energía por él desde la cavidad interior?
14. Una cavidad a una temperatura absoluta T_1 irradia energía en un nivel de potencia de 12.0 mW. ¿En qué nivel de potencia irradia si lo hace a una temperatura $2T_1$?
15. *a*) Un radiador ideal tiene una radiancia espectral a 400 nm que es 3.50 veces su radiancia a 200 nm. ¿Cuál es su temperatura? *b*) ¿Cuál sería si su radiancia espectral a 200 nm fuera 3.50 veces mayor que su radiancia espectral a 400 nm?

45-3 El efecto fotoeléctrico

16. Los satélites y las naves espaciales que giran alrededor de la Tierra se cargan en parte por la pérdida de electrones, causada por el efecto fotoeléctrico que produce la luz solar sobre la superficie externa de los vehículos espaciales. Suponga que el satélite está revestido de platino, metal que tiene una de las más grandes funciones de trabajo: $\phi = 5.32$ eV. Calcule el fotón de menor frecuencia que puede expulsar un fotoelectrón del platino. (Los satélites se diseñan para reducir al mínimo esa carga.)
17. Quiere obtener una sustancia para una fotocelda operable con luz visible. ¿Cuál de los siguientes materiales es el adecuado (la función de trabajo se anota entre paréntesis): tántalo (4.2 eV), tungsteno (4.5 eV), aluminio (4.2 eV), bario (2.5 eV), litio (2.3 eV), cesio (1.9 eV)?
18. Encuentre la energía cinética máxima en eV de unos fotoelectrones si la función de trabajo del material es 2.33 eV y la frecuencia de la radiación es 3.19×10^{15} Hz?
19. *a*) La energía necesaria para extraer un electrón del sodio metálico es 2.28 eV. ¿Muestra el sodio un efecto fotoeléctrico con luz roja, cuando $\lambda = 678$ nm? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de corte en la emisión fotoeléctrica del sodio y a qué color corresponde?
20. Una luz con 200 nm de longitud de onda incide sobre una superficie de aluminio. En él se requieren 4.2 eV para expulsar un electrón. ¿Cuál es la energía cinética de *a*) los fotoelectrones más rápidos y *b*) los fotoelectrones más lentos emitidos? *c*) Determine el potencial de frenado. *d*) Calcule la longitud de onda de corte del aluminio.
21. Unos fotones incidentes chocan contra una superficie de sodio cuya función de trabajo es de 2.28 eV, provocando una emisión fotoeléctrica. No fluye fotocorriente cuando se impone un potencial de frenado de 4.92 V. Calcule la longitud de onda de los fotones incidentes.
22. El potencial de frenado de unos fotoelectrones emitidos desde una superficie iluminada con una luz de 491 nm de longitud de onda es 710 mV. Cuando a la longitud incidente se le da un nuevo valor, el potencial de frenado es 1.43 V. *a*) ¿Cuál es esta nueva longitud de onda? *b*) ¿Cuál es la función de trabajo de la superficie?
23. *a*) Si la función de trabajo de un metal es 1.85 eV, ¿cuál debería ser el potencial de frenado de la luz que tenga una longitud de onda de 410 nm? *b*) ¿Cuál es la función de trabajo de la superficie?
24. Una superficie de litio, donde la función de trabajo es 2.49 eV, se irradia con una luz de frecuencia 6.33×10^{14} Hz. La pérdida de electrones causa que el metal adquiera un potencial positivo. ¿Cuál será éste en el momento en que su valor impida la pérdida ulterior de electrones en la superficie?
25. Los datos de la figura 45-5 los obtuvo el norteamericano Robert A. Millikan (1868-1953), quien en 1921 obtuvo el Premio No-

bel de Física por su verificación del efecto fotoeléctrico. Sus datos fotoeléctricos relativos al litio son los siguientes:

Longitud de onda (nm)	433.9	404.7	365.0	312.5	253.5
Potencial de frenado (V)	0.55	0.73	1.09	1.67	2.57

Trace una gráfica como la de la figura 45-5, que se refiere al sodio, y obtenga *a*) la constante de Planck y *b*) la función de trabajo del litio.

26. Para extraer un electrón interno, ligado con la máxima fuerza, de un átomo de molibdeno se requiere una energía de 20 keV. Si la operación se efectúa dejando que un fotón lo golpee, *a*) ¿cuál debe ser la longitud de onda asociada del fotón? *b*) ¿En qué región del espectro se halla el fotón? *c*) ¿Podría asignársele a este proceso el nombre de efecto fotoeléctrico? Comente sus respuestas.

45-4 El efecto Compton

27. Un fotón de rayos X tiene una longitud de onda de 41.6 pm. Calcule *a*) su energía, *b*) su frecuencia y *c*) su momento.

28. Determine *a*) la frecuencia, *b*) la longitud de onda y *c*) el momento de un fotón cuya energía es igual a la energía en reposo del electrón.

29. ¿Cuánto disminuye la velocidad de un átomo de sodio al absorber un fotón de 589 nm de longitud de onda con el cual choca frontalmente?

30. La magnitud h/mc de la ecuación 45-17 se conoce a menudo como *longitud de onda de Compton*, λ_C, de la partícula que se dispersa y esa ecuación se escribe así

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\phi).$$

a) Calcule la longitud de onda Compton de un electrón y de un protón. *b*) ¿Qué energía posee un fotón cuya longitud de onda es igual a la de Compton del electrón? ¿Y de un protón? *c*) Demuestre que en general la energía de un fotón cuya longitud de onda sea igual a la de Compton de una partícula es la misma que la energía en reposo de esta última.

31. Unos fotones de 2.17 pm de longitud inciden sobre electrones libres. *a*) Determine la longitud de onda de uno que se dispersa 35.0° de la dirección incidente. *b*) Haga lo mismo si el ángulo de dispersión es 115°.

32. Un fotón de rayos gamma de 511 keV se dispersa por efecto Compton de un electrón libre en un bloque de aluminio. *a*) ¿Cuál es su longitud de onda? *b*) ¿Qué longitud de onda tiene? *c*) ¿Cuál es su energía? Suponga un ángulo de dispersión de 72.0°.

33. Demuestre que $\Delta E/E$, la pérdida fraccional de energía de un fotón durante una colisión de Compton, está dada por

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{hf'}{mc^2}(1 - \cos\phi).$$

34. ¿Cuál incremento fraccional de longitud de onda ocasiona una pérdida del 75% de la energía del fotón en una colisión de Compton con un electrón libre?

35. Encuentre el cambio máximo de longitud de onda en una colisión de Compton entre un fotón y un protón libre.

36. Un fotón de rayos X de 6.2 keV que incide sobre un bloque de carbono se esparce tras una colisión de Compton y su frecuencia se modifica 0.010%. *a*) ¿En qué ángulo se dispersa el fotón? *b*) ¿Cuánta energía cinética se imparte al electrón?

37. Un fotón de rayos X de $\lambda = 9.77$ pm de longitud de onda es dispersado hacia atrás por un electrón ($\phi = 180°$). Determine *a*) su cambio de longitud de onda, *b*) su cambio de energía y *c*) la energía cinética final del electrón.

38. Calcule el cambio fraccional de energía del fotón en una colisión de Compton con ϕ en la figura 45-8 igual a 90° para radiación en *a*) el intervalo de microondas, con $\lambda = 3.00$ cm; *b*) el intervalo visible, con $\lambda = 500$ nm; *c*) el intervalo de rayos X, con $\lambda = 0.10$ nm; *d*) el intervalo de rayos gamma, con $\lambda = 1.30$ pm. ¿Qué conclusiones extrae sobre la importancia del efecto Compton en estas regiones del espectro electromagnético, a juzgar exclusivamente por el criterio de pérdida de energía en un solo encuentro de Compton?

39. ¿En qué ángulo debe un electrón libre dispersar un fotón de 215 keV, para que pierda 10.0% de su energía?

45-5 Descubrimiento del fotón

40. Un detector de fotones puede resolver el tiempo de llegada de uno de ellos hasta 10^{-8} s. Dos de estos detectores se emplean en un experimento de anticoincidencia. *a*) ¿Cuál es la rapidez promedio máxima de la emisión de fotones en una fuente, si hay la esperanza de demostrar la anticoincidencia? *b*) Suponiendo que la fuente emita una luz de 550 nm de longitud de onda, ¿cuál es la salida de potencia de ella?

45-6 Fotones y ondas
45-7 Reducción de la velocidad de los átomos por bombardeo de fotones

41. Unos átomos no excitados de sodio en reposo absorberán fotones de una fuente de luz cuya longitud de onda es 588.995 nm. El átomo de sodio originalmente se desplaza "corriente arriba" a una velocidad de 300 m/s, hacia el interior de un haz de rayos láser. *a*) ¿Cuál debería ser la longitud de onda de los fotones del haz láser que puede ser absorbida por el átomo? *b*) ¿Qué velocidad tiene el átomo inmediatamente después que absorbe un fotón? *c*) El átomo excitado de sodio emite entonces otro fotón en dirección de su velocidad. ¿Cuál es su velocidad final?

42. La velocidad de los átomos de argón disminuye unos 15 cm/s por cada fotón emitido y absorbido. *a*) Si uno de ellos inicialmente se desplaza a 430 m/s, ¿con cuántos fotones debe interactuar a fin de aminorar la velocidad a 50 cm/s? *b*) Suponiendo que el aparato de enfriamiento mida aproximadamente 1 m de longitud, ¿a qué velocidad debe interactuar con los fotones para enfriarse antes de salir del aparato?

PROBLEMAS

1. Un horno con una temperatura interna de $T_0 = 215°C$ se encuentra en un cuarto cuya temperatura es $T_1 = 26.2°C$. Hay una pequeña abertura de $A = 5.10$ cm^2 de superficie en un lado del horno. ¿Cuánta potencia neta se transfiere de él al cuarto?

2. El filamento de una lámpara de 100 W es un alambre cilíndrico de tungsteno de 0.280 mm de diámetro y de 1.80 cm de largo. En el apéndice D consúltense los datos necesarios referentes al tungsteno. Suponga que el filamento irradia en forma idéntica a

un radiador de cavidad y desprecie la energía que absorbe del ambiente. *a*) Calcule la temperatura de operación del filamento. *b*) ¿Cuánto tarda en enfriarse a 500°C una vez apagada la lámpara?

3. Una lente convexa de 3.8 cm de diámetro y con una longitud focal de 26 cm produce una imagen del Sol sobre una pantalla delgada negra del mismo tamaño que ella. Obtenga la temperatura máxima a la que podemos elevar la pantalla. La temperatura efectiva del Sol es 5 800 K.

4. Demuestre que la longitud de onda $\lambda_{máx}$ a la que la ley de radiación espectral de Planck (Ec. 45-6) alcanza su valor más alto está dada por la ecuación 45-4,

$$\lambda_{máx} = (2898\ \mu m \cdot K)/T.$$

(Sugerencia: Haga $dR/d\lambda = 0$; encontrará una ecuación cuya solución numérica es 4.965.)

5. Imagine un planeta, de radio R, que gira alrededor del Sol en una órbita circular de radio r. Suponga que carece de atmósfera (y por lo mismo no produce "efecto de invernadero" en su temperatura superficial). *a*) Demuestre que su temperatura superficial T se obtiene de la relación $T^4 = P_{Sol}/16\ \pi\sigma r^2$, donde P_{Sol} es la salida de energía radiante del Sol. *b*) Evalúe numéricamente la temperatura de la Tierra.

6. *a*) Integre la ley de radiación de Planck (Ec. 45-6) en todas las longitudes de onda y demuestre así que la potencia irradiada por metro cuadrado de una superficie de cavidad está dada por

$$I(T) = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2}\right) T^4 = \sigma T^4.$$

(Sugerencia: Introduzca un cambio en las variables haciendo $x = hc/\lambda kT$. Encontrará entonces la integral definida

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1}$$

la cual posee el valor $\pi^4/15$.) (*b*) Verifique que el valor numérico de la constante σ es $5.67 \times 10^{-8}\ W/m^2 \cdot K^4$.

7. Suponga que una lámpara de vapor de sodio de 100 W irradia su energía uniformemente en todas direcciones a través de fotones, con una longitud de onda asociada de 589 nm. *a*) ¿Con qué rapidez se emiten fotones de la lámpara? *b*) ¿A qué distancia de ella, el flujo promedio de fotones será 1.00 fotón/(cm^2 · s)? *c*) ¿A qué distancia la densidad promedio de fotones será 1.00 fotón/cm^3? *d*) Calcule el flujo y la densidad de fotones a 2.00 m de la lámpara.

8. Mediante el análisis de una colisión entre un fotón y un electrón libre (aplicando la mecánica relativista), demuestre la imposibilidad de que un fotón ceda toda su energía al electrón libre. En otras palabras, el efecto fotoeléctrico no se produce con electrones completamente libres; es necesario que estén ligados en un sólido o en un átomo.

9. Unos rayos X con una longitud de onda de 71.0 pm expulsan fotoelectrones de una hoja de oro; estos últimos se originan en lo profundo de los átomos del oro. Los electrones describen trayectorias circulares de radio r en una región de campos magnéticos uniformes $\vec{B}$. Los experimentos demuestran que $rB = 188\ \mu T \cdot m$. Determine *a*) la energía cinética máxima de los fotoelectrones y *b*) el trabajo efectuado al extraer los electrones de los átomos de oro que forman la hoja.

10. Efectúe las operaciones algebraicas necesarias para eliminar ν y θ en las ecuaciones 45-13, 45-15 y 45-16, con el fin de obtener la relación del corrimiento de Compton (Ec. 45-17).

11. *a*) Demuestre que, cuando un fotón de energía E se dispersa desde un electrón libre, la energía cinética máxima de retroceso de este último está dada por

$$K_{máx} = \frac{E^2}{E + mc^2/2}.$$

b) Calcule la energía cinética del electrón dispersado de Compton, que un haz incidente de rayos X de 17.5 keV expulsa de una delgada hoja de cobre.

CAPÍTULO 46

LA NATURALEZA DE LA MATERIA

En el capítulo 45 vimos que la luz, considerada tradicionalmente una onda, tiene un aspecto corpuscular, a saber, el fotón. En este capítulo vamos a ofrecer pruebas experimentales que apoyan la hipótesis de que la materia, que durante largo tiempo se pensó que estaba constituida por partículas, tiene un aspecto ondulatorio. El principio de incertidumbre de Heisenberg nos mostrará hasta dónde podemos ampliar el concepto de partícula dentro del ámbito cuántico.

A continuación explicaremos la ecuación de Schrödinger, la ecuación fundamental de la mecánica cuántica, que trata del comportamiento ondulatorio de las partículas. Entre las predicciones de la mecánica cuántica, se encuentra el fenómeno de penetración de barreras; en éste, las partículas entran en regiones del espacio que les estarían vedadas en la mecánica newtoniana.

46-1 ONDAS DE MATERIA

En la naturaleza abundan las simetrías de todo tipo. Si la luz puede ser una onda y una partícula a la vez, ¿es posible que la materia reúna ambos comportamientos? En otras palabras, ¿puede el electrón, concebido tradicionalmente como partícula desde su descubrimiento en 1898, presentar además un aspecto ondulatorio? Más en concreto, ¿puede asignársele una longitud de onda y una frecuencia al electrón en movimiento?

En 1924 el físico francés Prince Louis-Victor de Broglie (1892-1987), motivado enteramente por el argumento de la simetría, contestó en forma afirmativa a las preguntas anteriores. Propuso que un electrón de energía E y de momento lineal p puede describirse como una *onda de materia* cuya longitud y frecuencia están dadas por

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{46-1}$$

y

$$f = \frac{E}{h}, \tag{46-2}$$

donde h es la constante de Planck. Obsérvese que las dos ecuaciones son idénticas a las que utilizamos para describir el fotón en la sección 45-1, salvo que aquí las hemos resuelto para λ y f en vez de resolverlas para p y E. La longitud de onda de una partícula en movimiento calculada por medio de la ecuación 46-1 recibe el nombre de *longitud de onda de De Broglie.* De Broglie quien compartió el Premio Nobel de Física de 1929 por su descubrimiento de la naturaleza ondulatoria de la materia.

Algunos objetos como las canicas o las pelotas de béisbol no parecen ser ondas en absoluto. Esto obedece a lo siguiente: la constante h de Planck en la ecuación 46-1 es tan pequeña y el momento p incluso de los objetos macroscópicos de movimiento lento es tan grande que su longitud de onda de De Broglie es realmente pequeña: varios órdenes de magnitud menores que el tamaño de un núcleo atómico. Parece imposible diseñar un experimento que revele la naturaleza ondulatoria de estos objetos de escala grande. En la siguiente sección veremos que este comportamiento ondulatorio es muy común en electrones y en otras partículas microscópicas.

PROBLEMA RESUELTO 46-1. Calcule la longitud de onda de De Broglie de *a)* una partícula de polvo con una masa de 1.0×10^{-9} kg que se mueve con una velocidad de 2.0 cm/s y *b)* la de un electrón cuya energía cinética es 120 eV.

Solución *a)* Por medio de la ecuación 46-1 obtenemos

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(1.0 \times 10^{-9}\ \text{kg})(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m/s})} = 3.3 \times 10^{-23}\ \text{m}.$$

Este resultado es más pequeño que el tamaño de un núcleo ordinario en un factor de unos 50 millones. Imagine cuán pequeña debe ser la longitud de onda de De Broglie de una pelota de béisbol que va a 90 mi/h. No es posible construir un aparato que revele la naturaleza ondulatoria de estos objetos en movimiento. *b*) Dado que $K << mc^2$, sin riesgo podemos prescindir de la relatividad y servirnos de la relación clásica entre momento y energía cinética, a saber, $K = p^2/2m$. Entonces, con base en la ecuación 46-1,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}}$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{(2)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(120\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}}$$

$$= 1.1 \times 10^{-10}\ \text{m} = 0.11\ \text{nm}.$$

La longitud de onda del electrón de De Broglie, mayor que la de la partícula de polvo de la parte *a*) en un factor aproximado de 3×10^{12}, mide más o menos el tamaño de un átomo. En la siguiente sección mostraremos cómo se miden las longitudes de onda de esta magnitud, comprobando así que los electrones efectivamente presentan un aspecto ondulatorio.

46-2 PRUEBAS DE LA HIPÓTESIS DE DE BROGLIE

La forma sencilla de demostrar la naturaleza ondulatoria de un electrón en movimiento consiste en dejar que un haz de esas partículas incida sobre una pantalla que contiene una rendija doble y en buscar las franjas de interferencia a medida que los electrones salen de ella. Fue así como probamos la naturaleza ondulatoria de la luz. Como se advierte en el problema resuelto 46-1, la longitud de onda de De Broglie, incluso de un electrón de momento relativamente pequeño ($K = 120$ eV), mide apenas el tamaño de un átomo individual. En la época de De Broglie la tecnología no permitía construir rendijas con tan poco espacio entre ellas como ésta.

Sin embargo, la longitud de onda de De Broglie, calculada en el problema resuelto 46-1 (0.11 nm) se parece al espaciamiento entre los átomos en un sólido cristalino común como el cobre o aluminio. Los átomos que lo constituyen son una especie de rejilla de difracción tridimensional que revela la naturaleza ondulatoria de un haz incidente de electrones. En 1927 C. J. Davisson y L. H. Germer efectuaron exitosamente experimentos basados en este principio en lo que entonces eran los Western Electric Laboratories (hoy Bell Laboratories of Lucent Technology), así como George P. Thompson y A. Reid en la Universidad de Aberdeen (Escocia). Los resultados indicaron que a los electrones en movimiento puede asignárseles una longitud de onda calculada por medio de la ecuación 46-1. Davisson y Thomson compartieron el Premio Nobel de Física de 1937 por su trabajo. A continuación vamos a describir varios experimentos que corroboran la hipótesis de que los electrones tienen un comportamiento ondulatorio.

Experimento de George P. Thompson. En la figura 46-1*a* vemos un arreglo similar al que emplearon Thomson y Reid para demostrar la naturaleza ondulatoria del electrón. Se permite que un haz monoenergético de electrones incida sobre un blanco hecho de un polvo fino de cristalitas metálicas pequeñas orientadas aleatoriamente. En el blanco, es prácticamente cierto que, por mero azar, el haz incidente de electrones siempre encontrará una reducida cantidad de cristalitas orientadas de modo que la ecuación 43-12 se satisface y ocurra la reflexión de Bragg (Sec. 43-4) del haz. Por simetría los electrones que experimentan tales reflexiones formarán varios círculos concéntricos en una película fotográfica colocada como se aprecia en la figura 46-1*a*. Cada círculo corresponde a un conjunto particular de planos atómicos en el material blanco.

En la figura 46-1*b* se incluyen los resultados de una repetición moderna del experimento de Thomson, donde se utilizó como blanco polvo fino de aluminio. La figura 46-1*c* muestra el patrón que se forma si el haz de electrones se sustituye por otro de rayos X. (La energía de los fotones de estos últimos y el momento de los electrones se escogieron de manera que ambos haces tuvieran la misma longitud de onda.) Una simple ojeada a los dos patrones de difracción no deja duda de que se originan en la misma forma. Si los rayos X tienen una naturaleza ondulatoria en este experimento (y la tienen), también la tendrán los electrones.

El experimento de Davisson y Germer. El aparato utilizado por ellos se ilustra en la figura 46-2*a*. Un haz de electrones provenientes de un filamento calentado se acelera mediante una diferencia de potencial ΔV de 54 V e incide sobre un cristal de níquel muy bien pulido. Las líneas de los átomos en la superficie crean una especie de rejilla de difracción para las ondas de electrones con un espaciamiento igual al de la red del cristal de níquel,

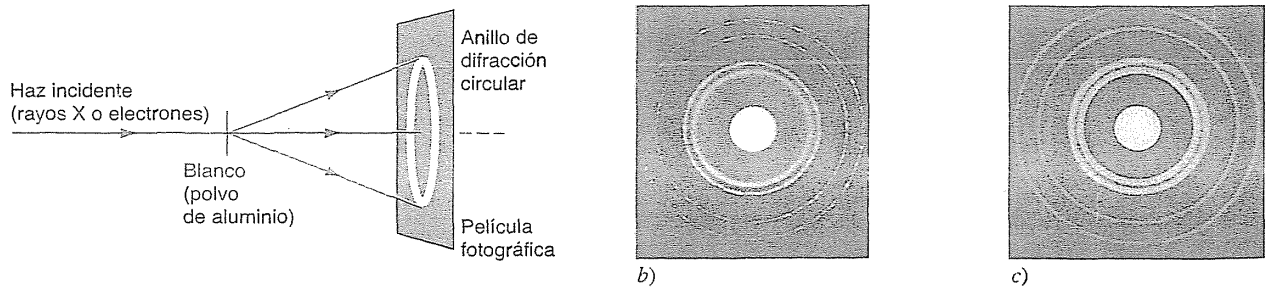


FIGURA 46-1. *a*) Arreglo con que se demuestra la naturaleza ondulatoria de los electrones en un haz incidente desde la izquierda. *b*) Patrón de difracción formado cuando un haz de electrones incide sobre un blanco de polvo de aluminio. *c*) Patrón que se forma cuando el haz de electrones se sustituye por un haz de rayos X.

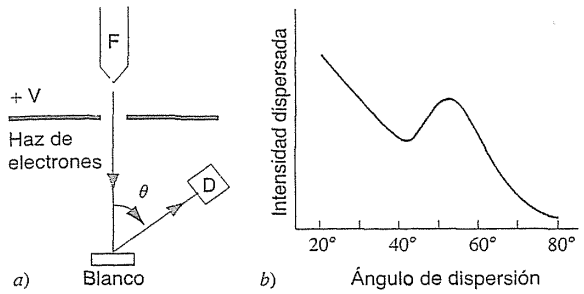


FIGURA 46-2. *a*) Aparato que se empleó en el experimento de Davisson-Germer. Se acelera un haz de electrones proveniente del filamento calentado F a través de un voltaje V y choca contra un blanco hecho de un solo cristal de níquel. Los electrones dispersados se observan en el detector D que puede moverse para formar varios ángulos θ respecto al haz incidente. *b*) Cuando $V = 54$ V, la intensidad del detector muestra una interferencia máxima en $\theta = 52°$.

o sea 0.215 nm. Un detector puede colocarse en cualquier ángulo θ respecto a la dirección del haz original de electrones.

La geometría de la figura 46-2*a* es idéntica a la que suele emplearse en las rejillas de difracción óptica de tipo reflexión para medir la longitud de onda de la luz. La ecuación de la rejilla d sen $\theta = m\lambda$ (Ec. 43-1) también se aplica a la geometría de la difracción del cristal. Como se muestra en la figura 46-2*b*, Davisson y Germer observaron un máximo de interferencia de primer orden ($m = 1$) de unos $\theta = 52°$ cuando su voltaje de aceleración era 54 V. En un electrón de 54 eV, la longitud de onda de De Broglie es 0.167 nm. Con $d = 0.215$ nm, la ecuación de la rejilla nos da $\theta = \text{sen}^{-1}(\lambda/d) = 51°$, lo cual coincide muy bien con nuestras observaciones. Este experimento no sólo vino a confirmar fehacientemente la hipótesis de De Broglie, sino que además demostró la utilidad de los haces de electrones de poca energía para investigar las propiedades de los cristales, técnica que todavía aplican los científicos de materiales.

Difracción mediante un lado recto. A comienzos de la década de 1940, las técnicas habían avanzado tanto que fue posible observar el patrón de difracción formado por un haz de electrones al que se le permite caer no en una rendija simple, sino en un lado recto y afilado de una pantalla opaca. Cuando se deja que un haz de luz incida sobre uno de estos lados, parte de la energía de luz se difracta una pequeña distancia, dentro de la sombra geométrica de la pantalla y, sobre todo, un patrón de franjas de interferencia aparece fuera de la sombra, paralelamente al lado. En la figura 46-3*a* se ve este patrón de luz. La figura 46-3*b* muestra un patrón semejante al de un haz de electrones de 38 keV. (La longitud de onda de De Broglie del electrón era mucho más pequeña que la del haz de luz visible; por eso para poner las dos figuras a la misma escala, hubo que amplificar el patrón de electrones en un factor aproximado de 180 000 por medio de un microscopio electrónico.) Una vez más, la simple comparación de los dos patrones de la figura 46-3 no deja duda de que se originan de la misma manera. Si la luz se comporta como una onda en este experimento —y lo hace—, lo mismo sucede con los electrones.

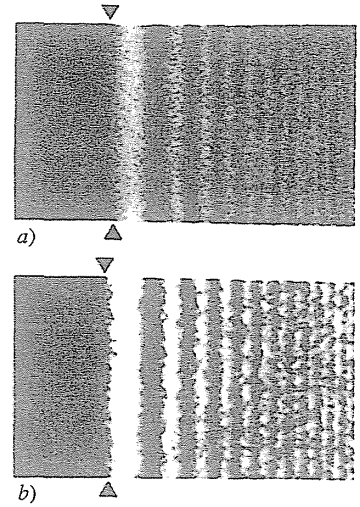


FIGURA 46-3. *a*) Patrón de difracción que se forma cuando un haz de luz visible incide sobre un lado recto. *b*) Patrón que se forma cuando un haz de electrones de 38 keV incide sobre un lado recto. Como las longitudes de onda en ambos casos son muy distintas, el patrón en *b*) ha sido aumentado en un factor aproximado de 180 000 para ponerlo en la misma escala que el patrón en *a*). En los dos casos el triángulo pequeño representa la posición del lado recto, es decir, la sombra geométrica del lado que se extiende a la izquierda.

Interferencia de rendija doble. Conforme las técnicas continuaron perfeccionándose, fue posible verificar la naturaleza ondulatoria de los electrones con el método tradicional de rendija doble, el que por primera vez aplicó Thomas Young en 1801 para probar la naturaleza ondulatoria de la luz. La figura 46-4 muestra una sección transversal del arreglo de rendija doble que en 1989 usaron A. Tonomura y sus colegas en el Laboratorio Hitachi de Investigación Avanzada y en la Universidad Gakushuin de Tokio. Consiste en un alambre delgado cargado positivamente, centrado entre dos placas metálicas aterrizadas. Los electrones procedentes del haz incidente eran

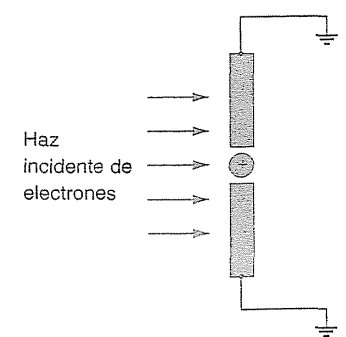


FIGURA 46-4. Arreglo de rendija doble para electrones. Los campos eléctricos que desvían se producen en cada rendija mediante un alambre delgado de carga positiva, colocado entre dos hojas metálicas que se mantienen en el potencial a tierra.

desviados por la fuerza eléctrica que operaba sobre ellos al momento de cruzar las rendijas. Los electrones emergentes —que habían acelerado hasta alcanzar un energía de 50 keV— incidieron sobre una pantalla fluorescente; cada uno de ellos marcaba el sitio de la incidencia emitiendo cientos de fotones como pulso individual. Tras obtener el aumento apropiado, dispusieron las cosas de modo que estos pulsos débiles de luz generasen un punto visible en una pantalla de imagen.

En la figura 46-5 se muestran los resultados de cuatro series de duración creciente, en las cuales se recogía en la pantalla un número cada vez mayor de electrones. En la figura 46-5*a,* donde apenas se recogieron 100 electrones, la distribución de los puntos de imagen parece aleatoria. Con todo, al ir creciendo el número de electrones obtenidos —de 70 000 en la figura 46-5*d*—, aparece lentamente un patrón de franjas de interferencia: la demostración clásica del comportamiento ondulatorio. La ecuación 46-1 se verifica con un análisis cuantitativo del espaciamiento de las franjas.

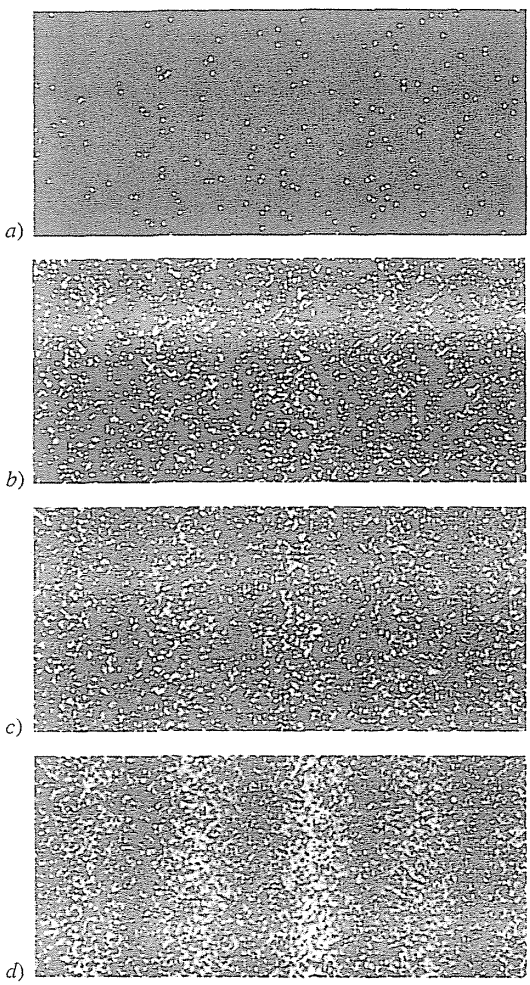


FIGURA 46-5. Cuatro series del experimento de rendija doble efectuado por Tonomura y sus colegas. Los números de electrones obtenidos en cada serie son aproximadamente *a*) 100, *b*) 3 000, *c*) 20 000 y *d*) 70 000. Nótese cómo las franjas de interferencia se acumulan al reunir más y más electrones.

La naturaleza ondulatoria de otras partículas

La ecuación 46-1 es válida en los electrones según lo demuestran con claridad los experimentos que acabamos de describir. Hace falta más experimentos para saber si también es válido con otras partículas. Vamos a comprobarlo en el caso de los neutrones usando el método de rendija doble.

La rendija doble es un alambre hecho con un material que absorbe neutrones como el boro centrado en un corte de una pantalla hecha de un material similar que absorbe neutrones. A los neutrones provenientes de un reactor nuclear se les permite incidir sobre la rendija doble y con un detector se explora el haz de neutrones que sale por el extremo de las rendijas. Esto se hace con el propósito de medir la intensidad del haz en fución de la posición del detector. La figura 46-6 contiene los resultados de un experimento cuyos resultados publicaron en 1991 R. Gähler y A. Zeilinger. Los puntos son valores de datos experimentales, y la curva sólida es la predicción de la mecánica cuántica. La excelente concordancia entre el experimento y la teoría viene a corroborar la naturaleza ondulatoria de un haz de neutrones.

En la figura 46-7 se observan las franjas de interferencia que resultaron en un experimento de 1991, donde se permitió que un haz de átomos de helio incidiera sobre una pantalla que contenía una rendija doble. Estas franjas de interferencia se habían demostrado en el caso de haces de otros átomos y de las moléculas de vapor de yodo (I_2).

Suelen utilizarse los experimentos de difracción por haces de electrones o de neutrones para estudiar las estructuras atómicas de los sólidos o líquidos. Los electrones, por ejemplo, son menos penetrantes que los rayos X y, por ello, tienen gran utilidad cuando se estudian las superficies. Los rayos X interactúan principalmente con los electrones en una muestra blanco y de ahí que no sea fácil usarlos para localizar átomos

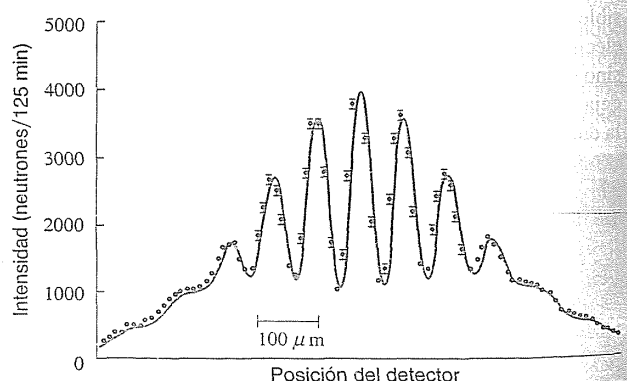


FIGURA 46-6. Patrón de interferencia descubierto por Gähler y Zeilinger en 1991, cuando permitieron que un haz de neutrones, incidiera sobre una pantalla, que procedía de una rendija doble. Los resultados indican que no sólo los electrones tienen naturaleza ondulatoria, sino también los neutrones.

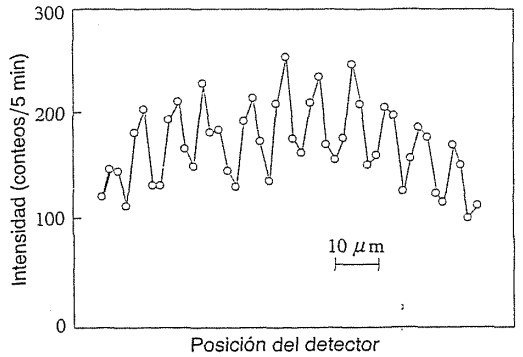


FIGURA 46-7. Patrón de interferencia reportado en 1991 por O. Carnal y J. Mlynek, cuando permitieron que un haz de átomos de helio incidiera sobre una pantalla desde rendija doble. No sólo los electrones y los neutrones son de naturaleza ondulatoria, sino también los átomos de helio.

ligeros, sobre todo los de hidrógeno, que tienen pocos electrones. Los neutrones, por el contrario, interactúan especialmente con el núcleo y pueden servir para llenar este hueco. Así, en la figura 46-8 se describe gráficamente la estructura del benceno sólido (C_6H_6), tal como se deduce de los experimentos de la difracción de neutrones. Se muestran claramente los seis átomos de carbono que constituyen el conocido anillo de benceno, lo mismo que los seis átomos agregados de hidrógeno.

Con protones o electrones de gran energía, cuya longitud de onda de De Broglie es del orden de un diámetro nuclear (10^{-14} m), hasta es posible observar el patrón de difracción de un núcleo atómico. A partir del patrón pueden determinarse el tamaño del núcleo y su forma.

En conjunto, los resultados anteriores referentes a los neutrones, protones, átomos de helio y otras partículas aportan pruebas convincentes de que la naturaleza ondulatoria es un comportamiento general de las partículas, y no una exclusiva de los electrones.

El microscopio electrónico

Una de las primeras aplicaciones prácticas de la naturaleza ondulatoria de la materia fue el microscopio electrónico, que se inventó en la década cuando De Broglie propuso su hipótesis. La potencia de resolución de los microscopios ópticos comunes está limitada por la longitud de onda de la luz empleada: cuanto menor sea la longitud, más finos detalles podrán examinarse. Los objetos puntuales separados por una distancia de apenas 200 nm pueden resolverse ópticamente con una luz de la menor longitud de onda posible. Sin embargo, como se aprecia en el problema resuelto 46-1, pueden generarse haces de electrones con una longitud de onda por lo menos 100 veces más pequeña.

Pudo construirse un microscopio basado en haces de electrones cuando se descubrió que un solenoide compacto y corto, recubierto con hierro, podía enfocar un haz de electrones emitido a lo largo de su eje central, en forma muy parecida a como un lente de vidrio puede enfocar un haz de luz. En 1931 el físico alemán Ernst Ruska construyó el primer microscopio electrónico que usaba dos de esos *lentes magnéticos*. Unos 55 años más tarde, Ruska (entonces de 80 años de edad) compartió el Premio Nobel de 1986 por su descubrimiento. En la actualidad los microscopios electrónicos se emplean en todo tipo de laboratorios científicos de todo el mundo. En la figura 46-9 se muestra la imagen de una mosca de fruta; esta imagen se obtuvo con un instrumento especializado conocido como *microscopio electrónico de barrido*.

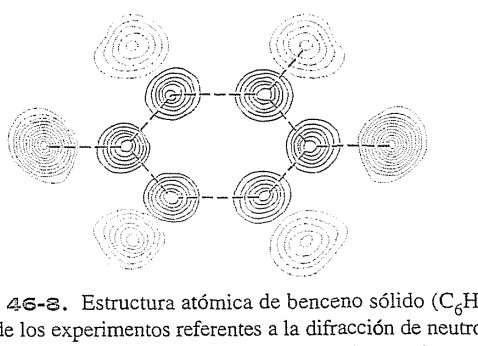


FIGURA 46-8. Estructura atómica de benceno sólido (C_6H_6) deducida de los experimentos referentes a la difracción de neutrones. Los círculos de línea llena muestran la ubicación de los seis átomos de carbono que componen el conocido anillo del benceno. Los círculos de línea punteada indican los seis átomos de hidrógeno ligados.

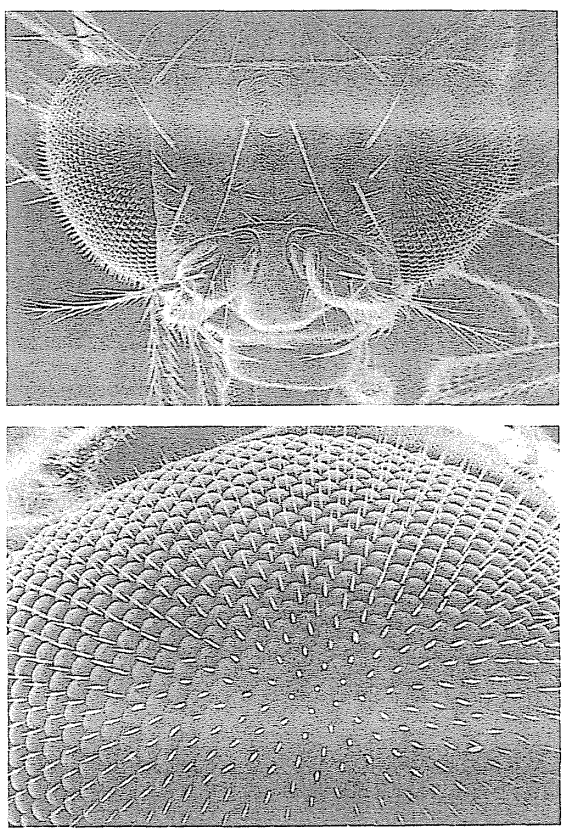


FIGURA 46-9. (Parte superior) Una mosca de la fruta, fotografiada con un microscopio electrónico de barrido. (Parte inferior) El ojo de la mosca.

Conviene señalar que, en el microscopio electrónico, los electrones del haz pueden analizarse como partículas cuando se trata de su paso por el sistema de lentes. Su naturaleza ondulatoria se manifiesta sólo al fijar la resolución que debe alcanzar el microscopio.

La naturaleza ondulatoria de los electrones individuales

Cuando Tonomura y sus colegas aminoraron la intensidad del haz incidente de electrones, de manera que un solo electrón pasara a la vez por el aparato de la figura 46-4, *continuaban* apareciendo las franjas de interferencia después de una exposición suficientemente larga. En la sección 45-1 vimos que los fotones manifiestan exactamente el mismo comportamiento. De ahí que, tanto en el caso de los electrones como en de los fotones, el experimento nos obliga a aceptar que los electrones tienen una naturaleza corpuscular y ondulatoria. Si concebimos el electrón como una partícula, queremos tratar de seguir su trayectoria y averiguar por cuál de las rendijas pasó: por supuesto una partícula clásica *no puede* atravesar ambas rendijas. Pero para observar un patrón de interferencia, sabemos que el electrón (lo que él sea) *debe* cruzar *las dos rendijas*. Es un comportamiento que nos agrada asociar a las ondas, pero estamos renuentes a relacionarlo con las partículas.

La experiencia cotidiana con objetos macroscópicos origina nuestra concepción intuitiva del comportamiento "correcto" de la materia. Ninguno de dichos objetos se comporta algunas veces como partícula y otras como onda. Sería extremadamente difícil golpear una pelota de béisbol y nos sorprendería mucho ver ondas de agua que de manera repentina liberan toda su energía en un lugar en forma de un paquete corpuscular concentrado. Ninguna experiencia diaria relacionada con el comportamiento de fotones o de electrones nos revela su naturaleza dual; de ahí que su comportamiento cuántico parece contradecir la intuición y a menudo lo calificamos de "extraño" (opinión que comparten inclusive algunos físicos). Como la intuición de nada nos servirá cuando examinemos fenómenos en el ámbito cuántico, no conviene intentar imaginar cómo un electrón pasa por dos rendijas al mismo tiempo. En palabras de Richard Feynman galardoneado con el Premio Nobel:

> Si puede evitarlo no siga diciéndose "pero cómo puede ser eso", pues caerá en un callejón del cual nadie ha logrado salir todavía. Nadie sabe por qué puede ser así.

Pese a ir contra el sentido común, la mecánica cuántica es la teoría más exitosa que jamás haya sido propuesta. Todas las predicciones que han sido probadas en el laboratorio pasaron la prueba con la máxima calificación.

PROBLEMA RESUELTO 46-2. En el experimento de rendija doble usado en la figura 46-7 para investigar la naturaleza ondulatoria de un haz de átomos de helio, las rendijas medían 1 μm de ancho; la separación d entre ellas era de 8 μm y el detector se hallaba a una distancia $D = 64$ cm de su plano. Mida el espaciamiento promedio Δy entre las franjas de la figura 46-7 y calcule la longitud de onda de De Broglie de los átomos de helio en el haz que incide sobre las rendijas.

Solución En la sección 41-2 (Ec. 41-4) vimos que el espaciamiento entre franjas de interferencia adyacentes en la pantalla de imagen de una interferencia de rendija doble era

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d}.$$

De acuerdo con la figura 46-7, estimamos que el espaciamiento promedio Δy entre esas franjas es 8 μm aproximadamente. Así pues, a partir de la ecuación anterior,

$$\lambda = \frac{d\,\Delta y}{D} = \frac{(8 \times 10^{-6}\ \text{m})(8 \times 10^{-6}\ \text{m})}{0.64\ \text{m}}$$
$$= 1.0 \times 10^{-10}\ \text{m} = 0.10\ \text{nm}.$$

El valor calculado con base en la ecuación 46-1 fue 0.103 nm, cifra que concuerda perfectamente con el valor experimental anterior.

PROBLEMA RESUELTO 46-3. Los reactores nucleares diseñados para experimentos de difracción de neutrones se construyen con un cilindro de grafito que atraviesa la pared de protección, según se ve en la figura 46-10. Tras muchas colisiones con los átomos de carbono del grafito, los neutrones energéticos provenientes del núcleo caliente del reactor alcanzan un equilibrio térmico con el grafito, que está esencialmente a temperatura ambiente ($T \approx 293$ K). Los neutrones que salen del cilindro, denominados *neutrones térmicos,* tienen longitudes de onda en un intervalo de gran utilidad en los estudios de la difracción de neutrones. Puede demostrarse que el valor más probable de la longitud de onda de De Broglie en tal distribución (Probl. 2) está dado por

$$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{5mkT}}, \qquad (46\text{-}3)$$

donde m es la masa del neutrón; k la constante de Boltzman, y T la temperatura, en kelvins. *a*) Calcule la más probable longitud de onda de De Broglie en un haz de neutrones térmicos. *b*) Un haz de estos neutrones cae sobre un cristal C, donde el espaciamiento entre un conjunto de planos atómicos es $d = 0.304$ nm. En el conjunto se observa una intensa reflexión de Bragg de primer orden, cuando el ángulo de dispersión de Bragg θ es como el de la figura 46-10. Encuentre el ángulo θ.

Solución *a*) Por medio de la ecuación 46-3 obtenemos

$$\lambda_p = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{5(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})}}$$
$$= 1.14 \times 10^{-10}\ \text{m} = 0.114\ \text{nm}.$$

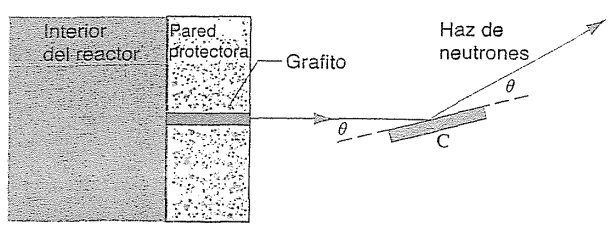


FIGURA 46-10. Problema resuelto 46-3. Arreglo para generar un haz monoenergético de neutrones que se usa en los estudios de difracción de neutrones. El haz que sale del reactor e incide sobre el cristal C consta de neutrones térmicos, con un intervalo de energías. El que se refleja contra el cristal es esencialmente monoenergético.

b) La fórmula de Bragg para que ocurra una reflexión de rayos X en un conjunto de planos atómicos es la ecuación 43-12,

$$2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

donde d es el espaciamiento entre planos atómicos contiguos paralelos, y el entero m, el orden del haz reflejado.

Podemos emplear esta fórmula de rayos X con partículas como los neutrones, a condición de que interpretemos λ como la longitud de onda de De Broglie. Al resolver para el ángulo θ, obtenemos la reflexión de primer orden ($m = 1$) del haz térmico de neutrones cuya longitud más probable ya calculamos en *a*) como

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{m\lambda_p}{2d} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{(1)(0.114 \text{ nm})}{(2)(0.304 \text{ nm})} = 10.8°.$$

El arreglo de la figura 46-10 sirve para generar un haz monoenergético de neutrones susceptible de usarse en los experimentos de difracción de neutrones, como se realizó para obtener el patrón de la figura 46-8.

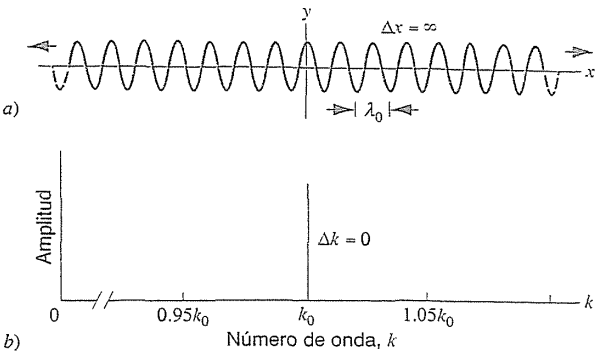


FIGURA 46-11. *a*) Onda armónica vista en $t = 0$. *b*) Esta onda (infinitamente larga) tiene una sola longitud de onda λ_0 y, en forma correspondiente, un solo número de onda k_0 ($= 2\pi/\lambda_0$).

46-3 ONDAS Y PARTÍCULAS

Como vimos en páginas anteriores, las pruebas de que la materia tiene una naturaleza ondulatoria son muy firmes. Pero son igualmente sólidas las pruebas de que la materia tiene una naturaleza corpuscular. ¿Cómo integrar ambos aspectos en una descripción congruente de la materia? Hemos descrito varios métodos para calcular la longitud de onda de una onda de materia, ¿pero qué representa su amplitud?

Iniciaremos en la sección 46-5 una exposición matemática más rigurosa de la amplitud de la onda de materia; pero por ahora supondremos que contiene información relativa a la ubicación de la partícula: la onda tiene gran amplitud cuando es probable localizar la partícula, y su amplitud es pequeña cuando existen escasas probabilidades. Si la onda presenta una amplitud constante en una región del espacio, la partícula tenderá también a estar en toda ella. Si la amplitud es cero, nunca se encontrará allí.

Una propiedad que nos gustaría en las partículas (inclusive en las de índole vibratoria) es la capacidad de *ser localizadas*. Es decir, quisiéramos saber dónde están. Tal vez no lo sepamos con exactitud, pero tenemos una idea aproximada. Por ejemplo, posiblemente sepamos que un electrón está ligado a un átomo de 0.1 nm de diámetro; esto indica que lo hemos hallado en esa región del espacio. O el neutrón puede cruzar una rendija estrecha y esto nos permite (por lo menos durante un instante) ubicar su posición en una región del tamaño del ancho de la rendija.

A continuación veremos las ideas que adquirimos al tratar de integrar un grupo de ondas, a fin de obtener una descripción aproximada de un partícula localizada.

Localización de un paquete de ondas en el espacio

La figura 46-11*a* es una "instantánea" de una onda que se desplaza en el eje x, tomada en un tiempo arbitrario, digamos $t = 0$. La onda se extiende de $x = -\infty$ a $x = +\infty$ y tiene una longitud de onda muy bien definida λ_0. Aquí y en casi el resto del libro, será más fácil trabajar no con la longitud de onda, sino con el *número de onda* k ($= 2\pi/\lambda$). Como se ve en la figura 46-11*b*, la onda infinita de la figura 46-11*a* tiene un solo número de onda bien definido k_0 ($= 2\pi/\lambda_0$). No obstante, no hay nada en esta onda que indique la localización en el espacio que asociamos a una partícula. La onda no tiene principio ni fin, ni tampoco un solo marcador individual distintivo. Si esta onda describiera una partícula, diríamos que dicha partícula podría encontrarse en algún lugar entre $x = -\infty$ y $x = +\infty$; está enteramente *no localizada*.

Según vimos en la sección 18-7, es posible crear casi cualquier forma de onda que queramos con sólo agregar ondas de seno o coseno con números de onda, amplitudes y fases debidamente seleccionados. En la figura 46-12*a* se muestra un *paquete de ondas* que pudiera formarse de esta manera. La colección de muchas ondas (infinitamente largas) va sumán-

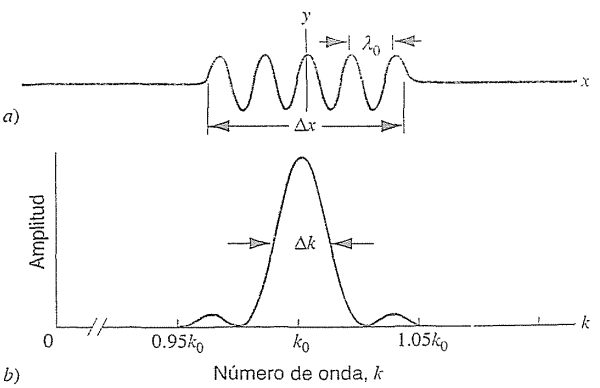


FIGURA 46-12. *a*) Segmento de una onda armónica de longitud Δx, es decir, un paquete de ondas. No puede decirse que éste sea senoidal porque, a diferencia de la onda de la figura 46-11*a*, su índole ondulatoria no se extiende al infinito. *b*) Distribución de los números de onda de los varios componentes armónicos que se combinan para formar el paquete. El pico central tiene un ancho de Δk, medido en la mitad de su amplitud. El máximo de la distribución ocurre en $k = k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

dose hasta formar un paquete de longitud Δx y que suma cero en las demás partes. Ahora tenemos algo que indica la existencia de una partícula: una localización en el espacio medida por Δx. Si la onda representa una partícula, es probable encontrarla en la región de tamaño Δx y difícilmente fuera de allí.

Sin embargo, como se observa en la figura 46-12*b*, el paquete de ondas ya no contiene un número de onda individual k_0, sino más bien varios números de onda centrados en k_0. Supongamos que Δk en la figura 46-12*b* es una medida aproximada de la gama de los números necesarios para formar el paquete de la figura 46-12*a*. El producto (adimensional) de Δk y Δx resulta ser del orden de la unidad, o sea

$$\Delta k \cdot \Delta x \cong 1. \tag{46-4}$$

La ecuación anterior nos indica lo siguiente: cuanto más bien definido queramos que sea el paquete de ondas (es decir, cuanto más pequeño sea el valor de Δx), más grande debe ser el intervalo de números de onda requeridos para obtenerlo. Por el contrario, cuanto menor sea la gama en Δk (o, equivalentemente, cuanto más pequeña sea la distribución de las longitudes de onda), menos localizada estará la partícula.

Localización de un paquete de ondas en el tiempo

Una partícula verdadera está localizada en el tiempo y también en el espacio. Podemos visualizar un paquete de ondas creado en el tiempo si reemplazamos, en la figura 46-12*a*, x por t, y el número de onda k por la frecuencia angular ω ($= 2\pi f$). Por analogía con la ecuación 46-4, la duración Δt del nuevo paquete de ondas se relaciona con el intervalo $\Delta\omega$ de las frecuencias angulares necesarias para crearlo mediante

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \cong 1. \tag{46-5}$$

Gran parte de la información obtenida en las conexiones de teléfono, de televisión, de radar o de computadora se envía de punto en punto por medio de paquetes de ondas. Las trayectorias del manejo de datos electrónicos donde se transmiten estos pulsos deberían ser sensibles en el intervalo total de frecuencias incluidas en los pulsos. La ecuación 46-5 indica que, cuanto más corto sea el pulso, mayor debe ser el intervalo de frecuencias aceptable (es decir, el *ancho de banda*) del sistema.

PROBLEMA RESUELTO 46-4. Un transmisor de radar emite pulsos de radiación electromagnética de 0.15 μs de largo, con una longitud de onda de $\lambda = 1.2$ cm. *a*) ¿Con qué frecuencia central debería sintonizarse el radar recibido? *b*) ¿Cuál es la longitud del paquete de ondas? *c*) ¿Qué ancho de banda debería tener el receptor?

Solución *a*) La frecuencia central f_0 está dada por

$$f_0 \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{0.012 \text{ m}} = 2.5 \times 10^{10} \text{ Hz} = 25 \text{ GHz}.$$

La frecuencia angular central es

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi(2.5 \times 10^{10} \text{ Hz}) = 1.6 \times 10^{11} \text{ rad/s}.$$

b) La longitud del paquete de ondas (pulso) es

$$\Delta x = c\,\Delta t = (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(0.15 \times 10^{-6} \text{ s}) = 45 \text{ m}.$$

c) El ancho de banda requerido del receptor está dado aproximadamente por la ecuación 46-5, esto es,

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\,\Delta t} = \frac{1}{(2\pi)(0.15 \times 10^{-6} \text{ s})}$$

$$= 1.1 \times 10^6 \text{ Hz} = 1.1 \text{ MHz}.$$

46-4 PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG

Por medio de la ecuación 46-1 ($\lambda = h/p$) podemos escribir así el número de onda asociado a la onda de materia

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h}, \tag{46-6}$$

donde p es el momento de la partícula en cuestión. Tomemos un paquete de onda de ondas de materia de ancho Δx. De acuerdo con el análisis descrito en la figura 46-12, ese pulso —de longitud finita— deberá constar de un conjunto de ondas de seno o coseno cuya variación en el número de onda sea Δk. En la ecuación 46-6 vemos que una variación del número de onda implica la del momento, o sea

$$\Delta k = \frac{2\pi}{h}\,\Delta p.$$

A partir de la ecuación 46-4 obtenemos entonces

$$\Delta x \cdot \Delta k = \Delta x \cdot (2\pi/h)\,\Delta p \cong 1$$

o bien

$$\Delta x \cdot \Delta p \cong \frac{h}{2\pi}. \tag{46-7}$$

Teniendo en cuenta que el momento es un vector, esta relación puede generalizarse a

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\geq h/2\pi, \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq h/2\pi, \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq h/2\pi, \end{aligned} \tag{46-8}$$

Éstas son las *relaciones de incertidumbre de Heisenberg*, que el físico alemán Werner Heisenberg (1901-1976), uno de los fundadores de la mecánica cuántica, fue el primero en obtener. Hay formulaciones matemáticas de este principio que establecen lo siguiente:

> *No es posible medir simultáneamente la posición ni el momento de una partícula con precisión ilimitada.*

La ecuación 46-8 indica que, cuanto más exactamente intentemos identificar la posición de una partícula —es decir, cuanto más pequeño tratemos de hacer el valor de Δx—, menos conoceremos su momento. Dicho de otra manera, más grande será Δp. También lo inverso es verdadero. En particular, si lográsemos asignar un valor *absolutamente preciso* al momento de la partícula ($\Delta p = 0$), no podríamos asignar una

posición en absoluto; la partícula podría estar en cualquier parte ($\Delta x = \infty$).

En la ecuación 46-8 hemos sustituido el símbolo "es aproximadamente igual" ($\cong$) de la ecuación 46-7 por el símbolo "igual o mayor que" ($\geq$). Lo hicimos para reconocer que nuestros instrumentos de medición, por refinados que sean, nunca serán ideales. Por ejemplo, en el mundo real el producto medido $\Delta x \cdot \Delta p_x$ en la ecuación 46-8 siempre será mayor que los límites impuestos por las relaciones de incertidumbre. *Nunca* podrá ser menor.*

He aquí el mensaje del principio de incertidumbre: tiene un límite la extensión del concepto de "partícula" del mundo newtoniano al mundo cuántico. En el mundo cuántico es un *error* imaginar que una partícula tiene una posición y un momento definidos; pero por la misma razón tampoco podemos medirlos. Es un *error* visualizar la partícula como un punto diminuto de masa que se desplaza por una trayectoria, con su posición y velocidad bien definidas en cualquier instante. El concepto mismo de "trayectoria" pertenece al mundo newtoniano, no al cuántico. ¿Cuál, por ejemplo, puede ser la trayectoria de un fotón o electrón que encuentra un experimento de rendija doble?

Al mismo tiempo los trazos bien marcados que producen las partículas energéticas individuales al cruzar una cámara de burbujas de hidrógeno líquido sugieren una trayectoria (Fig. 46-13). ¿Cómo conciliar esta evidencia de nuestros ojos con el concepto de onda? La figura 46-14, que muestra una partícula detectada en el punto A y otra vez en el punto B, nos guía para conseguir la respuesta. Conforme a la mecánica cuántica, la onda que describe a la partícula se desplaza —con igual probabilidad— en *todas las trayectorias* que conectan los puntos A y B; sólo algunas de las cuales aparecen en la figura. En el experimento de rendija doble había únicamente dos trayectorias que los conectaban; las restantes eran interceptadas por la pantalla que contenía las rendijas. Sin embargo, en la situación de la figura 46-14 existe una cantidad infinita de trayectorias posibles. Resulta que sólo con las ondas que siguen trayectorias cercanas a la línea recta que conecta A y B ocurrirá una interferencia constructiva en el punto B. La onda que describe la partícula presentará gran amplitud sólo cerca de ella; es decir, donde la partícula es probable sea

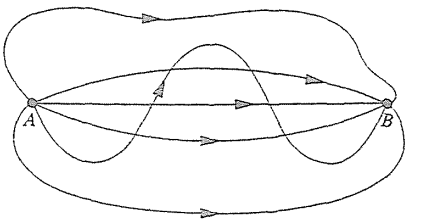


FIGURA 46-14. Se detecta un electrón en A y luego otra vez en B. De acuerdo con la mecánica cuántica, las ondas de materia que representan al electrón *siguen todas las trayectorias* que conectan esos dos puntos. Sólo las trayectorias cercanas a la de línea recta interfieren de un modo constructivo.

encontrada; fue precisamente lo que observamos como su trayectoria. Las ondas que siguen trayectorias lejos de esta línea interferirán en forma destructiva; se cancelarán. En conclusión, desde el punto de vista de la onda, la trayectoria se debe a la interferencia constructiva y destructiva de muchas líneas que representan todas las trayectorias posibles.

La relación de incertidumbre energía-tiempo

Hasta ahora nos hemos ocupado exclusivamente de las *longitudes de onda* de las ondas de materia y nada hemos dicho acerca de sus *frecuencias*.

Por analogía con la ecuación de fotones de Einstein ($E = hf$), mediante $\Delta f = \Delta E/h$ la incertidumbre de la frecuencia de una onda de materia se relaciona con la incertidumbre en la energía E de la partícula correspondiente. Al sustituir esto por $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ en la ecuación 46-5, obtenemos

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h/2\pi, \tag{46-9}$$

que es la relación matemática del principio de incertidumbre expresado en función de parámetros diferentes. En palabras significa lo siguiente:

> *No es posible determinar la energía y las coordenadas de tiempo de una partícula con precisión ilimitada.*

Todas las mediciones de la energía suponen incertidumbre intrínseca, a menos que se disponga de tiempo infinito para efectuarlas. Por ejemplo, en los átomos el estado más bajo

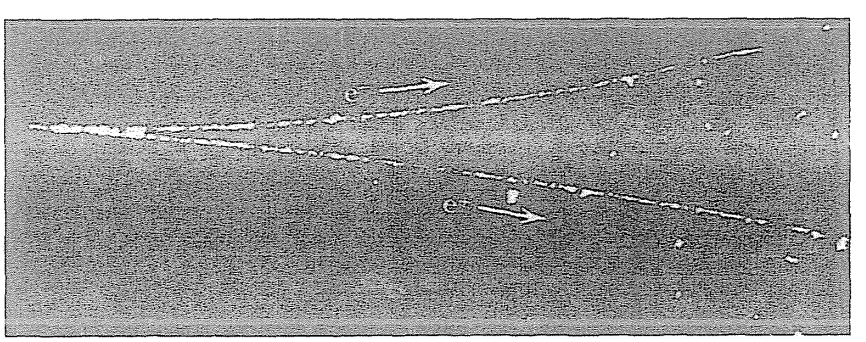


FIGURA 46-13. Un electrón y un positrón, formados en el vértice izquierdo, pasan por una cámara de burbujas llena con hidrógeno líquido. Las huellas de las burbujas marcan sus trayectorias. Éstas no son rectas porque un campo magnético que llena la cámara desvía las partículas. ¿Cómo pueden tales características explicarse a partir de las ondas de materia?

* Una demostración más rigurosa nos da $h/4\pi$ en lugar de $h/2\pi$ en la ecuación 46-8. Sin embargo, la diferencia no tiene consecuencias prácticas en nuestra exposición.

de energía (llamado estado base) posee energía bien definida porque el átomo suele existir en dicho estado indefinidamente. La energía en todos los estados de mayor energía (los estados excitados) está definida con menor precisión, porque el átomo —tarde o temprano— pasará espontáneamente a un estado de menos energía. En promedio, sólo en cierto tiempo Δt está disponible, para que una medición de la energía presentara una incertidumbre de ΔE dada por $(h/2\pi)/\Delta t$.

PROBLEMA RESUELTO 46-5. *a*) Un electrón de 10 ev se desplaza en dirección de x creciente con una velocidad de 1.88×10^6 m/s. Suponga que puede medirla con una precisión de 1.0%. ¿Con qué precisión podrá medir simultáneamente su momento? *b*) Una pelota de golf tiene una masa de 45 g y una velocidad de 40 m/s, ¿cuál de las dos puede medir con una precisión de 1.0%. ¿Qué límites impone el principio de incertidumbre a la capacidad de medir su posición?

Solución *a*) El momento del electrón es

$$p_x = mv_x = (9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.88 \times 10^6\ \text{m/s})$$
$$= 1.71 \times 10^{-24}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

La incertidumbre Δp_x del momento es 1.0% de este valor, es decir, 1.71×10^{-26} kg · m/s. Entonces, según la ecuación 46-8 la incertidumbre de la posición será

$$\Delta x \cong \frac{h}{(2\pi)(\Delta p_x)} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{(2\pi)(1.71 \times 10^{-26}\ \text{kg} \cdot \text{m/s})} = 6.2\ \text{nm}.$$

El tamaño de un átomo típico mide alrededor de 0.1 nm; así que Δx tiene aproximadamente la longitud de una cadena de 60 átomos. Dada la medida del momento del electrón, simplemente no es posible asignar al mismo tiempo una posición al electrón con mejor precisión que ésta. *b*) Este ejemplo es idéntico a la parte *a*), salvo que el momento de la pelota de golf es mucho mayor que el del electrón. En el caso de la pelota, el mismo cálculo nos da $\Delta x \cong 6 \times 10^{-33}$ m. Es una distancia muy pequeña efectivamente, unas 10^{18} veces menor que un núcleo atómico común. Por lo que respecta a los objetos macroscópicos, el principio de incertidumbre no impone un límite importante a la precisión de su medición. Nunca se habría descubierto este principio midiendo minuciosamente las bolas de golf en el aire ni las balas de una pistola.

46-5 LA FUNCIÓN DE ONDA

La ecuación 46-1 indica cómo calcular la longitud de la onda de materia asociada a una partícula si conocemos su momento. Ahora preguntamos: ¿cómo describimos la amplitud de una onda de materia? Dicho de un modo menos formal: ¿qué es lo que está ondeando?

La función de desplazamiento en una onda transversal que se desplaza por una cuerda estirada en dirección de x creciente (Sec. 18-3) está dada por

$$y(x, t) = y_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t). \qquad (46\text{-}10)$$

Aquí k $(= 2\pi/\lambda)$ es el número de onda; ω $(= 2\pi f)$ la frecuencia angular, y y_0 la amplitud de la onda. Dentro de este contexto y en lo que sigue, convendrá más ocuparnos de k (y no de λ) y de ω (y no de f).

Consideremos ahora la onda de materia asociada a una partícula de masa m que se mueve en dirección de x creciente y sobre la cual no actúa fuerza alguna, una *partícula libre*. Para describir el desplazamiento asociado con ella, el físico austriaco Erwin Schrödinger (1887-1961) introdujo una magnitud $\Psi(x, t)$ a la que llamó *función de onda*.

En la sección 46-6 demostraremos que la función de onda, para una partícula libre que se dirige a x creciente, está dada por

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)}, \qquad (46\text{-}11)$$

donde ψ_0 es la amplitud de la onda. Nótese que la función de onda contiene el *número imaginario* $i(= \sqrt{-1})$. $\Psi(x, t)$ es una *cantidad compleja*.

A primera vista, la forma de esta expresión de una onda viajera de materia parece muy distinta a la de la ecuación 46-10 relativa a una onda que se desplaza por una cuerda. Pero recuérdese que *cualquier* función de $(kx - \omega t)$ puede describir una onda viajera que se desplaza en la dirección de x creciente. Además la identidad matemática

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \qquad (46\text{-}12)$$

donde θ es un ángulo cualquiera, muestra que la forma exponencial de la ecuación 46-11 es menos distinta de lo que cabría suponer por la forma trigonométrica de la ecuación 46-10.

El físico alemán Max Born (1882-1970) dio la interpretación física a la función de onda. Sostuvo que el significado físico debería asignarse no a Ψ, sino más bien al producto de Ψ y a su *complejo conjugado* Ψ^*. (Recuérdese que el complejo conjugado de un número complejo es este i reemplazado por $-i$, en cualquier parte donde ocurra.) En concreto, Born postuló lo siguiente:

> *El producto $\Psi\Psi^*\,dx$ nos da la probabilidad de que la partícula en cuestión se halle entre las posiciones x y $x + dx$.*

En el mundo cuántico no podemos decir *dónde* está una partícula; tan sólo dónde *probablemente está*. Al producto $\Psi\Psi^*$ lo llamamos *densidad de probabilidad*, símbolo $P(x)$, de modo que

$$P(x) = \Psi\Psi^*. \qquad (46\text{-}13)$$

A pesar de que la función de onda $\Psi(x, t)$ suele ser compleja, la densidad de probabilidad siempre será un número real (positivo o cero), como debe serlo para que la densidad de probabilidad tenga significado físico. Al utilizar la ecuación 46-13, la densidad de probabilidad para la partícula libre descrita por la ecuación 46-11 es

$$P(x) = [\psi_0 e^{i(kx - \omega t)}][\psi_0^* e^{-i(kx - \omega t)}] = |\psi_0|^2, \qquad (46\text{-}14)$$

que es una constante independiente de x o de t. La figura 46-15 muestra una gráfica de $P(x)$ en un instante determinado, digamos $t = 0$. Por ser $P(x)$ una constante para una partícula libre, concluimos que la partícula puede encontrarse con igual probabilidad en cualquier punto de la dirección x, de $x = -\infty$ a $x = +\infty$.

La incapacidad de determinar la ubicación de la partícula libre coincide enteramente con el principio de incertidumbre de

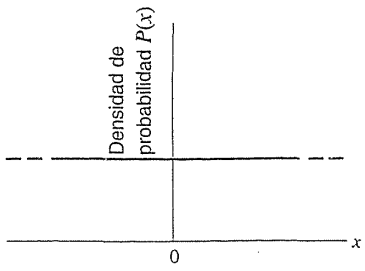


FIGURA 46-15. Densidad de probabilidad $\Psi\Psi^*$ para una partícula libre que se desplaza en la dirección de x creciente. La partícula tiene la misma probabilidad de detección en todos los puntos a lo largo del eje x.

Heisenberg. Puesto que ninguna fuerza actúa sobre una partícula libre, su momento debe ser una constante determinada con precisión y, en consecuencia, $\Delta p_x = 0$. Entonces el principio de incertidumbre de Heisenberg (Ec. 46-8) predice que $\Delta x = \infty$, que es precisamente lo que muestra la figura 46-15.

46-6 LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

Sin aportar prueba alguna, en la sección 45-5 afirmamos que la ecuación 46-11 es la función de onda que describe a una partícula libre. ¿Cómo lo sabemos? He aquí la respuesta: esta ecuación es una solución de la *ecuación de Schrödinger*, fundamental para la mecánica cuántica que en 1926 propuso Erwin Schrödinger, quien compartió el Premio Nobel de 1933 por este logro. (Existen otras formas equivalentes de formular la mecánica cuántica; hemos optado por seguir los pasos de Schrödinger.)

Antes de presentar la ecuación queremos aclarar que la ecuación de Schrödinger 46-11 puede reescribirse así

$$\Psi(x, t) = (\psi_0 e^{+ikx})(e^{-i\omega t}),$$

donde vemos que la función $\Psi(x, t)$ aparece como el producto de dos factores: uno que incluye sólo x y el otro sólo t.

En síntesis, podemos escribir nuestra función de onda en la forma

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\, e^{-i\omega t}. \qquad (46\text{-}15)$$

En el resto del capítulo, nos concentraremos netamente en $\psi(x)$, la porción de la función de onda que depende del espacio. Recuerde que la letra griega mayúscula psi (Ψ) incluye la posición y el tiempo y que la psi minúscula (ψ) incluye la coordenada de posición exclusivamente.* La comparación de las ecuaciones 46-11 y 46-15 muestra que, para una partícula libre,

$$\psi(x) = \psi_0\, e^{+ikx}. \qquad (46\text{-}16)$$

Es fácil probar que $\psi\psi^* = |\psi_0|^2 = P(x)$; así que $\psi\psi^*$ también nos da la densidad de probabilidad de un onda de materia viajera (Ec. 46-14).

* Formalmente, $\psi(x, t)$ es conocida como función de onda y $\psi(x)$ como función propia. No utilizaremos la notación anterior aquí.

Veamos ahora la ecuación de Schrödinger. Para una partícula (no necesariamente libre) que se mueven en la dirección x, es

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x), \qquad (46\text{-}17)$$

donde E es la energía total (constante) de la partícula y donde $U(x)$ es su energía potencial. Suponemos la situación normal: la energía potencial no depende del tiempo.

No podemos obtener la ecuación de Schrödinger de principios más fundamentales. *Es* el principio fundamental, del mismo modo que las leyes newtonianas del movimiento lo son de la mecánica newtoniana y las ecuaciones de Maxwell lo son del electromagnetismo. En los tres casos anteriores hay que aceptar provisionalmente las ecuaciones básicas y ver si conducen o no a predicciones confirmadas después mediante experimentos. Y sí lo hacen en los tres casos.

Una partícula libre

Si la partícula es libre, su energía potencial $U(x)$ es una constante, la cual podemos suponer que es cero en todos los valores de x. Entonces la energía total E de la partícula en movimiento es enteramente cinética. En otras palabras, debemos tener $E = K = p^2/2m$ donde p es el momento de la partícula. Hecha esta sustitución, la ecuación de Schrödinger (Ec. 46-17) queda así

$$\frac{h^2}{4\pi^2 p^2}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \psi(x) = 0. \qquad (46\text{-}18)$$

Antes afirmamos sin prueba que la función de onda $\psi(x)$ de la ecuación 46-16 describe una partícula libre que se desplaza en dirección de x creciente. En seguida vamos a probar la afirmación sustituyendo esta ecuación y su segunda derivada en la ecuación de Schrödinger (Ec. 46-18).

La función de onda que queremos probar es

$$\psi(x) = \psi_0\, e^{ikx}.$$

Su primera derivada es

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \psi_0\,(ik)\,e^{ikx}$$

y su segunda derivada (recuerde que $i^2 = -1$) es

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \psi_0\,(-k^2)e^{ikx} = -k^2\,\psi(x).$$

Si sustituimos por $d^2\psi(x)/dx^2$ la expresión anterior y la introducimos en la ecuación 46-18, obtendremos

$$-\frac{h^2}{4\pi^2 p^2}k^2\,\psi(x) + \psi(x) = 0.$$

Al cancelar $\psi(x)$ y al utilizar la ecuación 46-1 para sustituir λ por p/h, nos queda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

una identidad. Como la sustitución de la ecuación 46-16 en la de Schrödinger produce una identidad, hemos probado que la primera es efectivamente una solución de la segunda.

46-7 EL EFECTO TÚNEL

Si rodamos una canica por el piso hacia un muro de ladrillos, esperamos que rebote contra dicho muro. No esperamos que aparezca del otro lado. Sin embargo, la mecánica cuántica predice que un comportamiento de este tipo sí ocurre en los electrones y en otras partículas de masa pequeña. Veamos lo que la ecuación de Schrödinger nos dice de este fenómeno.

La figura 46-16*a* muestra un electrón de energía total (constante) E que se dirige hacía x creciente. Su energía potencial es cero, salvo cuando se halla en la región $0 < x < L$. Allí su energía potencial es U_0, donde $U_0 > E$. Definimos la región como una *barrera de la energía potencial* (o, con menos rigor, como una *barrera de potencial*) de altura U_0 y de grosor L.

Si el electrón obedeciera la mecánica de Newton, rebotaría contra la barrera y retrocedería en la dirección de donde provino, del mismo modo que una canica rebotaría contra el muro de ladrillo. Sin embargo, los electrones obedecen las leyes de la mecánica cuántica, según las cuales el electrón rebotará efectivamente contra la barrera; pero hay además una probabilidad finita de que también "atraviese" la barrera en un proceso denominado *efecto de túnel* y de que aparezca en el otro lado.

En virtud de que la energía potencial cambia de un modo abrupto —en $x = 0$ y también en $x = L$, por lo cual debemos buscar por separado soluciones de la ecuación de Schrödinger (Ec. 46-16) en tres regiones: 1) a la izquierda de la barrera, 2) dentro de ella y 3) a la derecha de ella. Entonces debemos escoger las constantes arbitrarias que aparezcan en las tres soluciones, de modo que los valores de $\psi(x)$ se unan suavemente (sin saltos ni desviaciones) en $x = 0$ y en $x = L$. La figura 46-16*b* muestra una gráfica de la densidad de probabilidad $P(x)$ que puede calcularse una vez efectuadas las soluciones y los acoplamientos. Imaginemos a continuación las soluciones de la ecuación de Schrödinger en las tres regiones en cuestión.

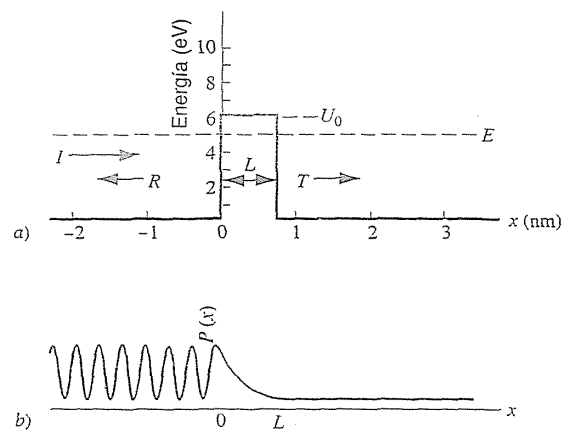


FIGURA 46-16. *a*) Con una energía total constante E, un electrón se dirige a la barrera de potencial desde la izquierda. Dentro de ella, su energía potencial U_0 es mayor que su energía total. *b*) Densidad de probabilidad de la onda de materia que representa al electrón. A la izquierda de la barrera interfieren entre sí la onda incidente I y la onda reflejada R (con menor intensidad) procedente de la barrera. La onda transmitida T aparece a la derecha de la barrera. Dentro de ésta la densidad de probabilidad decae de manera exponencial.

A la izquierda de la barrera. La solución de la ecuación es

$$\psi(x) = \psi_1 e^{ikx} + \psi_2 e^{-ikx} \qquad (x < 0), \qquad (46\text{-}19)$$

donde ψ_1 y ψ_2 son constantes de amplitud. El primer término de la ecuación anterior (compárela con la Ec. 46-16) representa la onda de materia que llega, la cual se dirige a x creciente. El segundo término representa la onda reflejada contra la barrera y, por tanto, que se desplaza en dirección de x decreciente. Según se aprecia en el problema 46-7, las dos ondas que van en direcciones opuestas, interfieren entre sí y a la izquierda de la barrera generan un patrón de onda estacionaria. Los mínimos del patrón no son cero porque la onda reflejada tiene una amplitud menor que la onda incidente. Es decir, $|\psi_2| < |\psi_1|$ porque transmite una parte de la onda incidente.

A la derecha de la barrera. En el lado extremo de la barrera la onda transmitida está dada por la ecuación 46-16, o sea

$$\psi(x) = \psi_5 e^{ikx} \qquad (x > L), \qquad (46\text{-}20)$$

donde ψ_5 es la constante de amplitud. Compare esta parte de la figura 46-16*b* con la figura 46-15. En ambos casos la densidad de probabilidad es constante; en otras palabras, la probabilidad de encontrar el electrón (por pequeña que sea) es la misma en todos los valores de x en la región $x > L$.

Dentro de la barrera. En este caso la ecuación de Schrödinger (Ec. 46-17) es

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + [U_0 - E]\,\psi = 0. \qquad (46\text{-}21)$$

Nótese que, como $U_0 > E$, la cantidad dentro de los corchetes cuadrados es positiva.

Intentemos una solución de tipo

$$\psi(x) = \psi_3 e^{-k'x} + \psi_4 e^{+k'x} \qquad (46\text{-}22)$$

donde ψ_3 y ψ_4 son las constantes de amplitud y, según se puede ver, no aparece el número imaginario i. Es fácil demostrar que, en caso de sustituir esta función y su segunda derivada en la ecuación 46-21, la variable x se eliminará, a condición de que la constante k' en la ecuación 46-22 tenga el valor

$$k' = \frac{2\pi\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{h}. \qquad (46\text{-}23)$$

La solución detallada indica $|\psi_3| >> |\psi_4|$, y entonces la densidad de probabilidad que se deduce de la ecuación 46-22 será

$$P(x) = \psi\psi^* \approx |\psi_3|^2 e^{-2k'x}. \qquad (46\text{-}24)$$

Este valor decrece con x. Así, aunque la partícula puede hallarse en la región clásicamente vedada donde $U_0 > E$, cada vez habrá menos probabilidades de encontrarla cuanto más penetremos en dicha región. Localizar una partícula en una región donde la prohíbe la física clásica es un aspecto común de la mecánica cuántica.

El coeficiente de transmisión

Podemos definir un coeficiente de transmisión T para la partícula y la barrera como la razón de la intensidad de la onda transmitida, $|\psi_5|^2$ al de la onda incidente, $|\psi_1|^2$. Puede demostrarse que T está dado por

$$T = 16\frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right)e^{-2k'L}, \qquad (46\text{-}25)$$

donde k' tiene el valor dado por la ecuación 46-23. Esta fórmula es una aproximación que se cumple sólo con las barreras que son lo bastante altas o gruesas para que el coeficiente de transmisión sea pequeño, esto es, $T << 1$.

El factor dominante en el coeficiente es el exponencial, $e^{-2k'L}$. Así pues, el valor T es muy dependiente al espesor L de la barrera y a la cantidad k', la cual a su vez depende de la masa m de la partícula y de la altura U_0 de la barrera. El coeficiente de transmisión disminuye rápidamente conforme aumenta la masa de la partícula, desapareciendo por su pequeñez al pasar de los electrones a —digamos— las canicas. Si la barrera es infinitamente alta, $k' \to \infty$ y $T \to 0$; esto significa que la partícula se refleja al 100% contra ella.

Algunos ejemplos

El efecto túnel de las ondas de materia se presta a muchas aplicaciones prácticas. He aquí un ejemplo sencillo: considere una alambre desnudo de cobre que ha sido cortado y cuyos dos extremos se tuercen juntos. Aun así seguirá conduciendo electricidad sin dificultad, aunque los alambres estén cubiertos con una capa delgada de óxido de cobre, un aislante. ¿Cómo penetran los extremos en esta capa (extremadamente delgada)? Por el efecto túnel.

Un ejemplo menos común es el núcleo del Sol, donde generan energía los procesos de fusión termonuclear. Estos procesos, en los cuales se libera energía, suponen la fusión simultánea de los núcleos ligeros para formar otros más pesados. Supóngase que dos protones se desplazan juntos a gran velocidad. Deben estar muy cerca antes que intervengan sus intensas fuerzas nucleares de atracción y los hagan fusionarse. Mientras tanto, su velocidad disminuye por la fuerza de repulsión de Coulomb que tiende a separarlos. Podemos decir que los separa una barrera de Coulomb. La probabilidad de la fusión depende principalmente de su capacidad de atravesar la barrera más que de superarla. El horno solar se cerraría sin el efecto túnel.

El efecto túnel entra en juego no sólo cuando dos partículas de carga positiva se desplazan juntas con mucha rapidez, sino también cuando se separan, rompiendo los fuertes enlaces nucleares de atracción que las mantienen juntas y atravesando la barrera de Coulomb en dirección contraria. Un ejemplo de ello es la emisión espontánea de las partículas alfa (con carga positiva) por los núcleos radiactivos y la fisión de los núcleos pesados en dos grandes fragmentos.

Entre las aplicaciones prácticas figura el *diodo de túnel*, donde el flujo de electrones (por el efecto túnel) a través de un dispositivo puede activarse o desactivarse controlando la altura de la barrera al variar —por ejemplo— el voltaje aplicado afuera. Esto puede hacerse muy rápidamente, con tiempos de respuesta del orden de 10^{-11} s, o 10 ps posiblemente. El Premio Nobel de 1973 lo compartieron tres investigadores del efecto túnel: Leo Esaki (descubridor del diodo de túnel), Ivar Giaver (el efecto túnel en superconductores) y Brian Josephson (descubridor de la unión Josephson).

El microscopio de barrido de efecto túnel

En el *microscopio de barrido por efecto túnel de barrido* (MET)*, una punta de aguja fina preparada especialmente se barre en un patrón de cuadro televisivo sobre la superficie de la muestra a investigar (Fig. 46-17). Una diferencia de unos cuantos volts se aplica entre la punta de la aguja y la muestra, creándose así una barrera de energía potencial. Los electrones atraviesan como "corriente de túnel" la brecha entre ella y la punta de la aguja.

En condiciones normales, la corriente varía mucho conforme la separación entre la aguja y las estructuras superficiales va cambiando durante el barrido. No obstante, se provee un mecanismo electrónico de retroalimentación que automáticamente eleva o baja la aguja durante el barrido, conservando constantes la corriente de túnel y también la separación. La

* Véase "The Scanning Tunneling Microscope" de Gerd Binning y Heinrich Rohrer, *Scientific American*, agosto de 1985. Consúltese en http://www.almaden.ibm.com/vis/stm/lobby.html una galería de este microscopio y otras fotografías.

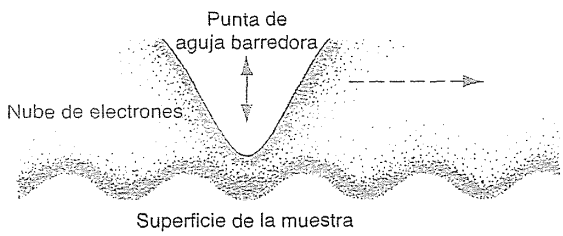


FIGURA 46-17. Una punta afilada de aguja se barre sobre la superficie de una muestra en un microscopio electrónico de efecto túnel de barrido.

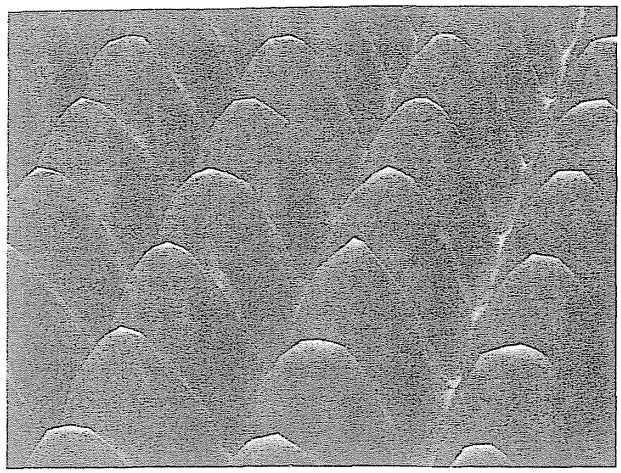


FIGURA 46-18. El arreglo regular de los átomos que forman la superficie de una muestra de níquel aparece con toda claridad en esta gráfica de microscopio electrónico de efecto de túnel de barrido.

posición vertical de la aguja se proyecta entonces sobre una pantalla en función de su ubicación, produciendo una gráfica tridimensional del contorno de la superficie. Un ejemplo representativo es la figura 46-18, que ofrece el arreglo regular de los átomos que constituyen la superficie de una muestra de níquel. En 1986 Gerd Binnig y Heinrich Rohrer de la Research Laboratgory de la IBM en Zurich compartieron el Premio Nobel (con Ernst Ruska, el inventor del microscopio electrónico) por la invención de este aparato.

Según se observa en la figura 46-18, el movimiento de la punta de la aguja, tanto en el plano horizontal como en la dirección vertical, debe ser controlable con una reproducibilidad que es una fracción pequeña de las dimensiones de un átomo individual. Esto se logra sujetando la aguja en la intersección de tres varillas de cerámica, como se ve en la figura 46-19. El material de dichas varillas ofrece una propiedad interesante (descubierta por los hermanos Pierre y Jacques Curie en 1880-1881), denominado *piezoelectricidad:* cuando una diferencia de potencia se aplica a una varilla, sus dimensiones se modifican en una cantidad pequeña pero controlable; el cambio de longitud es directamente proporcional a la diferencia de potencial. Por medio de esta técnica el movimiento de barrido puede regularse con medios electrónicos y la posición vertical de la punta se coordina con la posición que ocupa en el plano vertical. Pueden mostrarse los desplazamientos verticales en una escala expandida y agregarse color a la presentación visual para extraer ciertas características.

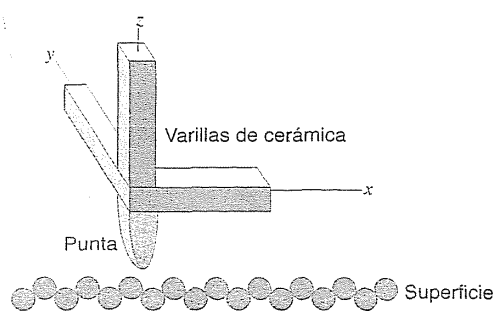


FIGURA 46-19. La punta de la aguja en un microscopio de efecto de túnel de barrido se sujeta a la intersección de tres varillas de cerámica. Por medio del efecto piezoeléctrico, la punta puede barrer en el plano xy y también elevarse y bajarse en la dirección z.

PROBLEMA RESUELTO 46-6. En la figura 46-16*a* se ve un electrón, cuya energía total E es 5.0 eV, que se acerca a una barrera U_0 de 6.0 eV de altura. El espesor de ella L mide 0.70 nm. *a*) ¿Qué longitud de onda de De Broglie tiene el electrón incidente? *b*) ¿Qué coeficiente de transmisión T se obtiene de la ecuación 46-25? *c*) ¿Cuál sería el coeficiente de transmisión si redujéramos el espesor de la barrera a 0.35 nm? ¿Si aumentáramos la altura a 7.0 eV? ¿Y si la partícula incidente fuese un protón?

Solución *a*) Antes que el electrón llegue a la barrera, su energía potencial en la región por donde se desplaza es cero. Procediendo como en el problema resuelto 46-1, obtenemos $\lambda = 0.55$ nm. Por tanto, la barrera mide 0.70/0.55, o sea aproximadamente 1.3 longitudes de onda de De Broglie de espesor.

b) Conforme a la ecuación 46-23 tenemos

$$k' = \frac{2\pi\sqrt{2m(U_0 - E)}}{h}$$

$$= \frac{(2\pi)\sqrt{(2)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(6.0\ \text{eV} - 5.0\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}}{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}$$

$$= 5.12 \times 10^{9}\ \text{m}^{-1}.$$

La cantidad $k'L$ será entonces $(5.12 \times 10^9\ \text{m}^{-1})(0.70 \times 10^{-9}\ \text{m}) = 3.58$. Al utilizar la ecuación 46-25 el coeficiente de transmisión resulta ser

$$T = 16\frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right)e^{-2k'L}$$

$$= (16)\frac{5.0\ \text{eV}}{6.0\ \text{eV}}\left(1 - \frac{5.0\ \text{eV}}{6.0\ \text{eV}}\right)e^{-2(3.58)} = 1.73 \times 10^{-3}$$

De cada 100 000 electrones que chocan contra la barrera, apenas 173 la atravesarán.

c) Una vez efectuados los cambios apropiados (uno a la vez) en la solución de la parte *b*), encontramos

$$L = 0.35\ \text{nm} \quad \text{produce} \quad T = 0.062$$

$$U_0 = 7.0\ \text{eV} \quad \text{produce} \quad T = 1.3 \times 10^{-4}$$

$$m = 1836m_e \quad \text{produce} \quad T = 8.8 \times 10^{-134}$$

Compare estas cantidades recién calculadas con el valor de T ($= 1.73 \times 10^{-3}$), obtenido en la parte *b*). Nótese que es más fácil que el electrón penetre la barrera más delgada y más difícil que penetre la más alta. El protón más voluminoso difícilmente consigue penetrar. Imagine lo pequeño que sería T en una canica.

PROBLEMA RESUELTO 46-7. La ecuación 46-19 proporciona la parte de la función de onda de variación espacial, que describe la onda de materia a la izquierda de la barrera de la figura 46-16*a*, es decir, en la región $x < 0$. Calcule la densidad de probabilidad correspondiente en esta región.

Solución Al emplear la ecuación 46-19 para $\psi(x)$, la densidad de probabilidad es

$$\begin{aligned} P(x) &= \psi\psi^* \\ &= (\psi_1 e^{+ikx} + \psi_2 e^{-ikx})(\psi_1^* e^{-ikx} + \psi_2^* e^{+ikx}) \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1\psi_2^* e^{+2ikx} + \psi_1^*\psi_2 e^{-2ikx}. \end{aligned}$$

Recuerde que, para formar ψ^*, hemos reemplazado i en ψ por $-i$ siempre que aparece.

Las amplitudes ψ_1 y ψ_2 se refieren, respectivamente a las componentes de la onda de materia que llegan y se reflejan. Puesto que la reflexión no es completa (la onda se transmite de modo parcial), la onda reflejada ha de tener menor amplitud que la de llegada. Definamos el *parámetro de reflexión* adimensional $\rho = |\psi_2|/|\psi_1|$, donde $0 < \rho < 1$. Luego de un poco de manipulación algebraica, obtenemos

$$P(x) = |\psi_1|^2 [1 + \rho^2 + 2\rho \cos(2kx + \Delta\psi)],$$

donde $\Delta\psi$ es un ángulo de fase sin importancia que proviene del cálculo. Nótese que $P(x)$ es un número real, como deben serlo todas las densidades de probabilidad. Fluctúa entre un valor máximo [para cos $(2kx + \Delta\psi) = +1$] de

$$P_{máx} = |\psi_1|^2(1 + \rho)^2$$

y un valor mínimo para cos $(2kx + \Delta\psi) = -1$] de

$$P_{mín} = |\psi_1|^2(1 - \rho)^2.$$

Los resultados anteriores coinciden plenamente con la figura 46-16*b*.

La distancia Δx entre máximos (o mínimos) adyacentes ocurre cuando la cantidad $2kx$ en el coseno cambia por 2π de modo que $2k\,\Delta x = 2\pi$, o sea

$$\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{(2\pi/\lambda)} = \frac{\lambda}{2}.$$

Así pues, los máximos (o mínimos) adyacentes de la gráfica de densidad de probabilidades en la figura 46-16*b* están separados por un medio de la longitud de onda de De Broglie de la onda incidente.

OPCIÓN MÚLTIPLE

46-1 Ondas de materia

1. Si las partículas incluidas poseen todas la misma energía cinética, ¿cuál de ellas tiene la más corta longitud de onda?
   A) El electrón B) La partícula α
   C) El neutrón D) El protón
2. Si las partículas incluidas tienen todas la misma longitud de onda de De Broglie, ¿cuál de ellas posee la máxima energía cinética?
   A) El electrón B) La partícula α
   C) El neutrón D) El protón
3. ¿Qué relación hay entre la longitud de onda de De Broglie λ asociada a una partícula y el tamaño de ésta?
   A) λ debe ser más grande que la partícula.
   B) λ debe ser más pequeña que la partícula.
   C) λ puede ser más grande o más pequeña que la partícula.

46-2 Pruebas de las hipótesis de De Broglie

4. Un haz de electrones con una velocidad v_0 pasa por rendijas dobles y luego se deja que choque contra una pantalla fluorescente. Se observa un patrón de interferencia en la pantalla.
   a) Aumentamos a $2v_0$ la velocidad de los electrones. ¿Qué sucede con el espaciamiento de las franjas de interferencia en la pantalla?
   A) Aumenta.
   B) Disminuye.
   C) Permanece inalterado.
   b) Los electrones se reemplazan ahora con protones cuya velocidad es v_0. En comparación con los electrones de igual velocidad, ¿qué sucede con el espaciamiento de las franjas de interferencia en la pantalla?
   A) Aumenta.
   B) Disminuye.
   C) Permanece inalterado.
5. Un electrón con una longitud de onda de De Broglie λ pasa por una rendija de ancho $d = 2\lambda$. Después puede golpear una pantalla fluorescente. ¿Qué se observará en ella?
   A) Un patrón de difracción.
   B) Un solo destello como si el electrón se hubiera pasado en una línea recta por la rendija.
   C) Un solo destello que podría ocurrir en cualquier parte de la pantalla.
   D) Un solo destello que ocurriría muy probablemente donde un correspondiente patrón de difracción presentará la máxima intensidad.

46-3 Ondas y partículas

46-4 Principio de incertidumbre de Heisenberg

6. Un protón y un electrón están confinados en cajas de longitud *a*. Se efectúan mediciones del momento de ambos. ¿Cuál afirmación es válida respecto a la precisión de estas mediciones?
   A) El momento del electrón puede medirse con mayor precisión que el del protón.
   B) El momento del protón puede medirse con mayor precisión que el del electrón.
   C) El momento del electrón puede medirse con la misma precisión que el del protón.
7. La posición de un electrón se mide dentro de los límites de $\pm\,\Delta x$. Simultáneamente se mide el componente x de su momento dentro de los límites de $\pm\Delta p_x$. ¿Qué puede concluirse respecto a la relación entre Δx y Δp_x?
   A) $\Delta x \geq h/\pi\Delta p_x$ B) $\Delta x \geq h/2\pi\Delta p_x$
   C) $\Delta x \geq h/8\pi\Delta p_x$
   D) Nada; en este caso no se aplica el principio de incertidumbre de Heisenberg.
8. La posición de un electrón se mide dentro de los límites de $\pm\Delta x$. Simultáneamente se mide el componente x de su momento dentro de los límites de $\pm\Delta p_x$. ¿Qué puede concluirse respecto a la relación entre Δx y Δp_x?
   A) $\Delta x \geq h/\pi\Delta p_x$ B) $\Delta x \geq h/2\pi\Delta p_x$
   C) $\Delta x \geq h/8\pi\Delta p_x$
   D) Nada; en este caso no se aplica el principio de incertidumbre de Heisenberg.

9. La posición de un electrón se mide dentro de los límites de $\pm\Delta x$. Al mismo tiempo se mide dentro de los límites de $\pm\Delta p_x$ el componente y de su momento. ¿Qué puede concluirse respecto a la relación entre Δx y Δp_x?
   A) $\Delta x \geq h/\pi\Delta p_y$ B) $\Delta x \geq h/2\pi\Delta p_y$
   C) $\Delta x \geq h/8\pi\Delta p_y$
   D) Nada; en este caso no se aplica el principio de Heisenberg.

46-5 La función de onda

10. En las siguientes preguntas utilice la ecuación 46-11 $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$.
   a) ¿Qué es θ si $e^{i\theta} = -1$?
      A) $\theta = 0$ B) $\theta = -1$
      C) $\theta = \pi/2$ D) $\theta = \pi$
   b) ¿Cuál de las siguientes opciones es la solución $\sqrt[3]{-1}$?
      A) $\cos\pi/2 + i \operatorname{sen}\pi/2$ B) $\cos\pi/3 + i \operatorname{sen}\pi/3$
      C) $\cos\pi/6 + i \operatorname{sen}\pi/6$ B) $\frac{1}{3}(\cos\pi/2 + i \operatorname{sen}\pi/2)$

46-6 La ecuación de Schrödinger

46-7 El efecto túnel

11. Una partícula con energía $E = U_0/2$ incide sobre una barrera de altura U_0 y de espesor L. T_0 es el coeficiente de transmisión en las condiciones donde se aplica la ecuación 46-25. Si duplicamos el espesor de la barrera permaneciendo inalteradas su altura y la energía de la partícula, el nuevo coeficiente será
   A) $T_0^2/4$ B) T_0^2 C) $T_0/2$ D) $T_0/4$

12. Los protones y las partículas alfa, todos ellos con la misma energía total, inciden sobre la misma barrera de potencial. T_p es el coeficiente de transmisión de los protones en las condiciones donde se aplica la ecuación 46-25. En comparación con T_p el coeficiente de las transmisiones de las partículas alfa es
   A) mucho más grande B) un poco más grande
   C) más o menos igual D) un poco más pequeño
   E) mucho más pequeño

PREGUNTAS

1. ¿Cómo puede la longitud de onda de un electrón estar dada por $\lambda = h/p$? ¿Significa la mera presencia del momento p en la fórmula que el electrón es una partícula?
2. En una repetición del experimento de Thomson para medir e/m del electrón (Sec. 32-2), se colima un haz de electrones haciéndolo pasar por una rendija. ¿Por qué el carácter de haz de los electrones que salen no desaparece con la difracción de la onda del electrón en esta rendija?
3. ¿Por qué en nuestras observaciones diarias no es patente la naturaleza ondulatoria de la materia?
4. Al examinar el comportamiento ondulatorio de los electrones, cabría pensar que podemos construir un "microscopio electrónico" valiéndonos de electrones de longitud de onda corta para lograr una resolución alta. Y efectivamente esto se ha hecho. *a)* ¿Cómo podría enfocarse un haz de electrones? *b)* ¿Qué ventajas podría tener un microscopio electrónico sobre un microscopio de luz? *c)* ¿Por qué no construir un microscopio de protones? ¿O uno de neutrones?
5. ¿Cuántos experimentos puede mencionar que apoyen la teoría ondulatoria de la luz? ¿La teoría ondulatoria de la materia? ¿Y la teoría corpuscular de la materia?
6. ¿Es el electrón una partícula? ¿Es una onda? Explique su respuesta citando los datos experimentales relevantes?
7. ¿Qué expresión común puede emplearse con el momento de un fotón o de una partícula?
8. Explique la analogía de *a)* la óptica ondulatoria y la óptica geométrica con *b)* la mecánica ondulatoria y la mecánica clásica.
9. ¿Tiene un fotón una longitud de onda de De Broglie? Explique su respuesta.
10. Explique las semejanzas y las diferencias entre una onda de materia y una onda electromagnética.
11. Si en la fórmula de De Broglie $\lambda = h/mv$ hacemos $m \to \infty$, ¿obtenemos el resultado clásico referente a las partículas de materia?
12. Considerando como partículas a los electrones y a los fotones, ¿en qué se diferencian?
13. ¿Es la ecuación 46-5 de la longitud de onda de De Broglie, $\lambda = h/p$, válida para una partícula relativista? Fundamente su respuesta.
14. ¿Cómo pudieron Davisson y Germer estar seguros de que el pico de "54 V" de la figura 46-2 era un pico de difracción de primer orden?
15. ¿Suministran los experimentos de difracción de electrones información diferente sobre los cristales de la que puede obtenerse de los experimentos relativos a la difracción de rayos X? ¿De los relativos a la difracción de neutrones? Dé ejemplos.
16. ¿Por qué los átomos de hidrógeno son claramente visibles en la figura 46-8, no así en la figura 43-17?
17. En la figura 46-3*b* (hecha con rayos X) los círculos de refracción están moteados, mientras que en la figura 46-3*c* (elaborada con electrones) son suaves. ¿Puede explicar por qué?
18. Las ondas electromagnéticas penetrarán en el agua de mar hasta cierto punto a condición de que su frecuencia sea bastante baja. Éste es el fundamento de un plan para comunicarse con los submarinos sumergidos. Un problema de este plan radica en que, cuanto menor sea la frecuencia, más tiempo se tarda la transmisión del mensaje (en pulsos del código Morse, por ejemplo). ¿Puede explicar por qué sucede eso?
19. ¿Por qué el principio de incertidumbre de Heisenberg no es evidente en nuestras observaciones diarias?
20. *a)* Dé ejemplos de cómo el proceso de medición perturba el sistema que va a ser medido. *b)* ¿Pueden las perturbaciones tenerse en cuenta con suficiente anticipación por medio de un cálculo apropiado?
21. Mide usted la presión de una llanta con un manómetro. Sin embargo, el manómetro extrae un poco de aire de la llanta durante el proceso, de manera que la acción de medir altera la propiedad que está tratando de calcular. ¿Es éste un ejemplo del principio de incertidumbre de Heisenberg? Explique su respuesta.
22. "La energía del estado base de un sistema atómico puede conocerse con precisión, en tanto que la de sus estados excitados siempre está sujeta a un poco de incertidumbre." ¿Puede explicar esta afirmación partiendo del principio de incertidumbre?
23. "Si un electrón está localizado en el espacio, su momento se vuelve incierto. Si está localizado en el tiempo, su energía se torna incierta." Explique esta aseveración.

24. Hemos visto que el efecto túnel se produce en las ondas de materia y en las ondas electromagnéticas. ¿Cree que también se observa en las ondas de agua? ¿Y en las ondas sonoras?
25. Comente la siguiente afirmación: "Una partícula no puede detectarse mientras atraviesa una barrera, por lo cual sería absurdo decir que eso sucede en realidad".
26. Dé ejemplos del efecto túnel que ocurre en la naturaleza y en los objetos fabricados.
27. Varios grupos de experimentadores tratan de detectar las ondas de la gravedad, quizá provenientes del centro de la galaxia, midiendo para ello pequeñas distorsiones en un objeto masivo por donde pasan las supuestas ondas. Intentan medir desplazamientos apenas de 10^{-21} m. (El radio de un protón es $\approx 10^{-15}$ m, un millón de veces más grande.) ¿Impone el principio de incertidumbre alguna restricción a la precisión con que puede efectuarse la medición?
28. Un protón y un deuterón, con una energía de 3 MeV cada uno, intentan penetrar en una barrera de potencial rectangular de 10 MeV de altura. ¿Cuál partícula tiene mayores probabilidades de lograrlo? Explique su respuesta en términos cualitativos.

EJERCICIOS

46-1 Ondas de materia

1. Una bala de 41 g de masa se desplaza a 960 m/s. *a)* ¿Qué longitud de onda podemos asociar a ella? *b)* ¿Por qué la naturaleza ondulatoria de la materia no se manifiesta en los efectos de difracción?
2. Mediante la relación clásica entre momento y energía cinética demuestre que la longitud de onda de De Broglie en un electrón puede escribirse *a)* como

$$\lambda = \frac{1.226 \text{ nm}}{\sqrt{K}},$$

donde K es la energía cinética en electronvolts, o *b)* como

$$\lambda = \sqrt{\frac{1.50 \text{ V}}{V}} \text{ nm},$$

donde V es el potencial de aceleración en volts. (Utilice los mejores valores de las constantes necesarias que vienen en el Ap. B.)
3. Calcule la longitud de onda *a)* de un electrón, *b)* de un protón y *c)* de un neutrón, todos ellos de 1.00 keV.
4. Una onda de una línea espectral amarilla de emisión de sodio mide 589 nm. ¿Con qué energía cinética poseerá un electrón la misma longitud de onda de De Broglie?
5. Si la longitud de De Broglie de un protón es 0.113 pm, *a)* ¿cuál es su velocidad y *b)* con que diferencia de potencial eléctrico deberemos acelerarlo partiendo del reposo para que alcance esa velocidad?
6. Iones de sodio cargados unitariamente son acelerados a través de una diferencia de potencial de 325 V. *a)* ¿Cuál es el momento adquirido por los iones? *b)* Calcule su longitud de onda de De Broglie.
7. La existencia del núcleo atómico fue descubierta en 1911 por Ernest Rutherford, quien interpretó correctamente algunos experimentos donde un haz de partícula alfa era dispersado de una lámina de átomos como el oro. *a)* Si las partículas alfa tenían una energía cinética de 7.5 MeV, ¿cuál era su longitud de onda de De Broglie? *b)* ¿Debería haberse tenido en cuenta la naturaleza ondulatoria de estas partículas incidentes en el momento de interpretar los experimentos? La distancia del mayor acercamiento de la partícula alfa al núcleo en ellos era 30 fm aproximadamente. (La naturaleza ondulatoria de la materia se postuló una década después de efectuados estos experimentos decisivos.)
8. La máxima potencia alcanzable de resolución de un microscopio está limitada por la longitud de onda que se use; en otras palabras, el detalle más pequeño susceptible de separarse es más o menos igual a la longitud de onda. Suponga que uno desea "ver" el interior de un átomo. Suponiendo que tenga un diámetro de 100 pm, ello significa que se quiere resolver el detalle de separación en cerca de 10 pm. *a)* Si se emplea un microscopio electrónico, ¿qué energía mínima de electrones se requiere? *b)* Si se emplea un microscopio de luz, ¿qué energía mínima se necesita? *c)* ¿Cuál microscopio parece más práctico para este fin? ¿Por qué?
9. El acelerador de electrones de 50 GeV en Stanford genera un haz de electrones de pequeña longitud de onda, adecuado para investigar los detalles finos de la estructura nuclear mediante experimentos de dispersión. ¿Cuál es esa longitud de onda y cómo se relaciona con el tamaño de un núcleo promedio? (Con estas energías es suficiente utilizar la extrema relación relativista entre momento y energía, a saber: $p = E/c$. Es la misma relación que se usó con la luz y se justifica cuando la energía cinética de una partícula es mucho mayor que su energía en reposo, como en este caso. El núcleo de masa media tiene un radio aproximado de 5.0 fm.)
10. Considere un globo aerostático lleno con gas helio monoatómico) a una temperatura de 18°C y a una presión de 1.0 atm. Calcule *a)* el promedio de la longitud de onda de De Broglie en los átomos de helio y *b)* la distancia promedio entre los átomos. ¿Pueden tratarse como partículas bajo estas condiciones?
11. Un movimiento no relativista de una partícula en movimiento tiene tres tiempos como cuerpo y electrón. El radio de De Broglie de longitud de onda, partícula y electrón, es 1.813×10^{-4}. Pero calculando esta masa, identificamos la partícula. Consulte el apéndice B.
12. *a)* Un fotón en el espacio libre posee una energía de 1.5 eV y un electrón, también en el espacio libre, posee la misma cantidad de energía. ¿Cuáles son sus longitudes de onda? *b)* Repita el ejercicio con una energía de 1.5 GeV.
13. En un televisor ordinario de color, se aceleran los electrones en una diferencia de potencial de 25.0 kV. Determine su longitud de onda de De Broglie *a)* utilizando la expresión clásica del momento y *b)* teniendo en cuenta la relatividad.
14. ¿Qué voltaje de aceleración se requeriría para que los electrones de un microscopio electrónico obtuvieran el mismo poder final de resolución como el que se lograría con un microscopio de rayos gamma usando rayos gamma de 136 keV? (Sugerencia: consulte el Ej. 8.)

46-2 Pruebas de la hipótesis de De Broglie

15. Un espectrómetro de cristal de neutrones utiliza planos cristalinos con un espaciamiento $d = 73.2$ pm en un cristal de berilio. ¿Cuál debe ser el ángulo de Bragg θ, de manera que tan sólo se reflejen neutrones de energía $K = 4.2$ eV? Tenga en cuenta únicamente las reflexiones de primer orden.

16. Un haz de neutrones térmicos procedentes de un reactor nuclear incide sobre un cristal de fluoruro de calcio, formando su dirección un ángulo θ con la superficie del cristal. Los planos atómicos paralelos a la superficie del cristal presentan un espaciamiento interplanar de 54.64 pm. La longitud de onda de De Broglie de los neutrones del haz incidente es 11.00 pm. ¿Con qué valores de θ ocurrirán los tres primeros órdenes del haz de neutrones de Bragg reflejado? (Sugerencia: los neutrones, que no transportan carga y que, por ello, no están sujetos a fuerzas eléctricas, no se refractan al pasar por una superficie de cristal. Así, su difracción pueden tratarse en analogía rigurosa con la difracción de los rayos X.)
17. En el experimento de Davisson y Germer, *a*) ¿en qué ángulos deberían aparecer los haces difractados de segundo y tercer orden correspondientes a un máximo fuerte en la figura 46-2, a condición de que existan? *b*) ¿En qué ángulo ocurrirá el haz difractado de primer orden, si cambiamos de 54 a 60 V el potencial de aceleración?
18. Un cristal de cloruro de potasio (KCl) se corta de modo que las capas de los planos atómicos paralelos a su superficie presenten un espaciamiento de 314 pm entre las líneas adyacentes de los átomos. Un haz de electrones de 380 eV incide normalmente sobre la superficie del cristal. Calcule los ángulos ϕ en que se debe poner el dectector para que registre los haces fuertemente difractados de todos los órdenes presentes.

46-3 Ondas y partículas

19. Por medio de un obturador giratorio, escuche un diapasón ordinario de 540 Hz 0.23 s. ¿Por qué intervalo aproximado de las frecuencias está contenida en este pulso acústico?
20. La señal proveniente de una estación de televisión contiene pulsos de ancho total $\Delta t \approx 10$ ns. ¿Es posible transmitir televisión en la banda de amplitud modulada que fluctúa entre 500 y 1 600 kHz aproximadamente?

46-4 Principio de incertidumbre de Heisenberg

21. Un núcleo en estado excitado volverá a su estado base, emitiendo un rayo gamma al hacerlo. Si su vida promedio es 8.7 ps en determinado estado excitado de 1.32 MeV de energía, calcule la incertidumbre en la energía del correspondiente fotón emitido de rayos gamma.
22. Un átomo en estado excitado tiene una vida promedio de 12 ns; en segundo estado excitado su vida promedio es 23 ns. ¿Cuál es la incertidumbre de energía en un fotón emitido, cuando un electrón cumple una transición entre ambos estados?
23. Un microscopio que usa fotones sirve para localizar un electrón en un átomo a una distancia de 12 pm. ¿Cuál es la incertidumbre mínima en el momento del electrón localizado en esta forma?
24. Imagine que juega béisbol en un universo donde la constante de Planck es 0.60 J · s. ¿Qué incertidumbre presentará la posición de una pelota de 0.50 kg que se desplace a 20 m/s, con una incertidumbre de velocidad de 1.2 m/s? ¿Por qué sería difícil atraparla?
25. Calcule la incertidumbre de la ubicación de una partícula en función de la longitud de onda de De Broglie λ, de manera que la de su velocidad sea igual a esta última.
26. Un electrón está confinado dentro de una caja del tamaño de un átomo, de modo que un lado de ella tiene una longitud $d = 0.1$ nm. *a*) Calcule la incertidumbre del momento Δp del electrón. *b*) Suponiendo que el electrón está "rebotando" en el interior de ella con el momento $p \approx \Delta p$, calcule su energía cinética. Exprese su respuesta en electrón-volts.
27. Repita el ejercicio 26 para calcular la energía cinética de un electrón confinado dentro de un núcleo, cuyo tamaño es del orden de 10^{-14} m.

46-5 La función de onda

46-6 La ecuación de Schrödinger

46-7 El efecto túnel

28. En el problema resuelto 46-6 suponga que puede modificar el espesor L de la barrera. ¿A qué valor habría que ajustarlo para que 1 electrón de los 100 que chocan contra ella la atraviese?
29. *a*) Un protón y *b*) un deuterón (que tiene la misma carga que el protón pero el doble de masa) inciden sobre una barrera de 10 fm de espesor y de 10 MeV de altura. Poseen una energía cinética de 3.0 MeV. Calcule su coeficiente de transmisión.
30. Suponga que un haz de protones de 5.0 eV incide sobre una barrera de 6.0 eV de altura y de 0.70 nm de espesor, con una velocidad equivalente a una corriente de 1.0 kA. ¿Cuánto habrá usted de esperar —en promedio— para que se transmita un protón?

PROBLEMAS

1. Un haz de neutrones con poca energía sale de un reactor y se difracta en un cristal. La energía cinética de los neutrones está contenida en una banda de ancho ΔK que se centra en la energía K. Demuestre que los ángulos de cierto orden de difracción se dispersan en un intervalo $\Delta\theta$ dado en grados por

$$\Delta\theta = \left(\frac{90}{\pi}\right)(\tan\theta)\frac{\Delta K}{K},$$

donde θ es el ángulo de difracción de un neutrón que posee una energía cinética K.

2. Un haz de átomos sale de un horno cuya temperatura es T. La distribución de sus velocidades en el haz es proporcional a $v^3 e^{-mv^2/2kT}$ (Sec. 22-4). *a*) Demuestre que la distribución de las longitudes de onda de De Broglie en los átomos es proporcional a $\lambda^{-5} e^{-h^2/2mkT\lambda^2}$ y *b*) que la longitud más probable es

$$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{5mkT}}.$$

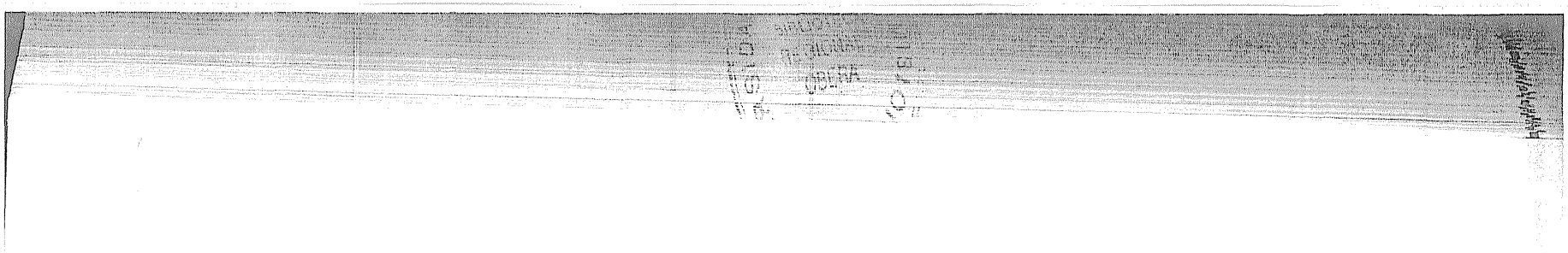
3. Considere una barrera como la de la figura 46-16, cuya altura U_0 es 6.00 eV y cuyo espesor L mide 700 pm. Calcule la energía de un electrón incidente tal que su coeficiente de transmisión sea 1 en 1000.
4. Considere la situación del efecto túnel, definida en el problema resuelto 46-6. ¿Qué cambio fraccional del coeficiente ocurre con un incremento de 1% en *a*) la altura de la barrera, *b*) en su espesor y c) en la energía incidente del electrón?

5. Utilice la ecuación 46-12 para verificar la identidad trigonométrica cos $(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$.
6. Las partículas de masa m y de energía E que inicialmente se dirigen a la derecha en una región del espacio donde $U = 0$ chocan contra un *escalón de potencial* en $x = 0$ de altura $U_0 < E$ para toda $x > 0$. En la mecánica clásica todas ellas pasan sobre el escalón. Resuelva el problema en la mecánica cuántica siguiendo un procedimiento similar al descrito en la sección 46-7. *a*) Anote las soluciones válidas en la región $x < 0$ constituidas por una onda incidente de amplitud ψ_1 y una onda reflejada de amplitud ψ_2 y en la región $x > 0$ formada por una onda transmitida de amplitud ψ_3. Exprese las soluciones en función de $k = (2\pi/h)\sqrt{2mE}$ y $k' = (2\pi/h)\sqrt{2m(E - U_0)}$. *b*) En una onda que se comporta bien desde el punto de vista matemático, la función de onda y su primera derivada deben ser continuas en la frontera, es decir, en $x = 0$ debemos tener $\psi_{x<0} = \psi_{x>0}$ y $d\psi_{x<0}/dx = d\psi_{x>0}/dx$. Aplique estas *condiciones de frontera* para obtener ψ_2/ψ_1 y ψ_3/ψ_1. *c*) Demuestre que el coeficiente de transmisión, en este caso definido como $|\psi_3|^2/|\psi_1|^2$, es

$$T = 4(1 + k'/k)^{-2}.$$

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Podemos dejar caer una pelota de ping pong desde una altura de 1 metro arriba de una bola de boliche. La pelota de ping pong caerá, golpeará la de boliche, rebotará hacia arriba, caerá de nuevo y repetirá estas acciones casi con elasticidad perfecta. Si la dejamos caer exactamente arriba del centro de la bola de boliche, seguirá rebotando en forma indefinida. El principio de incertidumbre de Heisenberg limita la precisión con que podemos dejarla caer, de manera que con el tiempo fuera de la bola de boliche. *a*) Escriba un programa de computadora que modele el rebote de la pelota de ping pong, suponiendo que se deja caer de una distancia vertical Δx arriba del centro de la bola de boliche, con un momento vertical inicial Δp_x. *b*) Suponiendo que Δx y Δp_x se relacionen mediante el principio de incertidumbre de Heisenberg, calcule el número máximo de veces que la pelota de ping pong puede rebotar contra la bola de boliche.



CAPÍTULO 47

ELECTRONES EN POZOS DE POTENCIAL

En el capítulo anterior estudiamos los movimientos de los electrones libres. En este vamos a estudiar los movimientos de los electrones ligados, *es decir, los que no pueden vagar libremente fuera de ciertos límites.*

La energía de un electrón totalmente libre no *está cuantizada, pero veremos que la de un electrón ligado* sí *está cuantizada. Nuestro interés se centra en los movimientos de los electrones ligados a los átomos. A manera de introducción examinaremos los electrones ligados a estructuras artificiales denominadas* pozos de potencial.

Luego vamos a concentrarnos en un electrón individual del átomo de hidrógeno, examinando primero el modelo del átomo de hidrógeno; dicho modelo fue propuesto por Bohr en una época cuando la mecánica cuántica todavía no alcanzaba su desarrollo pleno. Luego abordaremos el tratamiento cuántico moderno del átomo de hidrógeno. Identificaremos los números que especifican sus estados cuánticos y exploraremos el comportamiento del electrón en alguno de dichos estados.

47-1 ELECTRONES LIBRES Y LIGADOS

En el capítulo 46 estudiamos el movimiento de un electrón libre, esto es, el electrón sobre el que no actúa fuerza neta alguna. En este capítulo estudiaremos el movimiento de un *electrón ligado*, un electrón sobre el que actúan las fuerzas para confinarlo en una región limitada del espacio, quizá dentro del volumen de un átomo. De inmediato salta a la vista la diferencia entre un electrón libre y uno ligado a un átomo. Un electrón libre se desplaza en una dimensión únicamente, mientras que un electrón ligado a un átomo puede moverse en tres dimensiones.

Con todo, la diferencia principal entre un electrón libre y uno ligado es ésta: como veremos en la siguiente sección el hecho de que un electrón ligado esté *localizado* significa que su energía sólo puede tener valores pertenecientes a cierto conjunto discreto. En otras palabras, su energía está *cuantizada,* no así la de un electrón libre.

Con el fin de distinguir los efectos de la localización y dimensionalidad, estudiaremos primero un electrón que se mueve en un "átomo" en cierto modo artificial, pero el movimiento continúa siendo unidimensional.

47-2 UN ELECTRÓN ATRAPADO EN UN POZO DE POTENCIAL

En la figura 47-1*a* se muestra un arreglo, susceptible de adaptarse, para localizar un electrón: en este caso, confinarlo a un movimiento unidimensional dentro de la región central de longitud L. En la figura 47-1*b* vemos $U(x)$, la variación de la energía potencial del electrón en función de x en el arreglo. A esta energía potencial la llamamos pozo de energía potencial o, en forma abreviada, *pozo de potencial.* En la práctica, los dispositivos electromecánicos que atrapan partículas cargadas deben tener algunas características que no aparecen en la figura 47-1*a*. Asimismo es posible construirlos en la escala de las dimensiones atómicas para lograr el mismo resultado. Este tipo de estructuras de *pozo cuántico* se fabrican sin problemas en el laboratorio.

Representemos con E $(= K + U)$ en la figura 47-1*b*, la energía total del electrón. Supongamos que $U(x) = 0$ dentro del pozo, de modo que la energía total E del electrón es enteramente cinética allí. Cuando el electrón llega al extremo de la región central, encuentra una zona estrecha donde su energía potencial pasa rápidamente de cero a U_0. Entonces, en ambos extremos de esta región, sobre el electrón actúa una fuerza que tiende no só-

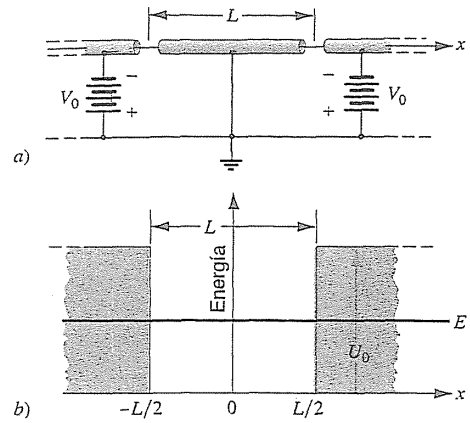


FIGURA 47-1. *a*) Arreglo de tubos metálicos huecos que podrían servir para confinar un electrón en una región central de longitud L. *b*) Energía potencial de un electrón de energía total E en el arreglo anterior. Las regiones prohibidas en la física clásica del pozo de potencial, cuya profundidad es U_0, están sombreadas. Se supone que el origen del eje x es el centro del pozo.

lo a reducir la velocidad de dicho electrón sino que lo hace dar vuelta. En conformidad con la mecánica newtoniana, tan sólo puede rebotar hacia atrás y adelante en la región central situada en los puntos de vuelta cuando $x = -L/2$ y $x = +L/2$. Pero no es la mecánica newtoniana sino la cuántica la que describe el comportamiento real del electrón.

Un pozo de potencial infinitamente profundo

Ahora vamos a tratar un caso especial donde son infinitas las alturas U_0 de las barreras entre las que está confinado el electrón de la figura 47-1*b*, según se muestra en la figura 47-2. A esta estructura la llamamos pozo infinitamente profundo de energía potencial o, en forma abreviada, *pozo infinito*.

En la sección 46-7 vimos que, aunque un electrón puede penetrar una barrera colocada en su trayectoria, no logrará hacerlo si dicha barrera es infinitamente alta. En tal caso, el electrón rebota contra ella como una pelota de tenis cuando choca contra un muro de ladrillo, comportándose como si prevaleciera la física de Newton. Una situación análoga se presenta con el pozo infinito de la figura 47-2. El electrón atrapado en dicho pozo no es capaz de penetrar los muros del pozo y tan sólo puede moverse resonando de un lado a otro entre los muros. En la terminología cuántica $\psi(x)$, la parte de la función de onda que varía con el tiempo y que describe el electrón ligado en un pozo infinito, debe tener el valor cero en los muros y en todos los puntos más allá de ellos; eso significa que la probabilidad de localizar al electrón allí es cero.

El hecho de que $\psi(x)$ debe cancelarse en los muros nos recuerda el comportamiento de una cuerda estirada entre dos soportes rígidos. En este caso las ondas estacionarias pueden fijarse en la cuerda, sometidas a la *condición de frontera* de que el desplazamiento de la cuerda sea cero en los dos soportes rígidos (Fig. 18-20). Facilitaremos la introducción a la mecánica

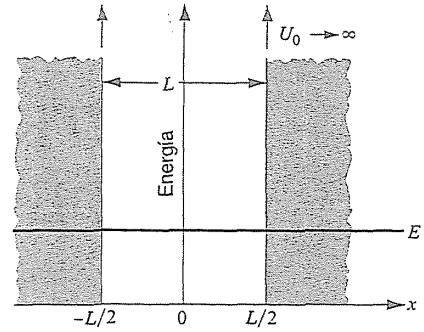


FIGURA 47-2. Pozo infinito. Compárelo con el pozo de la figura 47-1*b*, cuya profundidad es finita. Están sombreadas las regiones prohibidas en la física clásica.

cuántica analizando la analogía entre las ondas mecánicas que se propagan a lo largo de una cuerda estirada y las ondas de materia asociadas a un electrón atrapado en un pozo infinito.

Las ondas mecánicas de *cualquier* longitud de onda pueden propagarse a lo largo de una cuerda estirada si es lo bastante larga para considerar infinita su longitud. No obstante, únicamente las ondas que poseen cierto conjunto discreto de longitudes de onda pueden propagarse a lo largo de una cuerda de longitud finita, como se observa en la figura 18-20. Podemos afirmar que, una vez que se supone finita su longitud —es decir, una vez *localizadas* las ondas—, *se cuantiza* la longitud de onda de estas ondas permitidas.

Cuando se estudian las ondas de materia, se acostumbra pensar en función de la energía de las partículas asociadas y no de la longitud de onda de la materia propiamente dicha. En el capítulo 46 vimos que una partícula libre —es decir, aquella sobre la que no actúa fuerza alguna— puede moverse con *cualquier* valor razonable de energía E. Veremos más adelante que, si la partícula libre no está localizada en una región finita del espacio, su energía puede adoptar sólo los valores pertenecientes a un conjunto discreto. Dicho con otras palabras, una vez *localizado* el electrón en una región finita, su energía se *cuantiza*. En conclusión, con ondas mecánicas en una cuerda estirada y con ondas de materia,

La localización origina la cuantización.

La analogía entre las ondas de materia y las mecánicas lleva a concluir que los electrones confinados a un pozo infinito pueden poseer solamente energías que pertenecen a un conjunto discreto. A continuación vamos a determinarlas.

Niveles de energía en un pozo infinito

Si queremos describir la onda de materia asociada a un electrón, debemos calcular su función de onda $\psi(x)$ (que varía en el espacio). La forma sencilla de hacerlo es resolver la ecuación de Schrödinger en las condiciones del problema por resolver. Sin embargo, tratándose de la variación de potencial asociada a un pozo infinito, resulta que la ecuación tiene una forma matemática idéntica a la que describe la variación es-

pacial de las ondas mecánicas en una cuerda estirada. En efecto, por eso ha sido tan útil hasta ahora la analogía entre las ondas de materia y las ondas mecánicas.

Así pues, cabe suponer que $\psi(x)$, que describe la onda de materia asociada a un electrón en un pozo infinito, presenta la misma forma que $y(x)$, que describe el desplazamiento asociado a una onda mecánica en una cuerda de longitud L estirada entre soportes rígidos. Es decir, suponemos que sólo pueden existir ondas de material cuya longitud de onda de De Broglie es tal que un número entero de medias ondas encaja en el espacio L, o sea

$$n\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) = L \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

donde al entero n se le llama *número cuántico*. La solución de λ_n nos da

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (47\text{-}1)$$

que identifica el conjunto discreto de las longitudes de onda de De Broglie que puede haber en el pozo.

La totalidad de la energía del electrón atrapado es cinética porque (Fig. 47-2) hemos supuesto que $U(x) = 0$ en el interior del pozo. Al usar la ecuación 46-1 ($\lambda = h/p$) y la ecuación 47-1, la magnitud de los valores permitidos del momento del electrón está dada por

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (47\text{-}2)$$

Si conocemos los momentos de los estados cuánticos permitidos según la ecuación 47-2, es posible calcular las energías correspondientes por medio de

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (47\text{-}3)$$

La ecuación 47-3 define la energía de los *estados cuánticos* permitidos en un electrón atrapado dentro de un pozo infinito de ancho L. La figura 47-3 muestra diversos *niveles de energía*, como los llamaremos, de un pozo infinito con $L = 100$ pm, número elegido por ser aproximadamente el tamaño de un átomo ordinario. Al nivel más bajo de energía se le conoce como *estado base* y a los estados arriba de este estado base, como *estados excitados*.

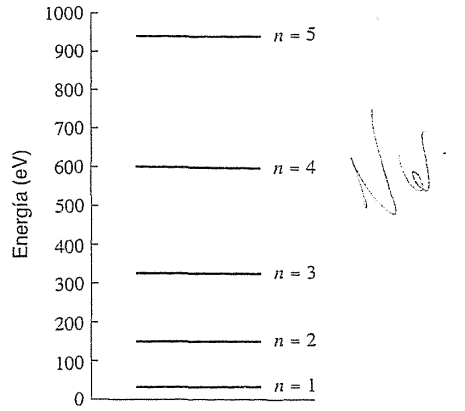


FIGURA 47-3. Los niveles de energía de cinco estados cuánticos cuyo número cuántico se muestra. Las energías se calcularon para un pozo infinito de ancho $L = 100$ pm, utilizando la ecuación 47-3.

Densidades de probabilidad para un pozo infinito

Por lo regular, es más fácil manejar los *números de onda* que las longitudes de onda. Por la definición del número de onda, entonces la ecuación 47-1 queda así

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (47\text{-}4)$$

Por analogía con las ondas mecánicas permitidas en una cuerda estirada de longitud L, la función de onda puede expresarse como senos y cosenos. Para que un número *impar* de medias ondas se establezca dentro del pozo, la función puede escribirse como

$$\psi_n(x) = \psi_{\text{impar}} \cos k_n x = \psi_{\text{impar}} \cos \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots), \qquad (47\text{-}5)$$

donde ψ_{impar}, la amplitud de la onda de materia, es una constante ajustable. Convénzase usted mismo de que esta función cumple la condición de que $\psi(x) = 0$ en los muros ($x = \pm L/2$) con los valores impares de n.

En forma parecida, si se quiere que un número *par* de medias ondas se establezca en el pozo, la función de onda debe estar dada por

$$\psi_n(x) = \psi_{\text{par}} \operatorname{sen} k_n x = \psi_{\text{par}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots), \qquad (47\text{-}6)$$

donde ψ_{par} es también una constante de amplitud. En esta función de onda $\psi(x) = 0$ en los muros con valores pares de n. La figura 47-4*a* muestra $\psi(x)$ para los números cuánticos $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$.

Igual que en el caso de una partícula libre, la cantidad $\psi\psi^*$ indica la *densidad de probabilidad* $P(x)$ de la onda de materia. Así pues, con base en las ecuaciones 47-5 y 47-6 tenemos

$$P_n(x) = \psi\psi^* = \psi_{\text{impar}}^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots) \qquad (47\text{-}7)$$

y

$$P_n(x) = \psi\psi^* = \psi_{\text{par}}^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots). \qquad (47\text{-}8)$$

Nótese que $n = 0$ en la ecuación 47-8 no es una opción porque nos llevaría a $P_0(x) = 0$, expresión que nos dice que el electrón no se encuentra en ninguna parte dentro del pozo. El pozo se halla vacío.

Las tres distribuciones de probabilidad de la figura 47-4*b* contienen estados muy diferentes del movimiento del electrón. Por ejemplo, $P_1(x)$ muestra que un electrón en un estado con energía E_1 tenderá a ser localizado cerca de $x = 0$ (en el centro del pozo). Por el contrario, nunca hallaremos en el centro del pozo un electrón en el estado $n = 2$; el lector debería buscarlo cerca de $x = \pm L/4$, donde estará con la máxima probabilidad.

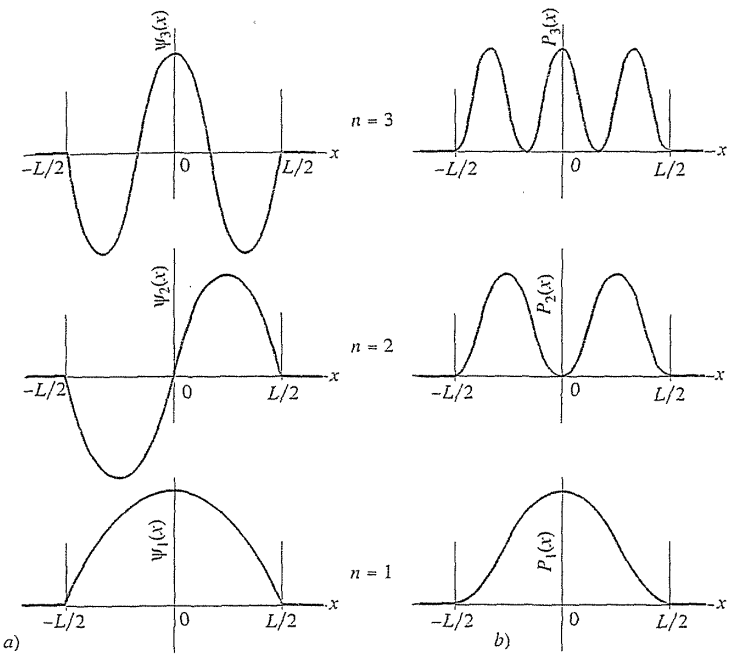


FIGURA 47-4. *a*) La parte de la función de onda $\psi_n(x)$ dependiente del espacio para tres estados cuánticos, con los números cuánticos indicados. *b*) Densidad de probabilidad $P_n(x)$, calculada a partir de las ecuaciones 47-7 y 47-8, de los mismos tres estados cuánticos.

La figura 47-4*b* indica que, en los estados con números cuánticos cada vez mayores, la probabilidad de encontrar en todas las partes del pozo al electrón atrapado será la misma. En la figura 47-5 vemos la densidad de probabilidad para $n = 15$. Los picos adyacentes están separados por $\Delta x = L/15$ Nótese que la probabilidad de hallar el electrón en unos cuantos múltiplos de este intervalo básico es la misma para todas las partes del pozo, como lo sería en gran medida si predominara la física newtoniana. (En ella la probabilidad de localizarlo en un intervalo cualquiera no depende de la ubicación del intervalo.) Piense en el aspecto que ofrecería una gráfica similar a la de la figura 47-5 con un número cuántico realmente grande, digamos $n = 5\,000$. Éste es un ejemplo del *principio de correspondencia* según el cual:

> *Con números cuánticos cada vez mayores, las predicciones de la mecánica cuántica se combinan suavemente con las de la mecánica newtoniana.*

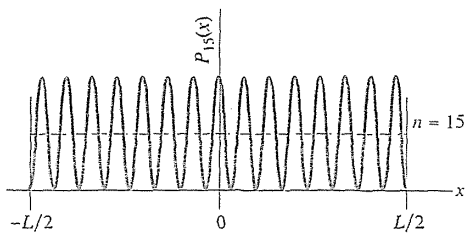


FIGURA 47-5. Densidad de probabilidad de un electrón atrapado en un pozo infinito de ancho L para un estado cuántico con $n = 15$. La línea punteada representa la distribución de probabilidad clásica uniforme.

Normalización

Es imposible asignar valores numéricos a la densidad de probabilidad $P_n(x)$ mientras no hayamos evaluado las constantes de amplitud ψ^2_{impar} en la ecuación 47-7 y ψ^2_{par} en la ecuación 47-8. Lo haremos dándonos cuenta de que, cualquiera que sea su estado cuántico, el electrón debe hallarse en *algún lugar* dentro del pozo infinito de la figura 47-2. En otras palabras, en la sección 46-5 vimos que $P(x)\,dx\,[= \psi^2(x)\,dx]$ nos da la probabilidad de encontrar el electrón entre x y $x + dx$; la suma de las probabilidades en todos esos intervalos del pozo debe ser 100% o la unidad. En forma de ecuación,

$$\int_{-L/2}^{L/2} P_n(x)\,dx = 1. \qquad (47\text{-}9)$$

En el problema resuelto 47-3 utilizaremos esta *ecuación de normalización*, nombre que se le asigna, para demostrar que $\psi^2_{\text{impar}} = \psi^2_{\text{par}} = 2/L$, independientemente del valor del número cuántico n.

Energía del punto cero

En un electrón ligado en un pozo infinito, la energía del estado cuántico de menor energía (estado base) corresponde a $n = 1$ en la ecuación 47-3; esta ecuación muestra que la energía en ese estado no es cero sino $h^2/8mL^2$. A esta energía mínima se le da el nombre de *energía del punto cero* de una partícula de masa m ligada en un pozo infinito de ancho L. Es un fenómeno que existe en todos los sistemas cuánticos. La partícula conservará su energía y su momento inclusive en el cero absoluto de temperatura, donde presenta su estado energético más bajo posible.

El principio de incertidumbre de Heisenberg nos ayuda a entender la existencia de una energía del punto cero. Si una par-

tícula en verdad tuviera energía cero ($E = 0$), también tendría un momento ($p_x = 0$). Si p_x se sabe que es cero, también deberá serlo Δp_x, la incertidumbre en p_x. Pero si $\Delta p_x = 0$, el principio de incertidumbre $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h/2\pi$ (Ec. 46-8) exige que $\Delta x \rightarrow \infty$. Puesto que Δx no puede ser mayor que L—el ancho del pozo—, concluimos que la suposición inicial es errónea: p_x no puede ser cero y debe existir una energía del punto cero.

PROBLEMA RESUELTO 47-1. Un electrón está confinado en un pozo infinito cuyo ancho L (= 100 pm) tiene aproximadamente el tamaño de un átomo. *a*) ¿Cuál es la energía de los cuatro estados cuánticos menos energéticos? *b*) ¿Qué energía debe impartirse al electrón para llevarlo de un estado con $n = 12$ a un estado de mayor energía, con $n = 25$?

Solución *a*) De acuerdo con la ecuación 47-3, si $n = 1$ y, expresando las constantes hasta cuatro cifras significativas (Ap. B), obtenemos

$$E_1 = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$= (1)^2 \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{(8)(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(100 \times 10^{-12}\ \text{m})^2}$$

$$= 6.025 \times 10^{-18}\ \text{J} = 37.6\ \text{eV}.$$

Si queremos calcular las energías de los estados más altos, escribiremos 47-3 como $E_n = n^2 E_1$ y, en consecuencia, las energías de los estados cuánticos con $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$ son

$$E_2 = (2)^2(37.6\ \text{eV}) = 150\ \text{eV},$$

$$E_3 = (3)^2(37.6\ \text{eV}) = 338\ \text{eV},$$

$$E_4 = (4)^2(37.6\ \text{eV}) = 602\ \text{eV}.$$

b) Según la ecuación 47-3, la diferencia de energía es

$$\Delta E = E_{25} - E_{12} = [(25)^2 - (12)^2]\,(37.6\ \text{eV})$$

$$= 18\,100\ \text{eV} = 18.1\ \text{keV}.$$

PROBLEMA RESUELTO 47-2. Una partícula de polvo de 1 ng (= 10^{-9} g = 10^{-12} kg) oscila entre dos muros rígidos separados por $L = 0.1$ mm. Se mueve con tanta lentitud que tarde 100 s en cruzar esta separación pequeña. ¿Qué número cuántico describe el movimiento?

Solución La energía de la partícula es enteramente cinética y está dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1 \times 10^{-12}\ \text{kg})(1 \times 10^{-6}\ \text{m/s})^2$$

$$= 5 \times 10^{-25}\ \text{J}.$$

La solución de la ecuación 47-3 para el número cuántico n nos da

$$n = \frac{L}{h}\sqrt{8mE}$$

$$= \frac{1 \times 10^{-4}\ \text{m}}{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}\sqrt{(8)(10^{-12}\ \text{kg})(5 \times 10^{-25}\ \text{J})}$$

$$= 3 \times 10^{11}.$$

Es un número muy grande. Desde el punto de vista experimental es imposible medir la diferencia entre la energía de un estado cuántico cuando $n = 300\,000\,000\,000$ y el de sus dos estados adyacentes que tienen $n = 300\,000\,000\,001$ y $n = 299\,999\,999\,999$. La naturaleza cuantizada del movimiento nunca se manifestaría en este ejemplo.

Si comparamos este ejemplo con el anterior, veremos lo siguiente: a pesar de que su masa y su energía cinética son pequeñas en extremo a juzgar por criterios "ordinarios", la partícula de polvo *sigue* siendo un objeto macroscópico voluminoso al compararlo con un electrón.

PROBLEMA RESUELTO 47-3. Evalúe la constante de normalización ψ^2_{impar} en la ecuación 47-7, que permite obtener (para números cuánticos impares) la densidad de probabilidad de una partícula de masa m atrapada en un pozo infinito de ancho L.

Solución Se sustituye la ecuación 47-7 en la ecuación de normalización (Ec. 47-9) y se obtiene

$$\psi^2_{\text{impar}} \int_{-L/2}^{L/2} \cos^2 \frac{n\pi x}{L}\, dx = 1. \qquad (47\text{-}10)$$

La integral puede resolverse muy fácilmente con sólo introducir otra variable θ, definida a partir de

$$\theta = \frac{n\pi x}{L},$$

donde vemos que

$$dx = \frac{L}{n\pi}\, d\theta.$$

Los límites de la integral ($x = \pm L/2$) se convierten en los de la nueva variable θ, o $\theta = \pm n\pi/2$. Con tales cambios, la ecuación 47-10 queda así

$$\frac{\psi^2_{\text{impar}} L}{n\pi} \int_{-n\pi/2}^{n\pi/2} \cos^2 \theta\, d\theta = \frac{\psi^2_{\text{impar}} L}{n\pi} \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\text{sen}2\theta\right)\Bigg|_{-n\pi/2}^{n\pi/2} = 1$$

(La integral de $\cos^2 \theta\, d\theta$ puede consultarse en el Ap. I.) La sustitución de los límites y la solución para ψ^2_{impar} nos lleva finalmente a

$$\psi^2_{\text{impar}} = \frac{2}{L}. \qquad (47\text{-}11)$$

Nótese que la constante de normalización (con n impar) no depende del número cuántico n, ni de la masa, ni tampoco de la energía E de las partículas atrapadas. Si repetimos el procedimiento anterior en el caso de números cuánticos pares, al utilizar la ecuación 47-8, en vez de la 47-7, comprobaremos que ψ^2_{par} también es igual a $2/L$. Por tanto, $\psi^2_{\text{impar}} = \psi^2_{\text{par}} = 2/L$. Nótese asimismo que todas esas cantidades presentan la dimensión de (longitud)$^{-1}$. Así pues, de las ecuaciones 47-7 y 47-8 se deduce que, por ser dx una longitud, la magnitud $P_n(x)\, dx$ es adimensional, como debe ser para que el producto represente una probabilidad.

PROBLEMA RESUELTO 47-4. Un electrón está atrapado en un pozo infinitamente profundo de ancho L. Si el electrón se encuentra en el estado base, ¿cuál es la probabilidad relativa de encontrarlo en el tercio central del pozo?

Solución La densidad de probabilidad para el estado base, que corresponde a $n = 1$, está dada en la ecuación 47-7 como

$$P_1(x) = \frac{2}{L}\cos^2 \frac{\pi x}{L}.$$

La integral de $P_1(x)$ en el pozo entero es la unidad; esto significa la certidumbre de que el electrón se halle *en alguna parte* de su interior. El tercio central del pozo se extiende de $x = -L/6$ a $x = +L/6$. Por tanto, la fracción que buscamos es

$$f = \int_{-L/6}^{L/6} P_1(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{-L/6}^{L/6} \cos^2\frac{\pi x}{L}\,dx.$$

Al evaluar esta integral como lo hicimos en el problema resuelto 47-3, llegamos finalmente a $f = 0.61$, cualquiera que sea el valor de L. Por tanto, la probabilidad de encontrar el electrón en el tercio central del pozo infinito es 61%. La probabilidad de que lo detectemos en uno de los dos tercios exteriores es 19.5% (0.195 + 0.61 + 0.195 = 1). Si el electrón obedeciera la física newtoniana (y no es así), habría las mismas probabilidades de hallarlo en las tres regiones del pozo.

47-3 UN ELECTRÓN ATRAPADO EN UN POZO FINITO

Ahora vamos a analizar el movimiento de un electrón atrapado en un pozo de profundidad no infinita, sino finita. Este pozo lo vemos en la figura 47-6*a* (consúltese también la Fig. 47-1*b*).

Aprendemos algo comparando un *pozo finito* con una *barrera finita*. En la sección 46-7 explicamos lo siguiente: un electrón de energía total E que se acerca a una barrera de potencial de ancho finito L y de altura también finita U_0 (donde $U_0 > E$) tiene una probabilidad definida de aparecer en el otro lado de ella aunque, conforme a la mecánica newtoniana, no puede hacerlo. Ello significa que un electrón atrapado en el pozo finito de la figura 47-6*a* es capaz de penetrar más allá de los límites del pozo aunque, otra vez conforme a la mecánica newtoniana, no pueda hallarse allí (porque su energía cinética $K = E - U$ sería negativa).

La analogía con las ondas mecánicas en una cuerda estirada —tan útil al analizar un pozo infinito— no nos sirve en el caso de un pozo finito. En este caso debemos encontrar $\psi(x)$ resolviendo la ecuación de Schrödinger que (Ec. 46-17) es

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x). \qquad (47\text{-}12)$$

Aquí, m es la masa del electrón; E su energía total, y $U(x)$ su energía potencial. Tratándose del pozo finito obtenemos $\psi(x)$ resolviendo la ecuación 47-12 por separado para las tres regiones que aparecen en la figura 47-6*a*. Por tanto,

Región 1. Esta región, donde $x \leq -L/2$, se halla *afuera* del pozo, a su izquierda. Aquí $U(x) = U_0$ = una constante positiva y $U(x) > E$.

Región 2. Esta región, donde $-L/2 \leq x \leq +L/2$ está *dentro* del pozo donde suponemos que $U(x) = 0$.

Región 3. Esta región, donde $x \geq +L/2$, se encuentra *fuera* del pozo, a su derecha. Aquí $U(x) = U_0$ = una constante positiva y $U(x) > E$.

La solución de la ecuación de Schrödinger, por separado para cada región, produce tres expresiones independientes para $\psi(x)$. Debemos, pues, "coserlas juntas" basándonos en los tres siguientes requisitos del "sentido común cuántico":

1. $\psi(x)$ debe ser finita en todas partes. De no ser así, la densidad de probabilidad $P(x)$ sería infinita en uno o varios puntos.

2. $\psi(x)$ debe ser continua en $x = \pm L/2$. De no ser así, la densidad de probabilidad quedaría indeterminada en esos puntos.

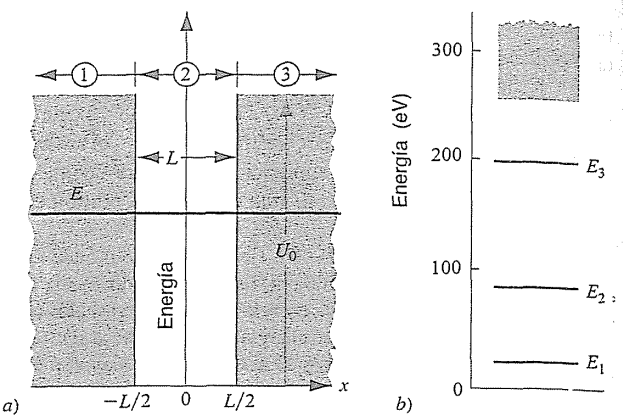


FIGURA 47-6. *a*) Pozo de potencial finito con ancho L y con profundidad U_0. *b*) Tres niveles de energía que pueden existir en él cuando $L = 100$ pm y $U_0 = 250$ eV. El área sombreada sobre $E = 205$ eV representa el continuo suave de las energías que pueden poseer los electrones no atrapados en el pozo.

3. La primera derivada, $d\psi/dx$, también debe ser continua en $x = \pm L/2$. De no ser así, la cantidad $d^2\psi/dx^2$ de la ecuación 47-12 quedaría indeterminada en esos puntos.

En resumen, la función de onda resultante "cosida" para el pozo finito no tiene que ser infinita en todas partes y tampoco tener "saltos" ni "dobleces".

He aquí las soluciones en las tres regiones: es preciso verificarlas mediante una sustitución directa en la ecuación 47-12.

Región 1. En ella encontramos

$$\psi_1(x) = Ae^{+k'x}, \qquad (47\text{-}13)$$

donde k', un valor positivo, está dado por

$$k' = \frac{2\pi\sqrt{2m(U_0 - E)}}{h} \qquad (47\text{-}14)$$

y A es una constante arbitraria. La función $\psi_1(x) = e^{-k'x}$ es además una solución formal en la región 1, pero la rechazamos porque $\psi(x)$ se vuelve infinitamente grande a medida que x se aproxima a valores negativos grandes; esto constituye una violación del requisito 1.

Región 2. En ella encontramos

$$\psi_2(x) = B\,\mathrm{sen}\,kx + C\cos kx, \qquad (47\text{-}15)$$

donde B y C son constantes arbitrarias y donde k, una cantidad positiva, está dada por

$$k = \frac{2\pi\sqrt{2mE}}{h}. \qquad (47\text{-}16)$$

Región 3. En ella encontramos

$$\psi_3(x) = De^{-k'x}, \qquad (47\text{-}17)$$

donde D es una constante arbitraria y k' está dada por la ecuación 47-14. La función $\psi_3(x) = e^{+k'x}$ también es una solución formal, pero la rechazamos porque se vuelve infinitamente grande conforme x va acercándose a valores positivos grandes.

Quedan ahora por ajustar las constantes arbitrarias A, B C y D que aparecen en las ecuaciones 47-13, 47-15 y 47-17,

pues exigimos que no haya "saltos" ni "dobleces" en las paredes del pozo. Rebasa el ámbito de nuestro libro, pero este programa puede llevarse a cabo *sólo con algunos valores de la energía total E.* Es precisamente aquí donde aprendemos que la energía del electrón está cuantizada, pues dicho electrón está localizado (está confinado al pozo).

La figura 47-6*b* muestra los tres niveles de energía que concuerdan con el pozo de la figura 47-6*a*, a los que arbitrariamente les hemos asignado las propiedades $L = 100$ pm y $U_0 = 250$ eV. Arriba del pozo, es decir, cuando $E > U_0$, el sombreado indica que la energía ya no está cuantizada. A esta región la llamamos *el continuo.* En ella la energía del electrón puede tener cualquier valor.

Densidades de probabilidad de un electrón en un pozo finito

La figura 47-7 muestra las densidades de probabilidad de tres estados cuánticos de un electrón atrapado en un pozo finito de ancho $L = 100$ ppm y de profundidad $U_0 = 250$ eV. Las funciones de onda han sido *normalizadas* (Ec. 47-9); esto significa que la superficie total bajo la curva, incluidas todas las regiones en cuestión, es la unidad. El electrón debe estar *en algún lugar*: adentro o afuera del pozo.

En seguida nos concentraremos en tres propiedades de los estados cuánticos de un electrón atrapado en un pozo finito.

Primera propiedad. Sucede que los tres estados de la figura 47-6*b* son los únicos que pueden existir en este pozo en particular. Es posible demostrar que un cuarto estado cuántico, correspondiente a $n = 4$, puede existir en el pozo si, conservando su ancho en $L = 100$ ppm, aumentamos la profundidad de su valor presente de $U_0 = 250$ eV a un valor un poco por arriba de 340 eV. Cabe suponer que un pozo profundo contenga más estados cuánticos, pues, cuanto más profundo sea más se asemejará a un pozo infinito; éste puede acomodar *todos* los estados sin importar su número cuántico.

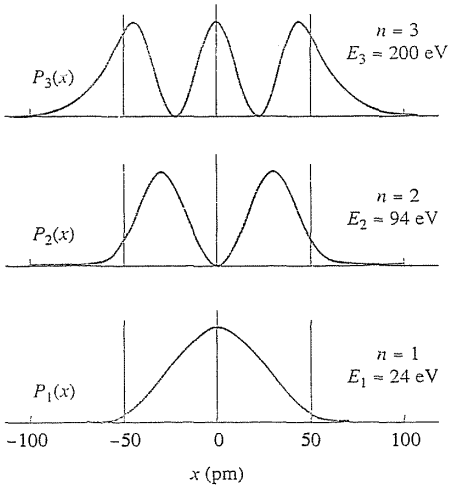


FIGURA 47-7. Densidades de probabilidad $P_n(x)$, energías y números cuánticos de un electrón atrapado en un pozo finito como el de la figura 47-6*a*. Su profundidad U_0 es 250 eV y su ancho L mide 100 pm. En este pozo no pueden existir otros estados cuánticos de electrones ligados.

También es posible introducir el estado cuántico $n = 4$ en el pozo si, manteniendo en $U_0 = 250$ eV, su *profundidad*, aumentamos su ancho del valor presente de $L = 100$ pm a un valor un poco por arriba de 115 pm. Cabe suponer que, al hacer más ancho el pozo estará en condiciones de alojar más estados cuánticos pues, cuanto más ancho sea, las partículas atrapadas se parecerán a un partícula libre (capaz de poseer cualquier energía).

Segunda propiedad: como se muestra en la figura 47-7, la probabilidad de hallar un electrón fuera del pozo crece al aumentar el número cuántico. En la tabla 47-1 se ve que con $n = 1$ (el estado base) la probabilidad es 2%. Con $n = 2$ y $n = 3$, es del 10 y 30%, respectivamente.

Esta variación la entendemos si comprendemos lo siguiente: cuánto más próxima esté de U_0, la energía E del electrón, más se acerca a ser una partícula libre; ésta no tiene una localización y, por lo mismo, tampoco está cuantizada. Efectivamente, en términos generales, quizá pueda imaginarse que un electrón cerca de la parte superior del pozo casi es una partícula libre, de modo que "se esparce". Sin embargo, el electrón en el estado con $n = 1$ se aproxima al fondo del piso y "piensa" estar atrapado en un pozo de profundidad casi infinita; por eso percibe muros rígidos.

Tercera propiedad. En la tabla 47-1 vemos que las energías de un electrón atrapado en un pozo infinito son mucho menores que las del atrapado en un pozo infinito del mismo ancho. Por ejemplo, en el estado base, tenemos $E_1 = 37.6$ eV en el caso del pozo infinito, y $E_1 = 24$ eV en el caso del pozo finito.

Esto lo entendemos al examinar las curvas de densidad de probabilidad relativas a los dos estados base, o sea $n = 1$. En el pozo infinito (Fig. 47-4*a*, $n = 1$), la media onda de De Broglie concuerda exactamente entre las paredes rígidas del pozo. Con respecto al pozo finito, sin embargo (Fig. 47-7, $n = 1$), la media onda es más grande que el ancho del pozo; existe "algún sobrante". Si la longitud de onda de la onda de materia en estado base es mayor que el pozo finito, de la relación de De Broglie (Ec. 46-1, $\lambda = h/p$) se deduce que debe

TABLA 47-1 Niveles de energía en un pozo finito y en un pozo infinito

Número cuántico n	*Pozo infinito*[1] *Energía* (eV)	*Pozo finito*[2] *Energía* (eV)	*Pozo finito*[2] *Probabilidad de estar fuera del pozo*
5	940	—	—
4	602	—	—
3	338	200	30%
2	150	94	10%
1	37.6	24	2%

[1] Véanse la figura 47-3 y el problema resuelto 47-1.

[2] Véase la figura 47-6.

tener un momento menor, en consecuencia, energía menor, exactamente como señalamos.

Un corral cuántico

Cuando funciona un microscopio de efecto túnel de barrido (Sec. 46-7), su punta ejerce una fuerza pequeña sobre los átomos aislados que pueden encontrarse en una superficie suave. Al manipular cuidadosamente la posición de la punta, podemos "arrastrarlos" a través de la superficie y depositarlos en otro sitio. Por medio de esta técnica los científicos del Almaden Research Center de la IBM movieron átomos individuales de hierro por una superficie de cobre minuciosamente preparada, creando átomos en un círculo al que dieron el nombre de *corral cuántico* (Fig. 47-8). Cada átomo está anidado en un hueco de la superficie de cobre, equidistante de los tres átomos más cercanos del mismo material. El corral se dispuso a una temperatura baja (unos 4 K) para atenuar, en lo posible, la tendencia de los átomos de hierro a desplazarse aleatoriamente alrededor de la superficie a causa de sus energías térmicas.

Las ondulaciones dentro del corral provienen de las ondas de materia asociadas a los electrones capaces de moverse arriba de la superficie de cobre, pero atrapados en su mayor parte en el pozo de potencial formado por el corral. Las funciones de onda bidimensional y las densidades de probabilidad pueden calcularse con métodos semejantes a los usados en esta sección en el pozo finito unidimensional. El patrón de las ondulaciones coincide muy bien con las predicciones de la mecánica cuántica referentes a las densidades de probabilidad del electrón.

47-4 UN ELECTRÓN ATRAPADO EN UN ÁTOMO

Ya estamos listos para estudiar un electrón atrapado en un átomo. Para simplificar la exposición escogeremos el átomo más simple —el de hidrógeno— que contiene un electrón solamente. Para definir el problema es preciso identificar la función de energía potencial de este electrón, como lo hicimos en la figura 47-6*a* para un pozo finito. En ese caso su movimiento era unidimensional. Por el contrario, el electrón en el átomo de hidrógeno puede moverse en tres dimensiones. Por fortuna su energía potencial contiene una sola variable, a saber: la distancia radial r entre el núcleo y el electrón.

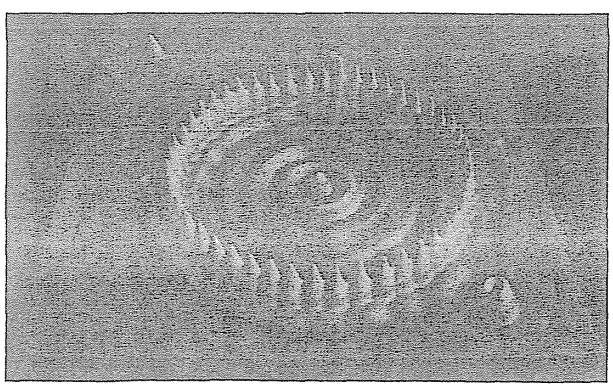


FIGURA 47-8. Corral cuántico. Visite una galería de corrales y otros despliegues de STM en www.almaden.ibm.com/vis/index.html.

La función de energía potencial se obtiene a partir de la ley de Coulomb y es

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}, \tag{47-18}$$

donde $+e$ es la carga del protón central, y $-e$ la del electrón. La figura 47-9 muestra una gráfica de $U(r)$, que también es un pozo de potencial. En ella hemos expresado la separación como una razón adimensional r/a_0. La constante a_0, llamada *radio de Bohr*, es una unidad de longitud útil para distancias en la escala atómica. Como veremos luego en esta sección, su valor numérico es 52.9 pm, que es aproximadamente el radio de un átomo ordinario.

En la siguiente sección comenzaremos a estudiar las soluciones a la ecuación de Schrödinger concernientes al átomo de hidrógeno. Pero antes vamos a ofrecer una breve reseña histórica al respecto.

Reseña histórica

En el primer cuarto del siglo XX uno de los grandes problemas por resolver de la física era: "¿Cuál es la estructura del átomo?" Se contaba con copiosa información obtenida experimentalmente que reclamaba interpretación. En particular, se sabía que el átomo emitía (y absorbía) luz sólo en ciertas longitudes de onda perfectamente definidas. La figura 47-10*a*,

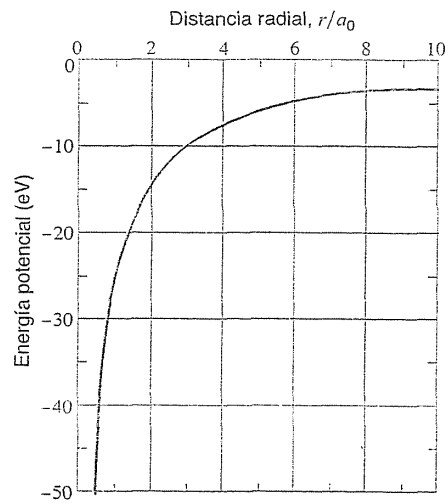


FIGURA 47-9. Función de energía potencial de un electrón de un átomo de hidrógeno (Ec. 47-18). La energía potencial $U(r)$ se grafica en función de la razón adimensional r/a_0, donde a_0 es una longitud estándar muy útil, denominada *radio de Bohr*.

por ejemplo, muestra una parte —denominada serie de Balmer— del *espectro de líneas* de los átomos de hidrógeno, que podría observarse con una rejilla de difracción para presentar las longitudes de onda de la luz emitida por el gas hidrógeno. En la figura 47-10*b* se indica esquemáticamente que la serie no es más que una parte de un espectro más extenso, compuesto por series discretas de líneas espectrales; a cada una se le asignó el nombre de uno de los primeros investigadores. Nótese que cada una ocupa una sección finita del espectro electromagnético. En la serie de Balmer de la figura 47-10*a*, la línea con la máxima longitud de onda está marcada H_α y tiene el valor $\lambda = 656.28$ nm. El valor $\lambda = 364.70$ nm corresponde al límite de las series de longitud de onda corta, marcada con una flecha en la figura.

Los físicos que trabajan con frecuencias (y no con longitudes de onda) de las líneas espectrales intentaron relacionar las frecuencias a aquella con que el electrón gira en una órbita alrededor de su núcleo. Por desgracia, este modelo del átomo inspirado en el "sistema solar" no consigue explicar las propiedades espectrales del hidrógeno sin hacer otras suposiciones. Veamos por qué.

Una carga que acelera irradia energía hacia el espacio circundante. Un conocido ejemplo es la energía que emite una antena transmisora de radio, asociada a las cargas que fluctúan con movimiento acelerado dentro del cuerpo de dicha antena. Como todos los cuerpos que se mueven en arcos circulares, un electrón que se acelera supuestamente describe una órbita circular alrededor del núcleo atómico. A causa de la aceleración, el electrón radiará su energía conforme se mueve. Y a medida que lo hace se dirigirá en espiral al núcleo. Un átomo basado en los electrones clásicos que giran no emitirá líneas espectrales bien definidas y su órbita no será estable.

Modelo del átomo de hidrógeno de Bohr

En 1913, más de una década antes que apareciera la mecánica cuántica, el físico danés Niels Bohr (1885-1962) propuso un modelo del átomo de hidrógeno basado en un una ingeniosa combinación híbrida de la física clásica y de la reciente física cuántica. Aunque su modelo fue reemplazado más tarde por un modelo cuántico plenamente desarrollado, vino a dar un decidido impulso a los avances posteriores.

Bohr sabía que, según la física clásica, las órbitas del electrón no son estables; pero se planteó una pregunta atrevida: ¿y si la física clásica está equivocada y las órbitas *son* en realidad estables? En el lenguaje moderno hizo este postulado revolucionario:

> *Los electrones de un átomo pueden existir en estados estables de energía fija sin que irradien.*

Así, con un golpe maestro, Bohr propuso el concepto de un *estado cuántico*, concepto que hemos empleado ampliamente al examinar los electrones atrapados en pozos.

Después Bohr estableció un segundo postulado, igualmente revolucionario:

> *Un átomo emite (o absorbe) radiación a una frecuencia fija, cuando un electrón suyo pasa de un estado cuántico estable a otro.*

La frecuencia f de la radiación emitida (o absorbida) está dada por la *condición de frecuencia de Bohr*, que es

$$E_{n_i} - E_{n_f} = hf, \tag{47-19}$$

donde h es la constante de Planck; E_{n_i} la energía mayor y E_{n_f} la energía menor de los dos estados cuánticos (n_i y n_f) que intervienen en la transición.

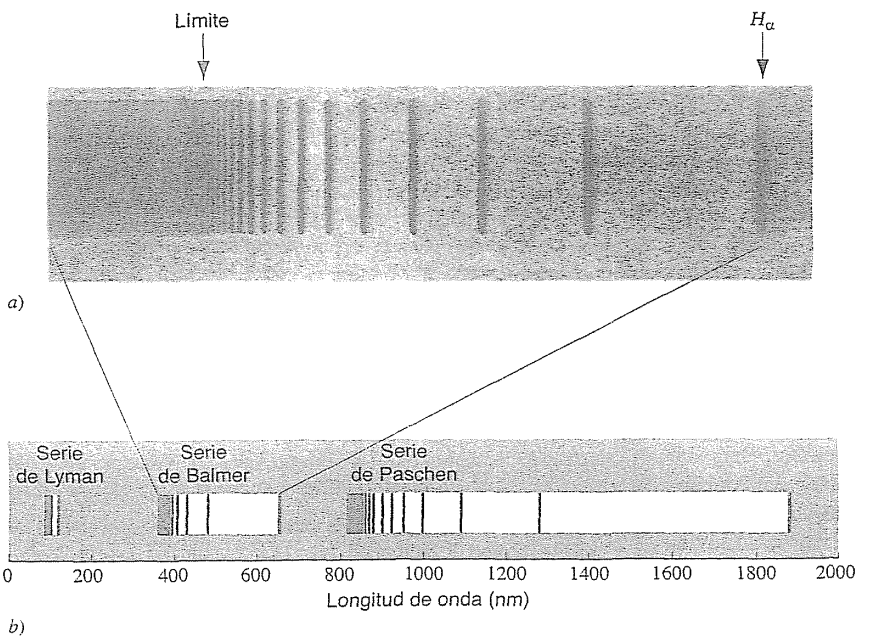


FIGURA 47-10. *a*) Serie de líneas espectrales, denominada *serie de Balmer*, emitida por el átomo de hidrógeno en las regiones visibles y ultravioleta cercana del espectro electromagnético. *b*) Espectro más completo del átomo de hidrógeno que incluye la serie de Lyman y la de Paschen. Otras dos series, la de Brackett y de Pfund, se encuentran en las longitudes lejanas infrarrojas de la longitud de onda más allá de la escala de la figura.

Con estas suposiciones, Bohr redujo el problema del átomo de hidrógeno a calcular la energía de sus estados cuánticos. Una vez obtenida, las frecuencias —y, por tanto, también las longitudes de onda— de las líneas espectrales pueden calcularse por medio de la ecuación 47-19.

Con el fin de efectuar predicciones cuantitativas, Bohr formuló otro concepto igualmente útil: el *principio de correspondencia,* que ya explicamos en la sección 47-2. En esencia se establece que la concepción cuántica debe fusionarse suavemente con la concepción clásica conforme van creciendo los números cuánticos. Con la utilización ingeniosa del principio, Bohr logró diseñar un modelo donde los estados cuánticos se representaban con un conjunto discreto de órbitas circulares cuyos radios estaban dados por

$$r_n = \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}\right) n^2 = a_0 n^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad (47\text{-}20)$$

donde n es el número cuántico; m la masa del electrón, y ϵ_0 la constante eléctrica. En otras palabras, se permite que un electrón esté en una órbita de radio a_0, $4a_0$, $9a_0$, ..., pero nunca de radio $2a_0$ o $6.1a_0$.

La ecuación 47-20 introduce a_0, el radio de Bohr que hemos mencionados al referirnos a la figura 47-9. Vemos que es el radio de la órbita permitida más pequeña. Su valor numérico puede calcularse a partir de la ecuación 47-20. Cuando se usan cuatro cifras significativas de la constante en cuestión (Ap. B), es el siguiente:

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = \frac{(8.854 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{(\pi)(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}$$

$$= 5.29 \times 10^{-11}\ \text{m} = 52.9\ \text{pm}.$$

Bohr calculó además que las energías de los estados cuánticos orbitales están dadas por

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (47\text{-}21)$$

Son energías negativas porque la configuración de energía potencial cero ha sido definida como aquella en que el electrón se halla muy lejos del núcleo y en reposo. Efectivamente, la ecuación 47-21 verifica que $E_n \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Bohr y otros físicos aprovecharon muy bien este modelo del átomo, usándolo para proporcionar otras informaciones sobre el átomo de hidrógeno —por ejemplo, los momentos angulares de los estados orbitales permitidos— y lo extendieron a los átomos que vienen después del hidrógeno en la tabla periódica de los elementos.

Cuando Bohr creó su modelo del átomo de hidrógeno, todavía no existía la ecuación de Schrödinger y transcurrirían años antes que se formulara el principio de incertidumbre. Disponía tan sólo del concepto de cuantización de Planck y del concepto de fotón de Einstein. En tales circunstancias acaso no debe sorprendernos que algunas de sus conclusiones no se sostuvieran. En particular, ya no pensamos que los electrones del átomo describen órbitas bien definidas. La mera idea de "órbita" viola el principio de incertidumbre de Heisenberg, pues trae a la mente una partícula de momento fijo que en cualquier instante ocupa una posición conocida; estas dos magnitudes (posición y momento) no pueden conocerse simultáneamente con precisión ilimitada. Por desgracia, la imagen popular del átomo continúa propagando este modelo orbital incorrecto.

Con todo, muchas de las predicciones de Bohr sí se sostuvieron. Su ecuación de la energía de los estados del átomo de hidrógeno (Ec. 47-21) es la misma que se predice con una solución de la ecuación de Schrödinger. Más aún, el concepto mismo de la existencia de los estados cuánticos de energía fija y la validez de la condición de frecuencia sobreviven como parte del sólido fundamento de la física cuántica moderna. La teoría de Bohr ofreció un puente de gran utilidad que conecta las ideas clásicas con las cuánticas y que vino a estimular el pleno desarrollo de la mecánica cuántica tal como la conocemos hoy día.

La figura 47-11 muestra los niveles de energía del átomo de hidrógeno, calculados mediante la ecuación 47-21. Las líneas verticales, trazadas a partir de la ecuación 47-19, indican la energía de los fotones emitidos correspondientes a las líneas espectrales que aparecen en la figura 47-10. Obsérvese que cada serie de líneas corresponde a distintas opciones (en la Ec. 47-19) del estado inicial n_i con el mismo estado final n_f. Por ejemplo, las líneas espectrales donde termina el electrón en el estado cuántico con $n_f = 2$ forman la serie de Balmer. La flecha vertical en ella, marcada H_α en las figuras 47-10*a* y 47-11, corresponde a la línea espectral de esa serie con la mínima frecuencia o, en forma equivalente, con la más grande longitud de onda. Los límites de la serie en la de Balmer corresponden a la transición de un estado con $n_i = \infty$ a $n_f = 2$.

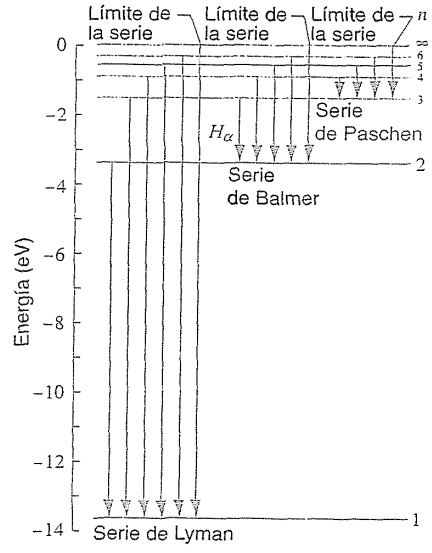


FIGURA 47-11. Las líneas horizontales muestran los niveles de energía del átomo de hidrógeno. Las flechas verticales, agrupadas en series, indican las transiciones que ocurren en los niveles. Las que apuntan *hacia abajo* corresponden a la *emisión* de energía por el átomo.

PROBLEMA RESUELTO 47-5. Calcule la longitud de onda de la línea espectral marcada H_α en la figura 47-10*a*.

Solución Esta línea está en la serie de Balmer y, de acuerdo con la ecuación 47-11, vemos que aparece cuando el electrón del átomo de hidrógeno pasa del estado cuántico con $n_i = 3$ al estado con $n_f = 2$. Al combinar las ecuaciones 47-19 y 47-21 calculamos la frecuencia de la línea de Balmer, y una vez determinada, es fácil encontrar su longitud de onda.

Queremos calcular la longitud de onda hasta cuatro cifras significativas; por eso, debemos emplear los valores de las constantes fundamentales, como m y h, que ofrezcan ese grado de precisión (Ap. B). Con base en la figura 47-19 tenemos

$$hf = E_3 - E_2$$

o bien

$$f = \frac{E_3 - E_2}{h}.$$

Y entonces la ecuación 47-21 nos da

$$f = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2}\right)$$

$$= -\frac{(9.1094 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.6022 \times 10^{-19}\ \text{C})^4}{(8)(8.8542 \times 10^{-12}\ \text{F/m})^2(6.6261 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^3}(-0.13889)$$

$$= 4.5695 \times 10^{14}\ \text{Hz}.$$

La longitud de onda correspondiente de esta línea está dada por

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2.9979 \times 10^8\ \text{m/s}}{4.5695 \times 10^{14}\ \text{Hz}}$$

$$= 6.561 \times 10^{-7}\ \text{m} = 656.1\ \text{nm}.$$

El valor anterior, calculado a partir de la teoría de Bohr, coincide con el experimental.

PROBLEMA RESUELTO 47-5. Un átomo neutro de helio tiene dos electrones. Supóngase que se extrae uno de ellos dejando el ion helio He^+. Con su único electrón, éste se asemeja al átomo de hidrógeno, salvo que su carga nuclear es $+2e$ en vez de $+e$. *a*) Determine el radio de la órbita del electrón en el estado base del ion helio basándose en el modelo de Bohr. *b*) Calcule la longitud de onda del fotón emitido cuando el electrón realiza la transición de la órbita $n = 3$ a la órbita $n = 2$.

Solución *a*) La ecuación 47-20 aplicada a los radios orbitales es válida sólo en el caso de una carga nuclear de $+e$. Obtengamos primero una expresión más general cuando la carga es $+Ze$. La ecuación 47-20 incluye el factor e^2. Éste se origina en la expresión relativa a la fuerza de Coulomb entre el electrón y el núcleo en el hidrógeno: $F = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$. En el caso de un átomo con un solo electrón y una carga nuclear de Ze, la fuerza será $F = Ze^2/4\pi\epsilon_0 r^2$, porque el producto de las dos cargas es ahora $(e)(Ze)$. Dicho de otra manera, la fuerza debe modificarse reemplazando el factor e^2 por el factor Ze^2. Una vez efectuado el mismo cambio en la ecuación 47-20, obtenemos una expresión general de los radios de la órbita de Bohr en cualquier ion de un solo electrón con la carga nuclear de Ze:

$$r_n = \left[\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m(Ze^2)}\right] n^2 = \frac{a_0 n^2}{Z} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (47\text{-}22)$$

La comparación con la ecuación 47-20 indica que las órbitas son más pequeñas en un factor $1/Z$ que las correspondientes del hidrógeno.

En el estado base ($n = 1$) del ion helio ($Z = 2$), tenemos

$$r_2 = \frac{(52.9\ \text{pm})(1^2)}{2} = 26.5\ \text{pm}.$$

b) Conforme al modelo de Bohr, los niveles de energía en el hidrógeno están dados en la ecuación 47-21. Si efectuamos la misma sustitución de e^2 por Ze^2, habrá que reemplazar el factor $e^4 = (e^2)^2$ en la ecuación 47-21 por $(Ze^2)^2 = Z^2e^4$. Una vez hecha la sustitución en la ecuación 47-21, obtenemos una expresión general de los niveles de energía en cualquier ion de un solo electrón, con la carga nuclear Ze:

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (47\text{-}23)$$

El cálculo de la frecuencia en la transición de $n = 3$ a $n = 2$ en el helio se efectúa usando exactamente el mismo método que con el hidrógeno en el problema resuelto 47-5. La única diferencia será el factor adicional de $Z^2 = 4$ que aparecerá en las expresiones del ion de helio. Es decir, $f_{He} = 4f_H = 4\,(4.5695 \times 10^{14}\ \text{Hz}) = 1.8278 \times 10^{15}$ Hz. La correspondiente longitud de onda es

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2.9979 \times 10^8\ \text{m/s}}{1.8278 \times 10^{15}\ \text{Hz}} = 1.640 \times 10^{-7}\ \text{m} = 164.0\ \text{nm}.$$

En comparación con la misma transición en el hidrógeno, la frecuencia es mayor por el factor Z^2, y la longitud de onda menor por el factor $1/Z^2$.

47-5 EL ESTADO BASE DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

Vamos ahora a explicar la solución de la ecuación de Schrödinger correspondiente a la energía potencial, dada en la ecuación 47-18, que representa la interacción de Coulomb entre el electrón y el núcleo. No presentaremos los detalles matemáticos de la solución de esta ecuación tridimensional, pues rebasan el ámbito de libro. Más bien nos limitaremos a ofrecer las soluciones de las funciones de onda y a exponer su significado.

Como la energía potencial del átomo de hidrógeno depende exclusivamente de r (la distancia entre el electrón y el protón central), el problema se expresa muy fácilmente en un sistema coordenado esférico polar donde el protón se halla fijo en el origen. Entonces sus funciones de onda se escriben atendiendo a las coordenadas r, θ, ϕ en lugar de x, y, z. En una dimensión la densidad de probabilidad $\psi^2(x)$ indica la probabilidad *por unidad de longitud* de que encontremos el electrón en un elemento pequeño de longitud en la coordenada x. En tres dimensiones, la densidad de probabilidad $\psi^2(r, \theta, \phi)$ indica la probabilidad por *unidad de volumen* de que encontremos el electrón en un elemento pequeño de volumen en las coordenadas r, θ, ϕ. En otras palabras $\psi^2(r, \theta, \phi)dV$ ofrece la probabilidad de localizar el electrón en el elemento de volumen dV.

Resulta que la función de onda del estado base depende sólo de la variable individual r. La expresión es

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}, \qquad (47\text{-}24)$$

donde a_0 es el radio de Bohr. Esta función es simétrica esféricamente; no intervienen las variables θ y ϕ.

La densidad de probabilidad del estado base es

$$\psi^2(r) = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}. \qquad (47\text{-}25)$$

La figura 47-12*a* es una representación de la ecuación 47-25 con "gráfica de puntos", donde la densidad de los puntos indica la naturaleza probabilística de la ubicación del electrón. Para la mecánica cuántica es esencial que la pregunta "¿Cómo está el electrón en este instante?" carezca de significado y debe ser reemplazada por "¿Cuál es la probabilidad de que, en este instante y lugar, podamos detectar la presencia de un electrón?". Adviértase que, en la imagen cuántica, no se mencionan las órbitas de los electrones.

Una magnitud más útil para representar la posición del electrón es la *densidad de probabilidad radial* $P(r)$. Se define en forma tal que $P(r)\,dr$ indique la probabilidad de que, prescindiendo de la dirección, el electrón se halle entre dos esferas cuyos radios sean r y $r + dr$. El volumen dV entre estas esferas es $(4\pi r^2)(dr)$; por tanto, podemos escribir

$$P(r)\,dr = \psi^2(r)\,dV = \psi^2(r)(4\pi r^2)(dr).$$

La sustitución hecha a partir de la ecuación 47-25 produce entonces

$$P(r) = \psi^2(r)(4\pi r^2) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}. \qquad (47\text{-}26)$$

La figura 47-12*b* muestra una gráfica de $P(r)$. En el problema resuelto 47-7 demostramos que el valor máximo de $P(r)$ ocurre en $r = a_0$. La ecuación 47-26 es el fundamento de la interpretación moderna del radio de Bohr a_0. Es el radio en que hay mayor probabilidad de localizar el electrón cuando el átomo de hidrógeno se halla en el estado base.

La figura 47-12*b* indica que la pregunta "¿De qué tamaño es el átomo de hidrógeno?" no tiene una respuesta firme. No obstante, el llamado radio del 90%, mostrado allí, nos da una medida aproximada del tamaño. Es el radio de una esfera tal que habrá 90% de probabilidades de que encontremos el electrón del átomo de hidrógeno dentro de la esfera y, por supuesto, un 10% de probabilidades de encontrarlo en el exterior. El radio de 90% resulta ser radio de 2.7 de Bohr, o sea 1.4×10^{-10} m = 140 pm.

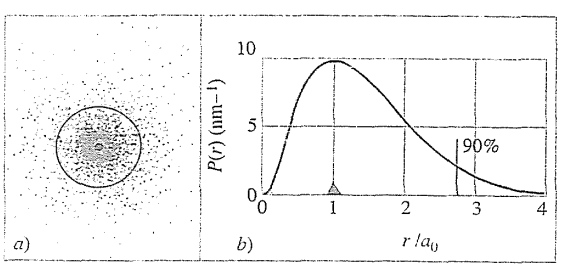


FIGURA 47-12. *a*) Una representación, mediante una "gráfica de puntos", de la densidad de probabilidad del electrón en el estado base de un átomo de hidrógeno (Ec. 47-25). Se dibujó un círculo en el radio $r = a_0$. *b*) Densidad de probabilidad radial, dada por la ecuación 47-26. El triángulo pequeño muestra que la probabilidad máxima ocurre con $r = a_0$.

PROBLEMA RESUELTO 47-7. Verifique que el máximo de la curva de densidad de probabilidad radial en la figura 47-12*b* está en $r = a_0$, donde a_0 es el radio de Bohr.

Solución Al diferenciar la ecuación 47-26 respecto a r se obtiene

$$\frac{dP}{dr} = \frac{4}{a_0^3}(2r)\,e^{-2r/a_0} + \frac{4}{a_0^3} r^2 \left(-\frac{2}{a_0}\right) e^{-2r/a_0}$$

$$= \frac{8r}{a_0^3} e^{-2r/a_0}\left(1 - \frac{r}{a_0}\right).$$

En el máximo de la curva debemos tener $dP/dr = 0$ y, por simple observación, vemos que así es cuando $r = a_0$. Adviértase que también tenemos $dP/dr = 0$ con $r = 0$ y $r \to \infty$. Pero como se aprecia en la figura 47-12*b*, éstos no corresponden a los máximos de la curva. Es posible verificarlo con sólo obtener la segunda derivada d^2P/dr^2, que debe ser negativa para un máximo.

47-6 MOMENTO ANGULAR DE LOS ELECTRONES EN LOS ÁTOMOS

Ahora que, en el caso del estado base, hemos explicado la función de onda de un electrón atrapado en un átomo de hidrógeno, nos gustaría hacer lo mismo con las funciones de onda y con las densidades de probabilidad en el caso de los estados excitados. Sin embargo, cuando resolvemos la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno —un problema tridimensional—, aparece una nueva característica que no existía cuando estudiamos las soluciones a la ecuación de Schrödinger en una dimensión. Nos referimos al *momento angular* del electrón.

Por ejemplo, las soluciones del átomo de hidrógeno en el primer estado excitado ($n = 2$) muestran diversos tipos de funciones de onda y las correspondientes densidades de probabilidad, todas las cuales poseen la misma energía (E_2 en la Ec. 47-21). Una de estas funciones (llamémosla estado 2*A*) resulta ser simétrica esféricamente, igual que el estado base (aunque su forma funcional difiere de la de la función de onda de ese estado). En el estado 2*A*, la función de onda ψ y la densidad de probabilidad ψ^2 dependen sólo de r. Existe otra función muy distinta con energía E^2; en este estado (que por ahora llamaremos 2*B*), la función depende no sólo de r, sino también de las coordenadas angulares θ y ϕ y la densidad de probabilidad ψ^2 depende de r y de θ. (Esta última no depende de ϕ y, por lo mismo, es simétrica cilíndricamente.*) De hecho, el estado 2*B* tie-

* En realidad, la función de onda ψ es compleja, y la densidad de probabilidad debería escribirse como $|\psi|^2$. Sin embargo, las partes r y θ de la función de onda de los átomos de hidrógeno son reales, y la parte ϕ desaparece cuando calculamos $|\psi|^2$. Por eso, para mayor sencillez, escribiremos las densidades de probabilidad del átomo de hidrógeno como ψ^2 e ignoraremos la dependencia ϕ de la función de onda.

ne dos subestados que representan diferentes densidades de probabilidad; en uno de ellos el electrón tienen la máxima probabilidad cerca del plano xy (esto es, con el ángulo polar θ cerca de 90°) y en el otro es más probable que esté cerca del eje positivo o negativo z (θ cerca de 0° o 180°). En la siguiente sección examinaremos más a fondo estas funciones de onda. En ésta vamos a explicar cómo el momento angular sirve para designar estos estados y entender sus propiedades.

El momento angular orbital

En el capítulo 10 introducimos el concepto de momento angular y expusimos su importancia en la solución de problemas rotacionales. En la física clásica, el momento angular de una partícula respecto a un origen escogido O se representa como $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, donde $\vec{\mathbf{r}}$ es la posición de la partícula desde el origen, y $\vec{\mathbf{p}}$ su momento lineal. Como vimos en páginas anteriores, las variables clásicas r y p no pueden significar lo mismo en la mecánica cuántica; así que no debe sorprendernos que el momento angular adquiera un nuevo significado en la mecánica cuántica. Aquí nos referimos al momento angular que posee un electrón por su movimiento alrededor del núcleo y lo llamamos *momento angular orbital*. Más adelante veremos que el electrón tiene otro tipo más de momento angular que carece de un equivalente en la física clásica.

Cuando resolvemos la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones con el átomo de hidrógeno, tres números cuánticos emergen de la solución matemática. Uno es el *número cuántico principal* n, idéntico al número cuántico n asociado a la designación de los estados en el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr. Sus valores permitidos son $n = 1, 2, 3, \ldots$, igual que en dicho modelo. Los niveles de energía calculados al resolver la ecuación de Schrödinger son idénticos a los de él (Ec. 47-20). No obstante, como ya vimos en el caso del estado base, la fórmula de los radios de Bohr (Ec. 47-20) carece de significado en la solución de la mecánica cuántica, porque la densidad de probabilidad radial tiene valores no cero que abarcan el intervalo entero entre $r = 0$ y $r = \infty$. En la mecánica cuántica, más bien deberíamos hablar del radio promedio o más probable; esta cantidad sí aumenta con los valores crecientes de n, pero no en la forma simple que predice el modelo de Bohr.

El segundo número cuántico que emerge de la solución de la ecuación de Schrödinger es el *número cuántico l del momento angular*. La solución matemática muestra que se permite que l adopte valores enteros en la siguiente forma:

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{47-27}$$

Es decir, en cada n los valores de l fluctúan entre 0 y $l_{\text{máx}} = n - 1$. Por ejemplo, en el estado base ($n = 1$), $l_{\text{máx}} = 0$. Por tanto, el único valor permitido de l es 0. En el primer estado excitado ($n = 2$), $l_{\text{máx}} = 1$; en consecuencia los valores permitidos son $l = 0$ y $l = 1$. En la siguiente sección veremos que estos dos valores de l corresponden exactamente a los dos estados que llamamos $2A$ y $2B$ en la explicación dada antes en esta sección.

A menudo conviene nombrar los estados asignándoles el número cuántico principal n y el número cuántico del momento angular l. El valor de l se da atendiendo al siguiente código*:

l	0	1	2	3	4	5
Código	s	p	d	f	g	h

Con este sistema, el estado base será $1s$ (con $n = 1, l = 0$). El primer estado excitado tendrá dos nombres: $2s$ ($n = 2, l = 0$) y $2p$ ($n = 2, l = 1$). Los dos últimos estados son los que llamamos, respectivamente, $2A$ y $2B$.

El cálculo de la mecánica cuántica también nos da un valor de la magnitud o la longitud L del vector del momento angular:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi}. \tag{47-28}$$

La dirección de $\vec{\mathbf{L}}$

El tercer número cuántico que emerge de la solución de la ecuación de Schrödinger se conoce como *número cuántico magnético* m_l. Puede adquirir valores de $-l$ a $+l$ en los valores enteros, o sea

$$m_l = -l, -(l-1), \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +(l-1), +l \tag{47-29}$$

Nótese que hay $2l + 1$ valores posibles de m_l para cada valor de l. Por ejemplo, con $l = 3$ existen siete valores permitidos de m_l; hay -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$ y $+3$.

El número cuántico magnético especifica el componente z del vector del momento angular $\vec{\mathbf{L}}$:

$$L_z = m_l \frac{h}{2\pi}. \tag{47-30}$$

Si conocemos la magnitud del vector $\vec{\mathbf{L}}$ a partir de la ecuación 47-28 y su componentes z a partir de la ecuación 47-30, podemos determinar el ángulo θ entre $\vec{\mathbf{L}}$ y el eje z:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{L_z}{L} = \cos^{-1}\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}. \tag{47-31}$$

La ecuación 47-31 muestra que no se permite que existan todos los ángulos θ, sino sólo los correspondientes a los valores permitidos de m_l. Tal restricción de las direcciones del vector del momento angular $\vec{\mathbf{L}}$ recibe el nombre de *cuantización espacial*. Ésta no existe en la física clásica: el momento angular de una partícula clásica que gira puede seguir cualquier dirección en el espacio. Sólo en la mecánica cuántica se presenta

* Estas abreviaturas se remontan a los primeros días de la espectroscopia atómica antes de la física cuántica. Las letras *s, p, d, f* significan *share* (nítido), *principal* (principal), *diffuse* (difuso) y *fundamental* (fundamental), calificativos con los cuales los espectrocopistas describen los espectros atómicos. Después de *f*, los índices vienen en orden alfabético.

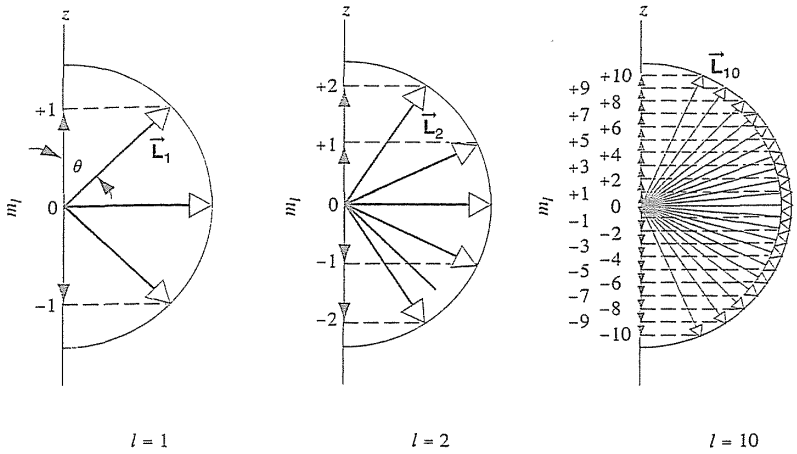


FIGURA 47-13. Proyecciones permitidas del vector del momento angular $\vec{L}$ en el eje z, cuando $l = 1$, 2 y 10. Los números sobre el eje son el valor correspondiente al número cuántico magnético m_l. Las tres figuras se dibujan a escala diferente.

la restricción. En la figura 47-13 se muestran los valores permitidos de L_z y θ con $l = 1$, 2 y 10.

Como el potencial de Coulomb en el átomo de hidrógeno es simétricamente esférico, podemos establecer un sistema coordenado en la orientación que prefiramos. Entonces la dirección del eje z es del todo arbitraria. La ecuación 47-31 se aplica a *cualquier* selección del eje z. Si queremos observamos el efecto de la cuantización espacial, hay que violar la simetría esférica del átomo colocándolo —por ejemplo— en un campo magnético cuya dirección lo defina (de ahí el nombre de número cuántico "magnético" de m_l). Cuando no se cuenta con una dirección favorita, los valores m_l no corresponderán a diferentes estados del movimiento del electrón; así que no afectaran a la energía del átomo ni tampoco a la densidad de probabilidad del electrón.

Momento angular y el principio de incertidumbre

$\vec{L}$ no puede alinearse totalmente con el eje z, el valor más pequeño de θ que ocurre cuando $m_l = l$ en la ecuación 47-31. Este hecho concuerda con el principio de incertidumbre de Heisenberg. En la ecuación 46-8 lo escribimos tal como se aplica al componente z del movimiento de una partícula libre,

$$\Delta p_z \cdot \Delta z > h/2\pi. \tag{47-32}$$

Por analogía es posible expresar la ecuación anterior en forma angular así

$$\Delta L_z \cdot \Delta \phi > h/2\pi. \tag{47-33}$$

Aquí hemos reemplazado Δp_z, la incertidumbre del componente del momento *lineal* en la dirección z, por ΔL_z, la incertidumbre del componente del momento *angular* en la dirección z. También hemos sustituido Δz, la incertidumbre de la posición *lineal* en la dirección z, por $\Delta\phi$, la incertidumbre de la posición *angular* alrededor del eje z.

La ecuación 47-30 indica que L_z se conoce con exactitud una vez especificado el número cuántico magnético m_l. Se deduce que debe ser cero ΔL_z, la incertidumbre en L_z. Entonces la ecuación 47-33 exige que $\Delta\phi \to \infty$; esto significa que carecemos de información referente a la posición angular de $\vec{L}$ a medida que precesa alrededor del eje z. Ello a su vez significa que no contamos con información alguna sobre los componentes L_x y L_y del vector del momento angular. Podemos conocer la magnitud de $\vec{L}$ y su proyección L_z en la dirección z, pero la mecánica cuántica no nos permite obtener más conocimientos respecto a la dirección de $\vec{L}$.

PROBLEMA RESUELTO 47-8. Calcule el valor mínimo de θ en la figura 47-13 cuando $l = 1$, 10^2, 10^3, 10^4 y 10^9.

Solución Convénzase usted mismo de que el valor mínimo se presenta cuando hacemos $m_l = l$ en la ecuación 47-31. Esta operación y el rearreglo nos dan

$$\theta_{\text{mín}} = \cos^{-1}\frac{l}{\sqrt{l(l+1)}} = \cos^{-1}\left[1 + \frac{1}{l}\right]^{-1/2}.$$

Por simple observación vemos que, si hacemos que $l \to \infty$ entonces $\theta \to \cos^{-1} 1 = 0$. Es justo lo que cabe esperar del principio de correspondencia, según el cual con números cuánticos suficientemente altos, la mecánica cuántica concuerda con la clásica, lo cual permite $\theta = 0$.

La sustitución de l en la ecuación anterior produce

l	$\theta_{\text{mín}}$
1	45.0°
10^2	5.7°
10^3	1.8°
10^4	0.57°
10^9	0.0018°

En un objeto macroscópico que gire —un disco compacto por ejemplo—, l será mucho más grande que 10^9, y $\theta_{\text{mín}}$ estará tan cerca de cero que la diferencia superará considerablemente la posibilidad de la medición. Por tanto, conforme el momento angular del objeto se vuelve más y más grande, la cuantización espacial de la mecánica cuántica se transforma suavemente en la distribución continua de la mecánica clásica. Una vez más vemos cómo funciona el principio de correspondencia.

Nota para el cálculo: si con la fórmula anterior se calcula $\theta_{\text{mín}}$ para $l = 10^9$, posiblemente la calculadora se sature. Aproveche el hecho de que $(1/l) << 1$ y desarrolle la fórmula aproximada para cos $\theta_{\text{mín}}$. Necesitará utilizar la expansión binomial y la de series con cos θ (consulte el Ap. I).

PROBLEMA RESUELTO 47-9. *a*) Con $n = 4$, ¿cuál es el máximo valor permitido de l? *b*) ¿Qué magnitud tiene el momento angular correspondiente? *c*) ¿Cuántos componentes en el eje z puede tener este vector del momento angular? *d*) ¿Cuál es la magnitud del mayor componente z?

Solución *a*) De acuerdo con la ecuación 47-27, el máximo valor de l es $n - 1$ y, por tanto, $l_{máx} = 3$.

b) Con base en la ecuación 47-28 tenemos

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi} = \sqrt{3(3+1)}\,\frac{6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{2\pi}$$

$$= 3.66 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}.$$

Convénzase usted mismo de que la constante de Planck tiene las mismas dimensiones que el momento angular.

c) El número de componentes que el vector del momento angular puede tener en el eje z es igual al de los valores permitidos del número cuántico magnético m_l. Según la ecuación 47-29 este número es $2l + 1$ o $2 \times 3 + 1 = 7$.

d) El componente más grande proyectado se obtiene de la ecuación 47-30, cuando el número cuántico magnético alcanza su máximo valor. De acuerdo con la ecuación 47-29, éste es simplemente l; así que tenemos

$$L_z = l\left(\frac{h}{2\pi}\right) = \frac{3h}{2\pi} = \frac{3(6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})}{2\pi} = 3.17 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}.$$

Nótese en la parte *b*) que el valor anterior es menor que la magnitud del vector del momento angular ($= 3.66 \times 10^{-34}$ J · s), como debe ser.

47-7 UN ESTADO EXCITADO DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

En cuanto a la energía, el estado por arriba del estado base corresponde a $n = 2$ y se le conoce como *primer estado excitado*. Su energía ($= -3.40$ eV) se obtiene haciendo $n = 2$ en la ecuación 47-21. Como nos recuerda la ecuación 47-27, existen dos números del momento angular que se permiten cuando $n = 2$, a saber: $l = 0$ y $l = 1$. En nuestra notación hay, respectivamente, los estados $2s$ y $2p$. Vamos a estudiarlos por separado.

El estado 2s

Para este estado la función de onda, calculada en el proceso de resolver la ecuación de Schrödinger, resulta ser

$$\psi_{200}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\,(2 - r/a_0)\,e^{-r/2a_0}, \qquad (47\text{-}34)$$

donde los tres subíndices 200 representan la secuencia de números cuánticos $n = 2$, $l = 0$ y $m_l = 0$. Esta función de onda depende de la variable r exclusivamente; a semejaza del estado base éste tiene una simetría esférica.

La densidad de probabilidad $\psi^2(r)$ y la densidad de probabilidad radial $P(r)$ para el estado $2s$ están dadas por

$$\psi^2(r) = \frac{1}{32\pi a_0^3}\,(2 - r/a_0)^2\,e^{-r/a_0} \qquad (47\text{-}35)$$

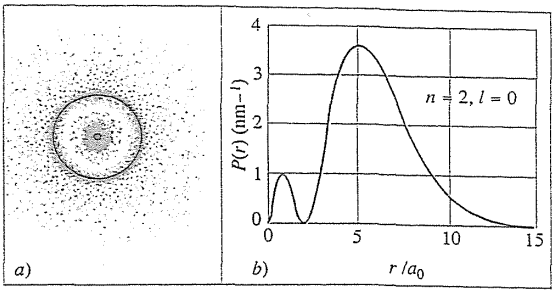


FIGURA 47-14. *a*) Representación, mediante una gráfica de puntos, de la densidad de probabilidad del electrón en un átomo de hidrógeno en el estado $2s$ (Ec. 47-35). Se trazó un círculo en el radio $r = 4a_0$. *b*) Densidad de probabilidad radial (Ec. 47-36).

y

$$P(r) = [\psi^2(r)][4\pi r^2]$$

$$= \frac{1}{8a_0}\,(r/a_0)^2\,(2 - r/a_0)^2\,e^{-r/a_0}. \qquad (47\text{-}36)$$

La figura 47-14*a* es una "gráfica de puntos" de la ecuación 47-35, la densidad de probabilidad. La figura 47-14*b* es una gráfica de la ecuación 47-36, la densidad de probabilidad radial. Nótese que esta última tiene dos máximos y llega a cero en $r = 2a_0$, como se comprueba con sólo examinar la ecuación 47-36.

El estado 2p

El estado 1s, con $l = 0$, no tiene un momento angular orbital. En cambio, el estado $2p$, con $l = 1$, sí lo tiene; su proyección en el eje z (Ec. 47-30) es $m_l(h/2\pi)$ donde m_l, el número cuántico magnético (Ec. 47-29) puede asumir los valores -1, 0 o $+1$. En estos tres estados las funciones de onda que incluye el estado $2p$ *no* son simétricas esféricamente. Son funciones no sólo de r sino también del ángulo polar θ, que se define en la figura 47-15*a*.

En la figura 47-15*a* se muestran las "gráficas de puntos" de las tres densidades de probabilidad referentes al estado $2p$, éstas son,

$$\psi^2_{21-1}(r, \theta), \quad \psi^2_{210}(r, \theta), \quad \text{y} \quad \psi^2_{21+1}(r, \theta).$$

Los subíndices representan la secuencia de números cuánticos n, l y m_l. Las gráficas de $m_l = -1$ y con $m_l = +1$ son idénticas y las tres tienen simetría rotacional alrededor del eje z.

El lector tiene derecho a sorprenderse un poco ante la ausencia de simetría esférica en las gráficas de puntos de la figura 47-15*a*. Después de todo, la función de energía potencial que introducimos en la ecuación de Schrödinger depende sólo de r. ¿A qué se debe que las densidades de probabilidades también dependan del ángulo θ?

Resolvemos este enigma al darnos cuenta de que los tres estados en cuestión poseen igual energía y, en el átomo de hidrógeno aislado, no hay forma de separarlos experimentalmente. Encontramos ese átomo con la misma probabilidad en los tres estados que aparecen en la figura 47-15*a*; en conse-

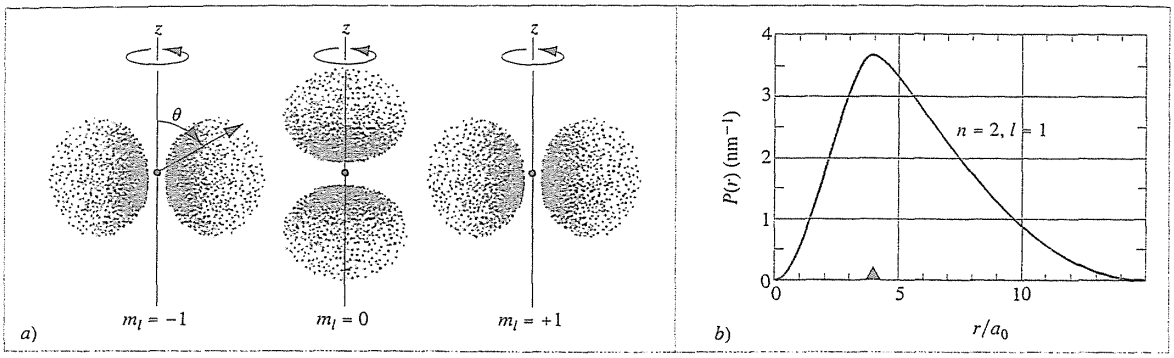


FIGURA 47-15. *a*) Representaciones, mediante gráficas de puntos, de la densidad de probabilidad del electrón en un átomo de hidrógeno en el estado $2p$. Las tres figuras son simétricas alrededor del eje z. *b*) Densidad de probabilidad radial de un promedio ponderado de las tres gráficas incluidas en *a*). Nótese que la probabilidad máxima ocurre con $r = 4a_0$.

cuencia conviene manejar en conjunto una *densidad de probabilidad promedio ponderada* en el estado $2p$. Esto lo visualizamos en forma gráfica al considerar que, en tres dimensiones, las gráficas de puntos correspondientes a $m_l = -1$ y $m_l = +1$ en la figura 47-15*a* tienen "forma de rosca". La correspondiente a $m_l = 0$ tiene un lóbulo superior y uno inferior; es, pues, razonable que resulte algo con simetría esférica cuando sobreponemos en tres dimensiones las tres gráficas de puntos (ponderadas con un factor de 1/3).

Y así es en efecto. La densidad de probabilidad resultante en las tres gráficas sobrepuestas resulta ser

$$\psi_{2p}^2(r) = \frac{1}{96\pi a_0^3} r^2 e^{-r/a_0}. \qquad (47\text{-}37)$$

El subíndice $2p$ en la densidad de probabilidad proporciona el valor de n (= 2) y de l (= 1). Nótese que la variable angular θ ya no aparece en el resultado final. En el estado $2p$ la densidad depende únicamente de r y, por tanto, presenta la simetría esférica que cabe esperar.

A continuación calculamos en conjunto la densidad de probabilidad radial para el estado $2p$, procediendo como lo hicimos en el caso del estado base de la sección 47-5, o sea

$$P_{2p}(r) = [\psi_{2p}^2(r)][4\pi r^2]$$

$$= \frac{1}{24a_0^3} r^4 e^{-r/a_0}. \qquad (47\text{-}38)$$

La figura 47-15*b* muestra una gráfica de esta densidad. En la gráfica se observa que el máximo de la distribución ocurre en $r = 4a_0$.

47-8 CONTEO DE LOS ESTADOS DEL HIDRÓGENO

Hasta ahora hemos visto que hay realmente dos "primeros estados excitados" del hidrógeno, que hemos designado como $2s$ ($n = 2$, $l = 0$) y $2p$ ($n = 2$, $l = 1$). Representan densidades de probabilidad muy distintas del electrón, pero poseen la misma energía (E_2 en la Ec. 47-21). Más aún, dentro del estado $2p$ hemos visto que hay tres subestados, correspondientes a diversos valores del número cuántico magnético y ello, una vez más, a distintas distribuciones de probabilidad del electrón. En la presente sección vamos a resumir lo dicho sobre el átomo de hidrógeno disponiendo los estados excitados en una secuencia ordenada. Pero antes hay que estudiar otro número cuántico adicional que se requiere para designarlos.

Espín del electrón

La mayor parte de los espectros observados del hidrógeno y de los átomos más allá del hidrógeno en la tabla periódica podría muy bien explicarse partiendo del número cuántico principal, del número cuántico orbital y del número cuántico magnético. No obstante, quedan algunos problemas que no podrían explicarse en esa forma. Para mencionar sólo dos de tantos: 1) la intensa luz amarilla emitida por el átomo de sodio consta, no de una sola longitud de onda, sino de dos poco espaciadas. 2) Ciertas líneas espectrales se dividen en un arreglo de líneas poco espaciadas cuando la fuente se coloca en un fuerte campo magnético. En 1924 Pauli señaló la necesidad de un cuarto número cuántico, asociado intrínsecamente al electrón. Un año más tarde dos estudiantes holandeses graduados, George Uhlenbeck (1900-1988) y Samuel Goudsmit (1902-1978), propusieron que los electrones tienen un momento angular intrínseco —denominado *momento angular de espín*— además de su momento angular orbital en los átomos.

El nombre "espín" nos trae a la mente una imagen del electrón como una diminuta esfera que gira alrededor de un eje, en forma muy parecida a como lo hace la Tierra alrededor de su eje de rotación. Sin embargo, el espín es un fenómeno meramente cuántico y este modelo clásico no es válido. Es una propiedad de todas las partículas: electrones, protones, neutrones, fotones, partículas alfa, quarks. Todos ellos presentan un momento angular de espín que describe su comportamiento.

Las propiedades del momento angular del espín en la mecánica cuántica se asemejan mucho a las del momento angular orbital. A cada partícula se le asigna un número cuántico

de espín s, que suele llamarse simplemente su espín. En contraste con otros números cuánticos que hemos mencionado, el espín es una propiedad intrínseca de la partícula y no depende de su estado de movimiento. Por ejemplo, el espín del electrón es 1/2. Todos los electrones tienen $s = 1/2$, sin importar si están ligados al átomo o si se mueven como partículas libres. El espín es una propiedad fundamental suya, como la masa y la carga.

El momento angular intrínseco se describe mediante un vector $\vec{S}$. En analogía con la ecuación 47-28 que se aplica al momento angular orbital, la magnitud o longitud del vector del momento angular del espín es

$$S = \sqrt{s(s+1)}\,\frac{h}{2\pi}. \qquad (47\text{-}39)$$

Puesto que $s = 1/2$ en todos los electrones, los describimos por medio del vector del momento angular de longitud $\sqrt{3/4}\,(h/2\pi)$.

Una vez más en analogía con el momento angular orbital, es posible especificar la orientación espacial del momento angular del espín dando su componente z. Dicho componente se expresa en función del *número cuántico magnético del espín* m_s. A semejanza del número cuántico magnético orbital m_l, el número cuántico magnético del espín varía entre su valor mínimo $-s$ y su valor máximo $+s$ en valores enteros, de modo que los únicos valores permitidos de m_s son

$$m_s = -1/2, +1/2. \qquad (47\text{-}40)$$

El componente z del momento angular del espín será entonces

$$S_z = m_s\,\frac{h}{2\pi}. \qquad (47\text{-}41)$$

Así pues, la descripción completa de un electrón en un átomo requiere cuatro números cuánticos: n, l, m_l y m_s. Los tres primeros surgen en forma natural al resolver la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno. Dicha ecuación *no* predice el número cuántico del espín; se obtiene con un cálculo más avanzado que combina la mecánica cuántica con la relatividad (la ecuación de Schrödinger no es una ecuación relativista).

En el capítulo 48 vamos a comentar las pruebas experimentales en favor de la existencia del espín del electrón, basándonos para ello en las propiedades de los átomos en campos magnéticos. En esta sección nos concentraremos en cómo debemos modificar nuestra descripción de los estados del hidrógeno para tener en cuenta al espín.

Los estados del hidrógeno atómico

Hemos visto que los estados cuánticos donde el átomo de hidrógeno puede existir están determinados por cuatro número cuánticos: n, l, m_l y m_s. Veamos ahora, usando esos números y las conexiones entre ellos, cómo podemos disponer en forma ordenada los estados de los átomos de hidrógeno.

Se dice que el conjunto de todos sus estados con el mismo número cuántico principal forman una *capa*. Como se observa en la ecuación 47-21, poseen la misma energía E_n. El conjunto con el mismo valor del número cuántico l del momento angular orbital recibe el nombre de *subcapa*. Según se observa en la ecuación 47-28, todos tienen el mismo (en magnitud) momento angular L.

El número de estados dentro de una subcapa lo define la cantidad de estados permitidos del número cuántico magnético orbital m_l. Con un l, la ecuación 47-29 indica que hay $2l + 1$ valores de ese tipo. El efecto del número cuántico magnético del espín m_s consiste simplemente en duplicarlo; cada estado se asocia a $m_s = +1/2$ o $m_s = -1/2$. Por tanto, una subcapa con $l = 2$ contiene $2(2l + 1) = 2(2 \times 2 + 1) = 10$ estados. En la tabla 47-2 se resume la clasificación de los estados del átomo de hidrógeno hasta $n = 3$.

¿Los números de los estados en las capas (2, 8 y 18) en el renglón de la parte inferior de la tabla 47-2 le parecen conocidos, quizá por haberlos visto en la clase de química? Son los números de elementos en los renglones horizontales (periodos) de la tabla periódica. Como se muestra en el Apéndice E, el periodo 1 contiene 2 elementos, los periodos 2 y 3 contienen 8 elementos cada uno y los periodos 4 y 5 contienen 18 elementos. En la sección 48-4 veremos detalladamente cómo el orden de los elementos en la tabla se basa en los principios de la mecánica cuántica.

PROBLEMA RESUELTO 47-10. Una capa tiene un número cuántico principal $n = 4$. *a*) ¿Cuántas subcapas contiene? *b*) ¿Cuántos estados tiene cada subcapa? *c*) ¿Cuál es el número total de estados en la capa?

Solución *a*) Si $n = 4$, sabemos por la ecuación 47-27 que los valores permitidos de l son 0, 1, 2 y 3. Es un total de cuatro valores, ¿Puede demostrar que el número de subcapas en una capa determinada siempre será igual a n?

b) El número de estados en una subcapa está dado por $2(2l + 1)$; el factor 2 proviene de los dos valores permitidos del número cuántico

TABLA 47-2 Estados cuánticos del átomo de hidrógeno (hasta $n = 3$ solamente)

n	1	2		3		
l	0	0	1	0	1	2
m_l	0	0	0, ±1	0	0, ±1	0, ±1, ±2
m_s	± 1/2	± 1/2	± 1/2	± 1/2	± 1/2	± 1/2
Número de estados en las subcapas	2	2	6	2	6	10
Número de estados en las capas	2	8		18		

del espín m_s. Entonces, con los números de estados en las cuatro subcapas que forman la capa $n = 4$, tendremos

l	$2(2l + 1)$
0	2
1	6
2	10
3	14

c) El número total de estados en la capa $n = 4$ se obtiene sumando los números de estados de las subcapas que contiene la capa. Con base en la tabla anterior tenemos $2 + 6 + 10 + 14 = 32$. Nótese que 32 es el número de elementos en el periodo 6 de la tabla de elementos (Ap. E).

¿Puede demostrar que los estados de una capa definidos por el número cuántico n siempre son iguales a $2n^2$? Esto da resultado en el caso en cuestión porque $2 \times 4^2 = 32$, como se comprueba con el conteo explícito.

OPCIÓN MÚLTIPLE

47-1 Electrones libres y ligados

47-2 Un electrón atrapado en un pozo de potencial

1. Un electrón queda atrapado en un pozo infinito de potencia unidimensional con un ancho L.

a) ¿Cuál es la energía mínima posible del electrón?

A) 0
B) Entre 0 y $h^2/8mL^2$
C) $\approx h^2/8mL^2$, pero el principio de incertidumbre impide calcular el valor exacto
D) Exactamente $h^2/8mL^2$

b) ¿Cuál es el mínimo resultado posible al medir la magnitud del momento del electrón?

A) 0
B) Entre 0 y $h/2L$
C) $\approx h/2L$, pero el principio de incertidumbre impide calcular el valor exacto
D) Exactamente $h/2L$

2. Un electrón atrapado en un pozo de potencial infinito tiene una energía de E. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el ancho L del pozo es más verdadera?

A) L debe ser mayor o igual que $(h^2/8mE)^{1/2}$.
B) L debe ser menor o igual que $(h^2/8mE)^{1/2}$.
C) L debe ser exactamente igual a $(h^2/8mE)^{1/2}$.
D) L puede tener cualquier valor.

3. Un electrón en un pozo de potencial infinito con un ancho L_1 se halla en el estado base. Un electrón de otro pozo que mide L_2 de ancho se encuentra en estado excitado. La energía de los dos es la misma. ¿Cuál es la razón L_2/L_1?

A) 4 B) 3 C) 2 D) $\sqrt{2}$

47-3 Un electrón atrapado en un pozo finito

4. Suponga que un electrón está atrapado en un pozo finito unidimensional de ancho L.

a) ¿Cuál es la energía cinética mínima posible del electrón?

A) 0
B) Entre 0 y $h^2/8mL^2$.
C) $\approx h^2/8mL^2$, pero el principio de incertidumbre impide calcular el valor exacto
D) Exactamente $h^2/8mL^2$

b) ¿Cuál es el resultado mínimo posible al medir la magnitud del momento del electrón?

A) 0
B) Entre 0 y $h/2L$
C) $\approx h/2L$, pero el principio de incertidumbre impide calcular el valor exacto
D) Exactamente $h/2L$

47-4 Un electrón atrapado en un átomo

5. La presentación de la teoría de Bohr en el texto se realizó suponiendo que un electrón con una carga de magnitud $|e|$ "gira" alrededor de una carga nuclear de magnitud $|e|$. ¿Con qué factor los niveles de energía cambian en un electrón alrededor de una carga nuclear de magnitud $|Ze|$?

A) Z B) Z^2 C) Z^4 D) Z^{-2}

47-5 El estado base del átomo de hidrógeno

47-6 El momento angular de los electrones en los átomos

6. Un electrón está en un potencial simétricamente esférico con $m_l = +2$. ¿Cuáles de los siguientes valores de l son posibles?

A) l puede tener un valor entero cualquiera.
B) l puede tener un valor entero mayor que 1.
C) l puede tener un valor entero menor que 3.
D) l debe ser igual a 2.

7. Considere la relación entre L_z y la magnitud del momento angular $L = |\vec{\mathbf{L}}|$.

a) ¿Puede L_z ser *exactamente* igual a 0?

A) Sí
B) Sí, pero sólo si $L = 0$
C) No, debido al principio de incertidumbre de Heinsenberg
D) No, porque $|L_z|$ se vuelve más grande junto con L

b) ¿Puede L_z ser *exactamente* igual a L?

A) Sí
B) No, y $|L_z|$ siempre es menor que L
C) No, y $|L_z|$ siempre es mayor que L
D) No, y $|L_z|$ siempre es mayor o menor que L

8. La magnitud del momento angular orbital de un electrón está dado por $L = \sqrt{5}\, h/\pi$. ¿Cuántos valores de L_z son posibles?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 9 E) 11

9. ¿Cuántos valores de m_l son posibles en el estado base de un átomo de hidrógeno?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3
E) La respuesta no puede determinarse si no se conoce l.

10. Un experimentador intenta medir varias características de un electrón en el estado base del hidrógeno. ¿Cuál de las siguientes magnitudes tienen valores constantes bien definidos?
    A) La energía total E
    B) El momento angular $\vec{L}$
    C) El componente z del momento angular L_z
    D) La magnitud del momento p

47-7 Un estado excitado del átomo de hidrógeno

11. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de los números cuánticos n, l y m_l *no* sería posible en un estado excitado del hidrógeno? (Seleccione todos los apropiados.)
    A) $n = 4, l = 2, m_l = -3$
    A) $n = 3, l = 2, m_l = -2$
    A) $n = 2, l = 2, m_l = +1$
    A) $n = 17, l = 2, m_l = -2$
12. ¿Cuál de las siguientes funciones de onda ψ_{nlm_l} en un estado excitado del hidrógeno es simétrica esféricamente? (Seleccione todas las apropiadas.)
    A) ψ_{310} B) ψ_{31-1} C) ψ_{400} D) ψ_{32+1}

47-8 Conteo de los estados del hidrógeno

13. ¿En qué condiciones podría el componente z del espín de un electrón ser cero?
    A) Si S_x es $h/4\pi$
    B) Si S_y es $h/4\pi$
    C) Si tanto A) como B) son verdaderas
    D) Si se pone el electrón en un campo magnético debidamente diseñado
    E) S_z nunca será cero en un electrón.
14. El protón tiene parientes subatómicos con magnitudes de espín de $S = |\vec{S}| = \sqrt{15}\, h/4\pi$.
    a) ¿Cuál es el valor máximo posible de S_z en estas partículas?
    A) $h/4\pi$ B) $h/2\pi$ C) $3h/4\pi$ C) $5h/4\pi$
    b) ¿Cuántos valores diferentes de S_z son posibles con dichas partículas?
    A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
15. Un electrón se encuentra en un estado dentro de un átomo de hidrógeno, con el número cuántico $m_l = 2$.
    a) ¿Qué puede decirse del número cuántico principal n del electrón?
    A) n es mayor que 2.
    B) n es igual a 3.
    C) n es menor que 3.
    D) Nada puede decirse de n sin contar con más información.
    b) ¿Cuántos estados existen con un nivel menor de energía que el ocupado por este electrón?
    A) Exactamente 8 B) Exactamente 10
    C) Por lo menos 10 D) Por lo menos 28
16. Un electrón se halla en un estado dentro de un átomo de hidrógeno, con el número cuántico $l = 3$.
    a) ¿Qué puede decirse del número cuántico principal n del electrón?
    A) n es mayor que 3.
    B) n es igual a 4.
    C) n es menor que 4.
    D) Nada puede decirse de n si no se cuenta con más información.
    b) ¿Cuántos estados existen con un nivel de energía menor que el ocupado por el electrón?
    A) Exactamente 18 B) Exactamente 28
    C) Por lo menos 28 D) Por lo menos 50

PREGUNTAS

1. En la sección 47-2 resolvimos el problema mecánico ondulatorio de una partícula atrapada en un pozo infinitamente profundo, sin usar nunca la ecuación de Schrödinger (o ni siquiera anotándola). ¿Cómo lo logramos?
2. Una onda estacionaria puede concebirse como la superposición de dos ondas viajeras. ¿Es posible aplicar esta perspectiva al problema de una partícula confinada entre muros rígidos, dando una interpretación a partir de su movimiento?
3. Las energías permitidas en una partícula confinada entre paredes rígidas están dadas por la ecuación 47-3. Primero, convénzase usted mismo de que, al aumentar n, los niveles de energía se separan todavía más. ¿A qué se debe? El principio de correspondencia parecería exigir que se acercarían más al crecer n, aproximándose a un continuo.
4. En el estado $n = 1$, cuál es la probabilidad de encontrar una partícula confinada dentro de paredes rígidas en un elemento de longitud pequeña en la superficie de cualquier pared?
5. ¿Cuáles son las dimensiones de $P_n(x)$ en la figura 47-4? ¿Cuál es el valor de la densidad de probabilidad esperada según la física clásica? ¿Y qué valor tienen las áreas bajo las curvas? Estas preguntas pueden contestarse con solo observar la figura.
6. ¿Qué aspecto imagina que tenga la curva de $P_n(x)$ con $n = 100$ en la figura 47-4? Convénzase usted mismo de que las curvas se acercan a las expectativas clásicas cuando $n \to \infty$.
7. La figura 47-4 muestra que la función de probabilidad para $n = 3$ $P_n(x)$ en una partícula confinada entre muros rígidos es cero en los dos puntos entre ellas. ¿Cómo puede la partícula cruzar alguna vez estas posiciones? (Sugerencia: reflexione sobre las consecuencias del principio de incertidumbre.)
8. En el problema resuelto 47-1, la energía del electrón se determina exactamente por el tamaño de la caja. ¿Cómo concilia esto con el hecho de que la incertidumbre de la ubicación del electrón no puede rebasar 100 pm y, para que se cumpla el principio de incertidumbre, también debe ser incierto su momento?
9. ¿Por qué la serie de Balmer, y no la de Lyman ni la de Paschen, fue la primera en detectarse y analizarse en el espectro del hidrógeno?
10. ¿En qué región del espectro se descubrirá probablemente una serie cualquiera de hidrógeno atómico todavía no observada?
11. ¿Puede un átomo de hidrógeno absorber un fotón cuya energía sea mayor que su energía de enlace (13.6 eV)?

12. Tras emitir un fotón, un átomo de hidrógeno aislado retrocede por la conservación de su momento. Explique el hecho de que la energía del fotón emitido es un poco menor que la diferencia de energía entre los niveles que intervienen en el proceso de la emisión.
13. Unos radioastrónomos observan líneas en el espectro del hidrógeno provenientes de átomos del mismo elemento que se encuentran en estados con $n = 350$ más o menos. ¿Por qué no se producen y se estudian en el laboratorio átomos de hidrógeno en estados con números cuánticos tan altos?
14. Sólo un número relativamente reducido de líneas de Balmer pueden observarse en los tubos de descarga del laboratorio, mientras que se observa gran cantidad en los espectros estelares. Explique esto en función de una densidad pequeña, de una temperatura elevada y de un gran volumen de gases en la atmósfera estelar.
15. ¿Por qué el concepto de órbitas de Bohr viola el principio de incertidumbre?
16. Considere un átomo semejante al hidrógeno donde un positrón (un electrón con carga positiva) circula alrededor de un antiprotón (con carga negativa). ¿En qué forma —si la hay— el espectro de emisión de este "átomo antimateria" se distingue del de un átomo normal de hidrógeno?
17. Si la teoría de Bohr y la mecánica ondulatoria de Schrödinger predicen el mismo resultado respecto a la energía de los estados del átomo de hidrógeno, ¿por qué entonces necesitamos la mecánica ondulatoria, dada su mayor complejidad?
18. Compare la teoría de Bohr y la mecánica ondulatoria. ¿En qué aspectos coinciden? ¿Y en cuáles difieren?
19. ¿Por qué no observamos la cuantización espacial en una tapa que gira?
20. El momento angular del electrón en el átomo de hidrógeno está cuantizado. ¿Por qué no lo está también el momento lineal? (Sugerencia: tengan en cuenta las consecuencias del principio de incertidumbre.)
21. El momento angular es un vector y cabe suponer que se necesitan tres número cuánticos para describirlo, correspondientes a los tres componentes espaciales del vector. Por el contrario, en un átomo sólo dos números cuánticos caracterizan al momento angular. Explique por qué.
22. Explique si la Tierra que gira alrededor del Sol es una buena analogía del electrón que gira alrededor de un protón en el átomo de hidrógeno.
23. Un átomo en un estado con momento angular cero presenta simetría esférica por lo que respecta a su interacción con otros átomos. En ocasiones se les llama "átomo de bola de billar". Explique por qué.
24. Defina y distinga entre los siguientes términos: función de onda, densidad de probabilidad y densidad de probabilidad radial.
25. ¿Cuáles son las dimensiones y las unidades del SI para la función de onda, la densidad de probabilidad y la densidad radial de probabilidad? ¿Son las dimensiones que espera encontrar?
26. Dijimos que los números cuánticos necesarios para completar la descripción del movimiento del electrón en el hidrógeno son iguales a la cantidad de grados de libertad que posee el electrón. ¿Cuál es ese número? ¿Cómo puede justificarlo?
27. ¿De qué manera explicaría el hecho de que en el estado del átomo de hidrógeno con $n = 2$ y $l = 0$, la densidad de probabilidad alcanza su máximo con $r = 0$, pero que la densidad de probabilidad radial es cero allí? Consulte la figura 47-14.
28. La figura 47-15*a* contiene las tres densidades de probabilidad en los estados del átomo de hidrógeno cuando $n = 2$ y $l = 1$. ¿Qué determina la dirección en el espacio que escogemos para el eje z?
29. Utilice el principio de incertidumbre de Heiseberg para demostrar que las densidades de probabilidad en un estado $l = 2$ presentan simetría cilíndrica alrededor del eje z.

EJERCICIOS

47-1 Electrones libres y ligados

47-2 Un electrón atrapado en un pozo de potencial

1. *a*) Calcule la energía mínima permitida en un electrón confinado en un pozo infinitamente profundo cuyo ancho es igual al diámetro de un núcleo atómico (unos 1.4×10^{-14} m). *b*) Repita el cálculo con un neutrón. *c*) Compare los resultados obtenidos con la energía de enlace (varios MeV) de protones y de neutrones dentro del núcleo. Con base en esto, ¿encontraremos electrones en su interior?
2. ¿Qué ancho debe tener un pozo infinito para que un electrón atrapado en el estado $n = 3$ posea una energía de 4.70 eV?
3. Un electrón, atrapado en un pozo infinito de 253 pm de ancho, se encuentra en el estado base ($n = 1$). ¿Cuánta energía deberá absorber para pasar al tercer estado excitado ($n = 4$)?
4. La energía de un electrón en el estado base dentro de un pozo infinito es 2.6 e V. ¿Cuál será si duplicamos el ancho del pozo?
5. *a*) Calcule la separación de energía entre los dos niveles de energía más bajos de un contenedor que mide 20 cm por lado y que contiene átomos de argón. *b*) Obtenga la razón de la energía térmica de los átomos a 300 K. *c*) ¿A qué temperatura la energía es igual al espaciamiento entre los dos niveles? Para simplificar el ejercicio suponga que los átomos de argón quedan atrapados en un pozo unidimensional de 20 cm de ancho. La masa molar del argón es 39.9 g/mol.
6. *a*) Calcule la diferencia fraccional entre dos niveles adyacentes de energía para una partícula confinada en un pozo unidimensional de profundidad infinita. *b*) Comente el resultado en función del principio de incertidumbre.
7. Considere un electrón atrapado en un pozo infinito que mide 98.5 pm de ancho. Si se halla en un estado con $n = 15$, ¿cuáles son *a*) su energía? *b*) ¿la incertidumbre de su momento? *c*) ¿la incertidumbre de su posición?
8. Repita el problema resuelto 47-4, pero ahora suponiendo que el electrón se halla en el estado $n = 2$.
9. ¿Dónde están los puntos de *a*) probabilidad máxima y *b*) probabilidad mínima en una partícula atrapada en un pozo infinitamente profundo de longitud L, si se halla en el estado n?

47-3 Un electrón atrapado en un pozo finito

47-4 Un electrón atrapado en un átomo

10. *a*) Determine la longitud de onda del fotón menos energético en la serie de Lyman. *b*) Determine la longitud de onda del límite de la serie de Lyman.
11. Por sustitución directa de los valores numéricos de las constantes fundamentales, verifique que la energía del estado base del átomo de hidrógeno es -13.6 eV (Ec. 47-21).
12. ¿Cuáles son *a*) la longitud de onda, *b*) el momento y *c*) la energía de un fotón que se emite cuando un átomo de hidrógeno experimenta una transición del estado $n = 3$ a $n = 1$?
13. Calcule la más grande longitud de onda de la serie de Balmer.
14. En un diagrama de niveles de energía muestre los números cuánticos correspondientes a la transición en que la longitud de onda del fotón emitido mide 121.6 nm.
15. Calcule la energía de enlace (la que se requiere para extraer el electrón) del átomo de hidrógeno en el primer estado excitado.
16. Obtenga el valor del número cuántico de un átomo de hidrógeno cuya órbita radial mide 847 pm.
17. Un átomo de hidrógeno emite una luz de 1281.8 nm de longitud de onda. *a*) ¿Cuál transición del átomo de hidrógeno causa esta radiación? *b*) ¿A qué serie pertenece la radiación? (Sugerencia: consulte la Fig. 47-10.)
18. Se excita un átomo de hidrógeno de un estado con $n = 1$ a otro con $n = 4$. *a*) Calcule la energía que debe absorber. *b*) Calcule y muestre en un diagrama de niveles de energía las energías fotónicas que pueden emitirse si el átomo retorna al estado $n = 1$.
19. La vida de un electrón en el estado $n = 2$ dentro del hidrógeno es aproximadamente 10 ns. ¿Cuál es la incertidumbre de energía del estado $n = 2$? Compare el resultado con la energía de este estado.
20. *a*) Basándose en el modelo de Bohr, calcule la velocidad del electrón en el estado base del átomo de hidrógeno. *b*) Calcule la correspondiente longitud de onda de De Broglie. *c*) Compare primero las respuestas *a*) y *b*) y luego determine la relación entre la longitud de onda λ de De Broglie y el radio a_0 de la órbita de Bohr en el estado base.
21. Un neutrón, con 6.0 eV de energía cinética, choca contra un átomo de hidrógeno en reposo en su estado base. Demuestre que la colisión debe ser elástica (es decir, se conservará la energía). (Sugerencia: pruebe que no es posible llevar el átomo a un estado más alto de excitación a raíz de la colisión.)
22. Un átomo de hidrógeno en un estado, cuya energía de enlace (la que se requiere para extraerlo) es de 0.85 eV, realiza una transición a un estado con una energía de excitación (la diferencia de energía entre el estado y el estado base) de 10.2 eV. *a*) Calcule la energía del fotón emitido. *b*) Demuestre la transición en un diagrama de niveles de energía del hidrógeno, marcándolo con los números cuánticos apropiados.
23. Según el principio de correspondencia, a medida que $n \rightarrow \infty$ esperamos los resultados clásicos en el átomo de Bohr. Por eso, la longitud de onda de De Broglie asociada al electrón (un resultado cuántico) debería volverse más pequeña que el radio de la órbita de Bohr al aumentar n. En efecto, prevemos que $\lambda/r \rightarrow 0$ a medida que $n \rightarrow \infty$. Demuestre que es así.
24. Calcule la rapidez de retroceso de un átomo de hidrógeno que se supone que está en reposo, si el electrón efectúa una transición del estado $n = 4$ directamente al estado base. (Sugerencia: aplique la conservación del momento lineal.)
25. Basándose en el diagrama de niveles de energía del hidrógeno, explique la observación de que la frecuencia de la segunda línea de la serie de Lyman es la suma de las de la primera línea y de la de la primera de la serie de Balmer. Es un ejemplo del *principio de combinación de Ritz* descubierto empíricamente. Use el diagrama para obtener algunas otras combinaciones válidas.
26. *a*) ¿Cuánta energía se requiere para extraer el electrón en un ion He^+ en su estado base? *b*) ¿Y de un ion Li^{2+} en un estado con $n = 3$?
27. En las estrellas la serie de Pickering está en el espectro de He^+. Se emite cuando el electrón en He^+ pasa de niveles superiores al nivel con $n = 4$. *a*) Demuestre que la longitud de onda de las líneas de la serie está dada por

$$\lambda = \frac{Cn^2}{n^2 - 16},$$

donde $n = 5, 6, 7, \ldots$, y después determine el valor de la constante C. *b*) Calcule la longitud de onda de la primara línea de la serie y de su límite. *c*) ¿En qué región o regiones se hallara esta serie?
28. En el estado base del átomo de hidrógeno, ¿cuales son según la teoría de Bohr *a*) el número cuántico, *b*) el radio orbital, *c*) el momento angular, *d*) el momento lineal, *e*) la velocidad angular, *f*) la velocidad lineal, *g*) la fuerza sobre el electrón, *h*) la aceleración del electrón, *i*) la energía cinética, *j*) la energía potencial y *k*) la energía total?
29. ¿En qué forma las magnitudes *b*) a *k*) en el problema 28 varían con el número cuántico n?
30. Suponga que queremos probar la posibilidad de que los electrones del átomo describe órbitas "visualizándolas" con fotones de suficiente longitud de onda corta, digamos de 10.0 pm. *a*) ¿Qué energía tendrán los fotones? *b*) ¿Cuánta energía transferirá un fotón a un electrón libre en una colisión directa de Compton? *c*) ¿Qué nos indica esto sobre la posibilidad de confirmar el movimiento orbital "visualizando" un electrón atómico en dos o más puntos de su trayectoria? Suponga que la velocidad del electrón es $0.10c$.
31. *a*) Calcule los intervalos de longitud de onda por donde se extienden las series de Lyman, de Balmer y de Paschen. (El intervalo se extiende desde la más grande longitud de onda más grande hasta el límite de la serie.) *b*) Determine los correspondientes intervalos de frecuencia.

47-5 El estado base del átomo de hidrógeno

32. En la figura 47-12 verifique los valores graficados de $P(r)$ en *a*) $r = 0$, *b*) $r = a_0$ y *c*) $r = 2a_0$.
33. En el estado base del átomo de hidrógeno, evalúe el cuadrado de la función de onda $\psi^2(r)$ y la densidad de probabilidad radial $P(r)$ en las posiciones *a*) $r = 0$ y *b*) $r = a_0$. Explique lo que significan estas cantidades.
34. Una región esférica de radio $0.05a_0$ está a una distancia a_0 del núcleo de un átomo de hidrógeno en su estado base. Calcule la probabilidad de encontrar al electrón dentro de la esfera. (Suponga que ψ es constante en el interior de ella.)
35. Determine la razón de las probabilidades de hallar el electrón en el átomo de hidrógeno en una capa delgada en el radio de Bohr con la de encontrarlo en una capa del mismo espesor al doble de distancia.

36. En un átomo de hidrógeno en su estado base, calcule la probabilidad de encontrar el electrón entre dos esferas de radios $r = 1.000a_0$ y $r = 1.016a_0$

47-6 El momento angular de los electrones en los átomos

37. En un átomo de hidrógeno en un estado con $l = 3$, calcule los valores permitidos de *a*) Lz y de *b*) θ. *c*) Determine también la magnitud de $\vec{L}$. Cuando convenga, expresa las respuestas en unidades de h.

38. Si un electrón en un átomo de hidrógeno se halla en un estado con $l = 5$, ¿cuál es el mínimo ángulo posible entre $\vec{L}$ y L_z?

39. Demuestre que la ecuación 47-33 es una versión plausible del principio de incertidumbre $\Delta p \cdot \Delta x = h/2\pi$. (Sugerencia: multiplique por r/r; relacione p con mv y L con mvr.)

47-7 Un estado excitado del átomo de hidrógeno

40. Por medio de la ecuación 47-38 demuestre que, en el estado del átomo de hidrógeno con $n = 2$ y $l = 1$,

$$\int_0^\infty P(r)\,dr = 1.$$

¿Cuál es la interpretación física del resultado anterior?

41. En el estado $n = 2$, $l = 0$, *a*) Localice los dos máximos de la curva de densidad de probabilidad radial de la figura 47-14*b* y *b*) los valores de la densidad de probabilidad radial en los dos máximos; compare el resultado con la figura 47-14*b*.

42. Tratándose de un átomo de hidrógeno en un estado con $n = 2$ y $l = 0$, calcule la probabilidad de encontrar el electrón entre dos esferas de radios $r = 5.00a_0$ y $r = 5.01a_0$.

47-8 Conteo de los estados del hidrógeno

43. Anote los números cuánticos de todos los estados del átomo de hidrógeno pertenecientes a la subcapa donde $n = 4$ y $l = 3$.

44. Se sabe que un estado del átomo de hidrógeno tiene el número cuántico $l = 3$. ¿Cuáles son los números cuánticos posibles n, m_l y m_s?

45. Un estado del átomo de hidrógeno posee un valor máximo m_l de $+4$. ¿Qué puede decirse del resto de sus números cuánticos?

46. ¿Cuántos estados del átomo de hidrógeno son para $n = 5$? ¿Y cómo se distribuyen entre las subcapas?

47. ¿Cuáles son los números cuánticos n, l, m_l y m_s para los dos electrones del átomo de helio en su estado base?

48. Calcule los dos ángulos posibles entre el vector del momento angular del espín del electrón y el eje z.

49. Marque como verdaderos o falsos los siguientes enunciados concernientes a los números cuánticos n, l, m_l. *a*) Una de estas subcapas no puede existir: $n = 2$, $l = 1$; $n = 4$, $l = 3$; $n = 3$, $l = 2$; $n = 1$, $l = 1$. *b*) El número de valores de m_l que se permite depende exclusivamente de l, y no de n. *c*) La capa $n = 4$ contiene cuatro subcapas. *d*) El valor más pequeño de n que puede acompañar un l es $l + 1$. *e*) Todos los estados donde $l = 0$ tienen también $m_l = 0$, cualquiera que sea el valor de n. *f*) Todas las capas contienen n subcapas.

50. Demuestre que el número de estados en una capa está dado por $2n^2$.

PROBLEMAS

1. Considere un electrón de conducción en un cristal cúbico de un material conductor. El electrón puede moverse libremente a través del volumen del cristal, pero no puede salir. Está atrapado en un pozo infinito tridimensional. Puede desplazarse en tres dimensiones, por lo cual su energía total está dada por (compare la expresión con la Ec. 47-3),

$$E = \frac{h^2}{8mL^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2),$$

donde n_1, n_2, n_3 asumen los valores 1, 2, ... Calcule las energías de los cinco estados distintos más bajos en un electrón de conducción que se mueve en un cristal cúbico cuya longitud del lado L, mide 250 nm.

2. Una partícula está confinada entre muros rígidos separados por una distancia L. *a*) Demuestre que la probabilidad P de encontrarlo a una distancia $L/3$ de una pared está dada por

$$P = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\text{sen}(2\pi n/3)}{2\pi n/3}\right).$$

Evalúe la probabilidad de *b*) $n = 1$, *c*) $n = 2$, *d*) $n = 3$ y *e*) según los postulados de la física clásica.

3. Una partícula está confinada entre muros rígidos situados en $x = 0$ y $x = L$. En el estado energético $n = 4$, *a*) dibuje la curva de densidad de probabilidad referente a la ubicación de la partícula. Calcule las probabilidades aproximadas de encontrar la partícula dentro de una región $\Delta x = 0.0003\,L$ cuando *b*) Δx está en $x = L/8$ y (*c*) en $x = 3L/16$. Consulte su figura para comprobar si sus resultados parecen razonables o no. (Sugerencia: no se requiere integrar.)

4. En un potencial unidimensional, la función de onda de un electrón es $\Psi_0(x,t) = A_0 e^{-\pi m\omega x^2/h - i\omega t/2}$ donde A_0 es un número real. *a*) Demuestre que la densidad de probabilidad es real. *b*) Calcule A_0 suponiendo que la probabilidad total de encontrar el electrón en cualquier parte es 1. (Sugerencia: utilice la integral 17 del Ap. I. *c*) ¿En qué parte del eje x hay mayores probabilidades de localizar al electrón?

5. La parte dependiente del tiempo de la función de onda de un electrón de energía $E = h\omega/4\pi$ es $\psi_0(x) = A_0 e^{-\pi m\omega x^2/h}$ donde A_0 es una constante. Sustituya este valor en la ecuación de Schrödinger (Ec. 47-17) y obtenga la ecuación de la energía potencial $U(x)$. ¿Qué representa esta energía potencial?

6. Si un electrón gira en una órbita con una frecuencia f_0, el electromagnetismo clásico predice que irradiará energía no sólo a esa frecuencia sino también a $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$, y así sucesivamente. Demuestre que esto también lo predice la teoría del átomo de hidrógeno de Bohr en el caso límite de los números cuánticos grandes.

7. Aplique el modelo de Bohr al átomo del muon-hidrógeno, compuesto por un núcleo de carga e con un muon negativo (una partícula elemental con una carga $q = -e$ y una masa $m = 207m_e$, donde m_e es la masa del electrón) que gira alrededor del núcleo. *a*) Calcule la separación entre muon-núcleo en la prime-

ra órbita de Bohr, *b*) la energía de ionización y *c*) la longitud de onda del fotón más energético que puede emitirse. Véase "The Muonium Atom" de Vernon W. Hughes, *Scientific American,* abril de 1966, p. 93.

8. Aplique el modelo de Bohr al átomo de positronio. Éste tiene un electrón positivo y otro negativo que giran alrededor de su centro de masa; ésta se encuentra a la mitad entre ellos. *a*) ¿Qué relación existe entre este espectro y el de hidrógeno? *b*) ¿Cuál es el radio de la órbita en el estado base? (Sugerencia: calcule la masa reducida del átomo.) Véase "Exotic Atoms" de E. H. S. Burhop, *Contemporary Physics*, julio de 1970, p. 335.

9. De los tres componentes de $\vec{\mathbf{L}}$, uno, L_z está cuantizado según la ecuación 47-30. En vista de las restricciones impuestas por las ecuaciones 47-27 y 47-28 tomadas en conjunto, demuestre que lo más que puede decirse de los dos componentes restantes de $\vec{\mathbf{L}}$ es

$$\sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{l(l+1) - m_l^2}\, h/2\pi.$$

Nótese que los dos componentes no están cuantizados por separado. Demuestre asimismo que

$$\sqrt{l}\, h/2\pi \leq \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \leq \sqrt{l(l+1)}\, h/2\pi.$$

10. En los átomos hay una probabilidad finita, aunque muy pequeña, de encontrar en algún momento un electrón orbital dentro del núcleo. De hecho, algunos núcleos inestables usan esta aparición esporádica del electrón para decaer por la *captura de electrones*. Suponiendo que el protón también sea una esfera de radio 1.1×10^{-15} m y que la función de onda del electrón del átomo de hidrógeno se mantenga siempre en el centro del protón, utilice la función de onda en el estado base para calcular la probabilidad de que el electrón esté dentro de su núcleo. (Sugerencia, cuando $x << 1$, $e^{-x} \approx 1$.)

11. Repita el problema 10 con un electrón en el estado $n = 2$, $l = 0$, esto es, calcule la probabilidad de hallar el electrón dentro del protón, con un radio = 1.1 fm, que constituye el núcleo del átomo de hidrógeno.

12. *a*) En el estado base del átomo de hidrógeno, demuestre que la probabilidad P de que el electrón esté dentro de una esfera de radio r está dada por

$$P = 1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2),$$

en la cual $x = r/a_0$. *b*) Evalúe la probabilidad de que, en el estado base, el electrón esté dentro de una esfera de radio a_0.

13. Utilice el resultado del problema 12 para calcular la probabilidad de encontrar, en el estado base, el electrón de un átomo de hidrógeno entre las esferas $r = a_0$ y $r = 2a_0$.

14. Para un electrón en el estado base del átomo de hidrógeno, calcule el radio de una esfera donde la probabilidad de localizar el electrón dentro de ella es igual a la de encontrarlo afuera. (Sugerencia: consulte el Prob. 12.)

15. En un átomo de hidrógeno en un estado con $n = 2$ y $l = 0$, ¿qué probabilidad hay de localizar el electrón en alguna parte del interior del más pequeño de los dos máximos de su función de densidad de probabilidad radial? Véase la figura 47-14*b*.

PROBLEMA PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. El problema del pozo cuadrado finito puede resolverse numéricamente preparando una hoja de cálculo como la siguiente:

x (pm)	ψ	$d\psi/dx$	$d^2\psi/dx^2$
0	A	B	
1			
2			
etc.			

donde en cada nuevo renglón ψ está dada por la del renglón anterior $\psi + \Delta x(d\psi/dx)$, y en forma semejante $d\psi/dx$ está dada por la del renglón anterior $d\psi/dx + \Delta x(d^2\psi/dx^2)$. Sin embargo, $d^2\psi/dx^2$ está dada por la ecuación de Schrödinger en función de la energía E, la posición x y la función de onda ψ. L es el ancho del pozo: las iteraciones comienzan en el centro del pozo porque A o B, los valores iniciales de ψ o $d\psi/dx$ son cero según que el estado sea par o impar. *a*) Considere un electrón ligado al pozo de 100 pm de ancho y de 250 eV de profundidad. Determine el estado base escogiendo el valor mínimo de la energía E que impide que ψ "explote" antes de llegar a $x = 100$ pm en la hoja de cálculo. Recuerde que x se mide desde el centro del pozo. La exactitud con que estima E puede mejorarse con sólo exigir que ψ permanezca finita con valores más grandes de x. En el estado base, haga $A = 1$ y $B = 0$. *b*) Calcule la energía del primer estado excitado. En este caso, haga $A = 0$ y $B = 1$; determine la energía mínima E que impide que ψ "explote" en una distancia determinada.

CAPÍTULO 48

ESTRUCTURA DEL ÁTOMO

En este capítulo vamos a examinar los átomos con muchos electrones y vamos a explicar los movimientos de los electrones que se hallan en lo profundo del átomo y que originan los rayos X. Después, el estudio de estos rayos nos llevará a desarrollar el concepto de número atómico.

A continuación trataremos las reglas que permiten construir átomos con muchos electrones y veremos cómo aplicarlas para determinar la disposición de los elementos en la tabla periódica. Después describiremos algunos experimentos concernientes a las propiedades de los átomos y demostraremos que los resultados pueden interpretarse a partir de la teoría cuántica del átomo. Finalmente usaremos la información obtenida de la estructura del átomo para analizar el funcionamiento de un láser de helio-neón.

48-1 EL ESPECTRO DE RAYOS X DE LOS ÁTOMOS

Hasta ahora nos hemos concentrado en los movimientos del electrón en el átomo de hidrógeno. En seguida vamos a estudiar los átomos con más de un electrón y los movimientos de los electrones que se encuentran en el interior de tales átomos. Pasamos de una región de relativamente baja energía de enlace (por ejemplo, se requieren 5 eV de trabajo para extraer el electrón de valencia en el átomo) a otra de más energía (digamos 70 keV para extraer un electrón ubicado en la capa más profunda de un átomo de tungsteno). Aun cuando sigan formando parte del espectro electromagnético, la longitud de onda de las radiaciones emitidas por los electrones ubicados en las capas más profundas difieren radicalmente; por ejemplo, de $\sim 6 \times 10^{-7}$ m en las líneas del doblete de sodio a $\sim 2 \times 10^{-11}$ m en uno de las radiaciones características del tungsteno, una razón aproximada de 3×10^4. La radiación de la tan corta longitud de onda cae dentro de la región de los rayos X del espectro. En la figura 48-1 se muestra el espectro de los rayos X que se produce cuando se permite que los electrones de 35 keV choquen contra un blanco de molibdeno.

El espectro continuo de rayos X

Examinaremos primero el espectro continuo de la figura 48-1, sin considerar, por ahora, los dos picos prominentes que se elevan sobre él. Tomemos un electrón de energía cinética K que pasa cerca del núcleo de uno de los átomos de molibdeno que forman el blanco, según se observa en la figura 48-2. En tal colisión el electrón pierde energía cinética, que aparece como la energía hf de un fotón de rayos X que irradia lejos del sitio del

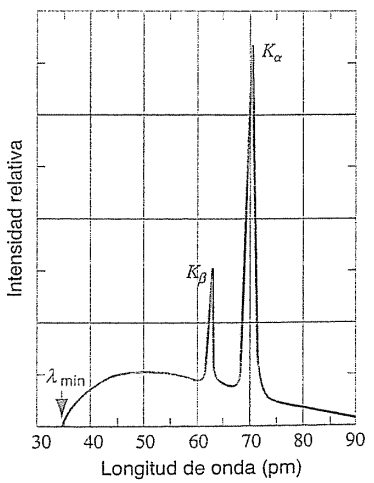


FIGURA 48-1. Distribución de la longitud de onda que resulta cuando se bombardea un blanco de molibdeno con electrones de 35 keV. Nótese la longitud de onda mínima perfectamente definida.

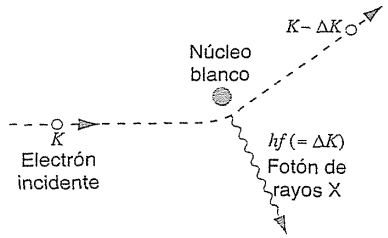


FIGURA 48-2. El espectro continuo de rayos X consta de fotones generados cuando los electrones incidentes pasan cerca de los núcleos individuales blanco, perdiendo energía al hacerlo.

encuentro. (Podemos no tener en cuenta la energía adquirida por el núcleo relativamente masivo de molibdeno.) A esa radiación se le llama *bremsstrahlung* (expresión alemana que significa *radiación de frenado*) y explica el espectro continuo de rayos X.

Una característica sobresaliente del espectro continuo de la figura 48-1 es la netamente definida longitud de onda de corte $\lambda_{mín}$ debajo de la cual no existe el espectro continuo. Esta longitud de onda mínima corresponde a un evento en que uno de los electrones incidentes (con energía cinética $e\Delta V$, adquirida al acelerar a través de la diferencia de potencial ΔV) pierde *toda* su energía en un solo encuentro, irradiándola como un fotón individual. Por tanto,

$$eV = hf_{máx} = \frac{hc}{\lambda_{mín}}$$

o

$$\lambda_{mín} = \frac{hc}{e\,\Delta V}. \qquad (48\text{-}1)$$

Puesto que la constante de Planck h aparece en la ecuación 48-1, la existencia misma de una longitud de onda mínima es un fenómeno cuántico.

Si cambiamos el material blanco, quizá el molibdeno por el cobre, la forma y la intensidad generales del espectro continuo se alterarán, *no* así la longitud de onda de corte. Depende exclusivamente de la energía cinética de los electrones que bombardean al blanco y no del material blanco.

El espectro característico de los rayos X

Ahora vamos a concentrarnos en los dos picos de la figura 48-1, denotados por K_α y K_β. Estos picos caracterizan al material blanco y, junto con otros que aparecen en las longitudes de onda más largas y que no se incluyen en la figura 48-1, forman el *espectro característico de los rayos X* del elemento blanco.

He aquí cómo se producen los fotones de los rayos X: 1) un electrón energético choca contra un átomo blanco y expulsa uno de los electrones situados en la capa más profunda del alambre blanco. Si el electrón se halla en la capa $n = 1$ (por razones históricas conocida como capa K), en esta capa quedará un vacío o un "hoyo" como lo llamaremos. 2) Uno de los electrones externos penetra para llenarlo y en el proceso el átomo emite el fotón típico de los rayos X. Si el electrón cae en la capa con $n = 2$ (denominada capa L), tendremos la línea K_α de la figura 48-1; si cae de la siguiente capa más externa (denominada capa M), tendremos la línea K_β y así sucesivamente. Por supuesto la transición dejará un hoyo en la capa L o M, pero lo llenará un electrón proveniente de una región más distante del átomo.

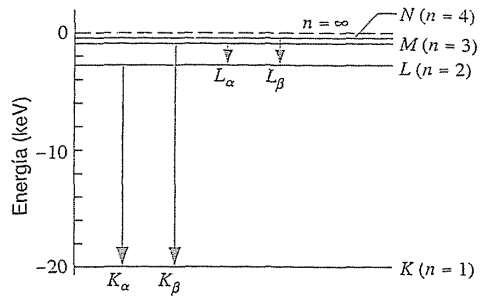


FIGURA 48-3. Diagrama de niveles energéticos atómicos del molibdeno, donde se muestran las transiciones que representan su espectro característico de rayos X. Todos los niveles, excepto el nivel K, tienen varios componentes cercanos; éstos no aparecen en la figura.

En la figura 48-3 se ve un diagrama de niveles de energía del molibdeno, elemento que se emplea como blanco para crear el espectro de la figura 48-1. La flecha marcada K_α muestra el resultado de un electrón proveniente de la capa L ($n = 2$) que cae para llenar el hueco en la capa K. Las energías de estos niveles son $E_2 = -2.6$ keV y $E_1 = -20.0$ keV. La energía del fotón K_α emitido cuando el electrón efectúa este salto será entonces $E = E_2 - E_1 = 17.4$ keV, típica de los fotones en la región de rayos X del espectro electromagnético. La longitud de onda correspondiente a esta energía del fotón mide 71 pm, correspondiente al sitio donde el pico marcado K_α aparece en la figura 48-1.

En vez de un electrón proveniente de la capa L, otro procedente de la capa M puede caer para llenar el hueco de la capa K. Este salto se indica con la flecha marcada K_β en la figura 48-3. Sabiendo que la energía de M ($n = 3$) es −0.4 keV, el lector debe ser capaz de demostrar que la longitud de onda del fotón de rayos X K_β coincide con el pico correspondiente de la figura 48-1.

En el caso del rayo X K_α, un hoyo quedará en la capa L cuando el electrón salte y baje para llenar el hueco en la capa K. Este hueco pueden llenar los electrones procedentes de niveles de energía más altos. Dos de esos saltos (desde las capas M y N) se indican en la figura 48-3 como rayos X L_α y L_β. ¿Puede explicar por qué los picos L_α y L_β no aparecen en la figura 48-1?

PROBLEMA RESUELTO 48-1. Calcule la longitud de onda $\lambda_{mín}$ en el espectro continuo de rayos X emitido cuando electrones de 35 keV inciden sobre un blanco de molibdeno, como se muestra en la figura 48-1.

Solución Por medio de la ecuación 48-1 obtenemos

$$\lambda_{mín} = \frac{hc}{e\,\Delta V} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(35.0 \times 10^{3}\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}$$

$$= 3.55 \times 10^{-11}\ \text{m} = 35.5\ \text{pm}.$$

El valor anterior concuerda con el resultado experimental marcado como $\lambda_{mín}$ en la figura 48-1. (Nótese que la magnitud del segundo conjunto de paréntesis en el denominador es un factor de conversión.)

48-2 LOS RAYOS X Y LA NUMERACIÓN DE LOS ELEMENTOS

Desde la época de Mendeleev (1834-1907) los elementos se listaban en la tabla periódica por orden de *peso atómico* creciente. Un problema consistía en que, en varios casos, había que cambiar el orden riguroso para mantener la semejanza de las propiedades químicas en las columnas verticales de las tablas. El joven físico británico H. G. J. Moseley, cuya prometedora carrera de investigador fue truncada a los 27 años de edad por la bala de un francotirador durante la Primera Guerra Mundial, creó el concepto de *número atómico* (símbolo Z) y demostró que estos problemas desaparecían si la tabla se organizaba por orden de Z creciente. En efecto, probó cómo armar los elemento en una línea y asignarles un número. Su método se basaba en la medición y el análisis de los rayos X característicos de los elementos.

En sus investigaciones Moseley midió la longitud de onda de los rayos X representativos del mayor número posible de elementos (logró encontrar 38), usándolos como blanco para bombardear con electrones en un tubo de rayos X diseñado por él. Después buscó, y fácilmente detectó, regularidades en los espectros al pasar de un elemento a otro en la tabla periódica. En particular observó que aparecía una línea recta, si para una línea espectral de rayos X como $K\alpha$, graficaba la raíz cuadrada de su frecuencia ($= \sqrt{f} = \sqrt{c/\lambda}$) en función de la posición del elemento dentro de la tabla periódica. La figura 48-4 contiene parte de sus datos. La conclusión que extrajo del conjunto de datos recabados fue la siguiente:

> *Tenemos aquí una prueba de que en el átomo hay una magnitud fundamental, que aumenta con pasos regulares a medida que pasamos de un elemento al siguiente. Esta magnitud no puede ser otra que la carga en su núcleo central.*

Así, Moseley descubrió el concepto y la importancia del número atómico.

Los datos de Moseley, ofrecidos en la figura 48-4, pueden representarse mediante la relación lineal

$$\sqrt{f} = C(Z - 1), \qquad (48\text{-}2)$$

donde C es una constante, y Z la posición numérica del elemento de la tabla periódica. Esta ecuación, que puede obtenerse de la teoría cuántica híbrida de Bohr, se adecúa muy bien a los datos.

Apreciamos en su cabal trascendencia la hazaña de Moseley si recordamos lo que en su época (1913) se sabía de la estructura del átomo. Apenas dos años antes, Rutherford había propuesto el modelo nuclear. Poco se sabía sobre la magnitud de la carga nuclear o del arreglo de los electrones.

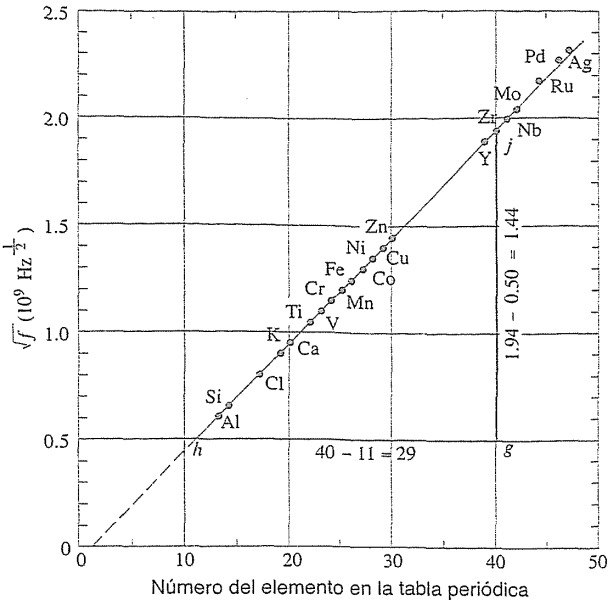


FIGURA 48-4. Diagrama de Moseley para la línea K_α del espectro de rayos X de 21 elementos. La frecuencia se determina a partir de la longitud de onda medida.

Todavía no se había descubierto la mecánica cuántica. La tabla periódica contenía varios cuadros vacíos y habían proliferado las propuestas de nuevos elementos. Todavía no se clasificaban debidamente los elementos de tierras raras, por los problemas que planteaban sus propiedades químicas similares. Gracias al trabajo de Moseley, el espectro característico de los rayos X se convirtió en la firma universalmente aceptada de un elemento.

No es difícil entender por qué el espectro característico de los rayos X ofrece regularidades tan notables de un elemento a otro, no así el espectro visible. La clave para identificar un elemento es la carga de su núcleo; ésta determina el número de sus electrones y, por consiguiente, sus propiedades químicas. Por ejemplo, la naturaleza del oro se debe a que sus átomos poseen una carga nuclear de $+79e$. Si tuviera una unidad más de carga, ya no sería oro sino mercurio; si tuviera una menos, sería platino. Los electrones de la capa K, que intervienen de manera tan importante en la generación de los espectros característicos de los rayos X, se hallan muy cerca del núcleo y son pruebas sensibles de su carga. En cambio, el espectro visible se relaciona con las transiciones de los electrones externos, que están fuertemente blindados o "apantallados" del núcleo por acción de los electrones restantes; no son una prueba sensible de la carga nuclear.

La teoría de Bohr y el diagrama de Moseley

La teoría de Bohr se aplica bien al hidrógeno, pero no a los átomos que tienen más de un electrón (en parte porque no abarca la interacción de repulsión entre los electrones). Pese

a ello, ofrece una excelente primera aproximación al explicar el diagrama de Moseley de la figura 48-4.

Supongamos un electrón en la capa L de un átomo que está a punto de dirigirse hacia el interior del hoyo en la capa K, emitiendo al hacerlo un fotón de rayos X $K\alpha$. Por medio de la ley de Gauss (Ec. 27-16), comprobamos que el campo eléctrico en el sitio del electrón L está determinado por la carga encerrada dentro de una esfera imaginaria de radio igual a la coordenada radial del electrón L. Esta esfera encierra una carga $+Ze$ procedente del núcleo y otra $-e$ procedente del electrón K individual restante. Decimos que el electrón K "apantalla" la carga del núcleo. En parte por esa acción y por el reajuste que tiene lugar en la nube del electrón en su conjunto, el número atómico efectivo en las vueltas de transición resulta ser $Z - b$, donde $b \approx 1$.

La fórmula de Bohr al aplicarla a la frecuencia de la radiación correspondiente a una transición en un átomo semejante al hidrógeno entre dos niveles atómicos cuya energía difiera en ΔE será

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2h^3}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right), \qquad (48\text{-}3)$$

cuando se emplea la ecuación 47-23 para los niveles de energía. En la transición $K\alpha$ de la figura 48-3 podemos reemplazar Z por $Z - b$; n_f por 1, y n_i por 2. Y así obtenemos

$$f = \frac{m(Z-b)^2e^4}{8\epsilon_0^2h^3}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$$

Al tomar la raíz cuadrada de ambos lados nos queda

$$\sqrt{f} = \left(\frac{3me^4}{32\epsilon_0^2h^3}\right)^{1/2}(Z - b), \qquad (48\text{-}4)$$

podemos escribirlo de la siguiente forma

$$\sqrt{f} = C(Z - 1), \qquad (48\text{-}5)$$

donde C es la constante indicada y $b \approx 1$.

La ecuación 48-5 representa una línea recta; esto coincide a la perfección con los datos experimentales de la figura 48-4. Pero si este diagrama se extiende a números atómicos más altos, resulta que dicha ecuación representa una línea no tan recta sino una un poco cóncava, hacia arriba. No obstante, sigue siendo extraordinaria la compatibilidad cuantitativa con la teoría de Bohr, como se comprueba en el problema resuelto 48-2.

PROBLEMA RESUELTO 48-2. Calcule el valor de la constante C en la ecuación 48-5 y compárelo con el de la pendiente medida de la línea recta en la figura 48-4.

Solución La comparación de las ecuaciones 48-4 y 48-5 nos permite escribir

$$C = \left(\frac{3me^4}{32\epsilon_0^2h^3}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})^{1/2}(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{4\sqrt{2}\,(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^{3/2}}$$

$$= 4.95 \times 10^7\ \text{Hz}^{1/2}.$$

Una medición rigurosa de la figura 48-4, por medio del triángulo hgj, nos da una pendiente igual a

$$\frac{gj}{hg} = \frac{(1.94 - 0.50) \times 10^9\ \text{Hz}^{1/2}}{(40 - 11)} = 4.96 \times 10^7\ \text{Hz}^{1/2},$$

resultado que coincide con el valor predicho por la teoría de Bohr dentro de la incertidumbre de la medición gráfica. Nótese asimismo que la intersección de la figura 48-4 de hecho se aproxima a 1, según lo previsto por el argumento de "apantallamiento".

La coincidencia con la teoría de Bohr no es tan rigurosa en otras líneas del espectro de rayos X, correspondientes a las transiciones de electrones más alejados del núcleo; aquí debemos utilizar los cálculos basados en la mecánica cuántica.

PROBLEMA RESUELTO 48-3. Se bombardea un blanco de cobalto con electrones y se miden las longitudes de onda de su espectro característico de rayos X. También se obtiene un segundo espectro, menos característico, que se debe a una impureza del blanco. Las longitudes de onda de $K\alpha$ son 178.9 pm (cobalto) y 143.5 pm (impurezas). ¿Cuál es su impureza?

Solución Apliquemos la ecuación 48-2 al cobalto y a la impureza X. Al hacer $f = c/\lambda$, obtenemos

$$\sqrt{\frac{c}{\lambda_{Co}}} = C(Z_{Co} - 1) \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{c}{\lambda_X}} = C(Z_X - 1).$$

Al dividir queda

$$\sqrt{\frac{\lambda_{Co}}{\lambda_X}} = \frac{Z_X - 1}{Z_{Co} - 1}$$

y al sustituir los valores dados obtenemos

$$\sqrt{\frac{178.9\ \text{pm}}{143.5\ \text{pm}}} = \frac{Z_X - 1}{27 - 1}.$$

Y al resolver para la incógnita encontramos $Z_X = 30.0$. Una ojeada a la tabla periódica nos dice que la impureza es zinc.

48-3 CONSTRUCCIÓN DE ÁTOMOS

En la sección anterior vimos cómo armar los elementos en una línea continua, asignándole a cada uno un número atómico Z. Ahora vamos a aplicar los principios de la mecánica cuántica para dividir la línea en segmentos correspondientes a los periodos horizontales de la tabla (Ap. E).

Tendremos un éxito completo en nuestro esfuerzo. Todos los detalles de la tabla periódica pueden explicarse, entre ellos 1) los números de los elementos en los siete periodos horizontales de la tabla, 2) la semejanza de las propiedades químicas en varias columnas verticales y 3) la existencia de la serie de lantánidos y actínidos, reunidos en un solo cuadrado de la tabla. En una palabra, la mecánica cuántica complementada con algunos principios rectores explica todos los aspectos de la tabla y, por tanto, toda la química.

Planeamos comenzar con un núcleo de carga $+Ze$ y después, al agregarle Z electrones, construir un átomo neutral en su estado base. El éxito estará asegurado si nos guiamos por las tres reglas siguientes de la construcción de átomos:

1. *El principio del número cuántico:* pueden emplearse los cuatro números cuánticos (n, l, m_l, m_s) que se establecieron con el átomo de hidrógeno para identificar los estados cuánticos de los electrones individuales en los átomos con muchos electrones. Más aún, se aplican las restricciones entre estos números; éstas están contenidas en la tabla 47-2.

2. *El principio de exclusión de Pauli:* este poderoso principio, propuesto en 1925 por el físico austriaco Wolfgang Pauli (1900-1958), establece que en un átomo con muchos electrones, dos electrones no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos. En caso de que no fuera válido este principio, todos los electrones del átomo se acumularían en su capa K y la química tal como la conocemos no existiría, pues todos los átomos tendrían las mismas propiedades químicas. No serían posibles los procesos bioquímicos, ni siquiera los que permiten la existencia del hombre.

3. *El principio de energía mínima:* al llenar con electrones los estados cuánticos disponibles, surge la pregunta: ¿en qué orden deberíamos llenarlas? La respuesta siguiente es: al agregar un electrón, se debe ponerlo en cualquier estado cuántico vacío que produzca un átomo con la menor energía. Si no se lleva a cabo, el átomo no se hallará en su estado base. La subcapa de energía mínima se identifica con ayuda de la siguiente regla: para un número cuántico n dentro de un átomo de muchos electrones, el orden de la energía creciente de las subcapas es el de l creciente. (Pero como veremos en la siguiente sección, los estados no siempre se llenan en el orden de n creciente.)

Tomemos, por ejemplo, la capa definida por $n = 4$ en un átomo neutro de plomo. (Sus electrones de valencia tienen $n = 6$, por lo cual los electrones $n = 4$ se encuentran en la mitad de la nube untada de electrones que rodean al núcleo de plomo.) Una capa con $n = 4$ tiene cuatro subcapas, correspondientes a $l = 0, 1, 2$ y 3 que designamos como $4s$, $4p$, $4d$ y $4f$, respectivamente.

La energía de enlace de los electrones en esas subcapas puede calcularse experimentalmente midiendo los espectros característicos de rayos X del átomo de plomo. La tabla 48-1 muestra los resultados. El estado $4s$ presenta la energía más pequeña de los cuatro. Es decir, en él se debe agregar una energía de 890 eV para extraer un electrón del estado $4s$ de un átomo de plomo. En el otro límite, se necesita una energía apenas de 140 eV para extraerlo del estado $4f$.

TABLA 48-1 Energías de electrones con $n = 4$ en un átomo de plomo ($Z = 82$)

Número cuántico principal n	*Número cuántico orbital l*	*Energía (eV)*
4	0 ($4s$)	− 890
4	1 ($4p$)	− 710
4	2 ($4d$)	− 420
4	3 ($4f$)	− 140

Si quisiéramos examinar los diagramas de densidad de probabilidad relativos a los cuatro estados de la tabla 48-1, descubriríamos que, cuanto más bajo sea el valor de l, existen mayores probabilidades de encontrar los electrones cerca del núcleo de plomo. Algunos electrones cercanos "ven" la carga nuclear efectiva más alta y su ligadura más fuerte; tienen menos energía, como lo indican el principio de energía mínima y el ejemplo de la tabla 48-1.

48-4 LA TABLA PERIÓDICA

La figura 48-5 muestra cómo elaborar la tabla periódica aplicando las reglas de las construcción de átomos que acabamos de exponer en la sección anterior. La energía aumenta hacia arriba en la figura. Los estados con el mismo valor l han sido desplazados a la izquierda y agrupados en columnas. Los bloques sombreados representan los periodos horizontales de la tabla periódica.

La dependencia de la energía respecto a l es el rasgo dominante de la figura 48-5. Observe, por ejemplo, la secuencia $4s$, $4p$, $4d$ y $4f$. Aunque esos estados tienen el mismo número cuántico principal, no poseen igual energía. Su energía crece con l y, de hecho, los estados $4f$ son tan altos que se hallan arriba de los estados $5s$ y $5p$, que presentan un valor de n mayor.

Comenzando con el hidrógeno ($Z = 1$) en la figura 48-5 y siguiendo la línea curva, vemos cómo se construyen los siete periodos horizontales de la tabla, cada uno de los cuales empieza con un metal alcalino y termina con un gas inerte. El sexto periodo largo, por ejemplo, principia con el cesio metálico alcalino ($Z = 55$) y termina con el gas inerte radón ($Z = 86$). Como lo indica la línea curva, el orden en que se llenan las subcapas es $6s$, $4f$, $5d$ y $6p$.

El sexto periodo contiene una serie de 14 elementos (de $Z = 57$ a $Z = 70$), enlistados por separado en el fondo de la tabla periódica en el apéndice E. Estos elementos son las *tierras raras*, llamados también *lantánidos* por el nombre del elemento lantano con que comienza la serie. Las propiedades químicas de estos elementos se parecen tanto que fueron agrupados en un solo cuadrado de la tabla. La semejanza se debe a que, mientras que los estados $4f$ se llenan en lo profundo dentro de la nube de electrones, permanece en su sitio una pantalla exterior de uno o dos electrones $6s$. Son estos electrones más externos los que rigen las propiedades químicas del átomo. Una serie similar (los *actínidos*) ocurre en el séptimo periodo; en este caso, los electrones más externos de la pantalla exterior se hallan en el estado $7s$.

El número máximo de electrones en una subcapa determinada es $2(2l + 1)$. Si cuenta el número de elementos en cada una de las subcapas de la figura 48-5, comprobará que obedecen esta regla. En otras palabras, 2 para los estados s ($l = 0$), 6 para los estados p ($l = 1$), 10 para los estados d ($l = 2$) y 14 para los estados f ($l = 3$).

Configuración electrónica de los elementos

La figura 48-5 nos permite establecer la *configuración electrónica* de varios elementos y así nos indica algo en torno a

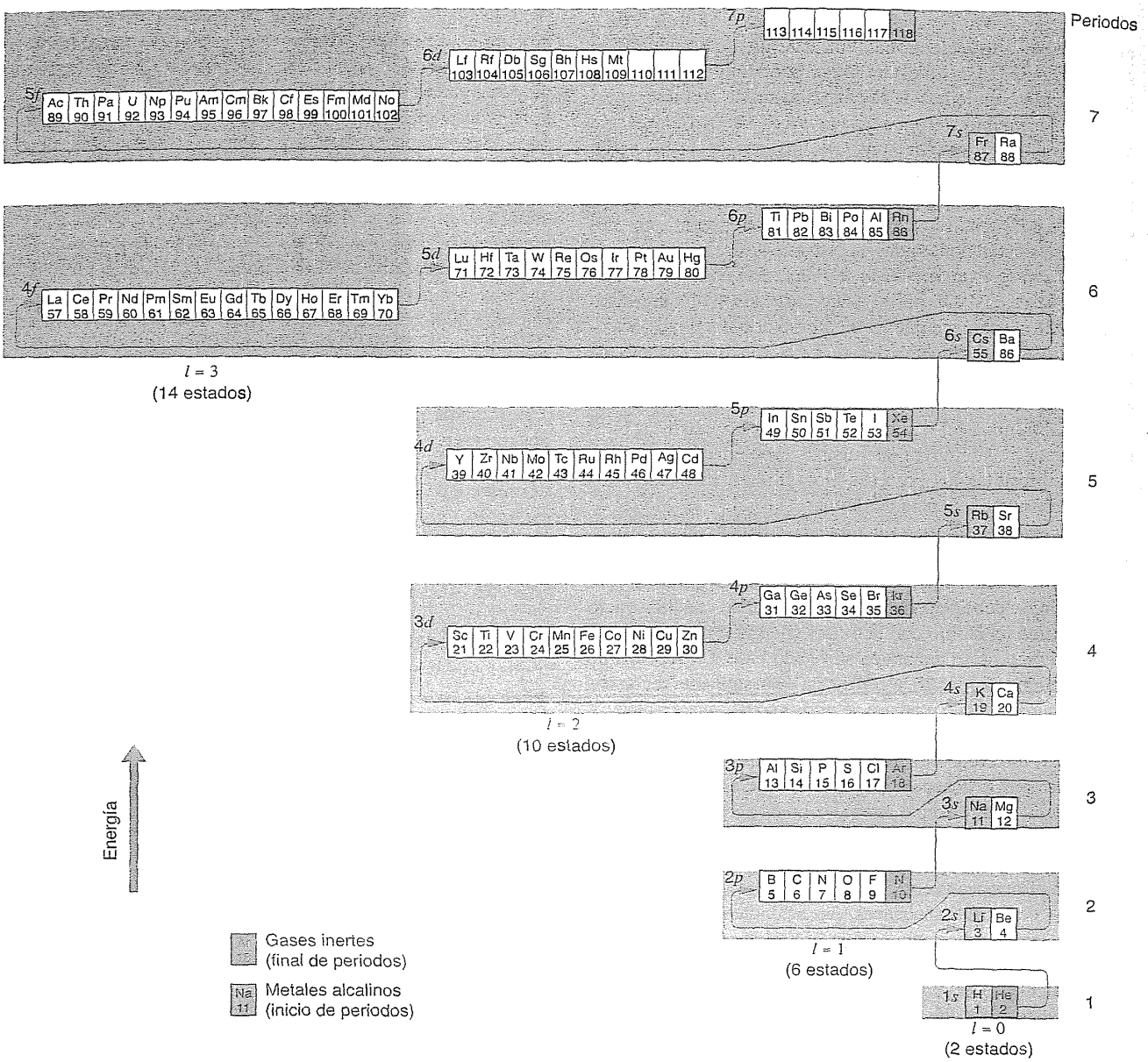


FIGURA 48-5. Comenzando con el hidrógeno en la parte inferior, la línea curva cruza los siete periodos horizontales (sombreados) de la tabla. Cada periodo empieza con un metal alcalino y termina con un gas inerte.

sus propiedades químicas. Consideremos tres de ellas que se consiguen comenzando en la parte inferior de la figura 48-5 y avanzando hacia arriba hasta llegar al elemento en cuestión; al hacerlo se cuentan las subcapas:

Flúor	$Z = 9$	$1s^2\ 2s^2\ 2p^5$
Neón	$Z = 10$	$1s^2\ 2s^2\ 2p^6$
Sodio	$Z = 11$	$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1$

En esta notación, el primer número de cada grupo (digamos $1s^2$) es el número cuántico principal n, que define una capa; la letra es el código del número cuántico del momento angular, que define la subcapa; el superíndice indica el número de electrones que ocupan esa subcapa. Así pues, $1s^2$ indica 2 electrones en la subcapa $1s$. La suma de los superíndices corresponde al número atómico del elemento en cuestión.

A manera de ejemplo, los seis electrones en el estado $2p$ del neón tienen $n = 2$ y $l = 1$. Por tanto, el neón cuenta con una subcapa llena $2p$, configuración sumamente estable. El neón es, por ello, un gas inerte; en la generalidad de los casos no forma compuestos con otros elementos. También lo son

los elementos que están arriba del neón en la figura 48-5 y en la tabla periódica del apéndice E.

El flúor, en cambio, tiene un "hoyo" en su subcapa $2p$. Esta última puede alojar seis electrones pero en el flúor sólo hay cinco. Así, este elemento acepta un electrón y forma compuestos con otros que pueden dárselo.

El sodio tiene un solo electrón en la subcapa $3s$, fuera de un núcleo interno inerte semejante al neón. Forma fácilmente compuestos con elementos que presentan un solo "hoyo" disponible para aceptar este electrón de valencia. El fluoruro de sodio (NaF), por ejemplo, es un compuesto particularmente estable.

Hay pequeñas desviaciones esporádicas de la configuración electrónica que pueden deducirse de la figura 48-5. Una de ellas ocurre en el cobre ($Z = 29$), que según la figura 48-5 debería presentar la configuración

$$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,4s^2\,3d^9.$$

Sin embargo, resulta que desde el punto de vista energético es preferible terminar de llenar la subcapa $3d$ (que pueden contener 10 electrones y sólo tiene 9 en la configuración mencionada), antes de poner electrones en la subcapa $4s$. Así pues, la configuración electrónica real del cobre es

$$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^1.$$

A este electrón individual $4s$ se debe la gran conductividad eléctrica del cobre. Hay otros ejemplos de esta clase de desviaciones de la configuración.

Se da el nombre de *energía de ionización* a la que se necesita para extraer al electrón menos sólidamente ligado de un átomo en su estado base. La figura 48-6 muestra las energías de ionización de los elementos. Nótese que, en cada subcapa, la energía de ionización aumenta de modo estacionario y alcanza un máximo en un gas inerte, produciéndose una fuerte caída al siguiente elemento alcalino. Así, el sodio tiene una energía de ionización de 5.14 eV. Se debe suministrar una energía mucho más grande (47.3 eV) para extraer un *segundo* electrón del sodio; una vez hecho esto, el ion sodio presenta una configuración similar a la del neón; ésta es muy estable, pues consta de tres subcapas llenas.

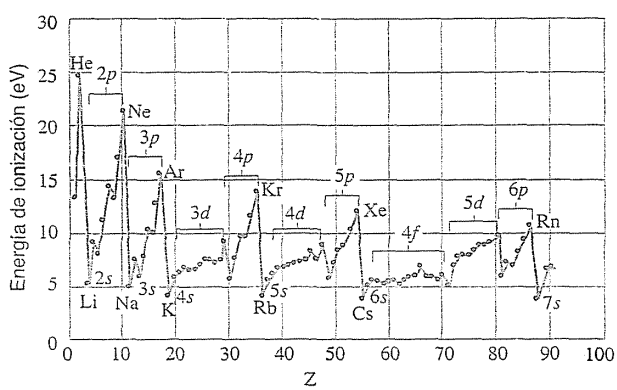


FIGURA 48-6. Energías de ionización de los elementos, graficadas en función de su número atómico. Se indican las subcapas de los electrones extraibles.

Estados excitados y las transiciones ópticas

Hasta ahora nos hemos referido principalmente a la configuración de energía mínima o de estado base de los átomos. Cuando le agregamos energía a un átomo, quizá al colocarlo en un tubo de descarga eléctrica o al bombardearlo con radiación, es posible elevarlo a uno de sus estados de mayor energía.

Las diferencias de energía entre el estado base y los siguientes estados de mayor energía, a los cuales puede llevarse el electrón exterior excitándolo, suelen ser del orden de unos pocos electrovolts. Cuando el electrón vuelve a su estado base, emite una radiación cuya energía de fotón (igual a la diferencia entre las energías del estado excitado y el estado base) se halla en el intervalo eV, correspondiente a la luz visible. Por tal razón, a esos cambios de su estado se les conoce como *transiciones ópticas.*

La figura 48-7 muestra los estados excitados de un electrón individual de valencia de sodio y algunas transiciones posibles. (No todas están dentro del intervalo visible.) Nótese que simplemente no ocurren muchas transiciones posibles desde el punto de vista energético. Dos ejemplos: no se da transición entre el nivel $5s$ y el nivel $4s$, ni tampoco entre los niveles $4d$ y $4s$. Una vez determinadas las funciones de onda de varios estados, será posible calcular las probabilidades de que haya transiciones entre ellas. Cuando lo hacemos, de las matemáticas nacen algunas reglas denominadas *reglas de selección.* La más importante en relación con la figura 48-7 es la siguiente: el número cuántico del momento angular orbital del electrón que realiza la transición deberá cambiar sólo en una unidad, o sea

$$\Delta l = \pm 1. \qquad (48\text{-}6)$$

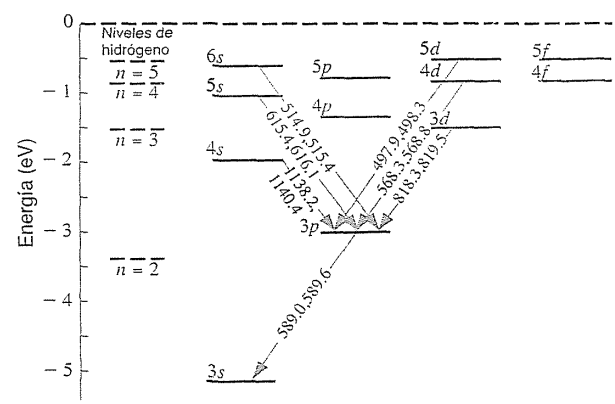


FIGURA 48-7. Diagrama de niveles de energía para el electrón de valencia del sodio. Los niveles se distribuyen lateralmente, de manera que cada columna vertical contiene sólo los del mismo número cuántico del momento angular orbital. Las flechas indican algunas transiciones que pueden emitirse, marcadas con su longitud de onda en nm. (El nivel $3p$ consta, en realidad, de dos estados muy poco espaciados, por lo cual todas las transiciones que lo contienen poseen dos componentes cuya longitud de onda difiere ligeramente; véase la Sec. 48-8.)

Una transición del nivel $5s$ a $4s$ implica $\Delta l = 0$ y otra del nivel $4d$ a $4s$ implica $\Delta l = -2$. Las transiciones anteriores violan la regla de selección de la ecuación 48-6. Las reglas de selección no son absolutas: puede haber transiciones que las violen, pero la intensidad de la radiación emitida suele ser muy débil.

48-5 MAGNETISMO ATÓMICO

En el capítulo hemos venido comentando lo que podemos aprender acerca de las propiedades de los átomos efectuando experimentos para medir sus niveles de energía, observando generalmente la longitud de onda o la energía de los fotones emitidos cuando un electrón hace la transición de un estado energético a otro. Las propiedades del momento angular del átomo se estudian en la forma más directa colocándolo dentro de un campo magnético. En la presente sección y en la siguiente vamos a explicar cómo el momento angular orbital y de espín influyen en la estructura magnética del átomo. Más adelante veremos que un campo magnético afecta además a la longitud de onda de los fotones emitidos.

Conviene comenzar la exposición usando el modelo híbrido de Bohr, donde el electrón se ve en su órbita como una diminuta espira de corriente (Secs. 35-1 y 35-3). Según señalamos en la ecuación 35-10, el momento dipolar magnético de la espira es (en la notación actual)

$$\vec{\mu}_l = -\frac{e}{2m}\vec{\mathbb{L}}, \tag{48-7}$$

donde $\vec{\mu}$ es un vector que representa el momento dipolar magnético, y $\vec{\mathbb{L}}$ el vector del momento angular orbital del electrón. El signo negativo se debe a la carga negativa del electrón.

Como se mencionó en la sección 47-6, el principio de incertidumbre limita nuestro conocimiento de $\vec{\mathbb{L}}$ a su magnitud y a una cualquier componente. Se acostumbra escoger el componente z como el que se mide; de ahí que la ecuación 48-7 pueda escribirse tomando su componente z como

$$\mu_{lz} = -\frac{e}{2m}L_z. \tag{48-8}$$

Aunque la ecuación 48-8 se obtuvo en forma semiclásica, continúa siendo correcta en la mecánica cuántica.

Los valores permitidos de L_z están dados por la ecuación 47-30 como $m_l h/2\pi$ y por ello la ecuación 48-8 queda así

$$\mu_{lz} = -\frac{e}{2m}\frac{m_l h}{2\pi} = -m_l\frac{eh}{4\pi m}. \tag{48-9}$$

Podemos expresar el momento dipolar magnético en función del *magnetón de Bohr* μ_B, que se define como

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9.274 \times 10^{-24}\ \text{J/T}. \tag{48-10}$$

Del mismo modo que el radio de Bohr es una medida útil de la distancia de la escala atómica, también el magnetón de Bohr es una medida útil de los momentos magnéticos del átomo. Así, la ecuación 48-9 se transforma en

$$\mu_{lz} = -m_l\mu_B, \tag{48-11}$$

donde m_l adopta los valores dados por la ecuación 47-29.

Si quisiéramos poner un átomo con un momento dipolar magnético $\vec{\mu}_l$ dentro de un campo magnético $\vec{\mathbb{B}}$, que suponemos sigue la dirección z, la energía atribuible a la interacción entre el átomo y el campo magnético será $U = -\vec{\mu}_l \cdot \vec{\mathbb{B}} = -\mu_{lz}B_z = m_l\mu_B B_z$. Es decir, los átomos con varios valores de m_l poseen diferente energía en el campo; esto permite determinar su momento angular orbital.

No es posible emplear el modelo semiclásico para efectuar un cálculo similar en el caso del momento angular del espín; pero se obtiene un resultado parecido mediante un cálculo completo basado en la mecánica cuántica. El momento dipolar magnético causado por el espín es

$$\mu_{sz} = -g_s m_s \mu_B. \tag{48-12}$$

El factor g_s que aparece en la ecuación 48-12, no aparece en la ecuación del momento dipolar magnético orbital. A semejanza del espín, es sólo un factor de la mecánica cuántica que no cuenta con un equivalente en la mecánica clásica. Su valor se aproxima mucho a 2, a diferencia del coeficiente de la ecuación 48-11 que es 1.

El conocimiento del valor exacto de g_s es decisivo, pues puede calcularse a partir de la teoría que combina la mecánica cuántica con el electromagnetismo. El valor calculado en forma teórica es $g_s = 2.0002319305$, y el valor experimental $g_s = 2.00023193043\overline{7}$. En ambos casos, la incertidumbre es aproximadamente una unidad en el último dígito. El cálculo de un factor tan importante hasta 11 cifras significativas y su verificación experimental representa un triunfo que se debe a los métodos de la mecánica cuántica y a las habilidades del experimentador.

El experimento de Einstein-de Haas

Una barra ordinaria de hierro no presenta propiedades magnéticas externas porque sus imanes atómicos elementales están dispuestos al azar, cancelando sus efectos todos los puntos externos. Pero cuando alineamos los imanes, como sucede en un imán de barra, su fuerza magnética combinada está a la vista de todos; por ejemplo, pueden recogerse objetos pequeños como las grapas para papel.

Cuando se alinean los momentos magnéticos de un sistema de átomos, lo mismo debe suceder con sus momentos angulares, a los que están rígidamente acoplados. Dado que las dos magnitudes están firmemente acopladas entre sí, el magnetismo del átomo ofrece un "medio" cómodo que permite analizar su momento angular.

En 1915 Einstein, en colaboración con el físico holandés W. J. de Haas, efectuó un experimento para examinar esta relación entre el magnetismo del átomo de hierro y su momento angular. Recuerde lo siguiente: cuando lo realizaron, todavía no se descubría la mecánica cuántica, hacia apenas dos años que Bohr había propuesto su teoría provisional del átomo de hidrógeno y se desconocía la existencia del momento angular de espín del electrón.

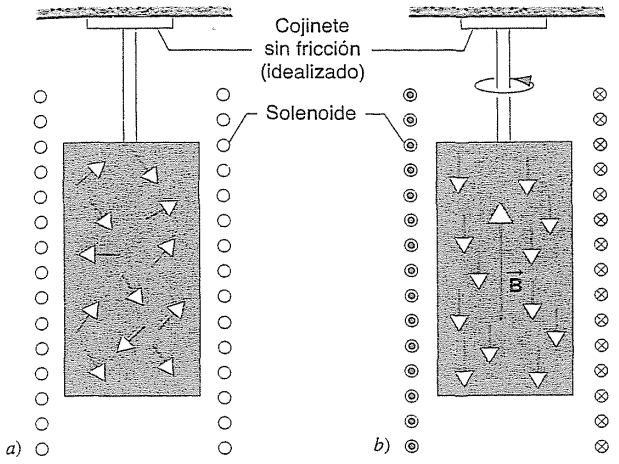


FIGURA 48-8. Adaptación idealizada del experimento efectuado por Einstein y de Haas. *a)* Se suspende dentro del solenoide un cilindro de hierro que puede girar libremente. *b)* Cuando se activa el campo magnético, los momentos magnéticos de los átomos de hierro tienden a alienarse, lo mismo que sus vectores del momento angular. Para conservar este último hay que girar el cilindro. El experimento tiene por objeto determinar el factor g de los átomos de hierro.

Si se magnetiza repentinamente una barra de hierro, quizá encendiendo una corriente en un solenoide como en la figura 48-8, se alinean en forma abrupta los momentos magnéticos individuales y, por tanto, también los momentos angulares individuales. La barra debe comenzar a girar en sentido opuesto, pues su momento angular debe conservarse. Este *efecto de Einstein-de Haas,* nombre con el que se le conoce, es pequeño y las mediciones no resultan nada fáciles.

Como nada sabían del espín, Einstein y de Haas esperaban confiadamente que los resultados de su experimento revelaran una relación entre el momento dipolar magnético y el momento angular semejante a la ecuación 48-8 o, en forma equivalente, un coeficiente de unidad en la ecuación 48-11. En cambio, los experimentos posteriores, efectuados con un aparato perfeccionado, indicaron coincidencia con la ecuación 48-12, con $g_s = 1.929 \pm 0.006$. Parece evidente que el experimento mide el momento dipolar magnético del *espín* y no el momento *orbital* del dipolo magnético. Ahora sabemos —cosa que Einstein no podía conocer— que el magnetismo del átomo de hierro depende enteramente de los momentos dipolares magnéticos del espín de sus electrones; los momentos magnético orbitales de los electrones se cancelan y dan cero. Aunque los resultados numéricos de Einstein y de Haas no se acercan a la precisión de mediciones subsecuentes, su experimento demostró, sin la menor duda, la estrecha conexión entre el momento angular y el magnetismo.

PROBLEMA RESUELTO 48-4. Un cilindro no magnetizado de hierro, con un radio $R = 1.0$ mm, está colgado de un soporte, de manera que gire libremente alrededor de su eje (Fig. 48-8*a*). De repente se aplica un campo magnético paralelo al eje, haciendo que los momentos del dipolo magnéticos de los átomos de hierro se alineen paralelamente al campo. Los vectores del momento angular atómicos, que están acoplados y consecutivos a los vectores de momento dipolar magnético, también se alinean y el cilindro empezará a girar en sentido contrario. Calcule T, el periodo de rotación del cilindro. Suponga que cada átomo de hierro posee un momento angular de $h/2\pi$ y que los átomos de hierro están completamente alineados cuando se activa el campo magnético. La masa molar del hierro es $M = 0.0558$ kg/mol.

Solución El momento angular L_{cil} del cilindro giratorio debe tener la misma magnitud (aunque dirección opuesta) que $L_{átomos}$, el momento angular asociado a los átomos alineados. Si N es el número de átomos del cilindro, N_A la constante de Avogadro, y m la masa del cilindro, podemos escribir

$$L_{\text{átomos}} = N\left(\frac{h}{2\pi}\right) = \frac{N_A m}{M}\left(\frac{h}{2\pi}\right).$$

Para el cilindro giratorio tenemos

$$L_{\text{cyl}} = I\omega = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{2\pi}{T}\right),$$

donde I es la inercia rotacional del cilindro alrededor de su eje simétrico, y ω su velocidad angular. Al igualar las dos expresiones y al resolver para T, obtenemos

$$T = \frac{(2\pi^2)R^2M}{N_A h}$$

$$= \frac{(2\pi^2)(1 \times 10^{-3}\text{ m})^2(0.0558\text{ kg/mol})}{(6.02 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1})(6.63 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s})}$$

$$= 2760\text{ s} = 46\text{ min}.$$

En realidad, Einstein y de Haas suspendieron su cilindro de una fibra de torsión y se sirvieron de técnicas más refinadas de observación que las aquí descritas.

48-6 EL EXPERIMENTO DE STERN-GERLACH

El vector del momento angular asociado a un estado atómico puede adoptar sólo algunas direcciones especificadas en el espacio respecto a un eje seleccionado arbitrariamente (Fig. 47-13). Wolfgang Pauli predijo teóricamente este concepto de *cuantización espacial.* En 1922 los alemanes Otto Stern (1888-1969) y Walther Gerlach (1889-1979) intentaron verificar la predicción en forma experimental.

La figura 48-9 muestra el aparato que emplearon Stern y Gerlach. Se vaporiza plata en un "horno" calentado eléctricamente y se dispersan los átomos introduciéndolos en el aparato al vacío por un hoyo pequeño en la pared del horno. Los átomos (eléctricamente neutros pero con un momento magnético) forman un haz estrecho al cruzar una rendija en una pantalla. El haz, así colimado, pasa entonces entre los polos de un electroimán y, finalmente, deposita los átomos de plata en una placa de vidrio que sirve de detector.

Se configuran las caras del polo del imán para hacer el campo magnético lo más *no uniformes* posible. El haz de átomos de plata pasa muy cerca del borde afilado en forma de V

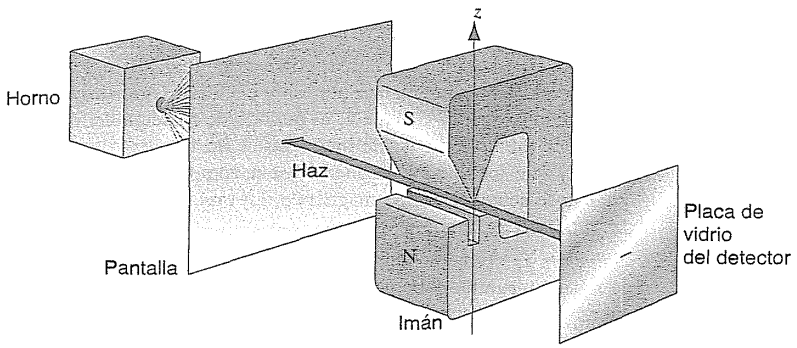


FIGURA 48-9. Aparato de Stern y Gerlach. Un haz de átomos de plata pasa por un campo magnético no uniforme y se deposita en una placa de vidrio. Como los átomos poseen un momento magnético, serán desviados por el campo magnético. El experimento se propone demostrar la realidad de la cuantización espacial.

de la cara superior del polo, donde la no uniformidad del campo alcanza su nivel máximo.

Un dipolo en un campo no uniforme

En la figura 48-10*a* se ve un dipolo de momento magnético $\vec{\mu}$ en un ángulo θ con un campo magnético *uniforme*. Podemos representarlo como un delgado imán de barra, cuyo vector dipolar magnético $\vec{\mu}$ apunta (por convención) de su polo sur a su polo norte. Suponemos que las fuerzas ejercidas por el campo magnético sobre el imán se concentran en sus polos, según se observa en la figura. Vemos que, en un campo uniforme, un par neto actúa sobre el imán (con $\theta \neq 0$ o 180°); sin embargo, sobre el dipolo no opera una fuerza neta sin importar el valor de θ, porque las fuerzas hacia arriba y hacia abajo en los polos tienen la misma magnitud y se cancelan.

Las figuras 48-10*b* y *c* describen la situación en un campo *no uniforme*. Aquí, las fuerzas ascendentes y descendentes no poseen la misma magnitud porque los dos polos están inmersos en campos de intensidad diferente. En este caso *hay* una fuerza neta, cuya magnitud y dirección dependen de la orientación del dipolo, es decir, del valor de θ. En la figura 48-10*b* la fuerza neta es ascendente y en la figura 48-10*c* es descendente. En consecuencia, los átomos de plata en el haz de la figura 48-9, al pasar por el electroimán, se desvían hacia arriba o hacia abajo, según la orientación de sus momentos dipolares magnéticos respecto a la dirección z.

Calculemos ahora la fuerza de deflexión. La energía potencial de un dipolo magnético en un campo magnético $\vec{B}$ está dada por la ecuación 35-6,

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$$

Por simetría (Fig. 48-10*b*, *c*) el campo magnético en la posición del haz no tiene los componentes x ni y. Por tanto, $B = B_z$ y entonces podemos escribir la energía así

$$U = -\mu_z B_z. \tag{48-13}$$

La fuerza neta F_z que actúa sobre el diplo es $-dU/dz$, o sea

$$F_z = \mu_z \frac{dB_z}{dz}. \tag{48-14}$$

Así pues, la fuerza neta no depende de la magnitud del campo sino de su *derivada espacial* llamada también *gradiente*. En las figuras 48-10 *b* y *c*, B_z aumenta junto con z; de ahí que

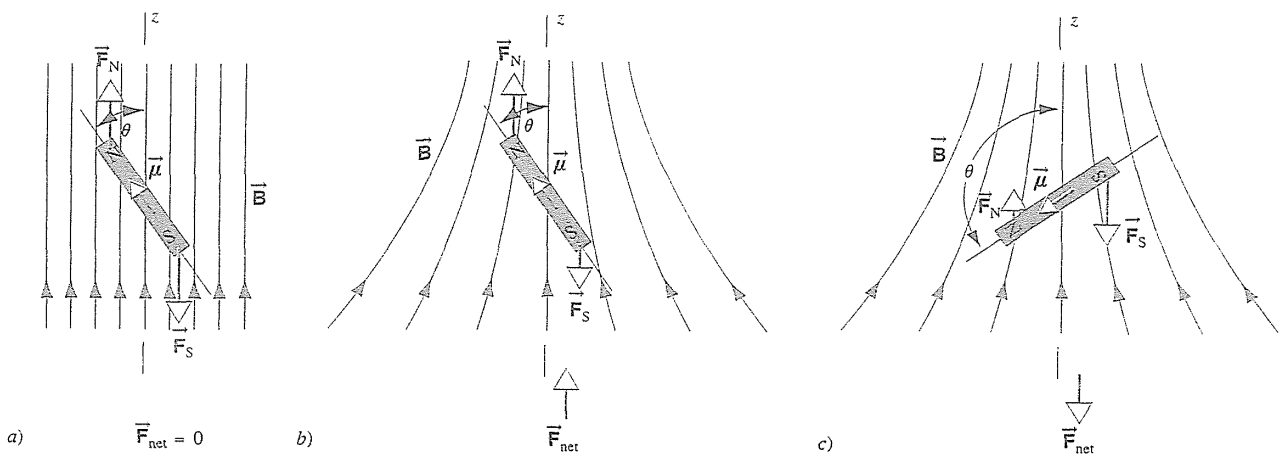


FIGURA 48-10. *a)* Un dipolo magnético, representado por un pequeño imán de barra, se coloca en un campo magnético uniforme. Ninguna fuerza neta opera sobre él. *b)* En un campo no uniforme, una fuerza neta sigue la dirección z en la orientación mostrada. *c)* En esta orientación una fuerza neta sigue la dirección z negativa.

la derivada dB_z/dz sea positiva. Por eso, el signo de la fuerza de deflexión F_z en la ecuación 48-14 depende del signo de μ_z. Si μ_z es positivo (como en la Fig. 48-10*b*), el átomo de plata se desviará hacia arriba; si es negativo (como en la Fig. 48-10*c*), la deflexión será hacia abajo.

Los resultados experimentales

¿Qué esperaban ver Stern y Gerlach cuando examinaron la plata depositada en la placa del detector de vidrio? Si no existe la cuantización espacial, μ_z en la ecuación 48-13 podría tomar *cualquier* valor a partir de $+\mu$ a $-\mu$; el resultado sería una expansión afuera del haz, cuando se activara el imán. Pero lo que *en realidad* vieron fue que el haz se dividía netamente en dos subhaces, cada uno correspondiente a una de las dos orientaciones permitidas del momento magnético del átomo de plata.

La figura 48-11, una gráfica de la intensidad del haz en función de la posición del detector, muestra los resultados de una repetición reciente del experimento de Stern-Gerlach. Utilizaron átomos de cesio en vez de átomos de plata y emplearon un detector más sensible, pero en los demás aspectos el experimento fue esencialmente el mismo. Es patente la separación del haz en dos subhaces cuando se encendía el campo magnético.

Hoy sabemos (pero entonces se desconocía) que, en un átomo de plata (o de cesio), todos los momentos magnéticos orbitales y de espín de los electrones se cancelan, menos los del electrón de valencia individual. En este último, el momento magnético orbital es cero (por serlo también el momento angular orbital), dejando sólo el momento magnético del espín. Como se observa en la ecuación 47-38, puede tomar sólo dos orientaciones en un campo magnético, correspondientes a $m_s = +1/2$ y $m_s = -1/2$. Hay, pues, *dos* subhaces y no algún otro número. Stern y Gerlach terminaron el informe publicado de su trabajo con estas palabras: "Consideramos los resultados una prueba experimental directa de la cuantización espacial en un campo magnético". Los físicos de todo el mundo coincidieron con ellos. Por estos experimentos y por otros en que usó haces de átomos, Stern fue galardonado con el premio Nobel de Física en 1943.

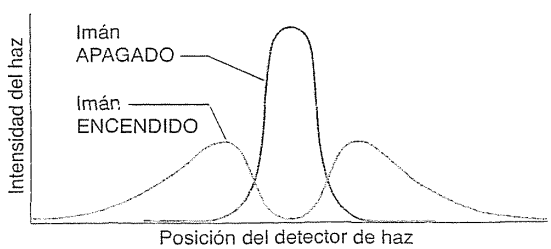


FIGURA 48-11. El pico central muestra que, en una repetición moderna del experimento de Stern-Gerlach, no se desvía el haz atómico cuando apagamos el imán (o lo operamos con una potencia muy baja). La curva de pico doble muestra que los átomos del haz están alineados o antialineados con el campo magnético; no se presentan otras orientaciones.

PROBLEMA RESUELTO 48-5. El imán en el experimento de Stern-Gerlach tiene un gradiente de campo magnético $dB_z/dz = 1.4$ T/mm en el sitio del haz de átomos de plata. La longitud D de la trayectoria del haz al pasar por el imán es de 3.5 cm. La temperatura del horno donde se evapora la plata se ajusta, de modo que la velocidad más probable v de los átomos del haz sea 750 m/s. Determine la deflexión vertical de los dos subhaces al salir del imán. (La masa m del átomo de plata es 1.7×10^{-25} kg, y su momento magnético efectivo 9.27×10^{-24} J/T.)

Solución Según la segunda ley de Newton y la ecuación 48-14, la aceleración vertical de un átomo de plata al atravesar el imán es

$$a = \frac{F_z}{m} = \frac{\mu_z\,(dB_z/dz)}{m}.$$

Mientras se mueve horizontalmente con una velocidad v, cada átomo de plata pasa por la longitud D del imán en un tiempo $t = D/v$. Entonces, al salir del imán su deflexión es

$$d = \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{\mu_z(dB_z/dz)D^2}{2mv^2}.$$

La sustitución de los valores numéricos nos da

$$d = \frac{(9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(1.4 \times 10^{3}\ \text{T/m})(3.5 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}{(2)(1.7 \times 10^{-25}\ \text{kg})(750\ \text{m/s})^2}$$

$$= 8.31 \times 10^{-5}\ \text{m} \cong 0.083\ \text{mm}.$$

La separación entre los dos subhaces es el doble de ésta, esto es, unos 0.16 mm. No es grande pero se puede medir con facilidad.

48-7 RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR

Como el electrón, el protón tiene un espín de 1/2 y, por eso, el componente z de su momento magnético asociado puede poseer dos valores solamente, correspondientes a $m_s = +1/2$ y $m_s = -1/2$. El hecho de que muchas partículas, como el protón, tengan espín ha resultado de gran utilidad práctica a través del fenómeno de la *resonancia magnética nuclear* (RMN), que en 1946 descubrieron en forma independiente Felix Bloch y Edward Purcell. Por su trabajo compartieron el premio Nobel en 1952.

Cuando se pone un protón en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$, se produce un cambio de energía de $2\mu_z B_z$, si su momento magnético de espín "oscila" entre una orientación paralela al campo y otro antiparalela (Fig. 48-12*a*). La oscilación puede desencadenarse sujetando los protones a un campo magnético alterno estimulador cuya dirección forme ángulos rectos con $\vec{\mathbf{B}}$ y cuya frecuencia f se escoge de manera que

$$hf = 2\mu_z B_z. \qquad (48\text{-}15)$$

Como se ve en la figura 48-12*b*, la "oscilación de espín" puede darse de un estado de poca energía a otro de mayor energía o a viceversa. En el primer caso se registra una *reducción* de la energía en el campo magnético alterno, y en el segundo

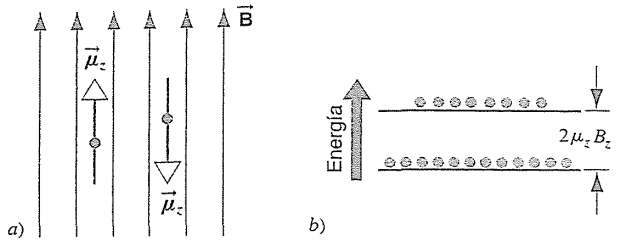


FIGURA 48-12. *a*) Un protón, cuyo espín es 1/2, puede adoptar únicamente dos orientaciones en un campo magnético aplicado. Si se satisface la ecuación 48-15, los protones pueden realizar la transición de una orientación a otra. *b*) En condiciones normales, hay más protones en el estado de menos energía que en el de más energía; así que el resultado es una absorción neta de energía por la muestra entera que contiene protones.

un *incremento*. Sin embargo, como se indica en la figura, normalmente hay más protones en el estado inferior que en el superior. En conclusión, el efecto neto es una absorción (detectable) de la energía procedente del campo magnético alterno.

El campo $\vec{B}$ se compone de un campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ (debido quizá a un electroimán) y de uno interno $\vec{B}_{int}$ (a causa del ambiente químico del protón). Por ejemplo, en una molécula de etanol, cuya fórmula puede escribirse como CH_3–CH_2–OH, los núcleos de hidrógeno experimentan un campo interno diferente por su ubicación dentro de la molécula. Entonces la condición de resonancia de una oscilación de espín será

$$2\mu_z(B_{ext} + B_{int}) = hf, \qquad (48\text{-}16)$$

donde suponemos que $\vec{B}_{ext}$ y $\vec{B}_{int}$ están en la misma dirección (la dirección z). Si mantenemos fija la frecuencia f y si modificamos el campo externo B_{ext}, se encuentran varios casos en que ocurre la oscilación del espín, cada una correspondiente a un ambiente particular de un núcleo de hidrógeno (protón) en una molécula de etanol (Fig. 48-13).

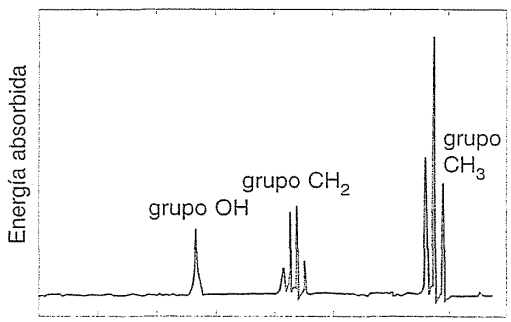


FIGURA 48-13. Espectro de resonancia magnética nuclear del etanol. Todas las líneas se deben a la absorción de las radiaciones incidentes cuando el espín del protón cambia. Los conjuntos de líneas corresponden a diversas agrupaciones de los átomos de hidrógeno en el interior de la molécula. El alcance entero del eje horizontal, que representa al campo magnético externo B_{ext}, es mucho menor que 10^{-4} T.

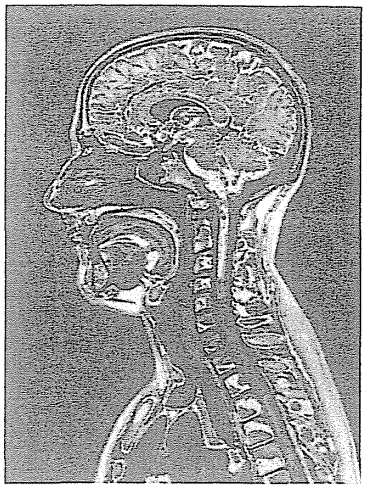


FIGURA 48-14. Imagen de resonancia magnética de la sección transversal de una cabeza humana.

La resonancia magnética nuclear se presta a multitud de aplicaciones en química y física. También constituye el fundamento de una técnica muy exitosa y conocida: *la imaginología de resonancia magnética* (Fig. 48-14).

PROBLEMA RESUELTO 48-6. Una gota de agua está suspendida en un campo magnético $\vec{B}$ cuya magnitud es 1.80 T. Se aplica un campo magnético alterno estimulador, con su frecuencia ajustada para generar oscilaciones del espín de los protones en la muestra de agua. La componente z del momento magnético del protón es $\mu_z = 1.41 \times 10^{-26}$ J/T. ¿Cuál es la frecuencia f y la longitud de onda λ del campo magnético alterno? Suponga que los campos magnéticos internos locales son insignificantes comparados con $\vec{B}$.

Solución Suponiendo que $B_{int} = 0$, con base en la ecuación 48-16 tenemos,

$$f = \frac{2\mu_z B}{h} = \frac{(2)(1.41 \times 10^{-26}\ \text{J/T})(1.80\ \text{T})}{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}$$

$$= 7.66 \times 10^7\ \text{Hz} = 76.6\ \text{MHz}.$$

La correspondiente longitud de onda es

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}}{7.66 \times 10^7\ \text{Hz}} = 3.92\ \text{m}.$$

Esta frecuencia y longitud de onda se hallan en la banda de onda corta de radio del espectro electromagnético.

48-8 MAGNETISMO Y RADIACIONES ATÓMICAS (opcional)

Cuando observamos detenidamente las líneas espectrales de un átomo bajo resolución alta, a menudo descubrimos que lo que aparece como una sola línea es, en realidad, un par de líneas poco espaciadas. Examinaremos esta *estructura fina,* nombre que se le da, del espectro del átomo de sodio ($Z = 11$).

Los cuatro números cuánticos que describen el estado cuántico del electrón individual en el átomo de hidrógeno (Tabla 47-2) pueden usarse además para describir los estados cuánticos de los electrones individuales en átomos con más de uno. En la sección 48-4 vimos que el átomo neutro de sodio tiene un solo electrón de valencia fuera de un núcleo semejante al neón formado por los 10 electrones restantes. La suma vectorial de los momentos angulares y magnéticos de los electrones en una subcapa llena da cero, por lo cual estas propiedades del átomo dependen exclusivamente de las del electrón de valencia.

La figura 48-15 es un diagrama (parcial) de niveles de energía para el electrón de valencia del átomo de sodio (véase también la Fig. 48-7). El nivel más bajo, estado base, es un estado $3s$, donde $n = 3$ y $l = 0$. El par superior de niveles representa un estado $3p$, donde $n = 3$ y $l = 1$. Vemos aquí que, en átomos de muchos electrones, deja de ser verdad que la energía de un estado cuántico dependa únicamente del número cuántico individual n; también depende del número cuántico orbital l. Quizá ello resulte comprensible porque la energía potencial del electrón de valencia del sodio se asocia no sólo a la carga nuclear, sino también a las de otros 10 electrones; su penetración en esta nube de electrones depende del valor de l.

La división del estado $3p$ en dos componentes es el origen de la estructura fina del espectro del átomo de sodio. La luz emitida cuando un electrón se encuentra en uno de los dos componentes del nivel $3p$ realiza una transición al estado base constituye el *doblete de sodio*. Es la intensa luz amarilla que emiten —por ejemplo— las lámparas de sodio en la calle. La figura no está a escala; la división real del nivel $3p$ es apenas 1/1000 aproximadamente de la diferencia de energía entre el nivel $3e$ y los $3s$.

Explicación de la estructura fina

La división del estado $3p$ tiene lugar porque (el componente z) el momento magnético asociado al espín del electrón puede ser paralelo o antiparalelo al (componente z de) campo magnético

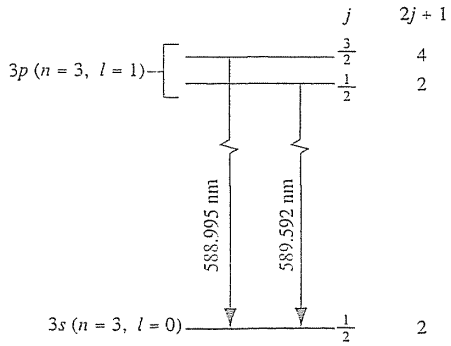


FIGURA 48-15. Niveles $3s$ y $3p$ en el electrón de valencia del sodio. El nivel $3p$ se divide a causa de la interacción entre los momentos magnéticos del espín y orbital del electrón de valencia. A la derecha se muestra el número cuántico j del momento angular total.

asociado al momento orbital del electrón. Estos dos imanes internos del átomo podemos imaginarlos como pequeños imanes de barra adosados, con sus vectores del momento magnético paralelos o antiparalelos. Las dos configuraciones no tienen la misma energía porque se requiere trabajo para transformar la configuración antiparalela en paralela.

En términos formales, describimos la situación introduciendo otro número cuántico j, denominado *número cuántico total del momento angular*, que se define mediante

$$j = l \pm \frac{1}{2}. \tag{48-17}$$

Este número es importante porque el componente z del vector del momento angular total (que incluye el movimiento orbital y de espín) tiene el valor $m_j(h/2\pi)$, donde el valor m_j fluctúa entre $-j$ y $+j$ en pasos enteros.

En el estado 3s de la figura 48-15, donde $l = 0$ y $j = 1/2$, no existe un momento magnético orbital con el cual interactúe el momento magnético del espín y, por tanto, tampoco división de estructura fina.

Por el contrario, el estado $3p$ donde $l = 1$ se divide en dos componentes correspondientes a los dos valores permitidos de j, o sea (Fig. 48-15)

$$j = 1 + 1/2 = 3/2 \quad \text{y} \quad j = 1 - 1/2 = 1/2$$

El estado con $j = 3/2$ cuenta con 4 subestados correspondientes a $m_j = +3/2, +1/2, -1/2$ y $-3/2$. El estado con $j = 1/2$ cuenta con 2 subestados correspondientes a $m_j = +1/2$ y $-1/2$. Así pues, los dos estados divididos tienen $4 + 2$ o 6 subestados entre ellos. Cuando los niveles no se dividen, el estado $3p$ tendría $2(2l + 1) = 2(2 \times 1 + 1) = 6$ subestados. En conclusión, la división de la estructura fina no cambia el número de estados; se limita simplemente a redistribuirlos.

El efecto Zeeman

Michael Faraday (1791-1867), famoso por su intuición extraordinaria, pensó que el espectro de una fuente luminosa cambiaría si la ponemos en un fuerte campo magnético. Pero no logró realizar este experimento porque el equipo de su época no era lo bastante sensible. Unos 30 años más tarde el físico holandés Pieter Zeeman (1865-1943) lo repitió con un aparato más sensible y observó que las líneas espectrales emitidas por una fuente luminosa se ensanchaban cuando la colocaba en un fuerte campo magnético. Por este trabajo compartió el premio Nobel en 1902. Con el equipo moderno se ven fácilmente que las líneas individuales del espectro se dividen en componentes discretos.

La figura 48-16 ofrece un ejemplo del *efecto Zeeman*, nombre con que se le conoce, en la luz emitida por átomos de rodio. Para la mecánica cuántica representa un triunfo que el número de componentes en que se divide una línea de un espectro, su separación, su intensidad y su polarización puedan predecirse y concuerden perfectamente con los experimentos.

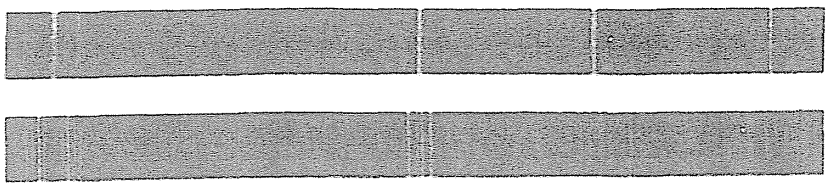


FIGURA 48-16. El efecto Zeeman en el rodio. La parte inferior del espectro muestra la división de sus líneas cuando se enciende el campo magnético.

Para entender el origen del efecto Zeeman observe con mucha atención el diagrama de niveles de energía en la figura 48-17*a*; éste muestra (compárelo con la Fig. 48-15) sólo el estado excitado $j = 3/2$ y el estado base $j = 1/2$ del electrón de valencia del átomo de sodio. Ahora supongamos que el átomo está inmerso en un fuerte y uniforme campo magnético externo, cuya dirección se supone que es el eje z. Hemos visto que el estado $j = 3/2$ contiene 4 subestados correspondientes a cuatro orientaciones del vector del momento angular total respecto a dicho eje; es decir, de los cuatro valores permitidos de m_j. Estos subestados tendrán distinta energía en el campo magnético externo; así que el nivel $j = 3/2$ se divide en cuatro componentes. En forma parecida, el estado base $j = 1/2$ se divide en dos componentes. Como indican las flechas verticales, cuando se activa el imán externo, la longitud de onda de un miembro del doblete de sodio en la figura 48-15 ($\lambda = 588.995$ nm) se divide en 6 líneas espectrales poco espaciadas. (El otro miembro del doblete, que aparece en la figura 48-15, pero no en la figura 48-17, se divide en 4 líneas poco espaciadas.)

Al estudiar con detenimiento la figura 48-17*b*, podrán encontrarse 8 componentes de Zeeman, no los 6 que se observan. Pero la mecánica cuántica prohíbe 2 de esas transiciones, una de las cuales permite cambiar m_j sólo en cero o en ± 1.

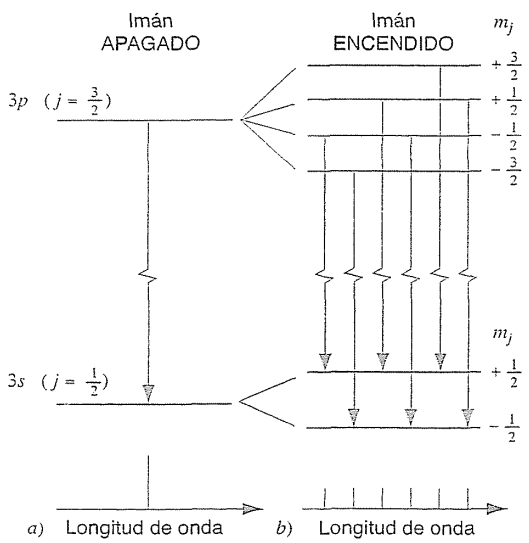


FIGURA 48-17. Diagrama de niveles de energía que muestra la división Zeeman de un componente del doblete de sodio; compare muy bien esta figura con la figura 48-7. Cuando se enciende el campo magnético, el nivel superior se divide en cuatro componentes, y el nivel inferior en dos.

¿Puede verificar que las 6 líneas observadas obedezcan esta *regla de selección* y que las dos líneas "vedadas" correspondan a $\Delta m_j = \pm 2$ qué la viola?

48-9 LÁSERES Y LUZ LÁSER

A fines de la década de 1940 y nuevamente a comienzos de la de 1960, la mecánica cuántica hizo dos excelentes aportaciones a la tecnología: el transistor y el láser. La primera estimuló el crecimiento de la *electrónica* que trata —en el nivel cuántico— de la interacción entre electrones y la materia masiva. El láser condujo al nacimiento de la *fotónica*, disciplina que se ocupa de la interacción —otra vez en el nivel cuántico— entre los fotones y la materia masiva.

Examinamos a continuación algunas características de la luz láser (Fig. 48-18). A lo largo de la sección la compararemos con la luz emitida por fuentes como una lámpara de filamento de tungsteno (espectro continuo) o con un tubo de descarga de gas neón (espectro de líneas). Veremos que es casi un sueño referirse a ella como "una luz fantástica".

1. *La luz láser es principalmente monocromática.* La luz de tungsteno, dispersa en un espectro amplio, no ofrece una base de comparación. La luz proveniente de algunas líneas de un tubo de descarga de gas puede tener longitudes de onda en el intervalo visible cuya precisión alcanza más o menos 1 parte en 10^6. La luz láser alcanza fácilmente una resolución por lo menos mil veces mayor, o sea 1 parte en 10^9.

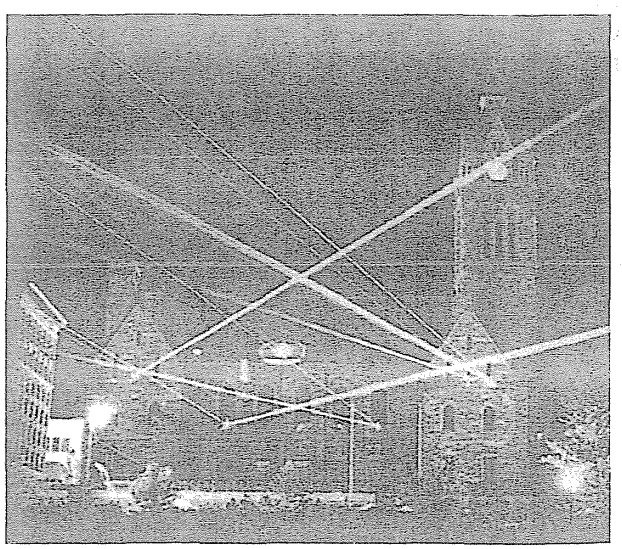


FIGURA 48-18. El cielo se ilumina con luz de rayos láser.

2. *La luz láser es muy coherente.* Sus trenes de onda pueden extenderse a lo largo de centenares de kilómetros. Pueden crearse franjas de interferencia combinando dos haces que siguen trayectorias independientes, cuya longitud difiere en esa cantidad. La longitud de coherencia correspondiente de la luz proveniente de una lámpara de tungsteno o de un tubo de descarga de gas tiene una longitud de unos cuantos metros.

3. *La luz láser presenta gran direccionalidad.* Un haz láser se desvía del paralelismo estricto sólo por los efectos de difracción (Sec. 42-4) a causa de la longitud de onda de la luz y de las dimensiones de la abertura de salida. La luz procedente de otras fuentes pueden formarse en un haz más o menos paralelo por medio de un lente o un espejo. En cambio, la divergencia angular de un haz procedente de una lámpara de filamento de tungsteno no depende tanto de la difracción como de las dimensiones del filamento.

4. *La luz láser puede enfocarse muy bien.* Es fácil alcanzar densidades de flujo de 10^{15} W/cm^2 con la luz láser enfocada. En comparación, una flama de oxiacetileno tiene una densidad de flujo apenas de 10^3 W/cm^2.

Los láseres más pequeños, que se emplean en reproductoras de disco compacto y en la comunicación telefónica a través de fibras ópticas, tienen como medio activo un cristal semiconductor de arsenuro de galio, del tamaño de la cabeza de un alfiler. Los lásers más grandes, que se usan en la investigación de fusión por láser, ocupan un edificio grande. Con la luz láser se sueldan retinas desprendidas, se perforan hoyos diminutos en los diamantes para introducir alambres finos; se corta la ropa (50 capas a la vez, sin bordes deshilachados) en la industria del vestido; se hacen levantamientos de alta precisión; se efectúan mediciones exactas de la longitud mediante el interferómetro, y se generan hologramas. Se han reflejado rayos contra la Luna y algunos planetas.

Einstein y el láser

En 1917 Einstein, al intentar ofrecer ua prueba directa y muy simple de la ecuación de radiación de Planck (Ec. 45-6), introdujo un nuevo concepto en la física, el de *emisión estimulada.* Se trata de un concepto básico para el funcionamiento del láser. Aunque el primer láser operativo hizo su aparición en 1960, Einstein sentó las bases de su invención. La importancia de la emisión estimulada se entiende por el hecho de que la palabra misma "láser" es un acrónimo de "*L*ight *A*mplification by the *S*timulated *E*mision of *R*adiation" (amplificación de la luz por la emisión estimulada de la radiación).

Es interesante señalar lo siguiente: en 1905 Einstein propuso el concepto de fotón y se dio cuenta de que podía ofrecer una explicación del efecto fotoeléctrico. Estos dos ejemplos indican que se pueden inventar aparatos prácticos de gran importancia estudiando problemas al parecer irrelevantes para la tecnología. Piense en Einstein la próxima vez que vea un abridor fotoeléctrico de la puerta de elevador o que escuche una reproductora de discos compactos.

Enseguida vamos a examinar tres procesos que suponen la interacción entre la materia y la radiación.

1. *Absorción.* En la figura 48-19*a* se muestra un sistema atómico en el más bajo de dos estados posibles, con energías E_1 y E_2. Hay un espectro continuo de radiación. Supongamos que un fotón de este campo de radiación se acerca al átomo de dos niveles y que interactúa con él; supongamos que la frecuencia asociada f del fotón es tal que

$$hf = E_2 - E_1. \tag{48-18}$$

El resultado es el siguiente: el fotón desaparece y el sistema atómico se dirige a su estado superior de energía. A este proceso lo llamamos *absorción.*

2. *Emisión espontánea.* En la figura 48-19*b* el sistema atómico se halla en su estado superior, sin que haya radiación en la cercanía. Tras un tiempo medio τ, este sistema atómico (aislado) pasa en forma espontánea al estado de menor energía, emitiendo al hacerlo un fotón de energía $hf\,(= E_2 - E_1)$. A este proceso lo llamamos *emisión espontánea,* con lo cual se indica que ninguna influencia externa lo desencadena.

En condiciones normales, la vida media τ para la emisión espontánea por átomos excitados es del orden de 10^{-8} s. Pero hay algunos estados donde τ es mucho más larga, quizá 10^{-3} s. A estos estados los llamamos *metaestables*; desempeñan una función esencial en el funcionamiento del láser. (Su vida es muy larga porque pueden emitir radiación sólo mediante procesos que violan la regla de selección de la Ec. 48-6).

La emisión espontánea genera la luz proveniente de un filamento resplandeciente de una lámpara. Los fotones producidos en esta forma no dependen en absoluto uno de otro. En particular, presentan dirección y fase diferentes. Dicho de otra manera, la luz que producen tiene poco grado de coherencia.

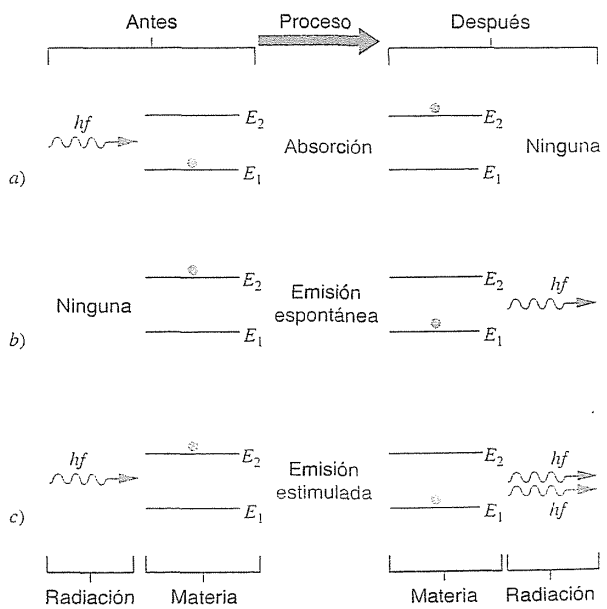


FIGURA 48-19. Interacción de materia y de radiación durante el proceso de *a*) absorción, *b*) emisión espontánea y *c*) emisión estimulada.

3. *Emisión estimulada.* En la figura 48-19*c* el sistema atómico se halla nuevamente en su estado superior, sólo que esta vez existe una radiación de frecuencia dada por la ecuación 48-18. Igual que en la absorción, un fotón de energía hf interactúa con el sistema. El resultado es que se ocasiona que descienda de su estado bajo y ahora hay *dos* fotones, mientras que antes existía uno solamente. A este proceso lo llamamos *emisión estimulada.*

En la figura 48-19*c* el fotón emitido es en todos los aspectos idénticos al fotón "generador" o "estimulador". Posee la misma energía, dirección, fase y estado de polarización. Más aún, uno de los dos causa otra emisión estimulada, dando un total de cuatro fotones que pueden desencadenar más emisiones estimuladas y así sucesivamente. Ahora entendemos cómo una reacción en cadena de procesos afines podría ser ocasionada por uno de estos procesos. Es la "amplificación" del acrónimo de láser. Los fotones tienen idéntica energía, fase y estado de polarización. Es así como la luz láser adquiere sus características.

La figura 48-19 indica la interacción con la radiación de un átomo individual. Sin embargo, por lo regular nos hallamos ante una gran cantidad de átomos. En el sistema de dos niveles de la figura 48-19, ¿cuántos de estos átomos estarán en el nivel E_1 y cuántos en el nivel E_2? En cualquier sistema que presente equilibrio térmico, el número que ocupa un estado de energía E se calcula mediante el factor exponencial de Boltzmann $e^{-E/kT}$ (Sec. 22-5). La razón del número de átomos en el nivel superior al del nivel inferior es

$$n(E_2)/n(E_1) = e^{-(E_2-E_1)/kT}. \qquad (48\text{-}19)$$

La figura 48-20*a* describe gráficamente esta situación. La magnitud kT es la energía media de agitación de un átomo a una temperatura T; vemos que, cuanto más alta sea la temperatura, más átomos —o en promedio a largo plazo— chocarán por la agitación térmica y serán elevados al nivel E_2. Puesto que $E_2 > E_1$, la razón $n(E_2)/n(E_1)$ siempre será menor que la unidad; esto significa que invariablemente habrá menos átomos en el nivel de alta energía que en el de poca energía. Es lo que cabría esperar si las poblaciones de los niveles dependieran sólo de la acción de la agitación térmica.

Si exponemos un sistema como el de la figura 48-20*a* a la radiación, el proceso dominante —por el mero peso de los números— será la absorción. Pero en caso de invertir las poblaciones de los niveles como en la figura 48-20*b*, el proceso dominante en presencia de la radiación sería la emisión estimulada y con él la generación de luz láser. Una *inversión de la población* como la de la figura 48-20*b* no es una situación que se obtenga por procesos térmicos; hay que valerse de trucos ingeniosos para lograrla.

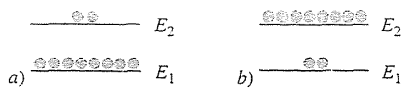


FIGURA 48-20. *a*) Distribución del equilibrio térmico normal de sistemas atómicos que ocupan uno de los dos estados atómicos. *b*) Una población invertida, que puede obtenerse por medio de técnicas especiales.

Cómo funciona un láser

La figura 48-21 muestra esquemáticamente la forma de invertir una población para que pueda ocurrir la acción del láser. Los átomos provenientes del estado base E_1 son "bombeados" hacia arriba a un estado excitado E_3; por ejemplo, mediante la absorción de energía proveniente de una fuente luminosa intensa que rodee el material del láser. (En esta sección nos referimos a láseres cuyo funcionamiento depende de las propiedades de los átomos individuales donde los electrones realizan la transición entre estados bien definidos. En el siguiente capítulo nos ocuparemos de los láseres de semiconductores, cuya operación se basa en transiciones entre bandas anchas de energía que no están asociadas a átomos individuales.)

A partir de E_3 los átomos decaen rápidamente a un estado de energía E_2. Para que ocurra la acción del láser es necesario que el estado sea metaestable: debe tener una vida media relativamente larga en relación con el decaimiento por emisión espontánea. Si hay condiciones propicias, el estado E_2 puede poblarse más que el estado E_1, con lo cual crea la inversión necesaria de la población. Un fotón extraviado con suficiente energía desencadenará entonces una avalancha de fenómenos de emisión estimulada, dando así origen a una luz láser. En este modo de tres niveles operan como un material con acción de láser varios láseres que usan sólidos cristalinos (como el rubí).

En la figura 48-22 se incluyen los elementos de un tipo común de láser. El tubo de descarga de gas está lleno con una mezcla de 80% a 20% de los gases inertes helio y neón, donde el helio sirve de medio de "bombeo" y el neón de medio de "acción del láser". La figura 48-23 es una versión simplificada de las estructuras de niveles en esos dos átomos. Nótese que los cuatro niveles, denotados por E_0, E_1, E_2 y E_3, intervienen en este esquema, y no tres niveles como en la figura 48-21.

El bombeo se logra creando en la mezcla de helio-neón una descarga de gas eléctricamente inducida. A veces los electrones y los iones en la descarga chocan con los átomos de helio, elevándolos al nivel E_3 en la figura 48-23. Este nivel es metaestable, pues una emisión espontánea hacia el estado ba-

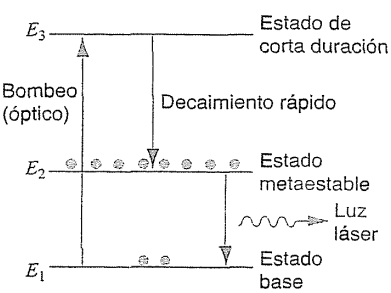


FIGURA 48-21. Esquema de los tres niveles básicos del funcionamiento del láser. El estado metaestable E_2 cuenta con una población mayor que el estado base E_1; compare esta figura con la figura 48-20*b*.

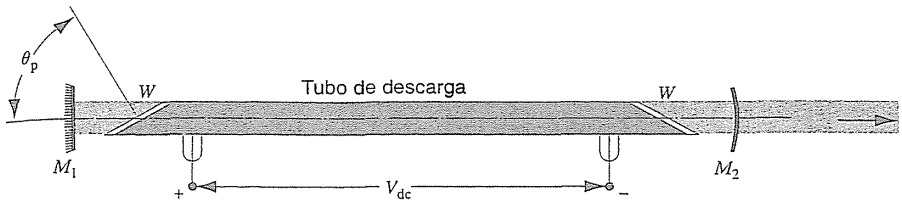


FIGURA 48-22. Elementos básicos de un láser de gases helio-neón.

se (nivel E_0) es muy poco frecuente. Por azar el nivel E_3 en el helio (= 20.61 eV) se aproxima mucho al nivel E_2 en el neón (= 20.66 eV), de modo que durante las colisiones entre los átomos de helio y de neón, la energía de excitación de aquel puede transferirse fácilmente al neón. Así, el nivel E_2 de la figura 48-23 puede poblarse más que el nivel E_1 en la figura. Esta inversión de la población se mantiene porque 1) la metaestabilidad del nivel E_3 garantiza un suministro accesible de los átomos de neón en el nivel E_2 y 2) el nivel E_1 decae rápidamente (en etapas intermedias que no se muestran en la figura) al estado base del neón, E_0. Predomina la emisión estimulada del nivel E_2 al nivel E_1 y se genera luz láser roja cuya longitud de onda mide 632.8 nm.

En general, los fotones de emisión estimulada, producidos inicialmente en el tubo de descarga de la figura 48-22, no serán paralelos al eje del tubo y pronto serán detenidos en los muros. Pero los que *son* paralelos al eje pueden desplazarse muchas veces hacia adelante y atrás en el tubo de descarga, mediante las reflexiones sucesivas contra los espejos M_1 y M_2. A su vez pueden hacer que ocurran otras emisiones estimuladas. Así pues, una reacción en cadena se produce rápidamente en esta dirección y aparece entonces el paralelismo intrínseco de la luz láser.

En vez de pensar en función de los fotones que rebotan hacia adelante y atrás entre los espejos, tal vez convenga más concebir el arreglo entero de la figura 48-22 como una cavidad de resonancia óptica que, a semejanza de un tubo de órgano para las ondas sonoras, puede afinarse para que resuene nítidamente en una o varias longitudes de onda.

Los espejos M_1 y M_2 son cóncavos y sus puntos focales casi coinciden en el centro del tubo. El espejo M_1 está recubierto con una película dieléctrica cuyo espesor se ajusta cuidadosamente para hacer que el espejo refleje al máximo en la longitud de onda de la luz láser (Sec. 41-5). Por otra parte, el espejo M_2 está recubierto de modo que filtre un poco y que una pequeña parte de la luz láser escape en cada reflexión para formar el haz útil.

Se inclinan las ventanas W en la figura 48-22, que cierran los extremos del tubo de descarga, para que sus normales formen un ángulo θ_p, el ángulo de Brewster, con el eje del tubo donde

$$\tan \theta_p = n, \tag{48-20}$$

n es el índice de refracción del vidrio en la longitud de onda de la luz láser. En la sección 44-3 demostramos que las ventanas transmiten luz sin pérdida atribuible a la reflexión, siempre que la luz esté polarizando con su plano de polarización en el plano de la figura 48-22. Si las ventanas fueran cuadradas con los extremos del tubo, la pérdida del haz por reflexión (aproximadamente 4% en cada superficie de una ventana) haría imposible el funcionamiento del láser.

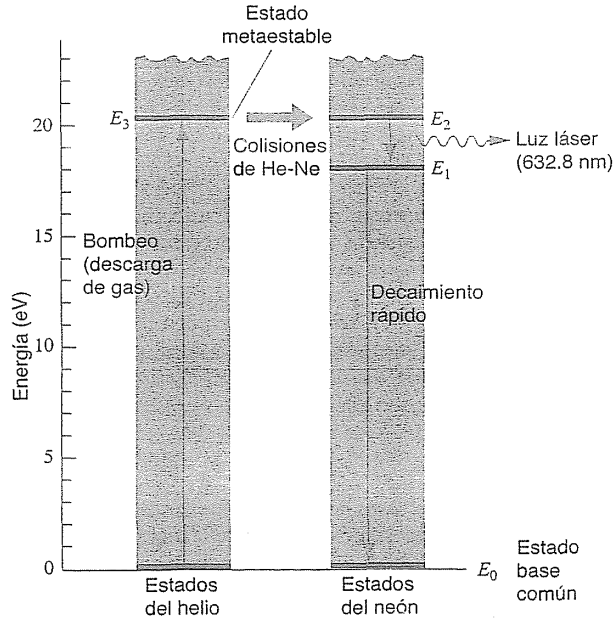


FIGURA 48-23. Niveles atómicos que intervienen en el funcionamiento del láser de gas helio-neón.

PROBLEMA RESUELTO 48-7. Un láser de tres niveles como el de la figura 48-21 emite luz láser de 550 nm de longitud de onda, cerca del centro de la banda visible. *a)* Si se apaga el mecanismo de bombeo óptico, ¿cuál será la razón de la población del nivel superior de energía (energía E_2) a la del nivel inferior (energía E_1)? Suponga que T = 300 K. *b)* ¿A qué temperatura la razón de las poblaciones será 1/2 en las condiciones de *a*)?

Solución *a)* En la condición de frecuencia de Bohr, la diferencia energética entre los dos niveles está dada por

$$E_2 - E_1 = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(550 \times 10^{-9}\ \text{m})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}$$

$$= 2.26\ \text{eV}.$$

La energía media de la agitación térmica es

$$kT = (8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K}) = 0.0259\ \text{eV}.$$

Entonces, conforme a la ecuación 48-19, para la razón deseada tenemos

$$n(E_2)/n(E_1) = e^{-(E_2 - E_1)/kT} = e^{-(2.26\text{ eV})/(0.0259\text{ eV})} = e^{-87.3} = 1.3 \times 10^{-38}.$$

Es un número extraordinariamente pequeño, pero no ilógico. A menudo un átomo cuya energía media de agitación térmica sea apenas de 0.0259 eV no impartirá una energía de 2.26 eV (87 veces más grande) a otro durante una colisión.

b) Si hacemos la razón de la ecuación 48-19 igual a $\frac{1}{2}$, si tomamos el logaritmo natural a ambos lados y si resolvemos para T, obtendremos

$$T = \frac{E_2 - E_1}{k(\ln 2)} = \frac{2.26\text{ eV}}{(8.62 \times 10^{-5}\text{ eV/K})(0.693)} = 37{,}800\text{ K}.$$

Es una temperatura mucho más alta que la de la superficie del Sol. Resulta evidente que hará falta un mecanismo especial, si invertimos las poblaciones de los dos niveles. No será posible la acción del láser en caso de no invertir la población.

PROBLEMA RESUELTO 48-8. Un láser de rubí de pulsos tiene como elemento activo un cristal sintético de rubí en forma de un cilindro de 6 cm de largo y 1 cm de diámetro. El rubí se compone de Al_2O_3 en que —en este caso— un ion aluminio en cada 3 500 ha sido reemplazado por un ion cromo, Cr^{3+}. De hecho son las propiedades de absorción óptica de esta pequeña "impureza" de cromo las que explican el color del rubí. Esos mismos iones explican asimismo la capacidad de producir la acción del láser; ésta se observa en una longitud de onda de 694.4 nm mediante el mecanismo de tres niveles de la figura 48-21.

Supóngase que *todos* los iones de Cr^{3+} estuviesen en un estado metaestable correspondiente al estado E_2 de la figura 48-21 y que *ninguno* estuviera en el estado base E_1. ¿Cuánta energía está disponible para ser liberada en un solo pulso de luz láser, si *todos* esos iones vuelven al estado base en un solo episodio de emisión en cadena de emisión estimulada? La respuesta será un límite superior, sólo porque las condiciones postuladas no pueden cumplirse en la práctica. La densidad ρ de Al_2O_3 es 3 700 kg/m^3 y su masa molar M es 0.102 kg/mol.

Solución El número de iones Al^{3+} es

$$N_{Al} = \frac{2N_A m}{M} = \frac{2N_A \rho V}{M},$$

donde m es la masa del cilindro de rubí y el factor 2 explica que haya dos iones de aluminio en cada "molécula" de Al_2O_3. El volumen V es

$$V = (\pi/4)(1.0 \times 10^{-2}\text{ m})^2(6.0 \times 10^{-2}\text{ m}) = 4.7 \times 10^{-6}\text{ m}^3.$$

Por tanto,

$$N_{Al} = \frac{(2)(6.0 \times 10^{23}/\text{mol})(3.7 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(4.7 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{0.102\text{ kg/mol}} = 2.1 \times 10^{23}.$$

Entonces el número de iones Cr^{3+} es

$$N_{Cr} = \frac{N_{Al}}{3500} = 6.0 \times 10^{19}.$$

La energía del fotón de emisión estimulada es

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4.1 \times 10^{-15}\text{ eV}\cdot\text{s})(3.0 \times 10^8\text{ m/s})}{694 \times 10^{-9}\text{ m}} = 1.8\text{ eV},$$

y la energía total disponible es

$$U = N_{Cr}E = (6.0 \times 10^{19})(1.8\text{ eV})(1.6 \times 10^{-19}\text{ J/eV}) = 17\text{ J}.$$

Efectivamente se han logrado esas grandes energías de pulso, pero sólo por medio de arreglos mucho más complejos de láser que los aquí descritos.

En este ejemplo hemos postulado una circunstancia ideal —una inversión total de la población— donde el estado base permanece prácticamente despoblado. La inversión real de la población en un láser funcional de rubí será mucho menor que la total. Por ésta y otras razones, en la práctica la energía de pulso será mucho menor que el límite superior antes calculado.

OPCIÓN MÚLTIPLE

48-1 El espectro de rayos X de los átomos

1. ¿Cuál de las siguientes líneas de rayos X tiene la máxima frecuencia en un elemento?

A) K_α B) K_β C) L_α D) Depende del elemento.

48-2 Los rayos X y la numeración de los elementos

2. La longitud de onda K_α de un elemento con número atómico $Z = 17$ está dada por λ.

a) ¿Cuál es el número atómico de un elemento con una longitud de onda K_α de $\lambda/4$

A) 65 B) 64 C) 63 D) 33 E) 31

b) ¿Cuál es el número atómico de un elemento con una longitud de onda K_α de 4λ?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

3. La longitud de onda K_α de un elemento con número atómico Z es λ_Z. La longitud de onda K_α de un elemento con número atómico $2Z$ es λ_{2Z}. ¿Cómo se relacionan λ_Z y λ_{2Z}?

A) $\lambda_Z > 4\lambda_{2Z}$ B) $\lambda_Z = 4\lambda_{2Z}$ C) $\lambda_Z < 4\lambda_{2Z}$ D) Según Z, λ_Z podría ser mayor o menor que $4\lambda_{2Z}$.

4. De acuerdo con la teoría de Bohr, ¿cuántos electrones "apantallan" la carga del núcleo visto por un electrón en la capa M?

A) 2 B) 6 C) 7 D) 9 E) 10

48-3 Construcción de átomos

5. Conteste esta pregunta *sin* consultar una tabla periódica. Un átomo en el estado base tiene 17 electrones.

a) ¿Cuál es el número mínimo de capas ocupadas al menos por algunos electrones de este átomo?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

b) Suponiendo que *todas* las capas internas están totalmente llenas, ¿cuál es el número de electrones de la más externa?

A) 2 B) 5 C) 7 D) 8

6. ¿Cuál de los siguientes átomos no presentará simetría esférica en el estado base?

A) He B) Be C) C D) Ne

48-4 La tabla periódica

7. Para contestar esta pregunta consulte la tabla periódica.
   a) ¿Cuál de las siguientes expresiones muestra la clasificación correcta de la energía de las subcapas especificadas?
   A) $E_{4p} < E_{4f} < E_{6s}$ B) $E_{4f} < E_{4p} < E_{6s}$
   C) $E_{4p} < E_{6s} < E_{4f}$ D) $E_{4f} < E_{6s} < E_{4p}$
   b) ¿Cuál de las siguientes expresiones muestra la clasificación correcta de las subcapas especificadas?
   A) $E_{5f} < E_{6d} < E_{7f}$ B) $E_{5f} < E_{7s} < E_{6d}$
   C) $E_{7s} < E_{5f} < E_{6p}$ D) $E_{7s} < E_{6d} < E_{5f}$
8. ¿Cuál de las siguientes transiciones de un electrón excitado satisface la regla de selección (Ec. 48-6) y podría provocar la emisión de un fotón?
   A) $5p \rightarrow 6p$ B) $7s \rightarrow 4p$
   C) $6s \rightarrow 5d$ D) $3p \rightarrow 4f$
9. Considere el pandemonium de un elemento pesado ficticio cuyo número atómico es 169.
   a) ¿En cuál periodo de la tabla es probable que aparezca?
   A) 8 B) 9 C) 10 D) 11
   b) ¿Cuántos electrones se encontrarán probablemente en la capa externa de este elemento?
   A) 1 B) 3 C) 7 D) 8

48-5 Magnetismo atómico

10. Una esfera de hierro se encuentra en un soporte dentro de un solenoide. El eje del solenoide sigue la dirección norte/sur. Se invierte su corriente; ¿alrededor de cuál eje girará la esfera?
    A) Norte/sur B) Este/oeste C) Arriba/abajo
    D) La esfera no girará por tener una simetría esférica.

48-6 El experimento de Stern-Gerlach

11. Considere un átomo hipotético donde los electrones de valencia tienen un espín neto de 0 y un número cuántico neto de momento angular orbital de 1 (estado *p*). Si un haz de estos átomos pasa por el aparato de Stern-Gerlach, ¿en cuántos componentes se dividirá el haz?
    A) 1 B) 2 C) 3 D) 6

48-7 Resonancia magnética nuclear

48-8 Magnetismo y radiaciones atómicas

12. Suponga unos electrones en la subcapa 4*d*, que se divide en dos estados conforme a la ecuación 48-17.
    a) ¿Cuántos subestados existen en el estado con el valor mayor de *j*?
    A) 3 B) 4 C) 5 D) 6
    b) ¿Cuántos subestados existen en el estado con el menor valor de *j*?
    A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

48-9 Láseres y luz láser

PREGUNTAS

1. "Si el momento angular de los electrones de los átomos no estuviera cuantizado, la tabla periódica de los elemento sería distinta." Comente esta afirmación.
2. ¿Cómo diferirían las propiedades del helio si el electrón careciera de espín, es decir, si los únicos números cuánticos operativos fuesen n, l y m_l?
3. Explique de qué manera las interacciones entre el espín y los movimientos orbitales del electrón de valencia en el sodio causan la división de sus líneas espectrales, produciendo el conocido doblete de sodio (Consulte la Fig. 48-15).
4. ¿Cuál es el origen de la longitud de onda de corte $\lambda_{\text{mín}}$ en la figura 48-1? ¿Por qué es un indicio importante de la naturaleza de fotones de los rayos X?
5. En la figura 48-2, ¿por qué el fotón emitido se aleja en la dirección señalada? ¿Podría mostrarse moviéndose en otra dirección cualquiera? Explique sus respuestas.
6. ¿Cuáles son los rayos X característicos de un elemento? ¿Cómo pueden emplearse para determinar el número atómico de un elemento?
7. Compare las figuras 48-1 y 48-3. ¿Cómo se cercioraría de que los dos picos prominentes en la primera de ella corresponden numéricamente a las dos transiciones que se marcan del mismo modo en la figura 48-3?
8. ¿Puede lograrse que el hidrógeno atómico emita rayos X? De ser así, describa el mecanismo. En caso contrario, explique por qué no.
9. ¿Cómo el diagrama de niveles de energía de los rayos X en la figura 48-3 se distingue del hidrógeno que se muestra en la figura 47-11? ¿En qué aspectos se parecen los dos diagramas?
10. Cuando se extiende a números atómicos más altos, el diagrama de Moseley de la figura 48-4 no es una línea recta, sino cóncava hacia arriba. ¿Afecta eso la capacidad de asignarles número atómico a los elementos?
11. ¿Por qué la teoría de Bohr, que no se aplica muy bien ni siquiera al helio ($Z = 2$), explica tan bien los espectros típicos de los rayos X de los elementos o, por lo menos, el de la parte que se origina en lo profundo del átomo?
12. ¿Por qué el espectro característicos de los rayos X cambia sistemáticamente de un elemento a otro, no así el del intervalo visible?
13. ¿Por qué espera que la onda de las radiaciones generadas por las transiciones en lo profundo del átomo tenga una longitud de onda más corta que las generadas por transiciones que ocurren en los bordes externos del átomo?
14. Si conoce el espectro característico de los rayos X de un elemento que contiene varias líneas, ¿cómo las identificaría y las designaría?
15. ¿De qué números cuánticos depende la energía de un electrón en *a*) un átomo de hidrógeno y en *b*) un átomo de vanadio?
16. La tabla periódica de los elementos se basó originalmente en la masa atómica y no en el número atómico, pues todavía no se descubría este concepto. ¿A qué se debe el gran éxito de esas tablas? Dicho de otra manera, ¿por qué la masa atómica de un elemento es (aproximadamente) proporcional a su número atómico?
17. ¿De qué manera la estructura de la tabla periódica viene a apoyar la necesidad de un cuarto número atómico correspondiente al espín del electrón?

18. Si hubiera sólo tres números cuánticos (es decir, si el electrón no tuviese espín), ¿por qué serían diferentes las propiedades químicas del helio?
19. Explique por qué el radio efectivo del átomo de helio es menor que el del átomo de hidrógeno.
20. ¿Por qué se necesita más energía para extraer un electrón en el neón ($Z = 10$) que en el sodio ($Z = 11$)?
21. ¿Qué nos indica la figura 48-5 respecto a la causa de la gran estabilidad química de los gases inertes?
22. ¿Conviene asignar números cuánticos a un hueco en una subcapa llena en los demás aspectos?
23. ¿Por qué la serie de lantánidos de los elementos (Ap. E) tiene propiedades químicas tan semejantes? ¿Cómo se justifica ponerlas en un solo cuadro de la tabla periódica? ¿Por qué, a pesar de este hecho, es tan fácil clasificarlas con sólo medir su espectro típico de rayos X?
24. Con sus propias palabras enuncie el principio de energía mínima en la construcción de átomos y ofrezca un argumento físico para defenderlo.
25. En la figura 48-5 vemos que el estado $2s$ tiene menos energía que el estado $2p$. ¿Puede explicar por qué debería ser así, basando su argumento en la densidad de probabilidad radial de ambos (Figs. 47-14 y 47-15)?
26. Si comienza con un núcleo vacío y lo llena de electrones para formar un átomo en su estado base, la energía de los niveles no llenados cambiará a medida que avance. ¿A qué se debe el cambio? ¿Aumentan o reducen su energía al agregarle electrones?
27. Justifique la afirmación de que, en el efecto de Einstein-de Haas, el momento angular de la barra de hierro debe conservarse como tal cuando la magnetizamos de repente.
28. En el experimento de Einstein-de Haas (Fig. 48-8), ¿se justifica el hecho de que el periodo de rotación predicho del cilindro depende exclusivamente de su radio y no —por ejemplo— de su altura? ¿Que suposiciones se hicieron al obtener la expresión para el periodo de rotación?
29. Convénzase usted mismo de que son congruentes entre sí las direcciones de las flechas en la figura 48-8*b*, que representan la corriente del solenoide, el campo magnético, los momentos angulares atómicos y la dirección en que gira el cilindro.
30. ¿Ofrece el efecto de Einstein-de Haas pruebas de que el momento angular está cuantizado?
31. Un haz de luz circularmente polarizada, vista como un haz de fotones cuyos espín están alineados, puede ejercer un par sobre una pantalla de absorción. Prepare una analogía con el experimento de Einstein-de Haas.
32. Un haz de átomos neutros de plata se emplea en un experimento de Stern-Gerlach, ¿cuál es el origen de la fuerza y del par que operan sobre el átomo? ¿En qué forma lo afectan?
33. ¿Qué determina el número de subhaces en que se divide un haz de átomos neutrales en un experimento de Stern-Gerlach?
34. Si en un experimento de Stern-Gerlach un haz de iones se resuelve en cinco haces constitutivos, ¿qué número cuántico de momento angular tiene cada ion?
35. En un aparato de Stern-Gerlach, ¿es posible tener una configuración de campo magnético donde el campo también es cero a lo largo de la trayectoria del haz, no así el gradiente de campo? Si su respuesta es afirmativa, ¿puede diseñar un electroimán que produzca esa configuración?
36. Los átomos de plata en el experimento de Stern-Gerlach del problema resuelto 48-4 no llevan carga. Suponga que un átomo en el aparato tuviera que perder repentinamente un electrón, convirtiéndose así en un ion de plata. ¿Cuáles serían la naturaleza y la magnitud relativa de las fuerzas que actúan sobre él *a)* antes y *b)* después del evento?
37. ¿Cómo demostraría en el laboratorio que un átomo posee un momento angular? ¿Y qué tiene un momento dipolar magnético?
38. En el estado del átomo de hidrógeno con $l = 1$, podemos alinear paralelos o antiparalelos los vectores del espín y del momento angular orbital. ¿Cuál arreglo presenta más energía y por qué?
39. ¿Cómo llegamos a la conclusión de que el número cuántico magnético del espín m_s puede tener sólo los valores $\pm\frac{1}{2}$? ¿Qué clase de experimentos apoyan semejante conclusión?
40. ¿Por qué el momento magnético del electrón que gira tiene una dirección contraria a su momento angular de espín?
41. ¿Por qué la luz láser enfocada es intrínsecamente mejor que la proveniente de un diminuto filamento de una lámpara incandescente en operaciones quirúrgicas muy delicadas, como la soldar en el momento retinas desprendidas?
42. La luz láser produce un haz casi paralelo. ¿Disminuye su intensidad como el cuadrado inverso de la distancia con la fuente?
43. ¿En qué se parecen la luz láser y la luz de las estrellas? ¿Y en qué se distinguen?
44. Arthur Schawlow, uno de los pioneros del láser, invento un borrador para máquinas de escribir que enfocaba la luz láser sobre el carácter a suprimir. ¿Puede imaginar el principio en que se basa el funcionamiento del borrador?
45. ¿En qué aspectos se diferencian la emisión espontánea y la estimulada?
46. Hay emisión espontánea y estimulada. ¿Por qué no tenemos también —por simetría— absorción espontánea y estimulada? Explique la causa a partir de la figura 48-19.
47. ¿Por qué se necesita una inversión de la población entre dos niveles atómicos para que ocurra la acción del láser?
48. ¿Qué es un estado metaestable? ¿Qué función desempeña en el funcionamiento del láser?
49. Comente la afirmación: "En igualdad de circunstancias, un diagrama de láser en cuatro niveles como el de la figura 48-23 es preferible a uno de tres niveles como el de la figura 48-21, porque en el segundo hay que mover una mitad de la población de átomos en el nivel E_1 al estado E_2 para que por lo menos se inicie la inversión de la población.
50. Comente la afirmación: "En el láser de la figura 48-22 sólo la luz cuyo plano de polarización se encuentra en el plano de la figura se transmite a través de la ventana de la derecha. Por eso se pierde la mitad de la energía disponible". (Sugerencia: ¿es realmente verdadera esta segunda afirmación? Reflexione sobre lo que sucede con los fotones cuyo plano efectivo de polarización forma ángulos rectos con el plano de la figura 48-22. ¿Participan plenamente los fotones en el proceso de aumento de la emisión estimulada?)
51. Un haz de luz sale de una abertura en una "caja negra" y cruza un banco de laboratorio. ¿A qué pruebas lo sometería para averiguar la coherencia que presenta en su sección transversal? ¿Cómo sabría (sin abrir la caja) si es un láser la fuente de luz escondida?
52. ¿Por qué es difícil construir un láser de rayos X?

EJERCICIOS

48-1 El espectro de rayos X de los átomos

1. Demuestre que el corte de longitud de onda corta en el espectro continuo de rayos X está dado por

$$\lambda_{\text{mín}} = 1240 \text{ pm}/\Delta V,$$

donde ΔV es la diferencia de potencial aplicada en kilovolts.

2. Determine la constante de Planck basándose en el hecho de que la longitud de onda mínima de los rayos X producida por electrones de 40.0 keV es 31.1 pm.
3. ¿Cuál es la diferencia de potencial mínima en un tubo que producirá rayos X de 0.126 nm de longitud de onda?
4. En la figura 48-1, los rayos X se producen cuando los electrones de 35.0 keV inciden sobre un blanco de molibdeno. Si se conserva en 35.0 kV el potencial de aceleración pero si el blanco de molibdeno se substituye por el de plata ($Z = 47$), ¿qué valores se obtienen de *a)* $\lambda_{\text{mín}}$, *b)* λ_{K_β} y *c)* λ_{K_α}? Los niveles atómicos K, L y M de la plata (compare esta figura con la Fig. 48-3) son 25.51, 3.56 y 0.53 keV, respectivamente.
5. Los electrones bombardean un blanco de molibdeno, produciendo rayos X continuos y característicos como en la figura 48-1. Allí la energía de los electrones incidentes es 35.0 keV. Si se aumenta en 50.0 kV el potencial de aceleración aplicado al tubo de rayos X, ¿qué valores se obtienen de *a)* $\lambda_{\text{mín}}$, *b)* λ_{K_β} y *c)* λ_{K_α}?
6. La longitud de onda de la línea K_α procedente del hierro es 19.3 pm. *a)* Calcule la diferencia de energía entre los dos estados del átomo de hierro (Fig. 48-3) que da origen a esta transición. *b)* Calcule la diferencia de energía correspondiente en el átomo de hidrógeno. ¿Por qué la diferencia es mucho mayor en el hierro que en el hidrógeno? (Sugerencia: en el átomo de hierro la capa K corresponde a $n = 1$ y la capa L a $n = 2$.)
7. Con base en la figura 48-1, calcule la diferencia de energía aproximada $E_L - E_M$ los niveles de la energía atómica de los rayos X del molibdeno. Compare el resultado con el que posiblemente obtuvo en la figura 48-3.
8. Determine la diferencia de potencial mínima que es preciso aplicar a un tubo para generar rayos X, cuya longitud de onda sea igual a la de Compton para el electrón. (Consúltese el Ej. 30 del Cap. 45.)
9. Se producen rayos X en un tubo por medio de un potencial de 50.0 kV. Si el electrón realiza tres colisiones en el blanco antes de detenerse y si en las dos primeras pierde la mitad de su energía cinética restante, determine la longitud de onda de los fotones resultantes. No tenga en cuenta el retroceso de los átomos blanco pesados.
10. Un blanco de tungsteno ($Z = 74$) se bombardea con electrones en un tubo de rayos X. *a)* ¿Cuál es el valor mínimo del potencial de aceleración que permitirá obtener las líneas características K_β y K_α del elemento? *b)* En este mismo potencial, ¿que valor tiene $\lambda_{\text{mín}}$? *c)* Calcule λ_{K_β} y λ_{K_α}. Los niveles atómicos K, L y M del tungsteno (Fig. 48-3) son 69.5, 11.3 y 2.3 keV, respectivamente.
11. Un blanco de molibdeno ($Z = 42$) se bombardea con electrones de 35.0 keV y se origina el espectro de rayos X de la figura 48-1. Aquí $\lambda_{K_\beta} = 63$ pm y $\lambda_{K_\alpha} = 71$ pm. *a)* ¿Cuáles son las energías correspondientes de los fotones? *b)* Se quiere filtrar estas radiaciones a través de un material que absorba la línea K_β con mucho mayor fuerza que con la que absorbería la línea K_α. ¿Qué sustancia o sustancias utilizaría? Las energías de ionización K del molibdeno y de cuatro elementos vecinos son las siguientes:

Z	40	41	42	43	44
Elemento	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru
E_K (keV)	18.00	18.99	20.00	21.04	22.12

(Sugerencia: una sustancia absorberá selectivamente y con más fuerza una de las dos radiaciones X, si los fotones de una poseen suficiente energía para expulsar el electrón K de los átomos de la sustancia, no así los fotones de la otra.)

12. Las energías de enlace de los electrones de las capas K y L en el cobre son 8.979 keV y 0.951 keV, respectivamente. Si un rayo X K_α procedente del cobre incide sobre un cristal de cloruro de sodio y si genera una reflexión de Bragg de primer orden a 15.9° cuando se refleja contra planos alternos de los átomos de sodio, ¿qué espacio habrá entre los planos?

48-2 Los rayos X y la numeración de los elementos

13. A continuación se transcriben las longitudes de onda K_α de algunos elementos:

Ti	27.5 pm	Co	17.9 pm
V	25.0 pm	Ni	16.6 pm
Cr	22.9 pm	Cu	15.4 pm
Mn	21.0 pm	Zn	14.3 pm
Fe	19.3 pm	Ga	13.4 pm

Dibuje un diagrama de Moseley (Fig. 48-4) y verifique que su pendiente coincida con el valor calculado en el problema resuelto 48-2.

14. Basándose en la teoría de Bohr, calcule la razón de las longitudes de onda de la línea K_α del niobio (Nb) y del galio (Ga). Tome de la tabla periódica los datos que necesite.

48-3 Construcción de átomos

48-4 La tabla periódica

15. Dos electrones de litio ($Z = 3$) tienen, respectivamente, los números cuánticos n, l, m_l, m_s, los valores 1, 0, 0, $\pm\frac{1}{2}$. *a)* ¿Cuáles números puede tener el tercer electrón para que el átomo se halle en su estado base? *b)* ¿Y para que se encuentre en su primer estado excitado?
16. Si un núcleo de uranio ($Z = 92$) tuviera un solo electrón, ¿cuál sería el radio de su órbita en estado base de acuerdo con la teoría de Bohr?
17. Si el electrón no tuviera espín y si aun así se aplicara el principio de exclusión de Pauli, ¿cómo afectaría eso a la tabla periódica? En particular, ¿cuáles de los elementos actuales serían gases inertes?
18. Al observar atentamente la figura 48-5, ¿cuál piensa que podría ser el número atómico del siguiente gas inerte más alto arriba de $Z = 118$? Suponga que la subcapa $5g$ aparece en el periodo octavo.
19. En los metales alcalinos un electrón está afuera de la capa cerrada. *a)* Por medio de la teoría de Bohr calcule el número efectivo de carga del núcleo, visto por el electrón de valencia en el sodio (energía de ionización = 5.14 eV) y en el potasio (ener-

gía de ionización = 4.34 eV). *b*) ¿Qué fracción de la carga nuclear Z representa esto en cada elemento? Los números cuánticos necesarios vienen en la figura 48-5.

20. Suponga que hay dos electrones en el mismo sistema, ambos con $n = 2$ y $l = 1$. *a*) Si el principio de exclusión no se aplicara, ¿cuántas combinaciones de estados serían posibles? *b*) ¿Cuántos estados veta el principio de exclusión? ¿Y cuáles son?

48-5 Magnetismo atómico

48-6 El experimento de Stern-Gerlach

21. *a*) Demuestre que el momento magnético de los electrones en las órbitas de Bohr están dados según su teoría por

$$\mu = n\mu_B,$$

donde μ_B es el magnetón de Bohr y $n = 1, 2, 3, \ldots$. *b*) ¿Cómo se relaciona la expresión anterior con los valores actuales?

22. Suponga que un átomo de hidrógeno (en su estado base) avanza 82 cm en una dirección perpendicular al campo magnético que en dirección vertical posee un gradiente de 16 mT/m. *a*) ¿Qué fuerza en el átomo se debe al momento magnético del electrón, que suponemos que es de 1 magnetón de Bohr? *b*) Determine los desplazamientos verticales si la velocidad es de 970 m/s.

23. Calcule la aceleración del átomo de plata al pasar por el imán deflector en el experimento de Stern-Gerlach en el problema resuelto 48-5.

24. Suponga que en el experimento de Stern-Gerlach descrito en el caso de átomos neutros de plata el campo magnético $\vec{B}$ tiene una magnitud de 520 mT. *a*) ¿Qué diferencia de energía hay entre las orientaciones de los átomos en los dos subhaces? *b*) ¿Qué frecuencia de radiación provocaría una transición entre ambos estados? *c*) ¿Cuál es su longitud de onda y a qué parte del espectro electromagnético pertenece? El momento magnético del átomo neutro de plata es 1 magnetón de Bohr.

25. ¿Cuál es la longitud de onda de un fotón que causará una transición del espín de un electrón de una orientación paralela a una orientación antiparalela en un campo magnético de 190 mT de magnitud?

48-7 Resonancia magnética nuclear

48-8 Magnetismo y radiaciones atómicas

26. El protón, lo mismo que el electrón, tiene un espín 1/2. En el estado base del átomo de hidrógeno existen dos niveles de energía, según que los espines de ambos sigan la misma dirección o una dirección opuesta. En el segundo caso el estado posee más energía. Si un átomo se halla en este estado y uno de los espines "cabecera", se libera la pequeña diferencia de energía como un fotón de 21 cm de longitud de onda. Este proceso espontáneo es muy lento, pues su vida media es de 10^7 años, aproximadamente. Sin embargo, los radioastrónomos observan esta radiación de 21 cm desde el espacio estelar, donde la densidad del hidrógeno es tan pequeña que un átomo puede moverse antes de ser perturbado por colisiones con otros. Calcule el campo magnético efectivo (debido al momento dipolar magnético del protón) que experimenta el electrón en la emisión de la radiación.

48-9 Láseres y luz láser

27. Los láseres se han vuelto muy pequeños y también muy grandes. El volumen activo de uno construido con el semiconductor GaAlAs tiene un volumen apenas de 200 $(\mu m)^3$ (más pequeño que un grano de arena); y sin embargo, puede generar 5.0 mW de potencia con una longitud de onda de 0.80 μm. Calcule la rapidez con que se producen los fotones.

28. Un láser de rubí emite con 694.4 nm de longitud de onda. Si un pulso se emite en 12.0 ps y si la energía liberada por pulso es 150 mJ, *a*) ¿cuál es la longitud de onda del pulso y *b*) cuántos fotones hay en cada uno?

29. Es posible que se inventen métodos de modular la frecuencia o la amplitud de un haz láser para que sirva de portador a las señales de televisión, en forma muy parecida a como sucede hoy con los haces de microondas. Suponga que también se disponga de sistemas cuyas longitudes de onda puedan "sintonizarse" con precisión en cualquier región del intervalo visible, es decir, en el de 400 nm $< \lambda <$ 700 nm. Si un canal de televisión ocupa un ancho de banda de 10 Mhz, ¿cuántos canales podrían utilizarse con esta tecnología? Comente la superioridad intrínseca de la luz visible sobre las microondas como portadora de información.

30. Un láser He-Ne emite luz con una longitud de onda de 632.8 nm y tiene una potencia de salida de 2.3 mW. ¿Cuántos fotones emite por minuto cuando está funcionando?

31. Un átomo hipotético tiene niveles de energía espaciados uniformemente por 1.2 eV. Con una temperatura de 2 000 K, calcule la razón entre el número de átomos en el decimotercer estado excitado y el número en el undécimo estado.

32. Una inversión de población en dos niveles se describe a menudo asignándole al sistema una temperatura Kelvin negativa. Demuestre que la temperatura corresponderá efectivamente a una inversión. ¿Qué temperatura negativa describiría al sistema del problema resuelto 48-7, si la población del nivel superior rebasará en 10.0% la del nivel inferior?

33. Un átomo tiene dos niveles de energía con una longitud de onda de transición de 582 nm. A una temperatura 300 K, 4.0×10^{20} átomos se hallan en el estado inferior, *a*) ¿cuántos ocupan el estado superior en condiciones de equilibrio térmico? *b*) Suponga, en cambio, que 7.0×10^{20} átomos se bombean al estado superior, con 4.0×10^{20} en el estado inferior. ¿Cuánta energía se liberará en un solo pulso láser?

34. Los espejos en el láser de la figura 48-22 forman una cavidad donde se generan ondas estacionarias de la luz láser. En la cercanía de 533 nm, ¿a qué distancia de longitud de onda están los modos permitidos de operación? Una distancia de 8.3 cm separa los espejos.

35. El haz proveniente de un láser de argón (λ = 515 nm) tiene un diámetro d de 3.00 mm y una salida de potencia de 5.21 W. Lo enfocamos sobre una superficie difusa mediante un lente de longitud focal f = 3.50 cm. Se forma un patrón de difracción como el de la figura 42-13. *a*) Demuestre que el radio de disco central está dado por

$$R = \frac{1.22f\lambda}{d}.$$

Es posible demostrar que el disco central contiene 84% de la potencia incidente. Calcule *b*) el radio R del disco central y la densidad promedio del flujo de potencia *c*) en el haz incidente y *d*) en el disco central.

36. Se empieza a estudiar el uso de láseres para defenderse contra los misiles balísticos. Un haz láser con una intensidad de 120 MW/m^2 probablemente queme y destruya un misil endurecido (que no gire) en un lapso aproximado de 1 s. *a*) Si el láser tiene una potencia de salida de 5.30 MW, una longitud de onda de 2.95 pm y un diá-

metro de haz de 3.72 m (ciertamente un láser muy poderoso), ¿destruirá un misil a una distancia de 3 000 km? *b*) Si pudiera modificarse la longitud de onda, ¿qué valor mínimo daría resultado? *c*) Si no pudiera cambiarse, cuál sería el alcance destructivo del láser en *a*)? Utilice la ecuación del disco dada en el ejercicio 35 y suponga que la longitud focal es la distancia del blanco.

PROBLEMAS

1. Se pone en reposo un electrón de 20.0 eV por medio de dos frenados sucesivos de radiación, con lo cual se transfiere su energía cinética a la de dos fotones. La longitud de onda del segundo es 130 pm más grande que la del primero en ser emitido. *a*) Calcule la energía del electrón tras su primera desaceleración. *b*) Calcule la longitud de onda y la energía de los dos fotones.
2. En un tubo de rayos X, un electrón que se desplaza inicialmente a una velocidad de 2.73×10^8 m/s la reduce al pasar cerca de un núcleo. Un fotón con energía de 43.8 KeV se emite. Determine su velocidad final. (Hay que tener en cuenta la relatividad; desprecie la energía impartida al núcleo.)
3. Demuestre que un electrón en movimiento no puede emitir espontáneamente un fotón de rayos X en el espacio libre. Debe estar presente un tercer cuerpo (átomo o núcleo). ¿Por qué es necesario eso? (Sugerencia: examine la conservación de la energía total y del momento.)
4. Representemos con λ_α y λ_β las longitudes de onda de los rayos K_α y K_β, respectivamente, de un elemento. *a*) Demuestre que la teoría de Bohr nos da

$$\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha} = k\frac{(Z-1)^2}{Z^2-9}$$

y determine el valor numérico de *k*. *b*) Compare el valor predicho de esta razón con el determinado mediante la longitud de onda de algunos elementos con valores pequeños, medianos y grandes de *Z*. (La longitud de los rayos X está tabulada en el *Handbook of Chemistry and Physics*.)
5. Las dos longitudes de onda que aparecen en la transición $3p \rightarrow 3s$ del sodio (las llamadas líneas *D* del sodio; véanse las Figs. 48-7 y 48-15) se deben a la división de la estructura fina del nivel $3p$. *a*) Con la longitud de los dos miembros del doblete $3p \rightarrow 3s$ de la figura 48-15, determine la división de energía de los dos componentes de la estructura fina del nivel $3p$. *b*) Use la división de energía obtenida en *a*) para predecir la diferencia de longitud de onda de los dos miembros en el doblete $4s \rightarrow 3p$ que aparece en la figura 48-7.
6. *a*) Por medio de la teoría de Bohr obtenga una expresión del radio de la capa *K* en un elemento alcalino, basándose en su número atómico *Z*. *b*) Usando nuevamente la teoría de Bohr, obtenga una expresión del radio de la capa más externa de un elemento alcalino y demuestre que no depende de *Z*.
7. Una generalización poco rigurosa de la teoría de Bohr al helio consiste en suponer que los dos electrones se encuentran en la misma órbita, pero siempre en lados opuestos del núcleo. *a*) Demuestre que la órbita del estado base tendrá un radio de $4a_0/7$, donde a_0 es el radio de Bohr. *b*) Calcule la energía del átomo en ese estado. *c*) ¿Cuál sería la energía de ionización de este átomo (la que se requiere para extraer un electrón)? Compare el resultado con la energía de ionización del helio (24.6 eV).
8. Un átomo (hipotético) tiene solamente dos niveles atómicos, con una separación de energía de 3.2 eV. En la atmósfera de una estrella hay 6.1×10^{13} de estos átomos por cm^3 en el estado excitado (superior) y 2.5×10^{15} por cm^3 en el estado base (inferior). Calcule la temperatura de la atmósfera de la estrella.
9. Un haz láser ($\lambda = 600$ nm) de alta potencia, con un diámetro de haz de 11.8 cm se apunta hacia la Luna, situada a una distancia de 3.82×10^5. Su expansión se debe exclusivamente a efectos de la difracción. La posición angular del borde del disco de difracción central (Ec. 42-11) está dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1.22\lambda}{d},$$

donde *d* es el diámetro de la abertura del haz. Calcule el diámetro del disco central de difracción en la superficie de la Luna.
10. El medio activo de un láser de rubí ($\lambda = 694$ nm) es un cristal sintético del mismo material que mide 6.00 cm de largo y 1.0 cm de diámetro. El cristal está plateado en un extremo y —con el fin de permitir la formación del haz externo— sólo está parcialmente plateado en el otro extremo. *a*) Trátelo como una cavidad óptica resonante en analogía con un tubo cerrado de órgano y calcule el número de nodos de ondas estacionarias que existe a lo largo del eje del cristal. *b*) ¿En qué cantidad Δf tendrá que cambiar la frecuencia del haz para aumentar en 1 este número? Demuestre que Δf es simplemente el inverso del tiempo de recorrido de la luz en un viaje redondo sobre el eje de cristal. *c*) ¿Cuál es el correspondiente cambio fraccional de frecuencia? El índice apropiado de refracción es 1.75.

CAPÍTULO 49

CONDUCCIÓN ELÉCTRICA EN LOS SÓLIDOS

En los dos capítulos precedentes vimos la eficacia de la teoría cuántica cuando la aplicamos a átomos individuales. En este capítulo vamos a mostrar que funciona con la misma eficacia al aplicarla a conjuntos de átomos en forma de sólidos.

Los sólidos poseen muchísimas propiedades que podemos examinar: ¿son duros o blandos?, ¿pueden martillarse para convertirlos en una hoja delgada o trenzarse en un alambre fino?, ¿son transparentes?, ¿qué tipo de ondas pasan a través de ellos y a qué velocidad?, ¿conducen calor?, ¿cuáles son sus propiedades magnéticas?, ¿cuál es su estructura de cristal? Y podríamos continuar enumerando muchas otras propiedades. En todos los casos nos gustaría utilizar la teoría cuántica para comprender las propiedades medidas.

En este capítulo nos concentramos en una propiedad de los sólidos: la conducción de electricidad. Explicaremos la clasificación de los sólidos: en conductores, aislantes, semiconductores y superconductores; veremos además cómo la teoría cuántica ofrece un modelo para entender por qué algunos materiales se comportan en un modo y algunos en otro.

49-1 TEORÍA CUÁNTICA DE LOS SÓLIDOS

En los dos capítulos anteriores hemos visto cómo la mecánica cuántica se aplica exitosamente al análisis de la estructura de los átomos. Basándose en las leyes de la mecánica cuántica y el potencial de Coulomb, se comprenden muchas propiedades de los átomos (tamaño, radiación que emiten y absorben, momento angular, momento magnético, etc.). La tabla periódica, inicialmente construida disponiendo los átomos por sus propiedades comunes y por su masa, se reelaboró a partir de la teoría cuántica de los átomos.

Podemos formular una teoría satisfactoria de la estructura del átomo, basándonos en las propiedades de un electrón individual o, como máximo, de unos cuantos electrones de valencia. Esta teoría cuántica da buenos resultados cuando se analizan las propiedades de los átomos en un gas, porque los electrones están bastante bien localizados en los átomos individuales y porque las propiedades de los átomos dependen exclusivamente de la disposición de los electrones.

En el presente capítulo aplicaremos la teoría cuántica a la estructura de los sólidos con el fin de entender su conductividad eléctrica. Comprobamos que hay varias diferencias entre la aplicación de la teoría cuántica a los átomos y a los sólidos. Ante todo, los electrones que contribuyen más a la conductividad eléctrica en un sólido no "pertenecen" a ningún tipo particular de átomo; son compartidos entre todos los átomos del material. En consecuencia, quizá se trate de un enorme número de electrones; por eso sería absurdo intentar seguir el movimiento de uno en particular. Utilizamos a cambio métodos estadísticos, como lo hicimos en el capítulo 22, para analizar la distribución de velocidades en las moléculas de un gas. La combinación de la teoría cuántica con la mecánica estadística se conoce como *mecánica estadística cuántica.* Vamos a emplear los métodos de la mecánica estadística cuántica para analizar la conductividad de los sólidos.

Otra diferencia entre un sólido y un gas radica en que en el primero los átomos interactúan unos con otros. En capítulos anteriores supusimos que tratábamos con átomos individuales y aislados, donde los electrones interactúan sólo con el

núcleo y con otros electrones de su núcleo "de origen". En un sólido los átomos están tan cerca entre sí que los niveles energéticos de los electrones en un átomo se ven afectados por la presencia de otros átomos. Esto convierte en amplias bandas de energía los altos niveles energéticos de un átomo aislado. Las bandas son, en realidad, grupos de niveles tan numerosos y tan compactos que podemos considerarlos continuos.

Una semejanza entre la teoría cuántica de los átomos y la de los sólidos consiste en que en ambos casos los electrones deben ajustarse al principio de exclusión de Pauli, sólo que en los sólidos se aplica al sólido entero y no únicamente a un átomo. En el sólido dos electrones no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos. Los electrones unidos a átomos diferentes deben tener un nombre especial que identifique su átomo "de origen", ¿pero qué decir de los electrones "pertenecientes" a un sólido entero y no a átomos individuales? En el presente capítulo analizaremos principalmente esos electrones, porque en condiciones normales los que están unidos a átomos individuales no contribuyen a la conducción eléctrica. Así pues, queremos aplicar el principio de Pauli a un conjunto quizá de 10^{22} electrones; esta tarea, sin duda, sería tremenda si no contáramos con los métodos de la estadística cuántica.

49-2 ELECTRONES DE CONDUCCIÓN EN UN METAL

Un átomo aislado de cobre consta de 29 electrones. En el cobre sólido 28 de ellos son mantenidos cerca de sus sitios de la red por fuerzas electrónicas, sin que puedan moverse a través del volumen del sólido. El electrón restante *puede* hacerlo, y si aplicamos la fuerza electromotriz entre los extremos de un alambre de cobre, son estos *electrones de conducción* (uno por átomo) los que constituyen la corriente generada en el alambre.

En la sección 29-5 estudiamos este problema desde la perspectiva de la mecánica clásica: comparamos los electrones de conducción en un cubo metálico con los átomos de un gas confinado en una caja cúbica. Usando este modelo (clásico) de *gas con electrones libres*, obtuvimos una expresión para la resistividad del metal, a saber (Ec. 29-20):

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}, \qquad (49\text{-}1)$$

donde m es la masa; e la carga de los electrones; n el número de electrones de conducción por unidad de volumen, y τ el tiempo promedio entre las colisiones de los electrones con la red.

En la sección 29-5 demostramos que τ es esencialmente constante, independientemente de que se haya generado o no un campo eléctrico dentro del cubo por una fuerza electromotriz aplicada en el exterior. En conclusión, la resistividad ρ no depende del campo eléctrico aplicado: otra forma de decir que en los metales se cumple la ley de Ohm.

Aunque esta obtención de la forma de la ley de Ohm es un excelente logro de la física clásica, no es fácil ir mucho más allá. También, hay otras propiedades físicas —entre ellas la capacidad calorífica de los metales— sobre las que la teoría clásica tiene algo que decir, pero por desgracia sus predicciones no coinciden con el experimento. En otras áreas de interés, resulta difícil imaginar cómo explicar algo tan complicado como el transistor basándonos para ello en el modelo clásico de gas con electrones libres. Más nos vale ver qué nos ofrece la mecánica cuántica al respecto.

El primer paso al resolver un problema de mecánica cuántica consiste en especificar la energía potencial de la partícula —que suponemos que es un electrón individual de conducción— en función de su posición. Necesitamos información para sustituirla en la ecuación de Schrödinger. Comenzamos con la suposición razonable más simple: la energía potencial es cero en todos los puntos dentro de la muestra metálica cúbica y se aproxima a un valor infinitamente grande en todos los puntos exteriores. Nos hallamos ante un gas con electrones libres, pero ahora se rige por las reglas cuánticas y no por las clásicas.

Esta energía potencial nos recuerda el problema de un electrón atrapado en un pozo infinito que resolvimos en la ecuación 47-2. Nótese, sin embargo, dos diferencias: el problema actual es tridimensional e incluye dimensiones macroscópicas en vez de atómicas.

A un electrón individual de conducción atrapado en su cubo metálico lo representamos por una onda (estacionaria) de materia $\psi(\vec{r})$, donde $\vec{r}$ es un vector de posición, e imponemos la condición de que la densidad de probabilidad $\psi^2(\vec{r})$ sea cero tanto en la superficie del cubo como en todos los puntos exteriores. Es la forma de reconocer que el electrón está verdaderamente atrapado en el cubo metálico. La figura 47-4 nos recuerda que procedimos del mismo modo en el caso unidimensional.

Si imponemos estas condiciones de frontera a la función de onda, la ecuación de Schrödinger indicará que la energía total E del electrón estará cuantizada, del mismo modo que lo estuvo en el caso del electrón atrapado en un pozo unidimensional. Pero hay una diferencia radical. Por ser tan grande el cubo metálico en la escala de dimensiones atómicas, el número de ondas estacionarias de materia que encajan en el volumen del cubo y aun así cumplen con los requisitos de frontera es enorme y las energías permitidas de los electrones están muy cerca entre sí. El problema resuelto 49-1 muestra que, en un cubo de 1 cm de lado, hay unos 10^{20} estados cuantizados que se hallan entre $E = 5$ eV y $E = 5.01$ eV. Compare esto con el arreglo limitado de los niveles bien espaciados que se indican —por ejemplo— para el pozo finito de potencial en la figura 47-6*b*.

No es posible ocuparnos simultáneamente de un número tan vasto de estados; es preciso recurrir a métodos estadísticos. En vez de preguntar "¿Cuál es la energía de este estado?" hay que preguntar "¿Cuántos estados tienen una energía en el intervalo desde E y $E + dE$?"

Ya nos topamos antes con esta clase de situaciones. Por ejemplo, al describir en la sección 22-4 la velocidad de las moléculas en un gas ideal, vimos que la única manera de pro-

ceder era plantear la pregunta: "¿Cuántas moléculas tienen una velocidad que varía entre v y $v + dv$?

En los electrones de conducción, el número de estados (por unidad de volumen del sólido) cuyas energía se encuentran entre E y $E + dE$ puede escribirse como $n(E)dE$, donde $n(E)$ es la función llamada *densidad de los estados*. En el gas (cuántico) de electrones libres puede demostrarse que es

$$n(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}. \qquad (49\text{-}2)$$

En esta etapa nos limitamos simplemente a contar los estados disponibles para un electrón individual de conducción. Nótese que en la ecuación 49-2 no hay nada que dependa del material de que está hecho la muestra. Ajustar los patrones de las ondas estacionarias para introducirlos en una caja cúbica es un problema meramente geométrico. En la siguiente sección explicaremos cómo llenar esos estados.

El lector se preguntará: "Si las energías de los estados permitidos están tan cerca entre sí, ¿por qué no nos olvidamos totalmente de la cuantización y suponemos una distribución continua de energía?". La respuesta, como veremos en la siguiente sección, se basa en el hecho de que el principio de exclusión de Pauli se aplica a los electrones en cualquier lugar que los encontremos, como electrones orbitales en los átomos o como electrones de conducción en los metales. Aunque nuestro problema contiene muchos estados, hay también muchos electrones de conducción para ocuparlos y el principio de Pauli nos permite colocar sólo uno en cada uno de los estados. Así pues, a pesar de la dificultad de descubrir directamente la naturaleza cuantizada de la energía de los electrones de conducción, el hecho de la cuantización sigue siendo un aspecto esencial y tiene consecuencias importantes.

PROBLEMA RESUELTO 49-1. Un cubo de cobre mide 1 cm de lado. ¿De cuántos estados disponen sus electrones de conducción en el intervalo de energía entre $E = 5.00$ y 5.01 eV? Suponga que los electrones se comportan como un gas (cuántico) con electrones libres.

Solución Estos límites de energía están tan cercanos que podemos afirmar con seguridad que la respuesta, por unidad de volumen, es $n(E)\Delta E$, donde $E = 5$ eV y $\Delta E = 0.01$ eV. Con base en la ecuación 49-2 tenemos

$$n(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}$$

$$= \frac{(8\sqrt{2}\pi)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})^{3/2}}{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^3} [(5\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})]^{1/2}$$

$$= 9.48 \times 10^{46}\ \text{m}^{-3}\,\text{J}^{-1} = 1.52 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\text{eV}^{-1}.$$

Nótese que hay que expresar en joules la energía E antes de sustituirla en la ecuación 49-2, aun cuando queramos expresar el resultado final en electrón volts.

El número actual N de estados que están en el intervalo entre $E = 5.00$ eV y $E = 5.01$ eV en el cubo es el siguiente, si a es la longitud de su lado:

$$N = n(E)\Delta E\, a^3$$

$$= (1.52 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\text{eV}^{-1})(0.01\ \text{eV})(1 \times 10^{-2}\ \text{m})^3$$

$$= 1.52 \times 10^{20}.$$

En otras palabras, hay 1.52×10^{20} estados individuales de energía entre 5.00 y 5.01 eV. El intervalo promedio de energía ΔE_{ady} entre sus niveles adyacentes se deduce fácilmente de

$$\Delta E_{\text{ady}} = \frac{\Delta E}{N} = \frac{0.01\ \text{eV}}{1.52 \times 10^{20}} \approx 7 \times 10^{-23}\ \text{eV}.$$

Concluimos que, inclusive en esta angosta banda de energía, existen muchísimos estados y que se parecen mucho en su energía.

Nuestras conclusiones no dependen en absoluto del material de la muestra. Tampoco es importante que ésta sea cúbica; el mismo resultado final se consigue con cualquier otra forma que encierre a un volumen igual. Lo que *sí hemos supuesto* es que los electrones de conducción se comportan como un gas (cuántico) de electrones libres, es decir, que su energía potencial es constante (que es cero según hemos supuesto) en todos los puntos dentro de la muestra. Tal suposición nunca se cumple estrictamente en los metales reales. Pese a ello, siguen siendo válidas las conclusiones principales: un electrón de conducción en un metal dispone de muchos estados y la energía de éstos es muy similar.

49-3 LLENADO DE LOS ESTADOS PERMITIDOS

Ahora que hemos visto cuántos estados existen, estamos listos para llenarlos con electrones. Este proceso ya lo estudiamos en la sección 48-4 al tratar de la construcción de la tabla periódica de los elementos. Explicamos allí la importancia decisiva del principio de exclusión de Pauli: nos indica la posibilidad de asignar sólo un electrón a un estado en particular. Ese principio es igualmente importante en el problema actual.

La figura 49-1*a* muestra la densidad de los estados dados por la ecuación 49-2. Esta función indica el número de estados posibles en un intervalo cualquiera de energía. Pero no todos estos estados están ocupados. Llenamos los estados disponibles en un metal exactamente como lo hicimos con los estados disponibles en un átomo: agregamos electrones, uno por estado cuántico, comenzando en el nivel inferior de energía y terminando cuando hayamos incorporado al metal todos los electrones necesarios.

Examinemos primero las condiciones en una temperatura de cero absoluto. Éstas representan el estado de menor energía de la muestra y las alcanzamos colocando los electrones de conducción en los estados no llenados que presentan una energía mínima. El proceso se indica en la figura 49-1*b*, la cual contiene la *función de probabilidad* $p(E)$. Esta función nos dice la probabilidad de que esté ocupado el estado con la energía E. En $T = 0$, todos los estados por debajo de cierta energía están llenos ($p = 1$) y todos los estados por arriba de esta energía están

* Véase *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, de Robert Eisberg y Robert Resnick (Wiley, 1985), 2a. ed., sección 11-11.

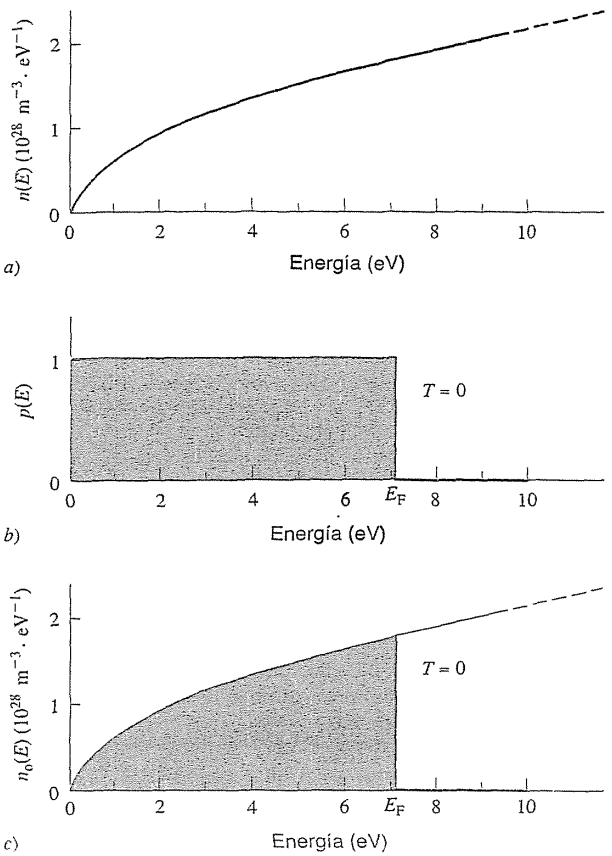


FIGURA 49-1. *a)* Densidad de los estados $n(E)$ graficada en función de la energía E. *b)* La función de probabilidad $p(E)$ a $T = 0$. *c)* La densidad de los estados ocupados $n_o(E)$ es igual al producto de $n(E)$ y $p(E)$. Todos los estados por debajo de E_F están ocupados, y todos los estados por arriba de E_F, vacíos.

vacíos ($p = 0$). En estas condiciones, al estado más alto ocupado se le llama *nivel de Fermi* y su energía, marcada como E_F en la figura 49-1*b*, se llama *energía de Fermi*. Por ejemplo, para el cobre la energía de Fermi es 7.06 eV.

Si multiplicamos la densidad $n(E)$ de los estados *disponibles* por la probabilidad $p(E)$ de que estén ocupados, el resultado es la *densidad de estados ocupados*, $n_o(E)$, o sea

$$n_o(E) = n(E)p(E). \tag{49-3}$$

Esta cantidad se muestra gráficamente en la figura 49-1*c*.

El área sombreada en esa figura representa el número total de estados ocupados (por unidad de volumen). Una manera de calcular la energía de Fermi consiste en determinar esta área e igualarla a la densidad n de los electrones de conducción en el metal. Al integrar entre los límites de $E = 0$ y $E = E_F$ para determinar el área, obtenemos

$$n = \int_0^{E_F} n_o(E)dE, \tag{49-4}$$

o, al resolver la integral,

$$n = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\int_0^{E_F} E^{1/2}\,dE = \left(\frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\right)\left(\tfrac{2}{3}E_F^{3/2}\right).$$

La solución de E_F nos da

$$E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3} \tag{49-5}$$

Una ojeada a la figura 49-1*c* debería bastar para disipar el error común de que todo movimiento cesa en una temperatura de cero absoluto. Vemos que, enteramente por el principio de exclusión de Pauli, los electrones están apilados y el valor de su energía fluctúa entre cero y la energía de Fermi. La energía *promedio* en las condiciones de la figura 49-1*c* resulta ser 4.2 eV aproximadamente. En comparación, la energía cinética traslacional de la molécula de un gas ideal a temperatura ambiente es apenas 0.025 eV. Los electrones de conducción en un metal tienen abundante energía en el cero absoluto.

Parece evidente que las moléculas de un gas a temperaturas ordinarias y los electrones de conducción en un metal se comportan de un modo muy distinto. En términos formales, decimos que las moléculas se ajustan a la estadística (clásica) de Maxwell-Boltzmann y que los electrones se ajustan a la estadística (cuántica) de Fermi-Dirac. Dentro de este contexto, el término "estadística" designa las reglas formales para contar las partículas. Así, en la estadística de Maxwell-Boltzmann suponemos que es posible distinguir partículas idénticas; en cambio, en la estadística de Fermi-Dirac suponemos que no es posible. Una vez más, en la estadística de Maxwell-Boltzmann, el principio de exclusión de Pauli no desempeña función alguna, mientras que, como ya vimos, la función de dicho principio en la estadística de Fermi-Dirac es esencial.

¿Qué sucede con la distribución de los electrones en la figura 49-1 al elevar la temperatura? Sólo se produce un cambio pequeño en la distribución; pero ese pequeño cambio tiene consecuencias trascendentales. En la figura 49-2 vemos el aspecto que presentarían las distribuciones de la figura 49-1 con una $T = 1\,000$ K, temperatura a la que una muestra de metal brillaría en un cuarto oscuro.

La característica más notable de la figura 49-2 es lo poco que difiere de la figura 49-1, las distribuciones en el cero absoluto. Cuando $T = 0$, la función de probabilidad $p(E)$ era estrictamente la unidad debajo de E_F y estrictamente cero arriba de E_F. Como se observa en la figura 49-2*b*, con $T = 1\,000$ K hay una pequeña probabilidad de tener unos cuantos estados vacíos por debajo de E_F y unos cuantos estados ocupados por arriba de E_F. En la figura 49-2*c* se muestra la densidad $n_o(E)$ de los estados ocupados, dados nuevamente por la ecuación 49-3 como el producto de $n(E)$ y de $p(E)$. Una vez más esto contrasta mucho con el comportamiento de un gas ideal, donde la energía cinética promedio de la molécula es proporcional a su temperatura.

Al comparar las condiciones cuando $T = 0$ y cuando $T = 1\,000$ K, vemos que toda la "acción" tiene lugar en los electrones de conducción cuyas energías son similares a la de Fermi. El movimiento de la mayor parte de los electrones no se altera al aumentar la temperatura, pues su gran depósito de energía está bien encerrado.

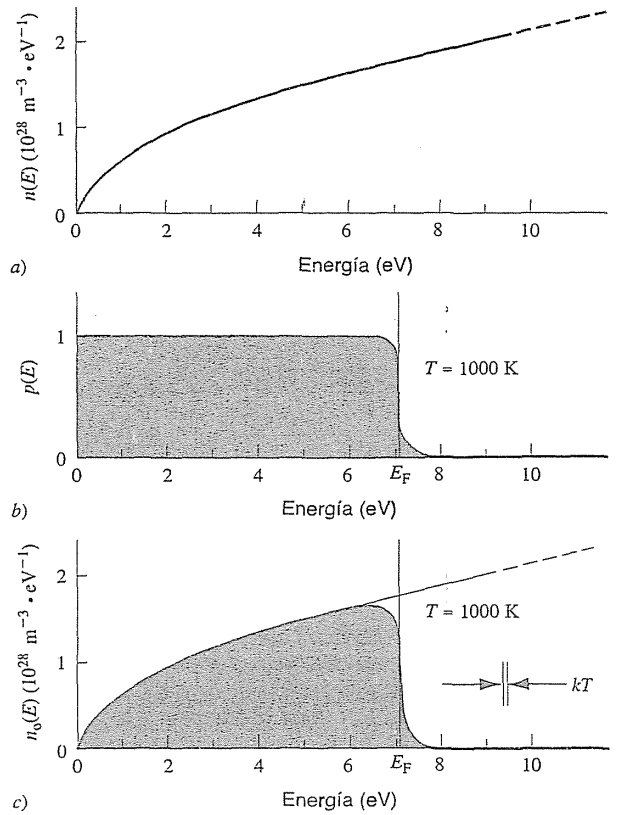


FIGURA 49-2. Igual que la figura 49-1, sólo que $T = 1000$ K. Nótese la escasa diferencia que hay con las gráficas de la figura 49-1. (Éstas están poco idealizadas, pues suponen que los electrones se desplazan en una región de potencial uniforme. En los metales reales la densidad medida de las gráficas de los estados no presenta una forma tan simple.)

Veamos por qué. La figura 49-2*c* muestra la magnitud de kT, medida de la energía disponible a raíz de la agitación térmica; su valor en 1 000 K es apenas 0.086 eV. Ningún electrón puede esperar que, a causa de la agitación térmica, su energía se altere como máximo unas pocas veces en esta cantidad relativamente pequeña. Debido al principio de exclusión, sólo los electrones cuya energía se parece a la de Fermi tienen estados vacíos lo bastante cerca de ellos para que ocurran esas transiciones térmicas. Un electrón con una energía de —digamos— 2 eV puede adquirir o perder energía porque ya están llenos todos los estados de energía bastante cercana; simplemente este electrón no tiene dónde ir. En analogía con las ondas del mar, la agitación térmica de los electrones suele causar rizos sólo en la superficie del "mar de Fermi"; las vastas profundidades de éste permanecen tranquilas.

A la función de probabilidad $p(E)$, descrita gráficamente en las figuras 49-1*b* y 49-2*b*, se le conoce como *función de probabilidad de Fermi-Dirac* y puede demostrarse que es

$$p(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}, \qquad (49\text{-}6)$$

donde E_F es la energía de Fermi, definida ahora (Fig. 49-2*b*) como la energía correspondiente a $p = \frac{1}{2}$.

Nótese que la ecuación 49-6 produce el diagrama rectangular de la figura 49-1*b* para $T = 0$. A medida que $T \to 0$, el exponente $(E - E_F)/kT$ de la ecuación 49-6 tiende a $-\infty$ si $E < E_F$ y $+\infty$ si $E > E_F$. En el primer caso tenemos $p(E) = 1$, y en el segundo $p(E) = 0$, justo como se requería.

La ecuación 49-6 muestra también que la magnitud importante no es la energía E, sino más bien $E - E_F$, el intervalo de energía entre E y la energía de Fermi. Además vemos que, debido a la naturaleza exponencial del término en el denominador de esa ecuación, $p(E)$ es muy sensible a cambios pequeños de $E - E_F$. Ello confirma la aseveración de que los electrones cuya energía sea similar a la de Fermi son los únicos que desempeñan un papel activo. Como veremos luego, la primera pregunta al ocuparnos de los electrones en un sólido —sea un conductor, un semiconductor o un aislante— tiende a ser: "¿Dónde se halla el nivel de Fermi en una escala de energía?"

PROBLEMA RESUELTO 49-2. Calcule la energía de Fermi en el cobre, suponiendo que los electrones de conducción por unidad de volumen (Prob. res. 29-3) es $8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$.

Solución A partir de la ecuación 49-5 obtenemos

$$E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{(8)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}\left[\frac{(3)(8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})}{\pi}\right]^{2/3}$$

$$= 1.13 \times 10^{-18}\ \text{J} = 7.06\ \text{eV}.$$

PROBLEMA RESUELTO 49-3. ¿Qué probabilidades hay de que esté ocupado un estado cuya energía está *a*) 0.1 eV por arriba, *b*) 0.1 eV por debajo de la energía de Fermi y *c*) es igual a ella? Suponga una temperatura de 800 K.

Solución *a*) El exponente (adimensional) de la ecuación 49-6 es

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{0.1\ \text{eV}}{(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(800\ \text{K})} = 1.45.$$

La inserción de este exponente en la ecuación 49-6 nos da

$$p(E_+) = \frac{1}{e^{1.45} + 1} = 0.19.$$

La probabilidad de ocupación en este estado es del 19%.

b) Con una energía de 0.1 eV *por debajo* de la de Fermi, el exponente en la ecuación 49-6 tiene el mismo valor numérico que antes, sólo que negativo. Así pues, según la ecuación 49-6,

$$p(E_-) = \frac{1}{e^{-1.45} + 1} = 0.81.$$

La probabilidad de ocupación en este estado es de 81%.

c) Cuando $E = E_F$, el exponente de la ecuación 49-6 es cero, y ésta se convierte en

$$p(E_F) = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = 0.50.$$

Obsérvese que este resultado no depende de la temperatura. Obsérvese asimismo que ninguno de los tres depende del valor real de la energía de Fermi, sino sólo del intervalo de energía entre la energía de Fermi y la del estado en cuestión.

PROBLEMA RESUELTO 49-4. *a)* En el cobre a 1 000 K, calcule la energía con que la probabilidad $p(E)$ de que esté ocupado un estado de un electrón de conducción sea 90%. (Suponga que los electrones de conducción de este material se comportan como un gas de electrones libres, con una energía de Fermi de 7.06 eV.) *b)* Con esta energía, ¿cuál es $n(E)$, la distribución de energía en los estados disponibles? *c)* Con esta misma energía, ¿cuál es $n_o(E)$, su distribución en los estados ocupados?

Solución *a)* La sustitución en la ecuación 49-6 produce

$$p(E) = \frac{1}{e^{\Delta E/kT} + 1} = 0.9,$$

donde $\Delta E = E - E_F$. Con un poco de álgebra se obtiene $\Delta E/kT = -2.20$; así que

$$\Delta E = -2.20kT = -(2.20)(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(1\ 000\ \text{K}) = -0.19\ \text{eV}.$$

En el cobre, suponiendo que $E_F = 7.06$ eV, tenemos

$$E = E_F + \Delta E = 7.06\ \text{eV} - 0.19\ \text{eV} = 6.87\ \text{eV}.$$

b) Al efectuar el cálculo como en el problema resuelto 49-1 con $E = 6.87$ eV, se obtiene $n(E) = 1.78 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\ \text{eV}^{-1}$.
c) Conforme a la ecuación 49-3 tenemos, nuevamente cuando $E = 6.87$ eV,

$$n_o(E) = n(E)p(E) = (1.78 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\ \text{eV}^{-1})(0.90) = 1.60 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\ \text{eV}^{-1}.$$

49-4 CONDUCCIÓN ELÉCTRICA EN METALES

En la figura 49-3*a* se describe la distribución de *velocidades* de Fermi en metales. La *velocidad de Fermi* v_F es la de un electrón cuya energía cinética es E_F, o sea la energía de Fermi. Sin ningún campo eléctrico aplicado, los electrones alcanzan velocidades entre poco más o menos 0 y v_F que corresponden a energías entre 0 y E_F aproximadamente. La distribución en la figura 49-3 representa un componente común de la *velocidad* y no la rapidez. Se comprueba así que hay igual número de electrones que se desplazan en direcciones opuestas, de modo que la corriente neta es cero cuando no existe un campo eléctrico.

Al aplicar un campo eléctrico, los electrones son acelerados por el campo y adquieren un pequeño incremento de velocidad en dirección contraria a dicho campo. (Dado que los electrones tienen carga negativa, la fuerza en uno de ellos es $\vec{F} = -e\vec{E}$, que sigue una dirección contraria a $\vec{E}$.) En presencia de un campo, se modifica la distribución de velocidades entera un poco hacia la derecha como en la figura 49-3*b*. Sin embargo, la mayoría de los electrones continúan sumándose por pares y la velocidad es cero, sin que contribuyan a la conducción.

Los electrones que sí contribuyen son los de un grupo pequeño de velocidades alrededor de v_F. El campo eléctrico genera estados cuya velocidad está apenas por debajo de v_F en

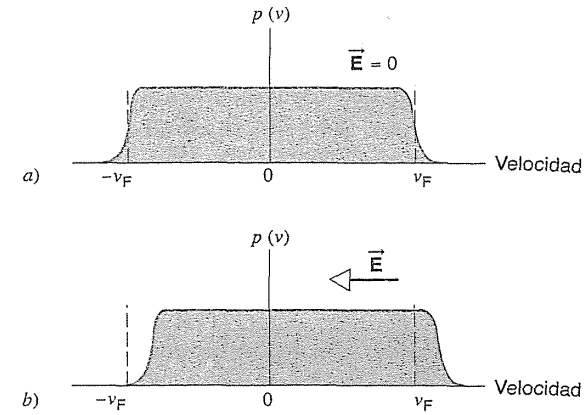


FIGURA 49-3. Distribución de velocidades de Fermi. *a)* Si no hay campo eléctrico los estados arriba de la velocidad de Fermi v_F están llenos. *b)* Cuando un campo eléctrico $\vec{E}$ se aplica en la dirección indicada, la distribución se corre a la derecha a medida que el campo acelera los electrones.

dirección de $\vec{E}$ para quedar desocupados, mientras que se ocupan los estados con velocidades apenas por arriba de v_F en dirección contraria a $\vec{E}$. En la figura 49-3 se ve por qué la velocidad de deriva (velocidad promedio de todos los electrones) es mucho menor que v_F, porque en el proceso promediado muchas velocidades positivas y negativas se cancelan unas a otras. La velocidad de desplazamiento depende primordialmente del número pequeño de electrones que, bajo la acción del campo eléctrico, pasan de los estados por debajo de la velocidad v_F a los estados con velocidad por arriba de v_F.

La resistividad del metal al flujo de estos electrones se debe a las colisiones hechas por los electrones con el núcleo de los iones en la red. En el problema resuelto 49-5 demostramos que, en el cobre a temperatura ambiente, la velocidad de Fermi, que es la velocidad promedio de los electrones de conducción entre colisiones, es 1.6×10^6 m/s, fracción importante de la velocidad de la luz. El tiempo medio entre colisiones es 2.5×10^{-14} s, y la trayectoria libre media, 41 nm; esto equivale a unas 150 distancias del vecino más cercano en la red de cobre.

Quizá al lector le sorprenda que, a temperatura ambiente, un electrón de conducción recorra una distancia tan grande a través de la red de cobre sin chocar con un núcleo de iones. A temperaturas *más bajas* —donde la resistividad es *menor*—, dicho electrón puede recorrer distancias aún mayores. De hecho, he aquí una predicción tal vez imprevista de la mecánica ondulatoria: a una temperatura de cero absoluto una red perfectamente periódica será totalmente transparente a los electrones de conducción. Nunca se producirá colisión alguna.

Pero no existe ese tipo de redes. Siempre hay sitios vacíos en la red y átomos de impurezas, por mucho que uno se esfuerce en eliminarlos. Más aún, con temperaturas por arriba del cero absoluto la red empieza a vibrar y estos movimientos deterioran su periodicidad. A temperatura ambiente las "colisiones" a las que antes nos hemos referido son principalmente interacciones de los electrones de conducción con las vibraciones de la red.

BIBLIOTECA REGIONAL 109 OBREGÓN UNIVERSIDAD DE SONORA

PROBLEMA RESUELTO 49-5. Supongamos que la energía de Fermi en el cobre es 7.06 eV. *a)* ¿Qué velocidad tiene un electrón de conducción con esta energía cinética? *b)* La resistividad ρ del cobre a temperatura ambiente es $1.69 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ y n, el número de electrones por unidad de volumen, es $8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$ ¿Qué tiempo promedio τ existe entre las colisiones? *c)* ¿Qué trayectoria libre promedio puede calcularse con los resultados de a) y *b*)?

Solución *a)* A lo largo de la sección supusimos que los electrones de conducción se desplazan en una región donde su energía potencial es cero. Así, su energía total E es toda energía cinética y, si $E = E_F$, podemos escribir

$$E_F = \tfrac{1}{2} m v_F^2,$$

donde v_F es la velocidad de Fermi. La solución de v_F produce

$$v_F = \left(\frac{2E_F}{m}\right)^{1/2} = \left[\frac{(2)(7.06\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}\right]^{1/2}$$

$$= 1.57 \times 10^{6}\ \text{m/s}.$$

El lector no debería confundir esta velocidad con la *velocidad de deriva* de los electrones de conducción, la cual es del orden de 10^{-4} m/s y, por lo mismo, es menor en un factor aproximado de 10^{10}. Según se explicó en la sección 29-5, la velocidad de deriva es la velocidad promedio a la que los electrones se mueven en un conductor al aplicar un campo eléctrico; la velocidad de Fermi es la velocidad promedio que existe entre colisiones.

b) Al resolver la ecuación 49-1 para τ obtenemos

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$

$$= \frac{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{(8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.69 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$

$$= 2.48 \times 10^{-14}\ \text{s}.$$

c) Para encontrar la trayectoria libre promedio, tenemos

$$\lambda = v_F \tau = (1.57 \times 10^{6}\ \text{m/s})(2.48 \times 10^{-14}\ \text{s})$$
$$= 3.9 \times 10^{-8}\ \text{m} = 39\ \text{nm}.$$

En la red del cobre, los centros de los núcleos de iones vecinos están separados por una distancia de 0.26 nm. En consecuencia, a temperatura ambiente un electrón típico de conducción puede recorrer una distancia considerable a través de una red de cobre sin hacer una colisión.

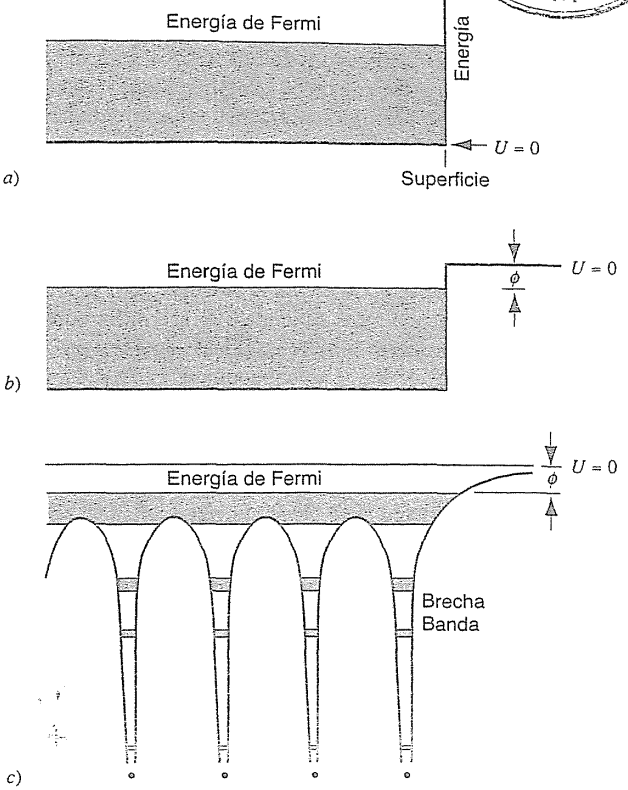


FIGURA 49-4. *a)* Variación de la energía potencial que se supone en un metal según el modelo de gas con electrones libres. *b)* Variación más realista, que muestra un cambio finito de energía potencial en la superficie de la muestra. *c)* Variación todavía más realista, que tiene en cuenta la red de los núcleos de hierro. Esta curva es un corte unidimensional a lo largo de una línea de núcleos iónicos (los cuales aparecen como puntos en el fondo de la figura). Las regiones sombreadas son las bandas de energía permitidas en los electrones. Éstos no pueden tener energía correspondiente a las brechas.

49-5 BANDAS Y BRECHAS

En la figura 49-4*a* se muestra la variación de energía potencial que hemos utilizado al describir un electrón de conducción en un metal. La energía potencial es cero dentro de él y aumenta al infinito en la superficie. No obstante, este modelo ofrece algunos problemas. Por ejemplo, nos indica que un electrón nunca podría escapar del interior de la muestra a través de su superficie. Sabemos que no es así porque los electrones pueden extraerse de un metal "hirviéndolos", para lo cual se aumenta la temperatura como en el filamento calentado de un tubo al vacío (emisión termiónica). También pueden "patearse" si proyectamos luz de frecuencia suficientemente alta sobre la superficie metálica (efecto fotoeléctrico).

La figura 49-4*b* muestra que es bastante fácil resolver este problema, con sólo hacer finita la energía potencial en la superficie. Introducimos el mismo ajuste realista (Fig. 47-6) para el electrón atrapado en un pozo unidimensional del tamaño de un átomo. La magnitud ϕ de la figura 49-4*b* es la *función de trabajo* del metal, definida como la cantidad mínima de energía que debe suministrarse a un electrón para extraerlo de la muestra.

Se dibujó la figura 49-4*b* para que nuestra escala de energía concuerde con la utilizada para el átomo de hidrógeno. En otras palabras, hemos escogido la configuración $E = 0$ para representar un electrón en reposo fuera de la muestra. Es posible efectuar este cambio porque la energía potencial siempre contiene una constante aditiva arbitraria y de todos modos nos interesan más las variaciones de las energías totales E que ella misma. En la nueva escala de energía, la energía total de los electrones atrapados en la muestra son negativas, como lo son también en el átomo de hidrógeno.

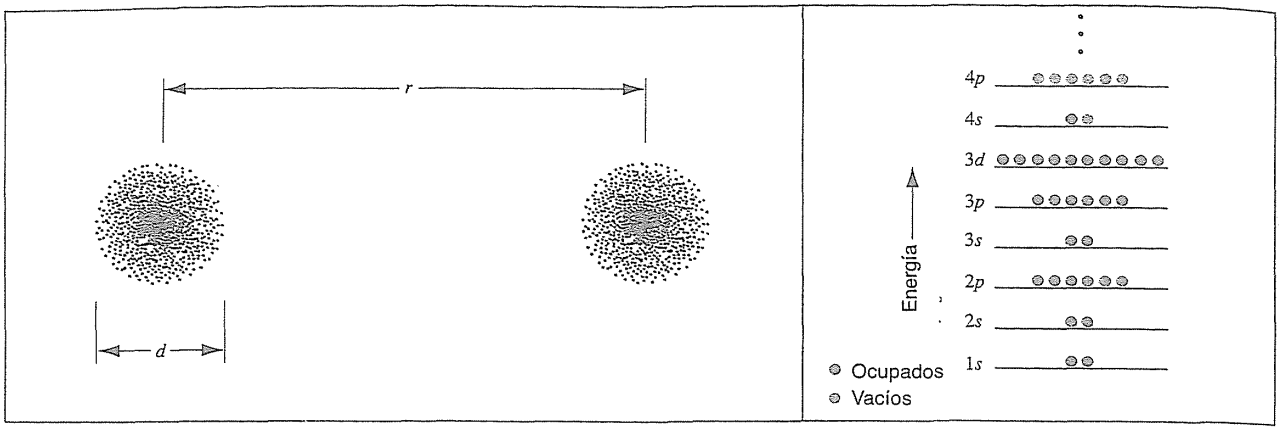


FIGURA 49-5. *a)* Dos átomos neutros de cobre de diámetro *d*, separados por una distancia *r*, con $r \gg d$. *b)* Los átomos son sistemas independientes y, como se muestra en la figura, en su estado base tienen la misma asignación de números cuánticos en sus electrones. La escala de energía es simbólica solamente.

Sin duda, el principal problema de la figura 49-4*b* consiste en suponer que la energía potencial de un electrón de conducción permanece constante en todo el volumen de la muestra. Se ignora así el hecho de que los electrones se mueven en un arreglo de núcleos de iones con carga positiva. De hecho, vale la pena señalar que hemos podido descubrir tanto sobre la resistividad de los metales, despreciando las variaciones de la energía potencial causadas por los núcleos de iones de la red. Pero no hemos logrado contestar preguntas como la siguiente: "¿Por qué el cobre es un conductor y no lo es un diamante?". Si tenemos en cuenta la periodicidad de la red, tendremos la posibilidad de contestar la pregunta anterior y de ir mucho más allá.

En la figura 49-4*c* se muestra una curva de energía potencial que tiene en cuenta los núcleos de iones. La sustitución de esta energía potencial (o de alguna aproximación) en la ecuación de Schrödinger revela un nuevo e interesante fenómeno. Según se observa en la figura 49-4c, *ahora se agrupan en bandas los estados permitidos, con brechas (bandas prohibidas) de energía entre aquellos en que no existen estados.* Nótese que los electrones un poco debajo del nivel de Fermi pueden moverse libremente a través de la red, no así los *electrones del núcleo.* Veamos ahora si podemos entender estas bandas y brechas en términos físicos.

La distancia entre los vecinos más cercanos en una red de cobre es 0.26 nm. Pero suponga dos átomos de cobre separados por una distancia mucho mayor —digamos 50 nm—, de modo que pueda describirlos como "aislados" (Fig. 49-5*a*). En cada átomo se asignan los 29 electrones a los niveles mostrados en la figura 49-5*b*.

A continuación acercamos más los dos átomos, de manera que un electrón exterior pueda influir en uno de estos átomos, así sea ligeramente, por fuerzas que el otro átomo ejerce sobre él. En el lenguaje de la mecánica cuántica decimos que sus funciones de onda empiezan a superponerse. Afirmamos, sin prueba, que ambas funciones pueden combinarse en forma independiente, describiendo los dos estados que tienen energías un poco distintas, como se ve en la segunda columna de la figura 49-6. Como la superposición es mayor en los electrones externos, la división de energía también será mayor en ellos que en los electrones internos. Si hubiera tres átomos en interacción, los niveles individuales de los átomos aislados se convertirían en tres niveles poco espaciados.

Por extensión, juntamos N átomos de cobre para formar una red de ese material, donde cada nivel del átomo aislado se transforma en N niveles poco espaciados del sólido. Así pues, el nivel 1*s* del átomo se convierte en la banda 1*s* del sólido y así sucesivamente. En la figura 49-6 se describe gráficamente el proceso.

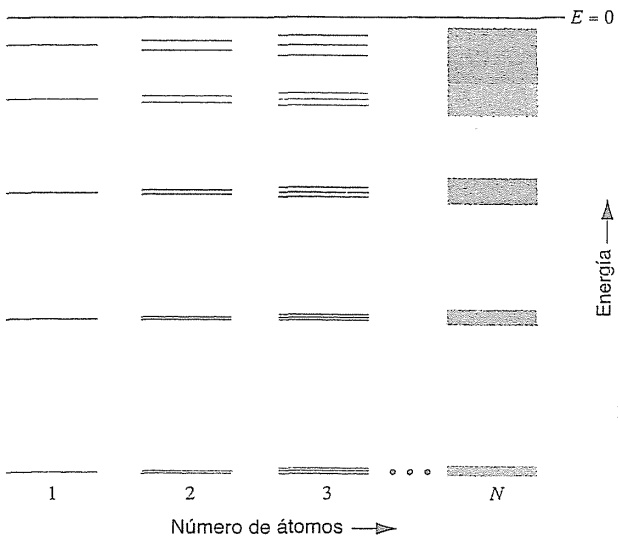


FIGURA 49-6. Al reunir los átomos para formar una red, se dividen los niveles de los átomos aislados hasta que finalmente constituyen bandas de niveles cercanos. La energía de las bandas superiores se superpone en el caso aquí descrito.

Desde este punto de vista las brechas prohibidas no son tan difíciles de entender, pues se conocen por la estructura de niveles del átomo aislado. En efecto, podemos decir que Niels Bohr, aun antes que se descubriera la mecánica cuántica, "inventó" las brechas de energía cuando dijo: "Supongo que los átomos pueden existir sin irradiar en un conjunto discreto de estados estacionarios de energía definida, *estando prohibidos los estados de energía intermedia*".

49-6 CONDUCTORES, AISLANTES Y SEMICONDUCTORES

La figura 47-9*a* representa la estructura de banda de un conductor como el cobre. Su característica fundamental consiste en que la banda poblada de máxima energía está llena sólo en parte. Existen estados vacíos por arriba del nivel de Fermi; por tanto, si aplicamos un campo eléctrico $\vec{E}$, todos los electrones de esta banca podrán incrementar su momento en la dirección $-\vec{E}$ y fluirá una corriente. Las bandas de menor energía están completamente llenas y no pueden contribuir al proceso de conducción, sumándose todas las velocidades por pares a cero.

La figura 49-7*b* describe un aislante. Su característica fundamental consiste en que la banda poblada de máxima energía está completamente llena y la brecha prohibida de energía situada por arriba de él, marcada E_g en la figura, es importante. Por "importante" entendemos que $E_g \gg kT$, de manera que hay escasas probabilidades de levantar un electrón por energía térmica y de introducirlo en la banda colocada arriba de la brecha. Si establecemos un campo eléctrico dentro del aislante, a los electrones les será imposible responder ante él y, por consiguiente, tampoco habrá corriente.

El carbono en su forma de diamante es un excelente aislante, pues su brecha de energía es 5.5 eV, más de 200 veces el valor de kT a temperatura ambiente.

La figura 49-7*c* representa un semiconductor. Se distingue del aislante en que su brecha de energía es lo bastante pequeña para que en ella la excitación térmica de los electrones ocurra hasta cierto punto a temperatura ambiente. Eso pone los electrones en la banda (casi vacía) designada como *banda de conducción* en la figura, dejando un número igual de estados vacíos, u *hoyos,* en la *banda de valencia* (casi llena). En una que esté casi llena, resulta más fácil analizar su contribución a la conducción eléctrica en función del movimiento de los hoyos que se comportan como partículas con carga *positiva.*

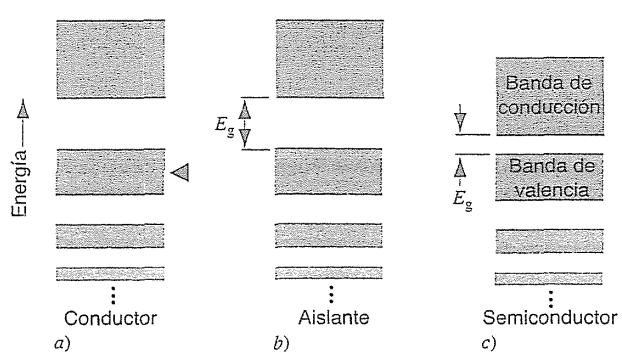


FIGURA 49-7. Representación idealizada de las bandas de energía de *a)* un conductor, *b)* un aislante y *c)* un semiconductor. Las bandas llenas aparecen en sombreado de color y las vacías en sombreado gris. El triángulo negro marca el nivel de Fermi en el conductor.

El silicio es un semiconductor típico. Presenta la misma estructura cristalina que el diamante, sólo que el ancho de su brecha (= 1.1 eV) es considerablemente menor. A una temperatura de cero absoluto, en que no existe agitación térmica, todos los semiconductores son aislantes. A una temperatura más elevada la probabilidad de elevar un electrón a través de la brecha es muy sensible al ancho de la brecha. De ahí que sea un poco arbitraria la distinción entre aislante y semiconductor. Sin embargo, nadie duda en llamar aislante al diamante (E_g = 5.5 eV) y semiconductor al silicio (E_g = 1.1 eV).

PROBLEMA RESUELTO 49-6. ¿Qué probabilidad hay a temperatura ambiente de que un estado en el fondo de la banda de conducción esté ocupado en el diamante y en el silicio? Suponga que la energía de Fermi está en la mitad de la brecha entre las bandas de conducción y de valencia.

Solución En un estado en el fondo de la banda de conducción, la diferencia de energía $E - E_F$ es $0.5E_g$, si la energía de Fermi se encuentra en la mitad de la brecha. A temperatura ambiente (300 K), kT = 0.026 eV. Tenemos entonces $E - E_F >> kT$ y, por lo mismo, podemos aproximar la función de probabilidad de Fermi-Dirac (Ec. 49-6) como

$$p(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \approx e^{-(E-E_F)/kT} = e^{-E_g/2kT}.$$

En el diamante, E_g = 5.5 eV y por eso

$$p(E) = e^{-(5.5\text{ eV})/2(0.026\text{ eV})} = 1.2 \times 10^{-46}.$$

En el silicio, E_g = 1.1 eV y por eso

$$p(E) = e^{-(1.1\text{ eV})/2(0.026\text{ eV})} = 6.5 \times 10^{-10}.$$

En un centímetro cúbico de material, aproximadamente con 10^{23} átomos, habrá una probabilidad insignificante de encontrar siquiera un electrón en la banda de conducción del diamante, mientras puede haber alrededor de 10^{13} electrones en ella (e igual número de hoyos en la banda de conducción) disponibles para la conducción eléctrica en el silicio. El cálculo anterior ejemplifica la diferencia extrema en la conductividad a causa de variaciones pequeñas en la energía de la brecha y además muestra claramente la distinción entre aislantes y semiconductores. Por el contrario, en un centímetro cúbico de un conductor podría haber 10^{23} electrones disponibles para la conducción eléctrica.

Semiconductores

En el problema resuelto 49-6 comparamos la propiedad de un semiconductor con la de un aislante. En la tabla 49-1 se comparan algunas propiedades de un semiconductor común (el silicio) con las de un conductor común (el cobre). En seguida vamos a examinarlas más a fondo.

1. *Densidad de portadores de carga, n.* El cobre tiene muchas más portadores de carga que el silicio en un factor aproximado de 10^{13}. En el cobre los portadores son los elec-

TABLA 49-1 Algunas propiedades eléctricas del cobre y del silicio[a]

	Cobre	*Silicio*
Tipo de material	Conductor	Semiconductor
Densidad de los portadores de carga[b] n (m^{-3})	9×10^{28}	1×10^{16}
Resistividad ρ ($\Omega \cdot m$)	2×10^{-8}	3×10^{3}
Coeficiente de temperatura de resistividad α (K^{-1})	$+4 \times 10^{-3}$	-70×10^{-3}

[a]Todos los valores se refieren a la temperatura ambiente.
[b]Incluye electrones y hoyos en el caso del silicio.

trones de conducción, más o menos uno por átomo. En la figura 49-7*c* se indica que, a una temperatura de cero absoluto, el silicio no tendría en absoluto portadores de carga. A temperatura ambiente, a la cual se refiere la tabla 49-1, aparecen sólo porque en el equilibrio térmico la agitación térmica ha hecho que cierto número (muy reducido) de electrones alcance la banda de conducción, dejando una cantidad igual de estados vacíos (hoyos) en la banda de valencia.

Los hoyos en la banda de valencia de un semiconductor son excelentes portadores de carga, pues permiten cierta libertad de movimiento a los electrones en esa banda. Si se crea un campo eléctrico en un semiconductor, los electrones de ella, por llevar carga negativa, se desplazan en dirección de $-\vec{E}$. Los hoyos lo hacen hacia el campo y se comportan como partículas portadoras de una carga $+e$, que es exactamente como los consideramos. La conducción por hoyos constituye una característica importante de los semiconductores.

2. *Resistividad, ρ.* A temperatura ambiente la resistividad del silicio es mayor que la del cobre en un factor aproximado de 10^{11}. En ambos elementos, la resistividad se calcula mediante la ecuación 49-1. Como se observa en ella, la resistividad crece a medida que disminuye n, la densidad de los portadores de carga. La enorme diferencia de resistividad entre el cobre y el silicio se debe a la gran diferencia de n. (El tiempo medio de colisión τ también será distinto en el cobre y silicio, pero la enorme diferencia en la densidad de las portadoras de carga supera con mucho el efecto que ello tiene en la resistividad.)

Para completar la exposición cabe mencionar que la resistividad de un buen aislante (cuarzo fundido o diamante, por ejemplo) puede alcanzar, a temperatura ambiente, los $10^{20}\ \Omega \cdot m$, unas 10^{28} veces más alta que la del cobre. Pocas propiedades físicas tienen una gama tan extensa de valores medibles como la resistividad eléctrica.

3. *Coeficiente de temperatura de la resistividad, α.* Esta magnitud (Ec. 29-18) es el cambio fraccional de la resistividad ρ por unidad de cambio de temperatura, o sea

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}.$$

La resistividad del cobre y de otros metales *aumenta* con la temperatura ($d\rho/dT > 0$). Ello obedece a que las colisiones ocurren con mayor frecuencia al elevarse la temperatura, reduciendo así τ en la ecuación 49-1. En los metales la densidad de los portadores de carga n en esa ecuación 1 no depende de la temperatura.

Por el contrario, la resistividad del silicio (y de otros semiconductores) *decrece* con la temperatura ($d\rho/dT < 0$). Se debe a que la densidad de los portadores de carga n en la ecuación 49-1 crece rápidamente con la temperatura. La disminución de τ, mencionada antes en relación con los metales, también se presenta en los semiconductores, sólo que su efecto en la resistividad se ve superado con creces por el incremento tan rápido de la densidad de los portadores de carga.

En el laboratorio puede identificarse un semiconductor por su gran resistividad ρ y sobre todo por su elevado —y negativo— coeficiente térmico de la resistividad α, comparadas ambas magnitudes con los valores de un metal ordinario.

49-7 SEMICONDUCTORES DOPADOS

El desempeño de los conductores se modifica de modo sustancial introduciendo deliberadamente como impureza un número pequeño de átomos adecuados de sustitución en su red, proceso conocido como *dopado*. Se califica de *extrínseco* al semiconductor resultante, para distinguirlo del material puro o *intrínseco*. En lo esencial, hoy todos los dispositivos semiconductores se basan en material extrínseco.

La figura 49-8*a* es una representación bidimensional de una red de silicio puro. Cada uno de sus átomos posee cuatro electrones de valencia y forma una unión de dos electrones con sus cuatro vecinos más cercanos; los electrones que intervienen en la unión constituyen la banda de valencia de la muestra.

En la figura 49-8*b* uno de los átomos de silicio ha sido reemplazado por uno de fósforo, que tiene cinco electrones de valencia. Cuatro de ellos forman uniones con los cuatro átomos vecinos de silicio, pero el quinto está ligado con poca fuerza al núcleo de ion fósforo, según se observa en la figura 49-8*b*. Es mucho más fácil que *este* electrón sea excitado térmicamente e introducido en la banda de conducción que uno de los electrones de valencia del silicio.

El átomo de fósforo recibe el nombre de *donador* porque *dona* fácilmente un electrón a la banda de conducción. Puede decirse que el electrón "extra" de la figura 49-8*b* se encuentra en un nivel localizado de donador, como se indica en la figura 49-9*a*. Este nivel está separado del fondo de la banda de conducción por la brecha de energía E_d, donde generalmente $E_d \ll E_g$. Al agregar átomos donadores, se incrementa de modo considerable la densidad de los electrones en la banda de conducción.

A los semiconductores dopados con los átomos donadores se les llama semiconductores de *tipo n*, donde esta letra significa "negativo", porque los portadores de carga negativa (electrones) superan con mucho a los portadores de carga positiva (hoyos). En estos semiconductores los electrones de la banda de conducción reciben el nombre de *portadores de mayoría,* y los hoyos de la banda de valencia, *portadores de minoría.*

En la figura 49-8*c* se muestra una red de silicio donde un átomo de este material ha sido sustituido por un átomo de alu-

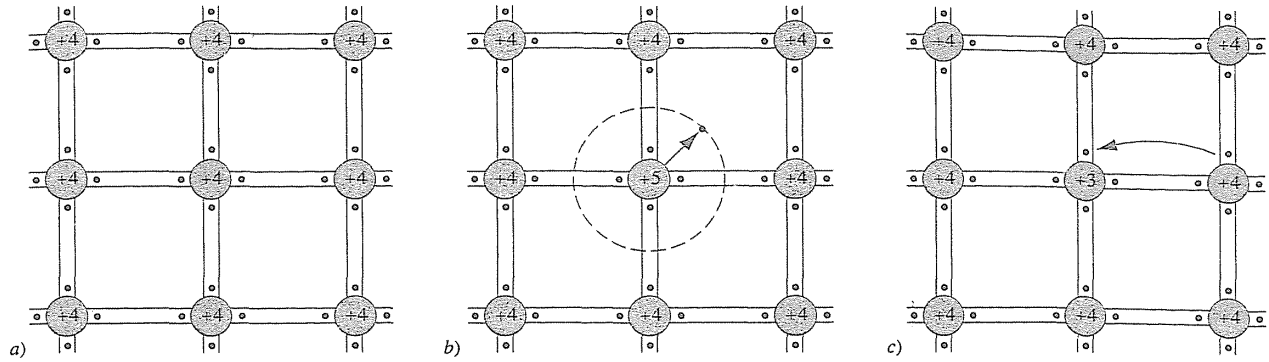


FIGURA 49-8. *a*) Representación bidimensional de la red del silicio. Los iones de este material (carga del núcleo = + 4*e*) están ligados a sus cuatro vecinos más cercanos mediante un enlace compartido de dos electrones. Los puntos indican esos electrones de valencia. *b*) Con un átomo de silicio se sustituye uno de fósforo (valencia = 5), creando así un sitio de donador. *c*) Con un átomo de silicio se sustituye un átomo de aluminio (valencia = 3), creando con ello un sitio aceptor.

minio, que posee tres electrones de valencia. En este caso falta un electrón, y para el núcleo de ion aluminio es fácil "robar" un electrón de valencia al átomo cercano de silicio, con lo cual se crea un hoyo en la banda de valencia.

Al átomo de aluminio también se le conoce como *aceptor,* porque fácilmente *acepta* un electrón de la banda de valencia. Ese electrón se dirige al interior del nivel localizado del aceptor, según se señala en la figura 49-9*b*. Una brecha de energía E_a, donde $E_a \ll E_g$ separa este nivel de la parte superior de la banda de valencia. El número de hoyos en ella crece de manera considerable al agregar átomos aceptores.

Los semiconductores dopados con átomos aceptores reciben el nombre de semiconductores de *tipo p*, donde "*p*" significa "positivo", porque los portadores de carga positiva (hoyos) superan con mucho las de carga negativa (electrones). En estos semiconductores los portadores de mayoría son hoyos en la banda de valencia, y los de minoría electrones en la banda de conducción.

En la tabla 49-2 se sintetizan las propiedades de un semiconductor común de tipo *n* y otro de tipo *p*. Note especialmente que los núcleos de los iones del donador y aceptor están cargados, pero no son portadores de carga, pues a temperatura normal permanecen fijos en los sitios que ocupan dentro de la red.

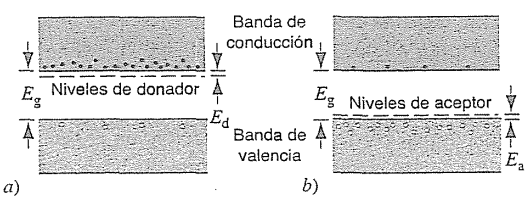


FIGURA 49-9. *a*) Semiconductor de tipo *n*, que muestra niveles de donador que han aportado electrones (portadores de mayoría) a la banda de conducción. En la banda de conducción también se muestra el número pequeño de hoyos (portadores de minoría). *b*) Semiconductor de tipo *p*, que muestra los niveles del receptor que han aportado hoyos (portadores de mayoría) a la banda de valencia. Se muestra también el número pequeño de electrones (portadores de minoría) en la banda de conducción.

TABLA 49-2 Dos semiconductores extrínsecos comunes

	Tipo n	*Tipo p*
Material de matriz	Silicio	Silicio
Impurezas	Fósforo	Aluminio
Tipo de impurezas	Donador	Aceptor
Valencia de las impurezas	5 (= 4 + 1)	3 (= 4 − 1)
Brecha de energía de las impurezas	0.045 eV	0.057 eV
Portadores de mayoría	Electrones	Hoyos
Portadores de minoría	Hoyos	Electrones
Carga del núcleo de iones de las impurezas	$+e$	$-e$

PROBLEMA RESUELTO 49-7. A temperatura ambiente, la densidad de los electrones de conducción en silicio puro es de unos 10^{16} m^{-3}. Suponga que, al dopar la red con fósforo, quiere aumentar este número en un factor de 10^6. ¿Qué fracción de los átomos de silicio hay que reemplazar por átomos de fósforo? (Suponga que a temperatura ambiente la agitación térmica es lo bastante fuerte para que prácticamente todos los átomos de fósforo donen su electrón "extra" a la banda de conducción.)

Solución La densidad n_p de los átomos de fósforo debe ser de unos $(10^{16}\ m^{-3})(10^6)$ o $10^{22}\ m^{-3}$. La de los átomos de silicio en una red pura puede calcularse mediante

$$n_{Si} = \frac{N_A d}{M},$$

donde N_A es la constante de Avogadro; d (= 2330 kg/m^3) la densidad del silicio, y M (= 28.1 g/mol) la masa molar del silicio. La sustitución produce

$$n_{Si} = \frac{(6.02 \times 10^{23}\ mol^{-1})(2330\ kg/m^3)}{0.0281\ kg/mol} = 5 \times 10^{28}\ m^{-3}.$$

La razón de estas dos densidades numéricas es la magnitud que estamos buscando. Por tanto,

$$\frac{n_{Si}}{n_P} = \frac{5 \times 10^{28}\ m^{-3}}{10^{22}\ m^{-3}} = 5 \times 10^6.$$

Vemos que, si sólo *un átomo de silicio en cinco millones* se reemplaza por un átomo de fósforo, el número de electrones en la banda conductora crecerá en un factor de 10^6.

¿Cómo puede una mezcla tan pequeña de átomos de fósforo causar un efecto tan grande? La respuesta es que, en silicio puro a temperatura ambiente, en un principio no hay muchos electrones de conducción. Su densidad era $10^{16}\ m^{-3}$ antes del dopado, y $10^{22}\ m^{-3}$ después de él. Por el contrario, en el cobre la densidad de los electrones de conducción (Tabla 49-1) es $10^{29}\ m^{-3}$ aproximadamente. En conclusión, *después* del dopado la densidad de los electrones de conducción en el silicio sigue siendo menor que la de un conductor típico como el cobre.

PROBLEMA RESUELTO 49-8. Suponga que el electrón "extra" en un átomo donador de fósforo se mueve en una órbita de Bohr alrededor del núcleo central de los iones fósforo, según se observa en la figura 49-8*b*. Calcule *a*) la energía de enlace y *b*) el radio de la órbita de este electrón.

Solución *a*) La expresión de la teoría de Bohr para la energía de enlace E_b del estado $n = 1$ es (Ec. 47-23)

$$E_b = -E_1 = \frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2h^2}. \qquad (49\text{-}7)$$

Aquí hacemos $Z = 1$ porque el electrón que gira "mira" una carga negativa de $+e$.

Obtuvimos la energía de Bohr tomando un átomo semejante al hidrógeno, moviéndose en el vacío su electrón que gira. Sin embargo, en este caso el electrón se mueve a través de una red de silicio. Un efecto de esto consiste en atenuar la fuerza electrostática en un factor de κ_e, la constante dieléctrica del silicio. Para entender esta fuerza en términos cuantitativos, hay que reemplazar ϵ_0 en la ley de Coulomb por $\kappa_e\epsilon_0$. La misma sustitución en la ecuación 49-7 nos da

$$E_b = \frac{1}{\kappa_e^2}\left(\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2}\right),$$

donde el factor entre paréntesis es apenas 13.6 eV, la energía de enlace del átomo de hidrógeno. En el silicio tenemos $\kappa_e = 12$, de modo que

$$E_b = \frac{13.6\ \text{eV}}{(12)^2} = 0.094\ \text{eV}.$$

El orden de magnitud de este resultado concuerda aproximadamente con el valor de 0.045 eV de la tabla 49-2.

b) El radio de la órbita se obtiene de la ecuación 47-22. Al sustituir como en la parte *a*) se tiene

$$r = \kappa_e\left(\frac{\epsilon_0h^2}{\pi me^2}\right). \qquad (49\text{-}8)$$

El factor entre paréntesis no es sino el radio de Bohr (= 52.9 pm). Por tanto,

$$r = (12)(52.9\ \text{pm}) = 630\ \text{pm}.$$

Este valor se parece al espaciamiento atómico en la red de silicio (540 pm).

También deberíamos reemplazar la masa m del electrón en las ecuaciones 49-7 y 49-8 por una masa efectiva m_{ef} para tener en cuenta parcialmente la naturaleza periódica del potencial de la red de silicio. De ese modo reducimos la energía estimada de enlace e incrementamos el radio estimado de la órbita; ambos cambios mejoran la coincidencia con el experimento.

49-8 LA UNIÓN *pn*

En las siguientes secciones vamos a describir algunos dispositivos semiconductores de uso común, entre ellos los rectificadores de diodo, los diodos emisores de luz y los transistores. Hay infinidad de este tipo de dispositivos que podríamos describir. En efecto, gracias a la tecnología moderna es posible adaptar a necesidades concretas los complejos dispositivos de semiconducción.

En lo esencial, todos ellos contienen una o más *uniones pn*. Tomemos un plano hipotético a través de una varilla de un material semiconductor cristalino puro. En un lado del plano, se dopa la varilla con átomos donadores (creando así un material de tipo *n*) y en el otro se dopa con átomos aceptores (creando así un material de tipo *p*). Es una combinación que produce una unión *pn*.

La figura 49-10*a* representa una unión en el momento imaginario de su producción. Hay muchos electrones en el material de tipo *n* y hoyos en el material de tipo *p*.

Los electrones cercanos al plano de unión tenderán a difundirse a través de él, en gran medida por la misma razón que las moléculas de gas lo harán en un membrana permeable dirigiéndose al vacío más allá de ella. Los electrones difundidos que están en la banda de conducción, la cual se dirige de derecha a izquierda en la figura 49-10*a*, se combinarán fácilmente con los hoyos de la banda de valencia en el otro lado del plano de unión. Por su parte, los hoyos en la región de tipo *p* se difundirán por el plano de unión de izquierda a derecha y se combinarán con los electrones en la región *n*.

En todo fenómeno de difusión-recombinación la parte de la barra en el lado derecho de este plano adquiere una carga positiva, y la parte del lado izquierdo, una negativa. A causa de las cargas* se produce una diferencia de potencial ΔV_0 en la unión, según se observa en la figura 49-10*c*. Relacionado con esta diferencia de potencial (por la Ec. $E = -dV/dx$) hay un campo eléctrico interno E_0 que está a través del plano de unión apuntando como en la figura 49-10*c*. Este campo ejerce una fuerza sobre los electrones, la cual se opone a su movimiento de difusión. Dicho con otras palabras, para que un electrón logre difundirse de derecha a izquierda o un hoyo de izquierda a derecha en la figura 49-10*b*, debe poseer suficiente energía para superar la barrera de potencial ΔV_0 que aparece en la figura 49-10*c*. Esto se describe gráficamente en la figura 49-10*d*; ésta muestra las bandas de energía de los electrones. Un electrón no se difunde de la región de tipo *n* a la de tipo *p*, si no "trepa" la colina de altura $e\Delta V_0$. Un hoyo debe hacer lo mismo, pues de lo contrario no se difundirá de izquierda a derecha. La difusión de electrones y de hoyos genera una corriente, cuya dirección, en el sentido habitual, es de derecha a izquierda en la figura 49-10. A esta corriente la llamamos *corriente de difusión* i_{dif}.

* Las cargas fijas, que están cerca del plano de unión y separadas por él, son las de los núcleos de iones donadores y receptores, que como ya dijimos no son móviles. En condiciones normales las cargas de los núcleos se compensan con la carga (opuesta) de los portadores móviles. Pero cuando éstos cruzan el plano de unión, los núcleos de los iones dejan de ser compensandos y —por así decirlo— quedan al descubierto.

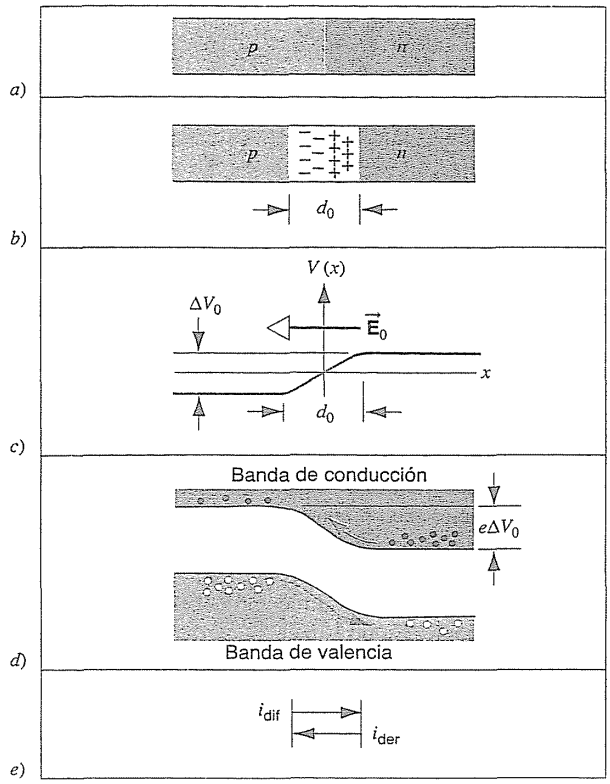


FIGURA 49-10. *a*) Una unión *pn* en el momento imaginado de su creación. *b*) La difusión de los portadores de mayoría en el plano de unión hace aparecer una carga espacial de iones fijos de donador y receptor. *c*) La carga espacial crea una diferencia de potencial ΔV_0 y un campo eléctrico correspondiente $\vec{E}_0$ a través del plano de unión. *d*) Bandas de energía de los electrones cerca de la unión. Las flechas indican la difusión de los portadores de mayoría. *e*) En estado de equilibrio, la difusión de los portadores de mayoría a través el plano de unión se compensa exactamente con el desplazamiento de los portadores de minoría en dirección contraria.

Desde luego, no es posible tener una varilla aislada de silicio en un estante con una corriente que fluya indefinidamente en toda su extensión. Algo ha de ocurrir que la detenga o compense. Para averiguar lo que es, hay que concentrarse en los portadores de minoría.

Como se observa en la figura 49-9 y en la tabla 49-2, hay unos cuantos hoyos —los portadores de minoría— aunque la mayor parte de los que se encuentran en el material de tipo *n* son electrones. También hay pocos electrones en el material de tipo *p*, aunque los portadores de mayoría son hoyos. Los portadores de minoría se muestran gráficamente en la figura 49-10*d*.

El campo eléctrico de la figura 49-10*c* retarda el movimiento de los portadores de mayoría —por ser una barrera para ellos—, pero para los de minoría es un viaje cuesta abajo sin importar si son electrones u hoyos. Cuando por agitación térmica un electrón cercano al plano de unión es elevado de la banda de valencia a la de conducción del material de tipo *p*, deriva sin cesar de izquierda a derecha sobre el plano de unión, barrido por el campo eléctrico E_0. Y si se crea un hoyo en el material de tipo *n*, también deriva hacia el otro lado. Gracias a este proceso, la región de espacio-carga que aparece en la figura 49-10*b* queda liberada de los portadores de carga y, por tal razón, se le conoce como *zona de agotamiento*. La corriente representada por el movimiento de los portadores de minoría, denominada *corriente de deriva* i_{der}, sigue una dirección contraria a la de la corriente de difusión y la compensa exactamente en el equilibrio, como se observa en la figura 49-10*e*.

Así pues, en el equilibrio una unión *pn* que descansa sobre un estante adquiere una diferencia de potencial de contacto ΔV_0 entre sus extremos. La corriente de difusión i_{dif} que pasa por el plano de unión desde la dirección *p* hasta *n* es balanceada por una corriente de deriva i_{der} que se dirige en la dirección contraria. Un campo eléctrico E_0 opera en la capa de agotamiento cuyo ancho es d_0.

PROBLEMA RESUELTO 49-9. Una unión *pn* basada en silicio presenta una concentración igual n_0 de átomos donadores y aceptores. Su zona de agotamiento, con un ancho *d*, es simétrica alrededor del plano de unión, como se ve en la figura 49-11*a*. *a*) Obtenga una expresión para $E_{máx}$, la intensidad máxima del campo eléctrico en esa zona. *b*) Obtenga una expresión para ΔV_0, la diferencia de potencial que existe en ella (Fig. 49-10*c*). *c*) Suponga que la medida de $n_0 = 3 \times 10^{22}\ m^{-3}$ y que ΔV_0 nos da 0.6 V. Calcule el ancho de la zona de agotamiento. *d*) Por medio del valor de *d* calcule el valor de $E_{máx}$.

Solución *a*) Puede suponerse que el campo eléctrico es cero en el material de tipo *n* y de tipo *p* fuera de la zona de agotamiento. El campo apunta de derecha a izquierda de esta zona de agotamiento y, por simetría, alcanza su valor máximo en el centro de la zona (Fig. 49-11*b*).

Apliquemos la ley de Gauss a la "caja" cerrada (superficie gaussiana) de la figura 49-11*a*. La ley es

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \vec{E} \cdot d\vec{A} = q,$$

donde κ_e (= 12) es la constante dieléctrica del silicio, y q [= $n_0 eA(d/2)$] la carga libre contenida en su interior. La integral debe tomarse sobre la superficie de la caja.

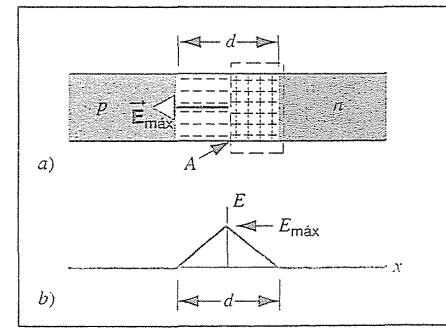


FIGURA 49-11. Problema resuelto 49-9. *a*) Zona de agotamiento en la unión *pn*. El rectángulo punteado representa la sección transversal de una superficie gaussiana con tapas laterales de área *A*. *b*) Variación del campo eléctrico en la zona de agotamiento.

La única aportación a la integral proviene de la cara de la caja situada en el plano de unión, de modo que la integral tiene el valor $\kappa_e E_{máx} A$. Al efectuar estas sustituciones y al resolver para $E_{máx}$ se obtiene

$$E_{máx} = \frac{n_0 e d}{2\kappa_e \epsilon_0}, \tag{49-9}$$

la relación que buscamos.

b) Como se muestra en la figura 49-11*b*, el campo eléctrico disminuye linealmente de su valor central de $E_{máx}$ a cero en los lados de la zona de agotamiento. Así pues, su valor *promedio* en toda ella será $\frac{1}{2} E_{máx}$. La diferencia de potencial es igual al trabajo por unidad de carga que se requiere para llevar una carga de prueba q_0 de una cara de la zona a la otra. Por ello si $\boldsymbol{F}$ es la fuerza promedio que actúa sobre la carga de prueba,

$$\Delta V_0 = \frac{W}{q_0} = \frac{Fd}{q_0} = \frac{(\frac{1}{2} E_{máx} q_0) d}{q_0} = \tfrac{1}{2} E_{máx} d.$$

La sustitución de $E_{máx}$ en la ecuación 49-9 nos da

$$\Delta V_0 = \frac{n_0 e d^2}{4\kappa_e \epsilon_0}. \tag{49-10}$$

c) Al resolver la ecuación 49-10 para d y al sustituir los valores dados, obtenemos

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{4\kappa_e \epsilon_0 \, \Delta V_0}{e n_0} \right)^{1/2} \\ &= \left[\frac{(4)(12)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(0.60\ \text{V})}{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(3 \times 10^{22}\ \text{m}^{-3})} \right]^{1/2} \\ &= 2.3 \times 10^{-7}\ \text{m} = 230\ \text{nm}. \end{aligned}$$

d) La sustitución en la ecuación 49-9 nos da

$$\begin{aligned} E_{máx} &= \frac{n_0 e d}{2\kappa_e \epsilon_0} \\ &= \frac{(3 \times 10^{22}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(2.3 \times 10^{-7}\ \text{m})}{(2)(12)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})} \\ &= 5.2 \times 10^{6}\ \text{V/m}. \end{aligned}$$

¿Qué suposiciones hicimos en este problema que pudieran producir distintos valores de las cantidades calculadas en las condiciones prácticas del laboratorio?

El diodo rectificador

La unión *pn* es fundamentalmente un rectificador, aunque puede utilizarse en muchas formas. Es decir, si la conectamos a la terminal de una batería, la corriente (unos pocos picoamperes) del circuito será mucho menor en una polaridad de la conexión que en la otra. En la figura 49-12 se ve que, en un diodo típico de unión *pn* de silicio, la corriente en la conexión de *polarización inversa* ($\Delta V < 0$) es insignificante comparada con la corriente de la conexión de polarización directa ($\Delta V > 0$).

La figura 49-13 muestra una de la multitud de aplicaciones posibles de un rectificador de diodo. Un potencial de entrada de onda senoidal genera un potencial de salida de media onda; el rectificador funciona esencialmente como un cortocircuito con una polaridad del potencial de entrada y esencialmente como un circuito abierto con la otra. De hecho, un rectificador ideal

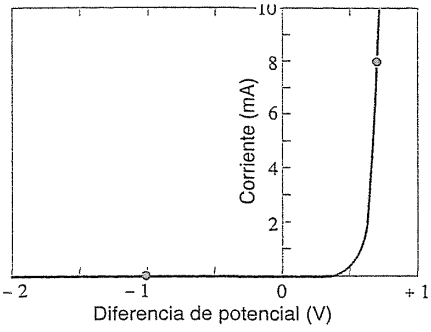


FIGURA 49-12. Diagrama de corriente voltaje de una unión típica *pn*, que muestra que conduce con facilidad hacia adelante, pero que es esencialmente no conductora en la dirección inversa. Los puntos se refieren al ejercicio 35.

tiene apenas estos modos de operación. O está encendido (resistencia cero) o apagado (resistencia infinita).

En la figura 49-13 aparece el símbolo del diodo rectificador. La punta de la flecha corresponde a la terminal de tipo *p* del dispositivo y apunta en dirección del flujo convencional "fácil" de corriente. En otras palabras, el diodo está encendido cuando la terminal con la punta de la flecha es (suficientemente) positiva respecto a la otra terminal.

La figura 49-14 muestra los detalles de las dos conexiones. En la figura 49-14*a* (el arreglo con polarización inversa), la fuerza electromotriz de la batería simplemente se agrega a la diferencia de potencial de contacto, aumentando así la altura de la barrera que la mayoría de los portadores deben superar. Un número pequeño de ellos lo logran y de ahí la reducción considerable de la corriente de difusión.

Sin embargo, la corriente de deriva no percibe barrera alguna, y por ello, no depende de la magnitud ni de la dirección del potencial externo. En consecuencia, se perturba el equilibrio de corriente existente en la polarización cero (Fig. 49-10*e*) y, como se observa en las figuras 49-14*a*, una corriente —muy pequeña— aparece en el circuito.

Otro efecto de la polarización inversa consiste en ampliar la zona de agotamiento, tal como se observa al comparar las figura 49-10*b* y 49-14*a*. Ello parece razonable porque la terminal positiva de la batería, conectada al extremo de tipo *n* de la unión, tiende a jalar los electrones de la zona y a regresarlos al material de tipo *n*, rechazando los hoyos hacia el material de tipo *p*. Es una región de gran resistividad, ya que la zona de agotamiento contiene muy pocos portadores de carga. Así pues, su ancho tan crecido significa un importante incremento de la resistencia, consistente con el pequeño valor de la corriente en el diodo de polarización inversa.

La figura 49-14*b* muestra la conexión de polarización directa, con la terminal positiva de la batería conectada al extremo de tipo *p* de la unión *pn*. Aquí la fuerza electromotriz aplicada *sustrae* el potencial de contacto, la corriente de difusión *aumenta* de modo considerable y se produce una corriente neta relativamente *grande* hacia adelante. La zona de agotamiento se *estrecha más* y su resistencia baja coincide con la gran corriente hacia adelante.

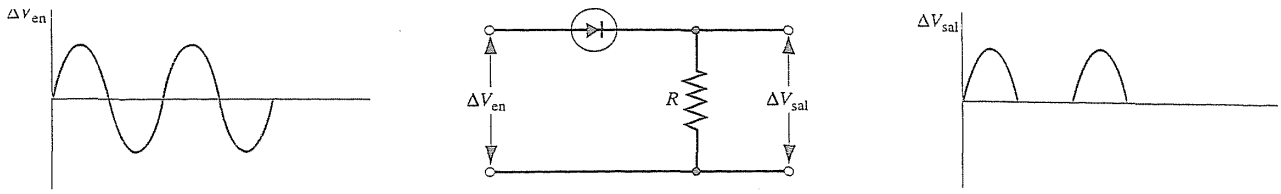


FIGURA 49-13. Diodo de unión *pn* conectado como rectificador. El diodo conduce fácilmente hacia adelante (secciones positivas de la onda de entrada), no así en dirección inversa (secciones negativas de la onda de entrada).

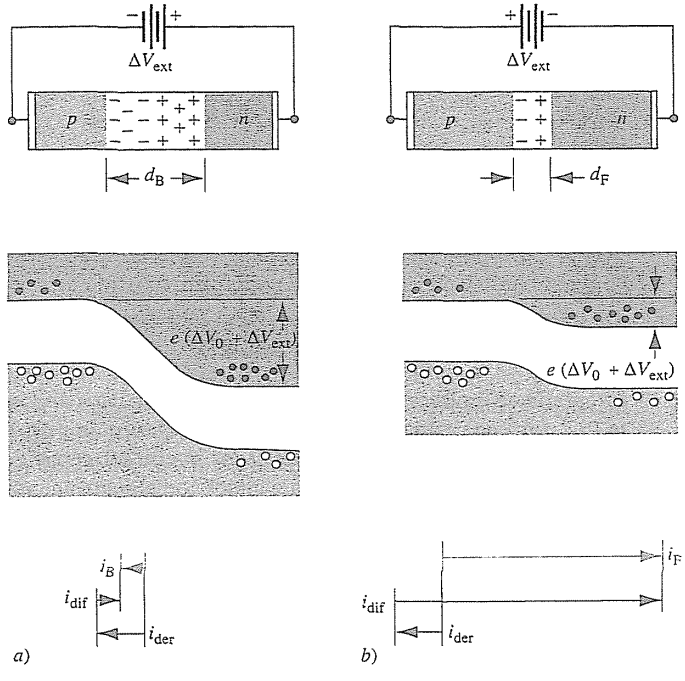


FIGURA 49-14. *a*) Conexión de polarización inversa de una unión *pn*, que muestra la amplia zona de agotamiento, las bandas de energía y la correspondiente corriente pequeña hacia atrás i_B. *b*) Conexión de polarización directa, que muestra la estrecha zona de agotamiento, las bandas de energía y la gran corriente hacia adelante i_F. Nótese que la corriente de deriva es igual en todos los casos.

49-9 OPTOELECTRÓNICA

Todos estamos familiarizados con los números de colores brillantes que brillan y resplandecen en las cajas registradoras, en las bombas de gasolina y en el equipo electrónico. En casi todos los casos, la luz se emite de un sistema de uniones *pn* que operan como *diodos emisores de luz* (LED).

La figura 49-15*a* muestra el conocido dispositivo de siete segmentos donde se forman los números. En la figura 49-15*b* vemos que cada uno de sus elementos es el extremo de una lente plana de plástico, en el otro extremo de la cual hay un pequeño diodo emisor de luz, posiblemente con un área aproximada de 1 mm^2. La figura 49-15*c* muestra un circuito típico donde el diodo emisor tiene polarización directa.

¿Cómo puede una unión *pn* emitir luz? Cuando un electrón en el fondo de la banda de conducción de un semiconductor cae en un hoyo en la parte superior de la banda de valencia, se libera la energía E_g, donde E_g es el ancho de la brecha. ¿Qué sucede con ella? Existen por lo menos dos posibilidades. Podría ser transformada en energía interna de la red vibratoria y, con mucha probabilidad, eso es precisamente lo que acontece en un semiconductor de silicio.

Sin embargo, en algunos semiconductores la energía emitida puede aparecer como radiación electromagnética cuya longitud de onda está dada por

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{E_g/h} = \frac{hc}{E_g}. \qquad (49\text{-}11)$$

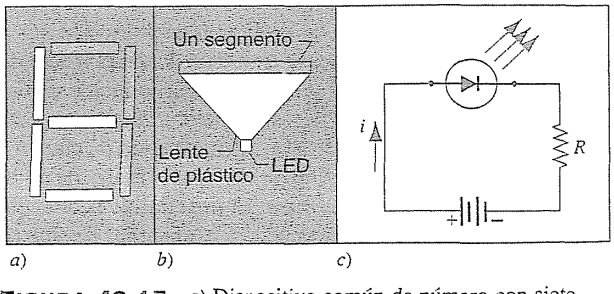


FIGURA 49-15. *a*) Dispositivo común de número con siete segmentos, activado para mostrar el número "7". *b*) Un segmento del dispositivo. *c*) Un LED conectado a una fuente externa de fuerza electromotriz.

Los diodos emisores de luz comerciales, diseñados para la región visible, suelen basarse en un material semiconductor que es un compuesto de galio-arsénico y fósforo. Al ajustar la razón entre fósforo y arsénico, puede modificarse el ancho de la brecha y, por tanto, también la longitud de onda de la luz emitida.

Si la luz se emite cuando el electrón cae de la banda de conducción a la de valencia, la luz de esa misma longitud de onda será *absorbida* al moverse el electrón en la otra dirección, es decir, de la banda de valencia a la de conducción. Para que no se absorban todos los fotones emitidos, es necesario contar con un gran excedente de electrones y de hoyos presentes en el material, en cantidades mayores a las que generaría la agitación térmica en el material semiconductor intrínseco. Son precisamente las condiciones que se dan cuando los portadores de mayoría —tanto electrones como hoyos— se inyectan a través del plano central de la unión *pn* mediante la acción de la diferencia de potencial externa. Por eso un simple semiconductor intrínseco no funcionará como un diodo emisor de luz. Se requiere una unión *pn*. Si se quiere disponer de portadores de mayoría —y por lo mismo de muchos fotones—, hay que introducir grandes cantidades de impurezas e imprimirles una fuerte polarización directa.

PROBLEMA RESUELTO 49-10. Un diodo emisor de luz se construye con una unión *pn* basada en cierto material semiconductor cuya brecha de energía es 1.90 eV. ¿Qué longitud de onda tiene su luz emitida?

Solución De acuerdo con la ecuación 49-11 tenemos

$$\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(1.90\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}$$

$$= 6.54 \times 10^{-7}\ \text{m} = 654\ \text{nm}.$$

La luz de esta longitud de onda es roja.

El diodo láser

La caída de un electrón desde la banda de conducción para llenar un hoyo en la banda de valencia, con la emisión de un fotón, nos recuerda mucho a la de los electrones en transición entre los estados atómicos estudiados en el capítulo 48. Hay aplicaciones importantes que se basan en esta semejanza: al inyectar electrones en la banda de conducción y los hoyos en la banda de valencia, es posible crear una inversión de población análoga a la considerada al hablar de los láseres en la sección 48-9. Y así es posible construir un *láser de diodo*, donde el medio de la acción del láser no es un gas sino un semiconductor sólido. Estos láseres suelen utilizarse en reproductoras de discos compactos y en otros sistemas ópticos de recuperación de datos.

La figura 49-16 muestra una representación de los niveles de energía en un láser de diodo. El material de acción del láser queda entre las capas de tipo *p* y el material de tipo *n*, que tiene brechas de energía un poco mayores. En el material de tipo *n* se inyectan electrones mediante un circuito externo; algunos electrones de este exceso se dirigen hacia el interior de la capa de acción del láser, donde una barrera de potencial impide que se desplacen hacia el material de tipo *p*. En forma

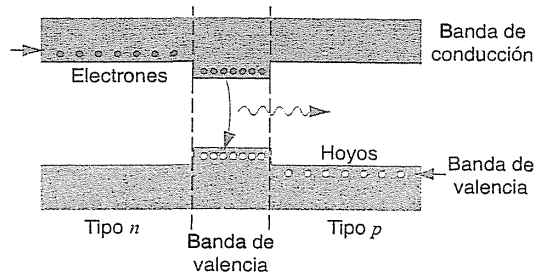


FIGURA 49-16. Bandas de energía en un diodo láser. La región activa posee una brecha más pequeña de energía que los materiales de tipo *n* y *p* a ambos lados. Se emite luz cuando los electrones en la banda de conducción de la región activa bajan para llenar los hoyos en la banda de valencia.

parecida, se inyectan hoyos en el material de tipo *p*, llegan a la capa de acción del láser y quedan atrapados allí. El exceso de electrones (y de hoyos) en la región activa origina la acción del láser.

La construcción física del dispositivo se ilustra esquemáticamente en la figura 49-17; en la figura 49-18 aparece una fotografía de un láser de diodo. El material es un capa angosta (0.2 μm) de un material como GaAs (arseniuro de galio); el material de tipo *p* y *n* a ambos lados puede ser capas de GaA1As (arseniuro de aluminio de galio) con algunos micrómetros de espesor. Sus extremos se juntan y crean superficies semejantes a los espejos que reflejan una parte de la onda luminosa para permitir la emisión estimulada en la región activa. Los láseres de diodo que emiten con longitudes infrarrojas de onda se emplean en la comunicación para enviar señales a través de fibras ópticas. Pueden usarse otros materiales en forma similar para generar una radiación visible.

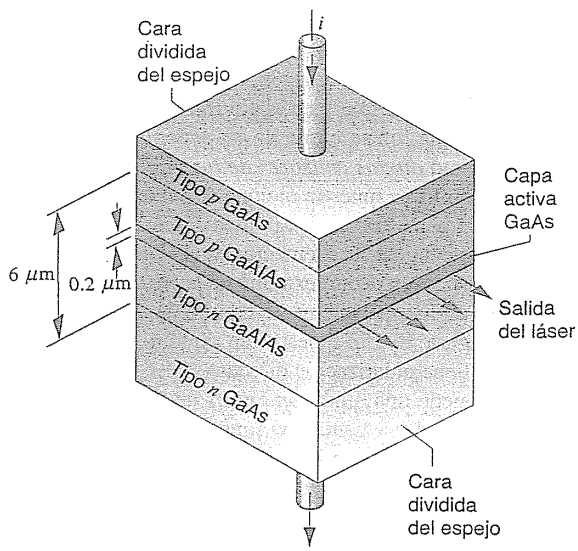


FIGURA 49-17. Construcción física de un diodo láser. La acción del láser ocurre en la capa estrecha de GaAs.

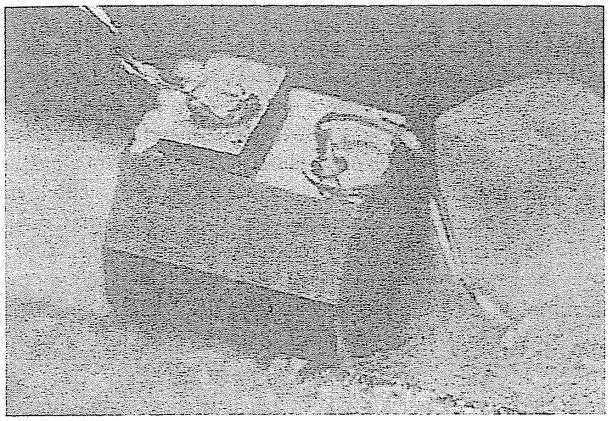


FIGURA 49-18. Diodo láser, cuyo tamaño se compara con el grano de sal de mesa a la derecha.

Entre las ventajas de los láseres de diodo figuran su tamaño pequeño y la entrada baja de potencia (en el intervalo de 10 miliwatts, en comparación con el láser estándar de HeNe que puede requerir varios watts de energía eléctrica). A semejanza de otros dispositivos semiconductores, este láser puede alimentarse por medio de baterías. Pueden alcanzarse eficiencias del orden del 20% (es decir, 20% de la energía eléctrica suministrada aparece en el haz del láser), en comparación con 0.1% en el láser de HeNe. Es fácil modular la señal luminosa controlando la corriente de inyección; tenemos, pues, un dispositivo óptico capaz de responder con tiempos rápidos de conmutación (< 100 ps) que caracterizan los circuitos electrónicos.

49-10 EL TRANSISTOR

Los diodos de unión que hemos estudiado hasta ahora son dispositivos de dos terminales. En seguida vamos a describir un dispositivo con tres (o más terminales), denominado *transistor.** A menudo funciona de la siguiente manera: una corriente generada entre dos de las terminales se regula mediante una corriente o voltaje en la tercera.

Una clase común es el *transistor de unión,* compuesto por tres capas de semiconductores dopados, como *npn* o *pnp.* En la figura 49-19*a* se describe una configuración característica de un transistor *npn.* Las tres secciones reciben el nombre de *emisor, base* y *colector.* Se muestran las bandas de conducción y de valencia; sólo se indican los portadores de mayoría. Las uniones emisor-base y base-colector se comportan en gran medida como las unidades *pn* ordinarias.

En la operación normal, que se indica en la figura 49-19*b*, la unión de emisor-base presenta polarización directa y la de base colector tiene polarización inversa; esto origina las bandas de energía mostradas en la figura.

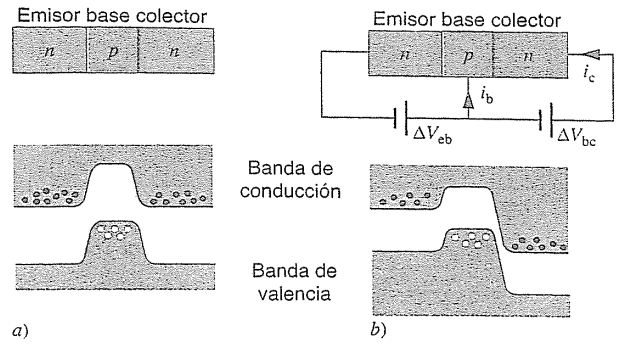


FIGURA 49-19. *a*) Transistor de unión *npn*. En la parte inferior aparecen las bandas de energía y los portadores de mayoría en las tres regiones. *b*) La unión emisor-base presenta polarización directa, y la unión base-colector, polarización inversa. Los electrones que se dirigen del emisor a la base se recombinan con hoyos o (lo más probable), continúan su camino hacia el colector.

Los electrones fluyen hacia el interior de la base desde el emisor de tipo *n* fuertemente dopado. Como la base es muy angosta, la mayor parte de los electrones llegan al colector, pero pocos se recombinan con los hoyos en la región de tipo *p*. Para volver a llenar los hoyos en la base, es necesario que los electrones provenientes de la banda de valencia en la base salgan del transistor por el circuito externo como la corriente pequeña de la base i_b. Con un ligero cambio de la corriente i_b de la base puede producirse un cambio importante en la corriente del colector i_c. En esta configuración, el transistor sirve de amplificador de corriente, y la ganancia de corriente i_c/i_b puede tener valores ordinarios por arriba de 100.

Un segundo tipo de transistor se conoce como *transistor de efecto de campo* (FET). En la figura 49-20 se describe gráficamente su geometría básica. Los electrones fluyen por la región de tipo *n* de la *fuente* al *drenaje* cuando existe una diferencia de potencial externa ΔV_{ds} entre el drenaje y la fuente. Las regiones de tipo *p* presentan muchas impurezas, y las capas de agotamiento formadas en las dos uniones *pn* determinan el ancho del canal de tipo *n*. Un voltaje externo ΔV_g, aplicado a la región de tipo *p* (la *puerta*) modifica el ancho de la región de agotamiento y, en consecuencia, el ancho del ca-

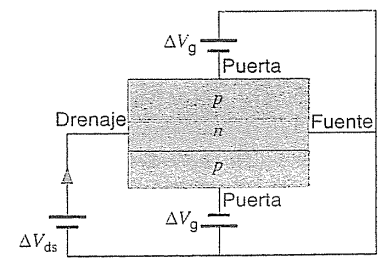


FIGURA 49-20. Estructura básica de un transistor de efecto de campo. Los electrones se desplazan por el angosto canal *n*, desde la fuente hasta el drenaje. El ancho del canal puede controlarse variando el voltaje ΔV_g en la puerta.

* En 1947, en lo que son actualmente los Lucent Technologies (antes AT&T) Bell Laboratories, el transistor fue inventado por John Bardeen, Walter Brattain y William Shockely, quienes por su descubrimiento compartieron el Premio Nobel de Física de 1956.

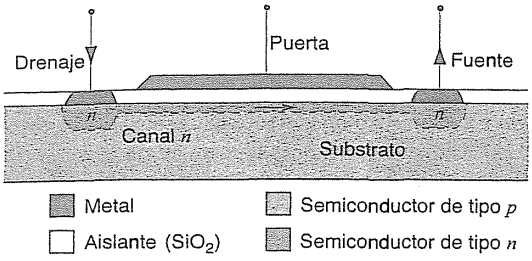


FIGURA 49-21. Estructura de un MOSFET.

nal de tipo *n*. Ello a su vez modifica la corriente que pasa por el dispositivo, pues la capacidad de la corriente para fluir por el canal depende del ancho de éste. Un cambio pequeño en el voltaje de la puerta altera el ancho del canal y produce un cambio importante en la corriente que lo cruza, de modo que el dispositivo puede operar como amplificador.

Si hacemos bastante grande el voltaje de la puerta, el ancho del canal *n* se volverá cero y el transistor de efecto de campo (FET) dejará de conducir. En este caso el transistor funciona como un interruptor: conduce (encendido) o no conduce (apagado). La corriente puede apagarse o encenderse muy rápidamente aplicando una señal a la puerta: son comunes tiempos de conmutación menores que 1 ns (10^{-9} s).

Una clase común de FET que se utiliza mucho en los circuitos digitales es el semiconductor de óxido metálico (MOSFET), que se fabrica depositando y grabando capas sucesivas en un sustrato de tipo *p*. Una sección transversal de un MOSFET se muestra en la figura 49-21. La región y el canal *n* se obtienen grabando una máscara en el sustrato y difundiendo los átomos donadores en una distancia conocida hacia el interior del sustrato. Entonces se deposita una capa de óxido (SiO_2) y la capa metálica se deposita después para crear contactos en la región *n* y en la puerta.

49-11 SUPERCONDUCTORES

A medida que reducimos la temperatura de un conductor, disminuye la resistividad según se observa en la figura 29-8. ¿Qué sucede al acercarnos al cero absoluto de la escala de temperatura?

Al disminuir la temperatura se reduce la parte de la resistividad a causa de la dispersión de los electrones por átomos que vibran desde su posición de equilibrio en la red, porque la amplitud de la vibración decrece con la temperatura. Según la teoría cuántica, los átomos conservan cierto movimiento vibratorio mínimo, inclusive con una temperatura de cero absoluto. Más aún, se mantiene la contribución de los defectos e impurezas a la resistividad cuando la temperatura T cae a 0. Así, esperamos que la resistividad se reduzca con la temperatura creciente, pero que permanezca finita a las temperaturas más bajas. Muchos materiales, efectivamente, muestran este tipo de comportamiento, como se ilustra en la figura 49-22.

Otra clase muy distinta de comportamiento fue descubierta en 1911 por el físico holandés Kammerlingh Onnes,

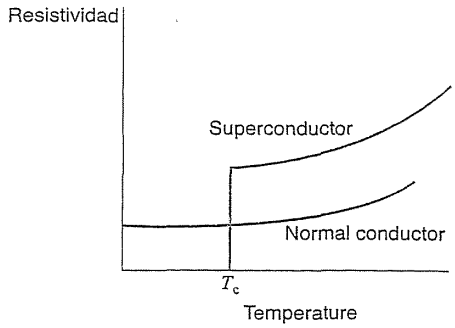


FIGURA 49-22. Comparación de la dependencia de la resistividad respecto a la temperatura en un conductor normal y un superconductor. La resistividad de un conductor normal disminuye gradualmente con la temperatura decreciente. En materiales superconductores, la resistividad cae repentinamente a cero con la temperatura crítica T_c.

quien estudiaba la resistividad del mercurio a temperaturas bajas. Descubrió que, por debajo de una temperatura de 4 K aproximadamente, perdía repentinamente toda la resistividad y se convertía en un conductor *perfecto,* denominado *superconductor.* No fue un cambio gradual sino una transición repentina, como se indica en la figura 49-22. La resistividad de un superconductor no sólo es pequeña; es cero. Si se crea una corriente en un material superconductor, deberá durar para siempre, aunque no exista un campo eléctrico. La *temperatura crítica* T_c es aquella a la que un material se convierte en superconductor. La tabla 49-3 contiene algunos materiales, junto con sus temperaturas críticas.

La superconductividad se ha observado en 27 elementos y en numerosos compuestos, pero no en los mejores conductores metálicos (Cu, Ag, Au). Concluimos que un superconductor no es sólo un buen conductor que mejora esta propiedad; además sospechamos que el mecanismo causante de la superconductividad puede ser distinto al que causa la conductividad en metales comunes. Como veremos luego, es una propiedad debida a un *fuerte* acoplamiento entre los electrones de conducción y la red. Una conducción normal en los mejores conductores ocurre cuando hay un *acoplamiento* débil entre el electrón de valencia y la red.

TABLA 49-3 Propiedades de algunos superconductores

Material	T_c (K)	*Energía de par* (meV)
Cd	0.56	0.27
Al	1.19	0.34
Sn	3.75	1.15
Hg	4.16	1.65
Pb	7.22	2.73
Nb	9.46	3.05
Nb_3Sn	18.1	
MgB_2	39	
$YBa_2Cu_3O_7$	90	
$Hg_{.8}Tl_{.2}Ba_2Ca_2Cu_3O_{8.33}$	138	

Consideremos un electrón que se mueve en una red. A medida que lo hace, jala los núcleos de los iones positivos hacia él y modifica la densidad de carga en su proximidad. Deja una densidad positiva un poco más alta en su estela que la que habría en condiciones normales. Esta carga atrae otros electrones que interactúan a través de la mediación de la red, en forma semejante a como lo hacen dos botes en un lago a través de sus estelas. El resultado neto es una pequeña atracción de los electrones.

La teoría de BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer)* de la superconductividad establece que el sistema de electrones posee la menor energía posible, si están ligados en pares, denominados *pares de Cooper*. Cuando no existe corriente en un semiconductor, los dos electrones del par de Cooper tienen momentos de igual magnitud, pero de dirección exactamente opuesta; así que desparecen los momentos totales y la corriente eléctrica. Cuando se genera una corriente, los dos electrones del par adquieren el mismo aumento de momento y producen movimiento en el centro de masa del par. Todos los pares de Cooper adquieren el mismo momento.

La superconductividad es un fenómeno de cooperación. Si se han formado algunos pares de Cooper, la reducción de energía que ocurre para el siguiente es mayor que si los pares no se hubieran formado. Una vez que la temperatura cae por debajo de T_c y que algunos pares se han formado, una pequeña reducción adicional de la temperatura ocasiona que se formen otros. La transición del estado normal al de superconducción es muy precipitada. Los movimientos cooperativos de los pares de Cooper también ocasionan que todos los pares tengan el mismo momento.

Los pares de Cooper poseen una energía de enlace Δ, denominada *energía de par*, que suele estar en el intervalo de 10^{-4} a 10^{-3} eV, como se señala en la tabla 49-3. Nótese que las temperaturas críticas de 1-10 K (comunes en la generalidad de los superconductores de la Tabla 49-3) corresponden a las energías kT_c en el mismo intervalo de 10^{-4} a 10^{-3} eV. La temperatura crítica del superconductor guarda relación directa con la energía de pares. Por arriba de T_c, se separan los pares y el material presenta una resistencia eléctrica normal.

La energía de enlace de un par de Cooper introduce una *brecha de par* 2Δ en la densidad de los estados $n(E)$ cerca de la energía de Fermi. (En la Fig. 49-1*a* se da un ejemplo de la densidad de los estados en un conductor normal.) Desde el punto de vista energético favorece a los electrones cerca de la energía de Fermi en un superconductor para que se combinen en pares. De ahí que la densidad de los estados se reduzca a cero en un intervalo de $\pm\ \Delta$ de E_F, con el correspondiente incremento de $n(E)$ arriba y debajo de E_F. En la figura 49-23 se muestra la densidad de los estados resultante y de la brecha del par 2Δ. Por arriba de T_c, la densidad de los estados de un superconductor podría ser la de la figura 49-2*a*. La brecha comienza a abrirse a medida que el superconductor se enfría por debajo de T_c; y disminuye al comenzar a disminuir la temperatura, alcanza su máximo conforme T se acerca a 0 K.

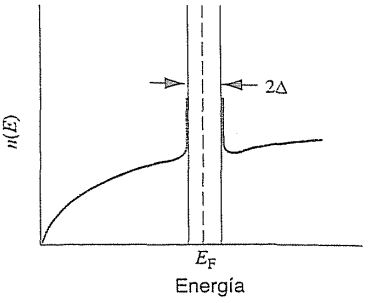


FIGURA 49-23. Densidad de los estados en un superconductor debajo de su temperatura de transición. Hay una brecha de energía de 2Δ donde la densidad de los estados es cero. Se exageró la escala de este dibujo: la energía de Fermi E_F suele ser de unos cuantos electrón-volts, mientras que la brecha de pares es 10^{-4} a 10^{-3} eV.

La probabilidad de ocupación de los estados de los electrones en un superconductor puede obtenerse con el producto de la densidad de los estados, que se incluye en la figura 49-23, y con la función de distribución de Fermi-Dirac, según se indica en la figura 49-2*b*. Se consigue así una alta probabilidad de ocupación de los estados superconductores justo por debajo de la brecha. Arriba de ella ocurre una pequeña densidad de estados normales (sin pares) cuando $T > 0$.

A partir de 1986 se descubrió una nueva clase de superconductores* cuyos valores de T_c eran extraordinariamente elevados. Las dos últimas líneas de la tabla 49-3 constituyen un ejemplo de estos compuestos, materiales de cerámica que (a diferencia de los tipos más conocidos de ella) son conductores a temperatura ambiente. La temperatura más alta a la que la superconductividad se había observado antes era de unos 20 K, estos materiales nuevos representan un adelanto notable de la tecnología. En concreto, permiten conseguir la superconductividad con temperaturas obtenibles al enfriarlos con nitrógeno líquido (77 K), y no con las características del helio líquido (4 K), más caro y menos adecuado. Con este incremento del factor de 6 en T_c se mantiene la esperanza de que, con otro aumento del factor de menos de 3, pudiera ser posible lograr la superconductividad a temperatura ambiente.

Estos superconductores a temperaturas altas son óxidos de cobre combinados con otros elementos. Todavía no se formula una teoría satisfactoria de cómo funcionan: no se sabe si interviene un mecanismo de tipo BCS. Parece claro que la superconductividad se encuentra en los óxidos del cobre; sus combinaciones son superconductoras, no así el cobre elemental. La estructura cristalina de estos compuestos pone el cobre y el oxígeno en planos situados entre los otros elementos,

* Esta teoría de la superconductividad fue propuesta en 1957 por John Bardeen, Leon N. Cooper y J. Robert Schrieffer, quienes obtuvieron el Premio Nobel de Física de 1972 por su trabajo. Bardeen compartió además el premio de 1956 por su investigación de los semiconductores y por el descubrimiento del transistor.

* Véase "Superconductors Beyond 1-2-3" de Robert J. Cava, *Scientific American*, agosto de 1990, p. 42.

siendo probable que estos planos ofrezcan la trayectoria para los electrones que transportan la corriente superconductora.

La disponibilidad de esta clase de materiales sugiere de inmediato diversas aplicaciones. 1) La energía puede transportarse y almacenarse en alambres eléctricos sin perdidas de resistencia. En otras palabras, una compañía eléctrica puede producir energía cuando haya poca demanda, quizá por la noche, y guardar la corriente en un anillo superconductor. Entonces puede liberarse la energía eléctrica cuando la demanda alcance su nivel máximo al día siguiente. En los anillos más pequeños de pruebas de laboratorio, las corrientes han sido almacenadas varias años sin reducción alguna. 2) Los electroimanes superconductores pueden transportar corrientes más grandes y, por tanto, producir campos magnéticos mayores que los electroimanes ordinarios. Entre las aplicaciones de esta tecnología se encuentran los trenes levantados magnéticamente y los imanes de desviación en los haces de partículas de los grandes aceleradores como el Fermilab. 3) Los componentes superconductores en los circuitos electrónicos no generarán calentamiento de Joule y permitirán miniaturizar aún más los circuitos. La siguiente generación de macrocomputadoras acaso utilice esta clase de componentes.

OPCIÓN MÚLTIPLE

49-1 Teoría cuántica de los sólidos
49-2 Electrones de conducción en un metal
49-3 Llenado de los estados permitidos

1. La energía de Fermi del cobre a 0 K representa
- A) La energía promedio de los electrones.
- B) La energía necesaria para eliminar el electrón en la superficie.
- C) La energía máxima de un electrón cualquiera.
- D) La energía mínima de un electrón cualquiera.

2. En un metal a 0 K, la probabilidad de que esté ocupado un estado por debajo del nivel de Fermi
- A) siempre es 0. B) siempre es 1.
- C) depende de su energía. D) siempre es 0.5.

3. En el cobre a temperatura ambiente, la probabilidad de que esté ocupado el estado 1 eV por arriba del nivel de Fermi es aproximadamente
- A) 1. B) 0.5. C) 0.025. D) 10^{-18}.

49-4 Conducción eléctrica en metales

4. La velocidad de un electrón en una superficie de Fermi de un metal común se aproxima más a
- A) la velocidad de la luz.
- B) la velocidad del sonido en el aire.
- C) la velocidad de deriva de un electrón en un metal.
- D) la interacción de los átomos.

49-5 Bandas y brechas

5. La existencia de bandas de energía se debe
- A) al principio de incertidumbre.
- B) a la interferencia de las ondas de electrones.
- C) a movimientos aleatorios de los electrones.
- D) a interacciones de los átomos.

49-6 Conductores, aislantes y semiconductores

6. Especifique a cuáles de los siguientes tipos de materiales podrían aplicarse estas descripciones: *a)* una banda de valencia llena, una banda de conducción vacía, una brecha de energía de 8 eV; *b)* una banda de valencia llena, una banda de conducción vacía, una brecha de energía de 1 eV; *c)* una banda de valencia semillena, una banda de conducción vacía, una brecha de energía de 1 eV.
- A) Conductor B) Aislante
- C) Semiconductor D) Ninguno de los anteriores

7. ¿En qué tipo de material se encuentra el nivel de energía de Fermi dentro de la brecha entre las bandas de valencia y de conducción?
- A) Conductor y semiconductor
- B) Aislante y semiconductor
- C) Conductor solamente D) Semiconductor solamente

49-7 Semiconductores dopados

8. Recibe dos muestras de silicio, una de tipo *p* y la otra de tipo *n*. ¿Cómo podrá distinguirlas?
- A) Midiendo su resistividad eléctrica.
- B) Midiendo su coeficiente térmico de resistividad.
- C) Determinando cuál es atraído por un objeto provisto de carga positiva.
- D) Determinando cuál es atraída por el polo norte de un imán.
- E) Ninguno de los anteriores.

9. Para transformar un silicio ordinario en un semiconductor de tipo *p*, podría agregarle
- A) indio. B) antimonio.
- C) germanio. D) carbono.

49-8 La unión *pn*

10. Cuando se aplica polarización directa a una unión *pn*, la corriente de deriva
- A) aumenta. B) se reduce a cero.
- C) disminuye, pero no a cero. D) permanece inalterada.

11. Tiene usted tres uniones *pn* idénticas: la unión 1 no está polarizada, la unión 2 presenta polarización inversa y la unión 3 tiene polarización directa. Clasifique las tres uniones por orden decreciente atendiendo a su *a)* corrientes de deriva, *b)* corrientes de difusión, *c)* corrientes netas.
- A) 1, 2, 3 B) 3, 1, 2
- C) 3, 2, 1 D) 2, 3, 1
- E) Todos son lo mismo.

49-9 Optoelectrónica
49-10 El transistor
49-11 Superconductores

12. ¿Por qué es necesario enfriar un superconductor portador de corriente para conservar su temperatura por debajo de T_c?
- A) Los electrones forman pares de Cooper sólo por debajo de T_c.
- B) Las corrientes grandes generan un importante calentamiento de Joule.
- C) La sustancia se convierte en superconductora sólo cuando kT es menor que E_F.
- D) A y B son opciones correctas.

PREGUNTAS

1. ¿Piensa que se relacionan entre sí algunas de las propiedades mencionadas al inicio del capítulo? De ser así, ¿cuáles?
2. Los electrones de conducción en una esfera metálica ocupan estados de energía cuantizada. ¿El intervalo de energía promedio entre estados adyacentes depende de *a*) el material de que esté hecho la esfera, *b*) de su radio, *c*) de la energía del estado o *d*) de la temperatura?
3. ¿Cómo el principio de exclusión de Pauli contribuye a explicar la conductividad eléctrica de un metal?
4. ¿En qué difieren el modelo clásico y la mecánica cuántica de la conductividad eléctrica de un metal?
5. Si comparamos los electrones de conducción de un metal con los átomos de un gas ideal, nos sorprenderá descubrir (Fig. 49-1 *c*) que mucha energía cinética está confinada dentro del sistema de electrones de conducción en el cero absoluto. ¿Sería mejor comparar los electrones de conducción, no con los átomos de un gas, sino con los electrones internos de un átomo pesado? Después de todo, gran cantidad de energía cinética está atrapada en este estado y al parecer eso no nos sorprende. Comente su respuesta.
6. ¿Qué características de la Figura 49.2 la hacen específica para el cobre, material para el cual se extrajo? ¿Qué características no dependen de la identidad del metal?
7. ¿Por qué las curvas de las figuras 49-1*c* y 49-2*c* se distinguen muy poco?
8. Distinga cuidadosamente la densidad de la función de estados $n(E)$, la densidad de la función de estados ocupados $n_o(E)$, y la función de probabilidad de Fermi-Dirac $p(E)$, todas las cuales aparecen en la figura 49-3.
9. ¿Depende del volumen de la muestra la energía de Fermi en un metal determinado? Por ejemplo, si comparamos una muestra cuyo volumen es 1 cm^3 con otra de volumen doble, la segunda muestra tendrá exactamente el doble de electrones de conducción disponibles; parecería que es necesario ir a niveles más altos de energía para llenar los disponibles. ¿Es así?
10. En la sección 27-3 demostramos que la capacidad calorífica (molar) de un gas monoatómico ideal es 3/2 R. Si los electrones de conducción se comportan como ese gas, cabría suponer que hagan una contribución más o menos igual al calor específico medido de un metal. Sin embargo, el calor específico puede explicarse muy bien a partir de la energía absorbida por las vibraciones de los núcleos de hierro que constituyen la red metálica. Al parecer los electrones no absorben tanta energía al ir elevándose la temperatura de la muestra. ¿Ofrece la figura 49-2 una explicación de este enigma de la era precuántica?
11. Dé un argumento físico que explique cualitativamente la existencia de las bandas permitidas y prohibidas de energía en los sólidos.
12. ¿Es más difícil aceptar la existencia de una brecha prohibida de energía en un aislante que la existencia de energías prohibidas para un electrón del —digamos— átomo de hidrógeno?
13. Según la concepción de la teoría de bandas, ¿cuáles son los requisitos *esenciales* para que un sólido sea *a)* un metal, *b*) un aislante o *c*) un semiconductor?
14. ¿Qué nos dice la teoría de bandas a propósito de los sólidos que no pueda decirnos el modelo clásico (Sec. 29-5)?
15. Distinga entre la velocidad de deriva y la de Fermi en un metal.
16. ¿Por qué en un sólido las bandas permitidas pueden ensancharse más al pasar de los electrones internos a los externos del átomo?
17. ¿Se cumple la ley de Ohm en los semiconductores sólidos (no dopados)?
18. A temperatura ambiente un campo eléctrico aplicado originará una velocidad de deriva en los electrones de conducción del silicio que es unas 40 veces mayor que la de los electrones de conducción del cobre. ¿Por qué el silicio no es un mejor conductor que el cobre?
19. Analice los dos enunciados: *a*) A temperaturas suficientemente bajas el silicio deja de ser semiconductor y se convierte en un aislante bastante eficaz. *b*) A temperaturas suficientemente altas el silicio deja de ser semiconductor y se convierte en un conductor bastante eficaz. Explique hasta qué punto ambos enunciados son verdaderos o falsos.
20. ¿Depende de la temperatura la conductividad eléctrica de un semiconductor intrínseco (no dopado)? ¿Depende de la brecha de energía E_g entre las bandas llenas y vacías?
21. ¿Cómo explica el hecho de que la resistividad de los metales aumenta con la temperatura y que, en cambio, disminuya la de los semiconductores?
22. Las brechas de energía en los semiconductores de silicio y germanio son 1.1 eV y 0.67 eV, respectivamente. ¿Qué sustancia espera que presente la mayor densidad de los portadores de carga temperatura ambiente? ¿Y a la temperatura del cero absoluto?
23. Explica esta proposición: "La distinción entre un metal y un semiconductor es clara y definida, no así la existente entre un semiconductor y un aislante".
24. El efecto Hall es mucho mayor en semiconductores que en metales. ¿Por qué? ¿Qué aplicaciones prácticas ofrece este resultado?
25. ¿Transporta carga negativa *neta* un material de tipo *n*?
26. Suponga que un semiconductor contiene igual cantidad de impurezas de donador y de aceptor. ¿Se cancelan en sus efectos eléctricos? De ser así, ¿mediante cuál mecanismo? Y en caso contrario, ¿por qué no se cancelan?
27. ¿Por qué un semiconductor de tipo *n* tiene muchos más electrones que hoyos? ¿Por qué un semiconductor de tipo *p* tiene muchos más hoyos que electrones? Explique esto con sus propias palabras.
28. ¿Qué elementos, además del fósforo, son buenos candidatos para emplearse como impurezas de donador en el silicio? ¿Cuáles aparte del aluminio son buenos candidatos para usarse como impurezas de aceptor? Consulte la tabla periódica.
29. ¿Distinguimos entre portadores de minorías en un semiconductor intrínseco como el silicio o el germanio? De no ser así, ¿qué criterio se aplica?
30. Al preparar semiconductores de tipo *n* y *p* mediante la introducción de impurezas, ¿por qué es tan importante evitar la contaminación de la muestra, así sea con concentraciones muy pequeñas de impurezas no deseadas?
31. ¿Cabe esperar que con el dopado cambie mucho la resistividad del silicio?
32. Cuando una corriente fluye por un material de tipo *p*, los hoyos positivos se mueven hacia la terminal negativa de la batería y se

combinan con electrones en el electrodo óhmico conectado a la frontera del cristal. ¿Por qué el cristal no adquiere carga negativa?

33. ¿Por qué a menudo se prefiere el silicio al germanio cuando se construyen semiconductores?
34. El germanio y el silicio son materiales semiconductores similares, cuya distinción principal consiste en que el ancho de brecha E_g es 0.67 eV en el primero y 1.1 eV en el segundo. ¿Qué material escogería y por qué, si quisiera construir una unión *pn* (Fig. 49-10) donde es necesario conservar la corriente de la parte posterior lo más pequeña posible?
35. En la unión *pn* (Figura 49-10) hemos visto que a través de su región de unión los electrones y los hoyos se difunden en dirección contraria. ¿Cuál es el destino final de las partículas al irse difundiendo hacia el interior del material en el otro lado de la unión? ¿Por qué ni los electrones ni los hoyos positivos se recombinan *todos* y así eliminan la posibilidad de la conducción?
36. Examine dos técnicas posibles para fabricar una unión *pn* (Fig. 49-10). *a)* Prepare por separado un muestra de tipo *n* y de tipo *p* y júntelas, cerciorándose de que sus superficies limítrofes sean planas y bien pulidas. *b)* Prepare una sola muestra de tipo *n* y a alta temperatura difunda en ella el exceso de impurezas de aceptor desde una cara. ¿Qué método es preferible y por qué?
37. La unión *pn* de la figura 49-1*a* presenta iguales concentraciones de material impurificado a ambos lados de su plano. Pero suponga que la concentración del donador fuese mucho más elevada que la del aceptor. ¿Seguiría teniendo la zona de agotamiento una ubicación simétrica alrededor del plano de unión? De no ser así, ¿se movería el plano central de la zona hacia la cara de tipo *n* o de tipo *p*? Fundamente su respuesta.
38. ¿No puede medir la diferencia de potencial de contacto producida en la unión *pn* con sólo conectarle un voltímetro?
39. ¿Por qué en la figura 49-10*b* la zona de agotamiento se acumula cerca del plano de unión? ¿Por qué no se dispersa en todo el volumen de la muestra?
40. ¿Qué significa decir que la unión *pn* está polarizada hacia adelante?
41. *a)* Explique el movimiento de los portadores de mayoría (tanto electrones como hoyos) en una unión *pn* de polarización directa. *b)* Explique el movimiento de los portadores de minoría en esta misma unión.
42. Con sus propias palabras explique cómo el espesor de la zona de agotamiento en una unión *pn* puede disminuirse *a)* aumentando el voltaje de polarización directa y *b)* aumentando la concentración de las impurezas?
43. Si elevamos la temperatura de una unión *pn* con polarización inversa, ¿qué sucede con la corriente (Fig. 49-14*a*)? ¿Es el efecto más grande en el silicio o en el germanio? (La brecha intrínseca de energía E_g del silicio es mayor que la del germanio.)
44. ¿Obedece la ley de Ohm el diodo rectificador cuyas características aparecen en la figura 49-12? ¿En qué criterio se basa la decisión?
45. Hemos visto que un semiconductor simple intrínseco (no dopado) no puede utilizarse como diodo emisor de luz. ¿Por qué? ¿Podría usarse un semiconductor muy dopado de tipo *n* o *p*?
46. En la sección 49-9 explicamos el modo de operación de un diodo emisor de luz, donde la luz se emite cuando se inyectan portadores de carga en el plano central de una unión *pn* por medio de un potencial externo. Otra opción es el dispositivo inverso, un *fotodiodo*. Es decir, puede proyectarse una luz sobre una unión *pn* y entonces aparecerá una corriente en el plano de unión. Explique cómo funcionaría ese dispositivo. ¿Convendría más operarlo en modo de polarización directa o inversa?
47. Con sus propias palabras explique cómo funciona el dispositivo MOSFET de la figura 49-21.
48. En su opinión, existe una correlación entre la temperatura crítica de un superconductor (Tabla 49-3) y su conductividad eléctrica (inverso de la resistividad) a temperatura ambiente?

EJERCICIOS

49-1 Teoría cuántica de los sólidos

49-2 Electrones de conducción en un metal

1. *a)* Demuestre que la ecuación 49-2 puede escribirse así

$$n(E) = CE^{1/2}$$

donde $C = 6.81 \times 10^{27}\ \text{m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-3/2}$. *b)* Por medio de esta relación verifique un cálculo del problema resuelto 49-1, el de $E = 5.00$ eV, $n(E) = 1.52 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}$.

2. Calcule la densidad $n(E)$ de los estados de los electrones de conducción en un metal con $E = 8.00$ eV y demuestre que el resultado es consistente con la curva de la figura 49.1*c*.
3. El oro es un metal monovalente con una masa molar de 197 g/mol y con una densidad de 19.3 g/cm^3 (Ap. D). Calcule la densidad de los portadores de carga.
4. ¿A qué presión tendrá un gas ideal una densidad de moléculas igual a la de los electrones de conducción en el cobre ($= 8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$)? Suponga que $T = 297$ K.
5. La densidad y la masa molar del sodio son 971 kg/m^3 y 23.0 g/mol, respectivamente; el radio del ion Na^+ es 98 pm. *a)* ¿Qué parte del volumen del sodio metálico está disponible para sus electrones de conducción. *b)* Realice el mismo cálculo con el cobre. Su densidad, su masa molar y radio iónico son, respectivamente, 8960 kg/m^3, 63.5 g/mol y 96 pm. *c)* ¿En cuáles de estos dos metales piensa que los electrones de conducción se comportan más como un gas de electrones libres?

49-3 Llenado de los estados permitidos

6. Calcule la probabilidad de que esté ocupado un estado 0.0730 eV por arriba de la energía de Fermi en *a)* $T = 0$ K y *b)* $T = 320$ K.
7. La energía de Fermi de la plata es 5.5 eV. *a)* Con $T = 0°$C, ¿qué probabilidades hay de que estén ocupados los siguientes estados con energía: 4.4, 5.4, 5.5, 5.6 y 6.4 eV? *b)* ¿A qué temperatura la probabilidad de ocupación será 0.16 en un estado de 5.6 eV?

8. Pruebe que las probabilidades de ocupación en dos estados cuya energía esté espaciada igualmente arriba y debajo de la energía de Fermi suman uno.
9. La densidad del oro es 19.3 g/cm^3. Cada átomo aporta un electrón de conducción. Calcule la energía de Fermi de oro. En el apéndice D se incluye su masa molar.
10. La figura 49-2*c* indica la densidad de los estados ocupados $n_o(E)$ de los electrones de conducción en el cobre a una temperatura de 1 000 K. Calcule $n_o(E)$ para el cobre con las energías E= 4.00, 6.75, 7.00, 7.25 y 9.00 eV. La energía de Fermi del cobre es 7.06 eV.
11. En la sección 47-2 examinamos la situación de un electrón atrapado en un pozo infinitamente profundo. Suponga que ponemos 100 electrones en un pozo de 120 pm de ancho, dos de ellos en un nivel con espines opuestos. Calcule la energía de Fermi para el sistema. (*Nota:* es la energía del nivel más alto ocupado a la temperatura de cero absoluto.)
12. *Los electrones de conducción en un metal se comportan como* un gas ideal si la temperatura es lo bastante alta. En particular, la temperatura debe ser tal que $kT \gg E_F$, la energía de Fermi. ¿Qué temperaturas se necesitan para que el cobre (E_F = 7.06 eV) cumpla con este requisito? Compare su respuesta con el punto de ebullición del cobre (Ap. D). Estudie la figura 49-2*c* en relación con este aspecto y observe que tenemos $kT \ll E_F$ en las condiciones la figura. Es exactamente el opuesto del requisito aquí señalado.
13. Demuestre que la ecuación 49-5 puede escribirse como

$$E_F = An^{2/3}$$

donde la constante A tiene el valor 3.65×10^{-19} m$^2 \cdot$ eV.

14. La energía de Fermi para el cobre es 7.06 eV. *a*) En el cobre a 1 050 K calcule la energía en que la probabilidad de ocupación es 0.910. Con esta energía, evalúe *b*) la densidad de los estados y *c*) la de los estados ocupados.
15. Demuestre que la función densidad de estados dada por la ecuación 49-2 puede escribirse así

$$n(E) = \tfrac{3}{2}nE_F^{-3/2}E^{1/2}.$$

Explique cómo es posible que $n(E)$ sea independiente del material cuando la energía de Fermi E_F (= 7.06 eV para el cobre, 9.44 eV para el zinc, etc.) aparece explícitamente en esta expresión.

16. Demuestre que la probabilidad p_h de que exista un *hoyo* en un estado de energía E está dada por

$$p_h = \frac{1}{e^{-(E-E_F)/kT} + 1}.$$

(*Sugerencia:* la existencia de un hoyo significa que el estado no se encuentra ocupado; convénzase usted mismo de que ello significa que $p_h = 1 - p$.)

17. Las estrellas enanas blancas representan una etapa tardía en la evolución de estrellas como el Sol. Se vuelven tan densas y calientes que podemos analizar su estructura como sólidos cuyos Z electrones por átomos son libres todos. En una estrella de este tipo, cuya masa es igual a la del Sol y cuyo radio es igual al de la Tierra, calcule la energía de Fermi en los electrones. Suponga que la estructura atómica puede representarse con átomos de hierro y que T = 0 K.
18. Un estrella de neutrones puede analizarse mediante técnicas semejantes a las que se emplean con metales ordinarios. En este caso, los neutrones (no los electrones) se ajustan a la función de probabilidad (Ec. 49-6). Suponga una estrella de neutrones de 2.00 masas solares con un radio de 10.0 km. Calcule la energía de Fermi de los neutrones.
19. Estime el número N de electrones de conducción en un metal cuyas energías son mayores que la de Fermi como sigue. En rigor, N está dado por

$$N = \int_{E_F}^{\infty} n(E)p(E)dE.$$

Al estudiar la figura 49-2*c*, convénzase usted mismo de que, con mucha aproximación, la expresión anterior puede escribirse así

$$N = \int_{E_F}^{E_F+4kT} n(E_F)(\tfrac{1}{4})dE.$$

Sustituya la densidad de la función de estados, evaluadas en la energía de Fermi, demuestre que, en la fracción f de los electrones de conducción excitados hasta energías mayores que la de Fermi,

$$f = \frac{N}{n} = \frac{3kT/2}{E_F}.$$

¿Por qué no evaluar directamente la primera integral anterior sin recurrir a una aproximación?

20. Con el resultado del ejercicio 19 calcule la fracción de los electrones excitados en el cobre a temperatura de *a*) cero absoluto, *b*) 300 K y *c*) 1 000 K.
21. ¿A qué temperatura la parte de los electrones excitados en el litio es igual a 0.0130? La energía de Fermi en este elemento es 4.71 eV (Ej. 19).
22. La plata se funde a 962°C. En el punto de fusión, ¿qué fracción de los electrones de conducción se hallan en estados con una energía mayor que la de Fermi de 5.5 eV? (Ej. 19).

49-4 Conducción eléctrica en metales

23. La plata es un metal monovalente. Calcule *a*) el número de electrones de conducción por metro cúbico, *b*) la energía de Fermi, *c*) la velocidad de Fermi y *d*) la longitud de onda de de Broglie correspondiente a esta velocidad. Consulte los datos necesarios del apéndice D.
24. El zinc es un metal bivalente. Calcule *a*) el número de electrones de conducción por metro cúbico, *b*) la energía de Fermi, *c*) la velocidad de Fermi y *d*) la longitud de onda de de Broglie correspondiente a esta velocidad. Consulte en el apéndice D los datos necesarios del zinc.
25. En el caso de la plata, calcule *a*) la trayectoria libre promedio de los electrones de conducción y *b*) la razón de trayectoria libre media a la distancia entre los núcleos de iones vecinos. La plata tiene una energía de Fermi de 5.51 eV y una resistividad de $1.62 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. (Ej. 23).

49-5 Bandas y brechas

49-6 Conductores, aislantes y semiconductores

26. Repita el cálculo del problema resuelto 49-6 con una temperatura *a*) de 1 000 K y *b*) de 4.0 K.
27. La función de distribución de Fermi-Dirac puede aplicarse a semiconductores lo mismo que a metales. En los primeros, E es la energía arriba de la parte superior de la banda de valencia. El nivel de Fermi relativo a un semiconductor intrínseco se encuen-

tra casi a la mitad entre la parte superior de la banda de valencia y el fondo de la de conducción. En el germanio estas bandas están separadas por una brecha de 0.67 eV. Calcule la probabilidad de que se halle ocupado *a*) un estado en el fondo de la banda de conducción y *b*) de que se halle desocupado un estado en la parte superior de la banda de valencia a 290 K.

28. La brecha de banda en el germanio puro es de 0.67 eV. Suponga, que el nivel de Fermi se encuentra en la mitad de la brecha. *a*) Calcule la probabilidad de que a 16°C se encuentre ocupado un estado en el fondo de la banda de conducción. *b*) ¿A qué temperatura la probabilidad de este estado será 3.0 veces mayor que la probabilidad a 16°C?

49-7 Semiconductores dopados

29. El silicio puro a 300 K tiene una densidad de electrones en la banda de conducción de 1.5×10^{16} m^{-3} y una densidad de hoyos igual en la banda de conducción. Suponga que 1 de cada 1.0×10^7 átomos de silicio se reemplaza por un átomo de fósforo. *a*) ¿Qué densidad de portadores de carga agregará el fósforo? Suponga que todos los electrones donadores están en la banda de conducción. (En el Ap. D vienen los datos necesarios relativos al silicio.) *b*) Encuentre la razón entre la densidad de portadores de carga en el silicio dopado y la del silicio puro.

30. ¿Que masa se necesitaría para dopar una muestra de 1.0 g de silicio con la concentración descrita en el problema resuelto 49-7?

31. A un cristal de silicio se le dopa con fósforo hasta alcanzar una concentración de 10^{22} átomos de este elemento por metro cúbico. En promedio, ¿que distancia separa los átomos? (Prob. res. 49-7.)

32. Una muestra de germanio muy puro tiene un átomo de impureza en 1.3×10^9 átomos de germanio. Calcule la distancia entre los átomos con impurezas.

33. En la figura 49-24 se representan dos bandas de energía de un sólido hipotético. Están llenas hasta el nivel E_x, que puede encontrarse en la banda 1 o 2. Puede haber un nivel de impureza en E_i. Indique si el sólido es un conductor, un aislante, un semiconductor intrínseco o extrínseco. El tipo de impureza puede ser donador, aceptor o ninguno de ellos; el semiconductor extrínseco puede pertenecer al tipo *p* o *n*. Complete la tabla.

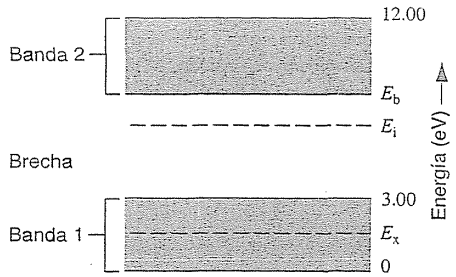


FIGURA 49-24. Ejercicio 33.

E_x (eV)	E_i (eV)	E_b (eV)	Tipo: *Sólido*	*Impureza*	*Semiconductor extrínseco*
3.00	–	9.00			
3.00	4.06	4.10			
3.00	–	4.10			
1.49	–	9.00			
4.40	–	4.10			
3.00	3.04	4.10			

49-8 La unión *pn*

34. Cuando un fotón penetra en la región de agotamiento de una unión *pn*, pueden crearse los pares electrón-hoyo a medida que los electrones absorben parte de la energía del fotón y son excitados de la banda de valencia a la de conducción. Así pues, las uniones anteriores se usan a menudo como detectores de fotones, sobre todo para rayos X y para rayos gamma nucleares. Cuando con una brecha de energía de 1.1 eV un semiconductor absorbe un fotón de rayos gamma de 662 keV, ¿cuántos pares de electrón-hoyo se crean en promedio?

35. Calcule y compare las resistencia del diodo rectificador en los dos puntos que aparecen en la curva característica de la figura 49-12. La corriente del punto de la izquierda (demasiado pequeña para incluirla en la figura) es 50 pA.

36. *a*) Una capacitancia se asocia con una unión *pn*. Explique por qué. *b*) Obtenga una expresión de la capacitancia de la unión *pn* en el problema resuelto 49-9.

49-9 Optoelectrónica

37. *a*) Calcule la longitud de onda máxima que producirá fotoconducción en un diamante cuya brecha de banda es de 5.5 eV. *b*) ¿En qué parte del espectro electromagnético se halla esta longitud de onda?

38. En un cristal, la banda ocupada más alta de estados está llena. El cristal es transparente a la luz de longitud de onda mayor que 295 nm, pero opaca a longitudes menos largas. Calcule el ancho (en electrón-volts) de la brecha entre la banda ocupada más alta y la siguiente (vacía).

39. El cristal KCL presenta una brecha de banda de 7.6 eV por arriba de la banda más alta ocupada, la cual está llena. ¿Es opaco o transparente a una radiación de 140 nm de longitud de onda?

40. *a*) Llene el dispositivo de siete segmentos de la figura 40-15*a* para indicar cómo pueden generarse los 10 números. *b*) Si se muestran en forma aleatoria, ¿en qué fracción de las visualizaciones se usará cada uno de ellos?

49-10 El transistor

49-11 Superconductores

PROBLEMAS

1. La energía de Fermi es de 11.66 eV en el aluminio, su densidad es 2.70 g/cm^3 y su masa molar es 27.0 g/mol (Ap. D). Con estos datos determine el número de electrones libres por átomo.

2. Demuestre que en un metal, a un temperatura de cero absoluto, la energía promedio E_{pro} de los electrones de conducción es igual a $\frac{3}{5}E_F$, donde E_F es la energía de Fermi. [*Sugerencia:* nótese que, por definición del promedio, $E_{pro} = (1/n) \int En_0(E)\, dE$.]

3. *a*) Con el resultado del problema 2 calcule cuánta energía será liberada por los electrones de conducción en una moneda de un centavo (suponiendo que esté hecha totalmente de cobre, masa = 3.1 g), si de repente pudiera despreciar el principio de exclusión de

Pauli. *b*) ¿Durante cuánto tiempo esa cantidad de energía mantendría encendida una lámpara de 100 W? Nótese que no hay manera de eliminar el principio de Pauli.

4. En un modelo simplificado de un semiconductor intrínseco (sin impurezas), la distribución real de energía en los estados se reemplaza por una en que hay N_v estados en la banda de valencia. Éstos tienen la misma energía E_v y N_c en la banda de conducción, todos ellos también con la misma energía E_c. El número de electrones en la banda de conducción es igual al de hoyos en la banda de valencia. *a*) Demuestre que esta última condición significa que

$$\frac{N_c}{e^{(E_c - E_F)/kT} + 1} = \frac{N_v}{e^{-(E_v - E_F)/kT} + 1}.$$

(*Sugerencia:* consulte el Ej. 16.) *b*) Si el nivel de Fermi se halla en la brecha entre las dos bandas y lejos de ambas bandas comparadas con kT, entonces los exponenciales dominarán en el denominador. En tales condiciones demuestre que

$$E_F = \tfrac{1}{2}(E_c + E_v) + \tfrac{1}{2}kT \ln(N_v/N_c),$$

y por lo mismo que, si $N_v \approx N_c$, el nivel de Fermi está cerca del centro de la brecha.

5. Con los cambios por el dopado se modifica la energía de Fermi en un semiconductor. Consideremos el silicio con una brecha de 1.1 eV entre las bandas de valencia y de conducción. A 290 K, el nivel de Fermi en el material puro se halla casi en la mitad de la brecha. Supóngase que se dopa con átomos donadores, cada uno de los cuales tiene un estado de 0.15 eV por debajo del fondo de la banda de conducción, y suponga además que el dopado alcanza el nivel de Fermi a 0.084 eV por debajo del fondo de esa banda. *a*) En ambos el silicio puro y el dopado, calcule la probabilidad de que se encuentre ocupado el estado en el fondo de la banda de conducción. *b*) Calcule además la probabilidad de que se halle ocupado un estado donador en el material dopado (Fig. 49-25).

6. Se dopa una muestra de silicio con átomos cuyo estado donador se halla 0.11 eV debajo del fondo de la banda de conducción. *a*) Si los estados se encuentran ocupados con una probabilidad de 4.8×10^{-5} a una temperatura de 290 K, ¿dónde está el nivel de Fermi respecto a la parte superior de la banda de valencia? *b*) ¿Cuál será entonces la probabilidad de que se halle ocupado un estado en el fondo de la banda de conducción? La brecha de energía del silicio es 1.1 eV.

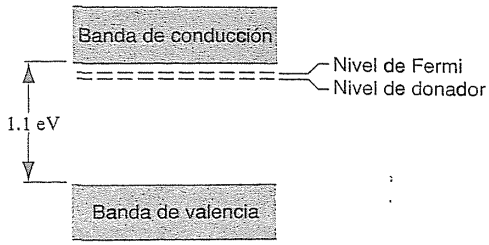


FIGURA 49-25. Problema 5.

7. En un diodo ideal de unión *pn*, con una frontera bien definida entre los dos materiales semiconductores, la corriente i se relaciona con la diferencia de potencial ΔV en el diodo mediante

$$i = i_0(e^{e\Delta V/kT} - 1),$$

donde se da el nombre de *corriente inversa de saturación* a i_0, que depende de los materiales pero no de la corriente ni de la diferencia de potencial. ΔV es positiva si la unión presenta polarización directa, y negativa si presenta polarización inversa. *a*) Verifique que esta expresión predice el comportamiento esperado de un diodo trazando i en función de ΔV a lo largo del intervalo $-0.12\ \text{V} < \Delta V < +0.12\ \text{V}$. Suponga que $T = 290$ K y que $i_0 = 5.0$ nA. *b*) A la misma temperatura, calcule la razón entre la corriente con una polarización directa de 0.50 V y la corriente con una polarización inversa de 0.50 V.

8. Una gota de plomo (función de trabajo = 3.4 eV) se encuentra en estrecho contacto con una hoja de cobre (función de trabajo = 4.5 eV). Determine la diferencia de potencial que aparece en la interfaz plomo-cobre. ¿De qué manera podría medirla? Dibuje un diagrama de energía, que muestre (a la manera de la Fig. 49-4*b*) los niveles relativos de Fermi antes y después de unir los dos metales. ¿Puede esa unión servir de diodo rectificador?

UNITED STATES PATENT OFFICE

CAPÍTULO 50

FÍSICA NUCLEAR

En lo profundo del átomo se encuentra el núcleo, que ocupa apenas 10^{-15} del volumen del átomo, pero que le suministra la mayor parte de la masa y también de la fuerza que lo mantiene unido. En esta parte del estudio de la física vamos ahora a examinar la estructura del núcleo y la subestructura de sus componentes.

Nuestra labor se facilita gracias a las numerosas semejanzas existentes entre el estudio de los átomos y el del núcleo. Ambos sistemas se rigen por las leyes de la mecánica cuántica. Igual que el átomo, el núcleo tiene estados excitados que decaen al estado base emitiendo fotones (rayos gamma). En ciertas circunstancias, como veremos luego, puede mostrar efectos de capa muy similares a los de los átomos. También veremos que hay diferencia en el estudio del átomo y del núcleo que nos impiden lograr un conocimiento tan completo de éste como el de aquél.

En el presente capítulo vamos a analizar la estructura del núcleo y de sus componentes. Explicaremos algunos métodos experimentales con que se estudian sus propiedades y concluimos con una descripción del fundamente teórico del conocimiento del núcleo.

50-1 DESCUBRIMIENTO DEL NÚCLEO

En los primeros años del siglo XX, poco se sabía sobre la naturaleza de los átomos aparte del hecho de que contenían electrones. Esta partícula había sido descubierta (por J. J. Thomson) apenas en 1897 y por aquella época se desconocía su masa. No era posible ni siquiera decir cuántos electrones contenía un átomo. Los átomos son neutros, y por eso, deben contener alguna carga positiva; pero en esos años nadie sabía la forma que adoptaba esta carga positiva compensadora. Tampoco se sabía cómo los electrones se movían en el interior del átomo ni cómo se dividía su masa entre los electrones y la carga positiva.

En 1911 Ernest Rutherford interpretó algunos experimentos efectuados en su laboratorio y a raíz de ello propuso que la carga positiva del átomo se concentraba densamente en el centro y que, además, representaba la mayor parte de su masa. Acababa de descubrir el núcleo atómico.

Antes que se tomara este paso, todos los intentos por entender los movimientos de los electrones dentro del átomo estuvieron condenados al fracaso. Dos años después que Rutherford propuso su hipótesis, Niels Bohr se valió del concepto del átomo nuclear para formular la teoría semiclásica de la estructura atómica que expusimos en el capítulo 47. Estos trabajos iniciales de Rutherford y Bohr marcan el comienzo del conocimiento de la estructura del átomo.

¿Cómo llegó Rutherford a formular su hipótesis propuesta? No era una simple conjetura, sino que se basaba firmemente en los resultados de un experimento sugerido por él y realizado por sus colaboradores Hans Geiger (creador del famoso contador Geiger) y Ernest Marsden, estudiante de 20 años de edad que todavía no obtenía la licenciatura.

Rutherford se proponía investigar las fuerzas que actúan dentro del átomo disparando partículas alfa (α) energética a través de una delgada lámina blanco y midiendo su deflexión al pasar por allí. Estas partículas, cuya masa es unas 7300 ve-

ces más grande que la de los electrones, transportan una carga de $+2e$ y las emiten espontáneamente (con una energía de algunos MeV) muchos materiales radiactivos. Hoy sabemos que estos proyectiles tan útiles son el núcleo de los átomos del helio ordinario. En la figura 50-1 se muestra el experimento de Geiger y Marsden. Consiste en contar el número de partículas α desviadas a través de varios ángulos de dispersión θ (Sec. 26-8).

En la figura 50-2 se indican los resultados. Nótese especialmente que la escala vertical es logarítmica. Vemos que la mayoría de las partículas α están dispersas en ángulos bastante pequeños, pero —y ésta fue la gran sorpresa— algunas lo estaban en ángulos muy grandes, más o menos de 180°. En palabras de Rutherford: "Fue el acontecimiento más increíble que me ocurrió en la vida. Era casi tan increíble como si hubiésemos disparado un proyectil de 15 pulgadas contra una hoja de seda, regresara y nos golpeara a nosotros".

¿Por qué estaba Rutherford tan sorprendido? En la época en que se realizaron estos experimentos, muchos físicos aceptaban el modelo del átomo propuesto por J. J. Thomson. En este modelo se pensaba que la carga positiva se distribuía en todo el volumen del átomo. Los electrones se distribuían por él, como lo hacen las semillas en una sandía, y vibraban alrededor de su posición de equilibrio dentro de esta esfera de carga.

La máxima fuerza de deflexión que actúa sobre la partícula α al pasar por la esfera positiva de carga resulta demasiado pequeña para desviarla, así sea un grado. Los electrones del átomo ejercerán un efecto muy pequeño sobre esa partícula masiva y energética. De hecho, también serán desviados con mucha fuerza, en forma parecida a como un enjambre de mosquitos se dispersa cuando les arrojamos una piedra. En el modelo de Thomson simplemente no hay un mecanismo que explique la deflexión hacia atrás de una partícula α.

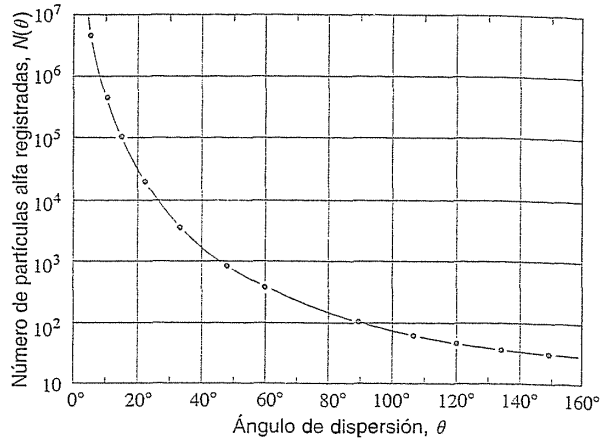


FIGURA 50-2. Los puntos indican los resultados de la dispersión de la partícula α obtenidos en los experimentos de Geiger y Marsden; la curva llena se calcula a partir de la teoría del núcleo de Rutherford. Nótese que el eje vertical está marcado en potencias de 10.

Rutherford entendió que, para producir una deflexión tan grande, se requería una gran fuerza, que podía obtenerse si la carga positiva estaba concentrada de modo compacto en el centro del átomo, en vez de distribuirse en todo su volumen. En este modelo la partícula α puede acercarse mucho al centro de la carga positiva sin penetrarla, generando así una importante fuerza de deflexión (Prob. res. 50-1).

En la figura 50-3 vemos las trayectorias seguidas por partículas α comunes al cruzar los átomos de la lámina blanco. La mayoría se desvían un poco o nada, pero unas cuantas (aquellas cuyas trayectorias amplias de entrada pasan por casualidad cerca de un núcleo) lo hacen a través de ángulos extensos. Tras analizar los datos, Rutherford llegó a la siguiente conclusión: las

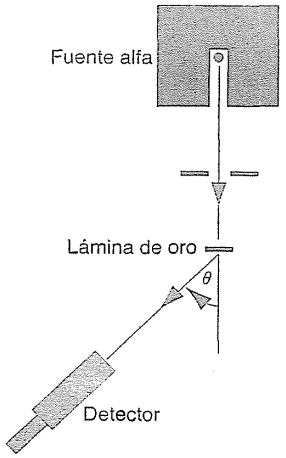


FIGURA 50-1. Arreglo experimental utilizando en el laboratorio de Rutherford para estudiar la dispersión de las partículas α por láminas metálicas delgadas. Puede girarse el detector para varios ángulos de dispersión θ.

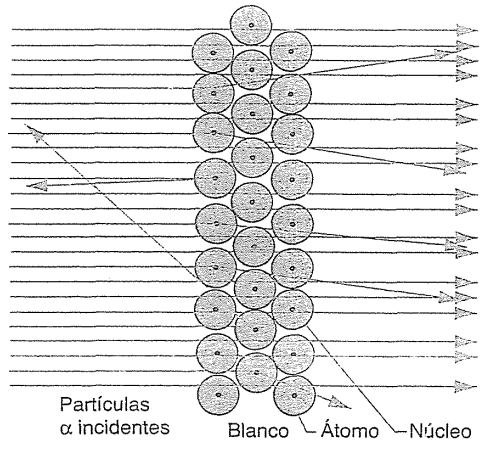


FIGURA 50-3. El ángulo por donde se dispersa una partícula α depende de lo cerca que su trayectoria incidente extendida se encuentre del núcleo de un átomo. Las deflexiones grandes se producen sólo a raíz de encuentros muy cercanos.

dimensiones del núcleo han de ser más pequeñas que el diámetro del átomo en un factor aproximado de 10^4. En su mayor parte el átomo es un espacio vacío. Pocas veces la intuición extraordinaria de un científico genial, apoyada por unos cuantos cálculos, ha dado resultados de tanta trascendencia.

PROBLEMA RESUELTO 50-1. Por casualidad una partícula α de 5.30 MeV se dirige directamente hacia el núcleo de un átomo de oro ($Z = 79$). ¿Cuánto se acerca antes de detenerse momentáneamente y de invertir su trayectoria? No tenga en cuenta el retroceso del núcleo de oro (relativamente masivo).

Solución Al principio la energía mecánica total de las dos partículas que interactúan es K_α (= 5.30 MeV), la energía cinética inicial de la partícula α. Se supone que la energía potencial U es cero cuando una gran distancia separa las partículas. En el momento en que la partícula α se detiene, la energía total es la energía potencial electrostática del sistema de dos partículas (Ec. 28-7, $U = q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$). Puesto que debe conservarse la energía, esas dos cantidades serán iguales, o sea

$$K_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{d}$$

donde q (= $2e$) es la carga de la partícula α; Q (= $79e$) la del núcleo de oro, y d la distancia entre los centros de las dos partículas cuando la partícula α está en reposo.

Al sustituir para las cargas y al resolver para d, obtenemos

$$d = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 K_\alpha}$$

$$= (8.99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{(2)(79)(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(5.30\ \mathrm{MeV})(1.60 \times 10^{-13}\ \mathrm{J/MeV})}$$

$$= 4.29 \times 10^{-14}\ \mathrm{m} = 42.9\ \mathrm{fm}.$$

Ésta es una distancia pequeña a juzgar por criterios atómicos, pero no por criterios nucleares. Como veremos en la siguientes sección, resulta mucho mayor que la suma de los radios del núcleo de oro y de la partícula α. Por tanto, ésta invierte su trayectoria sin siquiera "tocar" al núcleo.

Si la carga positiva asociada al átomo de oro ha sido distribuida uniformemente en todo el volumen del átomo, la máxima fuerza de retraso que opera sobre la partícula α habría ocurrido en el momento en que ésta comenzara a tocar la superficie del átomo. Esta fuerza (Ej. 2) hubiese sido demasiado débil para influir de modo considerable en el movimiento de la partícula, la cual habría atravesado a gran velocidad un átomo "esponjoso".

50-2 ALGUNAS PROPIEDADES DEL NÚCLEO

El núcleo, por diminuto que sea, posee una estructura tan compleja como la del átomo. Consta de protones y neutrones. Estas partículas (a diferencia del electrón) no son verdaderamente elementales, pues se componen de otras partículas, denominadas *quarks*. Sin embargo, la física nuclear —tema de este capítulo— se ocupa fundamentalmente de los estudios del núcleo que no incluyan la estructura interna de los protones ni de los neutrones. La naturaleza fundamental de estas dos partículas es un tema de la física de partículas elementales y se aborda en el capítulo 52.

Sistemática nuclear

Al número de protones del núcleo (el *número de protones*) se le conoce a menudo como número atómico y se representa mediante Z. Al número de neutrones se le conoce simplemente como *número de protones* y se representa mediante N. Aparte de la diferencia en su carga eléctrica ($q = +e$ en el protón, $q = 0$ en el neutrón), el protón y el neutrón son partículas muy semejantes: poseen casi la misma masa y experimentan fuerzas nucleares idénticas dentro del núcleo. Por tal razón los clasificamos como *nucleones*. El número total de éstos (= $Z + N$) recibe el nombre de *número de masa* y se representan con A.

Al especificar Z y A (y, por tanto, N) obtenemos una especie particular de núcleo, llamado *núclido*. Usamos A, la cantidad total de núcleos, a manera de superíndice de identificación al designar los núclidos. Por ejemplo en ^{81}Br hay 81 nucleones. El símbolo "Br" indica que se trata de bromo donde $Z = 35$. Los 46 nucleones restantes son neutrones; así que en este núclido $Z = 35$, $N = 46$ y $A = 81$. Se da el nombre de *isótopos* a dos núclidos con el mismo Z, pero con distinto N y A como ^{81}Br y ^{82}Br.

La figura 50-4 ofrece un diagrama de los núclidos conocidos como una gráfica de Z en función de N. El sombreado oscuro representa los núclidos radiactivos conocidos, o *radionúclidos*. En la tabla 50-1 se dan algunas propiedades de varios núclidos.

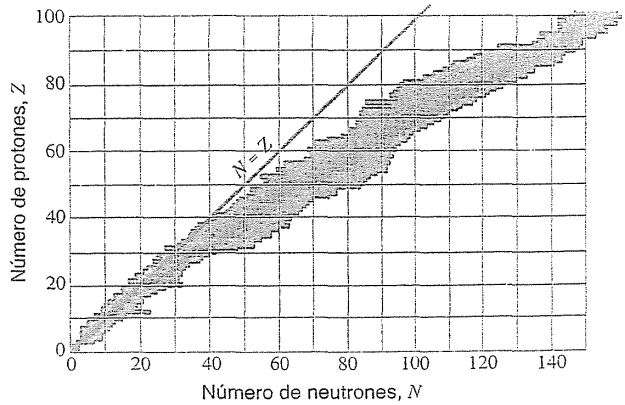


FIGURA 50-4. Gráfica de núclidos conocidos. El sombreado oscuro indica núclidos estables, y el sombreado claro núclidos radiactivos. Adviértase que los núclidos estables ligeros tienen un número esencialmente igual de protones y neutrones, mientras que $N > Z$ en núcleos pesados.

* Un análisis de este experimento de dispersión se da en Kenneth S. Krane, *Modern Physics*, 2a. ed. (Wiley, 1996), capítulo 6.

TABLA 50-1 Propiedades de algunos núclidos

Núclido	*Z*	*N*	*A*	*Estabilidad*[a]	*Masa atómica* (u)	*Radio* (fm)	*Energía de enlace por nucleón* (MeV)	*Espín* ($h/2\pi$)	*Momento dipolar magnético* (μ_N)
^{7}Li	3	4	7	92.5%	7.016004	2.30	5.61	$\frac{3}{2}$	+3.26
^{14}N	7	7	14	99.6%	14.003074	2.89	7.48	1	+0.404
^{31}P	15	16	31	100%	30.973761	3.77	8.48	$\frac{1}{2}$	+1.13
^{88}Rb	37	51	88	18 m	87.911319	5.34	8.68	2	+0.508
^{120}Sn	50	70	120	32.4%	119.902197	5.92	8.50	0	0
^{157}Gd	64	93	157	15.7%	156.923957	6.47	8.20	$\frac{3}{2}$	−0.340
^{197}Au	79	118	197	100%	196.966552	6.98	7.92	$\frac{3}{2}$	+0.146
^{239}Pu	94	145	239	24,100 y	239.052157	7.45	7.56	$\frac{1}{2}$	+0.203

[a] Se da la abundancia isótopica en núclidos estables; la vida media, para radionúclidos.

Nótese que existe en la figura 50-4, una zona razonablemente bien definida de estabilidad. Los radionúclidos inestables están en cualquier lado de la zona de estabilidad.

La fuerza nuclear

La fuerza que controla la estructura y las propiedades electrónicas del átomo es la conocida fuerza de Coulomb. Pero para mantener junto el núcleo se requiere una fuerza de atracción de un tipo totalmente nuevo entre los neutrones y protones. Debe ser lo bastante intensa para superar la fuerza de repulsión de Coulomb entre los protones (con carga positiva) y para ligarlos, junto con los neutrones, en el diminuto volumen del núcleo. Los experimentos revelan que esta *fuerza fuerte*, como se le llama, presenta el mismo carácter entre un par cualquiera de componentes nucleares, sean neutrones o protones.

La "fuerza fuerte" tiene un intervalo corto, aproximadamente de 10^{-15} m. Ello significa que la fuerza de atracción entre pares de neutrones cae rápidamente a cero en las separaciones de nucleones mayores que determinado volumen crítico. Esto a su vez significa que, salvo en los núcleos más pequeños, un nucleón no puede interactuar mediante esa fuerza con el resto de los nucleones, sino sólo con algunos de sus vecinos más cercanos. En cambio, la fuerza de Coulomb no es de corto alcance. Un protón en un núcleo ejerce una repulsión de Coulomb en todos los demás protones, sin importar lo grande de su separación (Ej. 11).

En la figura 50-4 se muestra que los núclidos estables ligeros tienden a situarse en la línea $Z = N$ o cerca de ella. Los más pesados se encuentran debajo de ella y, por eso, suelen tener muchos más neutrones que protones. La tendencia a un exceso de neutrones con números grandes de masa es el efecto de la repulsión de Coulomb. Un nucleón interactúa sólo con una cantidad pequeña de vecinos a través de la fuerza fuerte; por eso, la energía contenida en los enlaces con ella entre los nucleones crece en proporción con A. La energía contenida en los enlaces de la fuerza de Coulomb entre protones aumenta más rápidamente, porque cada uno interactúa con los restantes protones del núcleo. Así, la energía de Coulumb cobra mayor importancia con números de masa altos.

Tomemos un núcleo con 238 nucleones. Si estuviera en la línea $Z = N$, tendría $Z = N = 119$. Pero si pudiéramos ensamblar este núcleo, se separaría y fragmentaría de inmediato a causa de la repulsión de Coulomb. Se observa una estabilidad relativa sólo si reemplazamos 27 de los protones por neutrones, con lo cual se atenúa el efecto de repulsión. Entonces tendría el núclido ^{238}U, donde $Z = 92$ y $N = 146$, un exceso de 54 neutrones.

Inclusive en ^{238}U se manifiestan los efectos de Coulomb, pues 1) este núclido es radiactivo y emite partículas α y 2) puede dividirse fácilmente (fisión) en dos fragmentos. Los dos procesos reducen la energía de Coulomb más de lo que lo disminuirían la energía en enlaces fuerza fuerte.

Radios del núcleo

Hemos utilizado el radio de Bohr a_0 ($= 5.29 \times 10^{-11}$ m $=$ 52.9 pm) como una unidad útil para medir las dimensiones del átomo. Los núcleos son más pequeños en un factor aproximado de 10^4, y una unidad adecuada para medir las distancias de esta escala es el *femtómetro* ($= 10^{-15}$ m). A menudo se le llama *fermi* y tiene la misma abreviatura. Por tanto,

$$1 \text{ fermi} = \text{femtómetro} = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}.$$

Podemos conocer el tamaño y la estructura de los núcleos efectuando experimentos de dispersión, como se indica en la figura 50-1, por medio de un haz incidente de electrones con alta energía. Su energía es lo bastante grande (> 200 MeV), de modo que su longitud de onda de de Broglie es lo bastante pequeña para que funcionen como sondas nucleares sensibles a la estructura. En efecto, estos experimentos miden el patrón de difracción de las partículas dispersadas y esto permite deducir la forma del objeto que las dispersa (el núcleo).

Tras varios experimentos dedicados a la dispersión, se ha deducido que la densidad nuclear presenta la forma de la figura 50-5. Vemos que el núcleo no cuenta con una superficie bien definida. Pero sí posee un radio medio característico R. La densidad $\rho(r)$ tiene un valor constante en el interior del

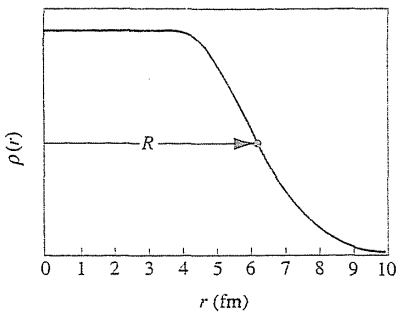


FIGURA 50-5. Variación con la distancia radial de la densidad de un núcleo de ^{197}Au.

núcleo y se reduce a cero en la zona borrosa de la superficie. Gracias a este experimento se descubrió que R crece con A aproximadamente como

$$R = R_0 A^{1/3}, \tag{50-1}$$

donde A es el número de masa y R_0 es una constante con un valor aproximado de 1.2 fm. Por ejemplo, en el caso de ^{63}Cu,

$$R = (1.2 \text{ fm})(63)^{1/3} = 4.8 \text{ fm}.$$

En comparación, el radio medio de un ion cobre en una red de cobre sólido es 1.8 radios de Bohr, unas 2×10^4 veces más grande.

Masas nucleares y energías de enlace

La masa atómica puede medirse con gran precisión usando el moderno espectrómetro de masa y las técnicas de la reacción nuclear. Recordemos que puede medirse en *unidades de masa atómica unificadas* (cuya abreviatura es u), escogida de modo que la masa atómica (*no* la nuclear) de ^{12}C sea exactamente 12 u. La relación de esta unidad con el patrón de masa en el SI es el siguiente a seis cifras significativas:

$$1 \text{ u} = 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Nótese que el número de masa (símbolo A) que identifica a un núclido se llama así por ser igual a la masa atómica del núclido, redondeada a su entero más cercano. Así, el número de masa del núclido ^{137}Cs es 137. Éste contiene 55 protones y 82 neutrones, un total de 137 partículas; su masa atómica es 136.907084 u, que se redondea numéricamente a 137.

En la física nuclear, a diferencia de la física atómica, los cambios de energía por evento son comunes; de ahí que la conocida relación de masa-energía de Einstein $E = \Delta m c^2$ sea hoy una herramienta indispensable de uso diario. A menudo habremos de emplear el equivalente energético de una unidad de masa atómica y lo obtendremos (usando constantes evaluadas a seis cifras significativas) de

$$E = \Delta m\, c^2 = \frac{(1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg})(2.99792 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{1.60218 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}}$$

$$= 931.5 \text{ MeV}.$$

Lo anterior significa que podemos escribir c^2 como 931.5 MeV/u, y por tanto, encontrar fácilmente el equivalente energético (en MeV) de cualquier masa o diferencia de masa (en u) o viceversa.

Consideremos, por ejemplo, el deuterón, núcleo del átomo de hidrógeno pesado. Consta de un protón y de un neutrón unidos mediante la fuerza fuerte. La energía E_B que debe agregársele para separarlo en sus dos nucleones se conoce como *energía de enlace*. En realidad es una medida de la energía interna total del núcleo, a causa en parte de la fuerza fuerte entre los nucleones, a la fuerza de Coulomb entre ellos y a la energía cinética de los nucleones respecto al centro de masa del núcleo entero. Con base en la conservación de la energía podemos escribir en este proceso de separar:

$$m_d c^2 + E_B = m_n c^2 + m_p c^2. \tag{50-2}$$

Si en ambos lados de la ecuación anterior agregamos $m_e c^2$, el equivalente energético de la masa de un electrón, tendremos

$$(m_d + m_e)c^2 + E_B = m_n c^2 + (m_p + m_e)c^2$$

o bien

$$m(^2\text{H})c^2 + E_B = m_n c^2 + m(^1\text{H})c^2. \tag{50-3}$$

Aquí $m(^2\text{H})$ y $m(^1\text{H})$ son la masa del átomo neutro pesado del hidrógeno y del átomo neutro *ordinario* del hidrógeno, respectivamente. Son masas atómicas, no nucleares. La solución de la ecuación 50-3 para E_B nos da

$$E_B = [m_n + m(^1\text{H}) - m(^2\text{H})]c^2 = \Delta m c^2, \tag{50-4}$$

donde Δm es la diferencia de masa. Al efectuar este tipo de cálculos siempre se emplean masas atómicas, y no nucleares, pues es lo que normalmente se tabula. Como en este ejemplo, las masas electrónicas se cancelan, y esto las facilita de modo considerable.*

Cuando se calcula el deuterón las masas necesarias son $m_n = 1.008665$ u, $m(^1\text{H}) = 1.007825$ u y $m(^2\text{H}) = 2.014102$ u. La diferencia de masa en la ecuación 50-4 es

$$\Delta m = 1.008665 \text{ u} + 1.007825 \text{ u} - 2.014102 \text{ u}$$

$$= 0.002388 \text{ u}.$$

Al sustituir en la ecuación 50-4 y al reemplazar c^2 por su equivalente, 931.5 MeV/u, comprobamos que la energía de enlace es

$$E_B = (0.002388 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 2.224 \text{ MeV}.$$

Compare el resultado anterior con la energía de enlace del átomo de hidrógeno en su estado base que es 13.6 eV, más o menos cinco órdenes de magnitud más pequeña.

Si dividimos la energía de enlace de un núcleo entre su número de masa, obtendremos su promedio por nucleón, propiedad que se incluye en la figura 50-1. La figura 50-6 muestra un diagrama de esta cantidad en función del número de masa. El hecho de que esta *curva de la energía de enlace*

* Pero véase una excepción en el problema 11.

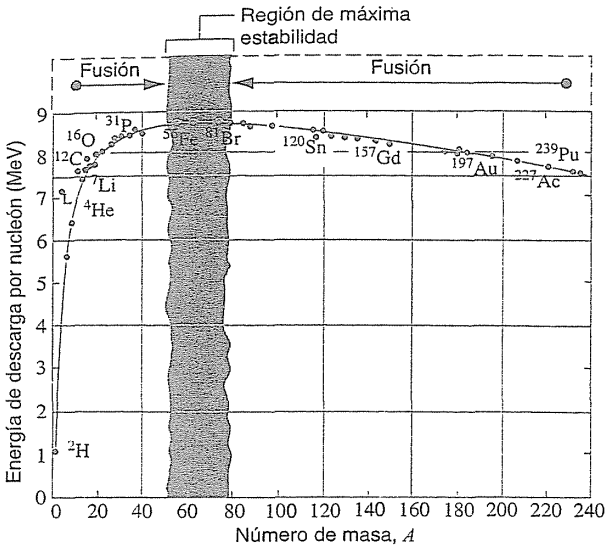


FIGURA 50-6. Energía de enlace por nucleón para un intervalo de números de masa. Se señalan algunos núclidos de la tabla 50-1, junto con otros cuantos. La región de la máxima estabilidad corresponde a números de masa entre 50 y 80.

"caiga" en números altos y bajos de masa tiene consecuencias prácticas de gran importancia.*

La caída de la curva con números de masa altos indica que los nucleones están más estrechamente ligados cuando se combinan en dos núcleos de masa media que en uno solo de gran masa. Dicho de otra manera, puede liberarse energía en la *fisión nuclear* de un solo núcleo masivo en dos fragmentos más pequeños.

En cambio, la caída de la curva de la energía de enlace con números de masa bajos indica que puede liberarse energía, si dos núcleos de número de masa pequeño se combinan para formar un solo núcleo de masa intermedia. Este proceso, el inverso de la fisión, se conoce como *fusión nuclear*. Ocurre en el interior del Sol y en otras estrellas, y es el mecanismo por el que el Sol genera la energía que irradia hacia la Tierra.

Espín nuclear y magnetismo

A semejanza de los átomos, los núcleos tienen un momento angular intrínseco cuyo máximo componente en un eje cualquiera z está dado por $J(h/2\pi)$. Aquí J es un número cuántico, que puede ser entero o semi-entero y que se llama *espín nuclear;* algunos de los valores para ciertos núclidos se incluyen en la tabla 50-1.

Una vez más, como en el caso de los átomos, el momento angular nuclear tiene un momento magnético nuclear asociado. Recuérdese (Sec. 35-3) que en el magnetismo atómico el *magnetón de Bohr* μ_B definido como

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = 5.79 \times 10^{-5}\ \text{eV/T},$$

es una unidad adecuada. En la física nuclear la unidad correspondiente es el *magnetón nuclear* μ_N, definido en forma similar al magnetón de Bohr salvo que la masa del electrón m_e se reemplaza por la del protón m_p. Es decir,

$$\mu_N = \frac{eh}{4\pi m_p} = 3.15 \times 10^{-8}\ \text{eV/T}.$$

Como el momento magnético del electrón libre es (con gran aproximación) un magnetón de Bohr, podría suponerse que el momento magnético del protón libre sería (con gran aproximación) un magnetón nuclear. Pero no está muy cerca, pues el valor medido es + 2.7928 μ_N. Para entender los momentos magnéticos del protón y neutrón, hay que tener en cuenta su estructura interna. A su vez los momentos magnéticos de los núcleos más pesados pueden analizarse a partir de los momentos magnéticos de los protones y neutrones constitutivos.

PROBLEMA RESUELTO 50-2. ¿Cuál es la densidad aproximada de la *materia nuclear* de que están hechos todos los núcleos?

Solución Sabemos que esta densidad es grande, pues prácticamente toda la masa del átomo se encuentra en su núcleo tan diminuto. El volumen de este último, aproximado como una esfera uniforme de radio R, está dado por la ecuación 50-1 como

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi(R_0^3 A).$$

La densidad ρ_n de la materia nuclear, expresada en nucleones por unidad de volumen, será entonces

$$\rho_n = \frac{A}{V} = \frac{A}{(4\pi/3)R_0^3 A}$$

$$= \frac{1}{(4\pi/3)(1.2\ \text{fm})^3} = 0.14\ \text{nucleones/fm}^3.$$

La masa de un nucleón es 1.7×10^{-27} kg. Y así la densidad ρ_m de la materia nuclear será

$$\rho_m = (0.14\ \text{nucleones/fm}^3)(1.7 \times 10^{-27}\ \text{kg/nucleón}) \times (1\ \text{fm}/10^{-15}\ \text{m})^3$$
$$= 2.4 \times 10^{17}\ \text{kg/m}^3,$$

o sea 2.4×10^{14} veces la densidad del agua. A diferencia de los electrones orbitales, los núclidos tienen una densidad casi independiente del número de nucleones. En cierta medida los nucleones están empacados como canicas en una bolsa.

PROBLEMA RESUELTO 50-3. Imagine que un núcleo común de masa intermedia como ^{120}Sn se separa y se divide en sus protones y neutrones. Calcule *a*) la energía total requerida y *b*) la energía por nucleón. La masa atómica de ^{120}Sn es 119.902197 u (Tab. 50-1).

Solución *a*) ^{120}Sn contiene 50 protones y 120 − 50 = 70 neutrones. La masa atómica combinada de estas partículas libres es

$$M = Zm_p + Nm_n = 50 \times 1.007825\ \text{u} + 70 \times 1.008665\ \text{u}$$
$$= 120.997800\ \text{u}.$$

* *The Curve of Binding Energy* ha sido adoptado como título de un libro (de John McPhee) respecto a las posibilidades del terrorismo nuclear.

Este valor es mayor que la masa atómica de ^{120}Sn en

$$\Delta m = 120.997800 \text{ u} - 119.902197 \text{ u} = 1.095603 \text{ u}.$$

Al convertir el resultado anterior en energía en reposo se obtiene la energía total de enlace,

$$E_B = \Delta mc^2 = (1.0956 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 1020.6 \text{ MeV}.$$

b) La energía de enlace E por nucleón es

$$E = \frac{E_B}{A} = \frac{1020.6 \text{ MeV}}{120} = 8.50 \text{ MeV/nucleón}.$$

Esto concuerda con el valor que puede obtenerse en la curva de la figura 50-6.

50-3 DECAIMIENTO RADIACTIVO

Como se observa en la figura 50-4, la mayor parte de los núclidos hasta ahora descubiertos son radiactivos. En otras palabras, emiten espontáneamente una partícula y al hacerlo se transforman en un núclido distinto. En el presente capítulo vamos a explicar las dos situaciones más comunes: la emisión de una partícula α (decaimiento alfa) y la de un electrón (decaimiento beta).

Sin importar la naturaleza del decaimiento, su característica principal consiste en ser estadístico. Consideremos, por ejemplo, una muestra de 1 mg de metal de uranio. Contiene 2.5×10^{18} átomos del emisor ^{238}U alfa de muy larga vida. Sus núcleos han existido sin decaimiento desde que fueron creados (antes que se formara el sistema solar) al explotar una supernova.

En un segundo cualquiera decaerán unos 12 de los núcleos de la muestra, emitiendo al hacerlo una partícula α. Pero no disponemos de un medio para predecir si un núcleo de la muestra figurará entre los que decaigan. Todos los núcleos ^{238}U tienen exactamente la misma probabilidad de hacerlo durante un periodo de observación de 1 s: $12/(2.5 \times 10^{18})$, esto es, una probabilidad de 2×10^{17}.

En términos generales, si una muestra contiene N núcleos radiactivos, expresar el carácter estadístico del proceso de decaimiento diciendo que la rapidez de cambio del número de núcleos, o sea $-dN/dt$ (donde el signo de menos la convierte en cantidad positiva), es proporcional al número de núcleos existentes, o sea

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N, \tag{50-5}$$

donde la constante de proporcionalidad, λ, denominada *constante de desintegración,* posee un valor característico distinto en cada núclido radiactivo. Podemos escribir la ecuación 50-5 así

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt,$$

que se integra fácilmente y nos da

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{50-6}$$

Aquí N_0 es el número de núcleos radiactivos de la muestra en $t = 0$. Vemos que la reducción de N con el tiempo obedece una simple ley exponencial.

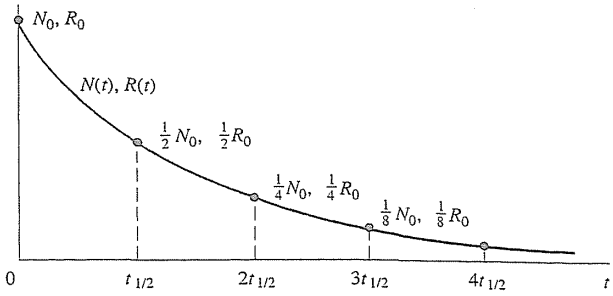


FIGURA 50-7. Disminución exponencial en el número de núcleos radiactivos y de su rapidez de decaimiento.

A menudo, más que N, nos interesa la *actividad* o rapidez de decaimiento R ($= \lambda N$) de la muestra. Al multiplicar la ecuación 50-6 por λ obtenemos

$$R = R_0 e^{-\lambda t}, \tag{50-7}$$

donde R_0 ($= \lambda N_0$) es la rapidez de decaimiento en $t = 0$. El número de núcleos presentes y la rapidez de decaimiento siguen la misma ley exponencial.

Una magnitud de interés es el tiempo $t_{1/2}$, denominado *vida media*, transcurrido el cual se reducen N y R a la mitad de su valor inicial. Si hacemos $R = \frac{1}{2}R_0$ en la ecuación 50-7, tendremos

$$\tfrac{1}{2}R_0 = R_0 e^{-\lambda t_{1/2}},$$

lo cual nos conduce fácilmente a

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \tag{50-8}$$

una relación entre la vida media y la constante de desintegración. La figura 50-7 describe cómo N y R disminuyen exponencialmente con el tiempo.

Los dos siguientes problemas indican cómo medir λ en el proceso de decaimiento con vidas relativamente cortas y también con vidas medias relativamente largas.

PROBLEMA RESUELTO 50-4. En decaimiento de vida corta, es posible medir directamente la disminución de su rapidez de decaimiento R con el tiempo. En la siguiente tabla se incluyen algunos datos de una muestra de ^{128}I, radionúclido usado en medicina como marcador para medir la velocidad de captación de yodo en la glándula tiroides. A partir de estos datos determine *a*) la constante de desintegración λ y *b*) la vida media $t_{1/2}$.

Tiempo (min)	R (conteos/s)	*Tiempo* (min)	R (conteos/s)
4	392.2	132	10.9
36	161.4	164	4.56
68	65.5	196	1.86
100	26.8	218	1.00

Solución *a*) Si tomamos el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación 50-7, encontramos que

$$\ln R = \ln R_0 - \lambda t. \tag{50-9}$$

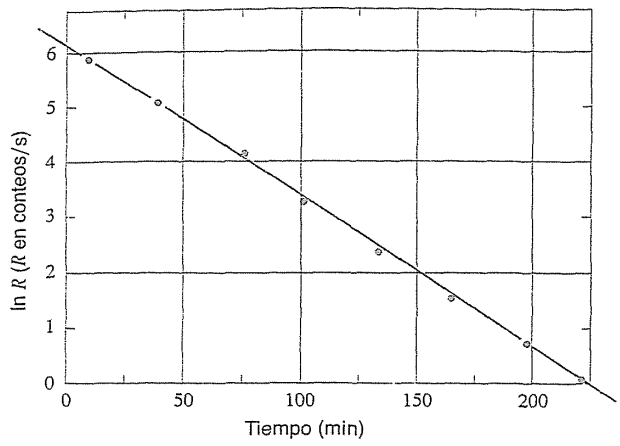


FIGURA 50-8. Problema resuelto 50-4. Una gráfica logarítmica de los datos de decaimiento se ajusta con una línea recta y muestra la naturaleza exponencial del decaimiento. La constante de desintegración λ puede obtenerse de la pendiente de la línea.

Por tanto, si graficamos el logaritmo natural R en función de t, habremos de obtener una línea recta cuya pendiente es $-\lambda$. La figura 50-8 muestra este diagrama, usando los datos indicados en el caso de ^{128}I. Al igualar la pendiente de la línea a $-\lambda$, se obtiene

$$-\lambda = -\frac{(6.1 - 0)}{(225 \text{ min} - 0)}$$

o

$$\lambda = 0.0271 \text{ min}^{-1}.$$

b) Para $t_{1/2}$, la ecuación 50-8 da

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{0.0271 \text{ min}^{-1}} = 25.6 \text{ min}.$$

PROBLEMA RESUELTO 50-5. Se descubre que una muestra de 1.00 g de KCl puro tomada de un almacén de productos químicos es radiactiva y que decae con una rapidez absoluta R de 1600 conteos/s. El origen de los decaimientos se refiere al potasio y, en particular, al isótopo ^{40}K que constituye 1.18% del potasio normal. ¿Cuál es la vida media de este decaimiento?

Solución En el caso de los decaimientos de vida larga, no es posible aguardar lo suficiente para observar una reducción medible de la rapidez de decaimiento R con el tiempo. Debemos obtener λ midiendo N y $-dN/dt$ en la ecuación 50-5. La masa molar de KCl es 74.9 g/mol, y por lo mismo, el número de átomos de potasio en la muestra es

$$N_K = \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(1.00 \text{ g})}{74.9 \text{ g/mol}} = 8.04 \times 10^{21}.$$

El número de átomos ^{40}K es 1.18% de N_K, o sea

$$N_{40} = (0.0118)(8.04 \times 10^{21}) = 9.49 \times 10^{19}.$$

De acuerdo con la ecuación 50-5 tenemos

$$\lambda = \frac{-dN/dt}{N} = \frac{R}{N_{40}} = \frac{1600 \text{ s}^{-1}}{9.49 \times 10^{19}} = 1.69 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1},$$

y conforme a la ecuación 50-8 la vida media es

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \left(\frac{0.693}{1.69 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1}}\right)\left(\frac{1 \text{ a}}{3.16 \times 10^{7} \text{ s}}\right)$$
$$= 1.30 \times 10^{9} \text{ años}.$$

Éste es el orden de magnitud de la edad del universo. No debe sorprender la imposibilidad de medir la vida media de este núclido esperando a que disminuya su rapidez de decaimiento. (Es interesante señalar que el potasio corporal tiene una participación normal del isótopo ^{40}K. Somos un poco radiactivos).

50-4 DECAIMIENTO ALFA

En un proceso radiactivo, el núcleo de un átomo con masa m_i experimenta una transformación que suele dar origen a un núclido distinto, con la subsecuente emisión de una o más partículas. La masa total de todas las partículas finales es m_f. El decaimiento será posible sólo si $m_i > m_f$; dicho con otras palabras, conforme a la conservación de energía la energía total antes de él (la energía en reposo $m_i c^2$ del átomo inicial, que supuestamente se halla en reposo dentro de nuestro marco de referencia) debe ser igual a la energía total tras el decaimiento (la energía total en reposo $m_f c^2$ de todos los productos finales más su energía cinética total K_f):

$$m_i c^2 = m_f c^2 + K_f. \tag{50-10}$$

Conviene definir el *valor Q del decaimiento* como la diferencia entre la energía inicial y la energía final en reposo:

$$Q = m_i c^2 - m_f c^2. \tag{50-11}$$

En efecto, Q es la energía liberada durante el decaimiento. Una comparación con la ecuación 50-10 indica que, si el núcleo inicial en decaimiento se halla en reposo, el valor de Q nos da la energía cinética total de los productos del decaimiento:

$$Q = K_f. \tag{50-12}$$

Los productos del decaimiento comparten la energía Q, lo cual es consistente con la conservación del momento.

En la ecuación 50-12 vemos claramente que el decaimiento es posible sólo con $Q > 0$; así que según la ecuación 50-11 m_i debe ser mayor que m_f, conclusión que ya extrajimos.

Apliquemos los conceptos anteriores a un proceso específico de decaimiento: al decaimiento alfa, donde un núcleo emite una partícula alfa (α) (núcleo de ^{4}He). Consideramos como ejemplo el decaimiento de ^{238}U. Al emitir una partícula α, el núcleo ^{238}U pierde dos protones (de 92 a 90) y dos neutrones (de 146 a 144). De acuerdo con la tabla periódica, el elemento con el número atómico 90 es Th y, en consecuencia, el proceso completo del decaimiento es

$$^{238}\text{U} \longrightarrow {}^{234}\text{Th} + {}^{4}\text{He}. \tag{50-13}$$

En el problema resuelto 50-6 hemos demostrado que la energía de decaimiento (valor Q) en este proceso es 4.27 MeV, que se comparte entre la partícula α y el núcleo que retrocede ^{234}Th. La vida media de este decaimiento es 4.47×10^9 años.

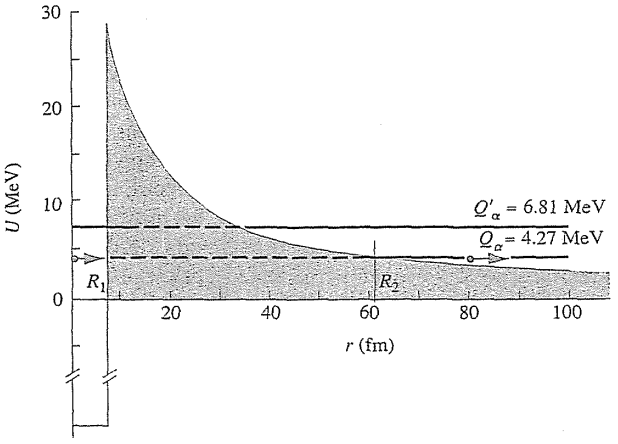


FIGURA 50-9. Función de energía potencial que representa la emisión de las partículas α por ^{238}U. El área sombreada indica la barrera de potencial que inhibe el proceso de decaimiento. Las líneas horizontales representan las energías de desintegración de ^{238}U (4.27 MeV) y de ^{228}U (6.81 MeV).

Ahora nos preguntamos: "Si se libera energía en cada decaimiento, ¿por qué los núcleos ^{238}U no decaen poco después de haber sido creados?". Se piensa que el proceso de creación ha ocurrido en las violentas explosiones de las estrellas ancestrales (supernovas) que antecedieron a la formación del sistema solar. ¿Por qué estos núcleos esperan tanto tiempo antes de liberarse de su exceso de energía emitiendo una partícula α? Para contestar la pregunta hay que estudiar el mecanismo exacto del decaimiento alfa.

Escogemos un modelo donde se supone que la partícula α esté preformada dentro del núcleo antes que escape. En la figura 50-9 se muestra la función $U(r)$ de la energía potencial aproximada de la partícula α y el núcleo residual ^{234}Th como en función de su separación. Es una combinación de un pozo de potencial asociado a una fuerza nuclear fuerte (de atracción) que actúa en el interior del núcleo ($r < R_1$) y un potencial de Coulomb asociado a la fuerza electrostática (de repulsión) que actúa entre las dos partículas, luego de ocurrir el decaimiento ($r > R_1$).

La línea horizontal marcada $Q_\alpha = 4.27$ MeV indica la energía de decaimiento durante el proceso, tal como se calcula en el problema resuelto 50-6. Nótese que esta línea intersecta la curva de energía potencial en dos puntos R_1 y R_2. Ahora vemos por qué la partícula α no se emite inmediatamente del núcleo ^{238}U. Lo rodea una impresionante barrera de potencial, como lo indica el área sombreada de la figura 50-9. Visualice esta barrera como un cascarón esférico cuyo radio interno es R_1 y cuyo radio externo es R_2; su volumen está prohibido a una partícula α según las leyes de la física clásica. Si la partícula α se encuentra en esa región, su energía potencial U será mayor que su energía total E; eso significaría en la física clásica que su energía cinética K ($= E - U$) será negativa, situación imposible.

TABLA 50-2 Decaimiento alfa de ^{238}U y ^{228}U

Núclido	Q_α	*Vida media*
^{238}U	4.27 MeV	4.5×10^9 y
^{228}U	6.81 MeV	550 s

En efecto, cambiamos la pregunta y la formulamos en los siguientes términos: "¿Cómo puede el núcleo de ^{238}U emitir *alguna vez* una partícula α?". Al parecer una barrera la mantiene atrapada permanentemente dentro del núcleo.

He aquí la respuesta: como vimos en la sección 46-7 en la mecánica ondulatoria siempre hay posibilidades (descritas por la Ec. 46-24) de emitir una partícula a través de una barrera insuperable según la física clásica. De hecho, la explicación del decaimiento alfa por el efecto túnel de la mecánica ondulatoria fue una de las primera aplicaciones de la nueva física cuántica.

En el decaimiento tan lento de ^{238}U la barrera presenta en realidad muchos agujeros. Puede demostrarse que la partícula α, que supuestamente oscila dentro del núcleo, debe presentarse en la superficie interna de la barrera unas 10^{38} veces antes que logre atravesar el túnel. Es decir, unas 10^{20} veces por segundo durante 10^9 años aproximadamente. Desde luego, esperamos en el exterior anotando sólo las partículas α que *sí* consiguen escapar.

Para probar esta explicación del efecto de túnel en el decaimiento alfa observamos otros emisores alfa, donde la barrera sea distinta. Un caso de contraste extremo es el decaimiento alfa de otro núclido de uranio, ^{228}U, el cual posee una energía de desintegración Q'_α de 6.81 MeV, como se señala en la figura 50-9. La barrera es a la vez más delgada (compare la longitud de las líneas punteadas de la figura) y más baja (compare las alturas de la barrera arriba de ellas); si nuestras ideas del efecto túnel son correctas, cabe esperar que el decaimiento alfa ocurra más fácilmente con ^{228}U que con ^{238}U. Y así es efectivamente. En la tabla 50-2 se ve que ^{228}U tiene una vida media apenas de 550 s. En la sección 46-7 dijimos que el coeficiente de transmisión de una barrera —debido a la naturaleza exponencial de la ecuación 46-24— es muy sensible a alteraciones pequeñas en las dimensiones de la barrera. Comprobamos que un aumento de Q_α en un factor de sólo 1.6 aminora la vida media (es decir, la eficacia del efecto de túnel) en un factor de 3×10^{14}.

PROBLEMA RESUELTO 50-6. *a*) Calcule la energía liberada durante el decaimiento alfa de ^{238}U. *b*) Demuestre que este núclido no puede emitir espontáneamente un protón. Las masa atómicas necesarias son

^{238}U 238.050783 u ^{4}He 4.002603 u

^{234}Th 234.043596 u ^{1}H 1.007825 u

^{237}Pa 237.051144 u.

Solución *a*) En el proceso del decaimiento alfa de la ecuación 50-13, la masa atómica m_f total de sus productos $^{234}Th + {}^{4}He$ es 238.046199 u. Según la ecuación 50-11 el valor Q es

$$Q = (m_i - m_f)c^2$$
$$= (238.050783\ \text{u} - 238.046199\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u})$$
$$= 4.27\ \text{MeV}.$$

Esa energía está disponible para ser compartida como energía cinética entre la partícula α y el átomo en retroceso ^{234}Th.

b) Para que ^{238}U emitiera un protón, el proceso de decaimiento sería

$$^{238}\text{U} \rightarrow {}^{237}\text{Pa} + {}^{1}\text{H}.$$

En este caso el valor Q es

$$Q = (m_i - m_f)c^2$$
$$= (238.050783\ \text{u} - 238.058969\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u})$$
$$= -7.62\ \text{MeV}.$$

El valor negativo Q indica que ^{238}U es estable frente a la emisión espontánea de protones.

50-5 DECAIMIENTO BETA

Un núcleo que se desintegra de modo espontáneo emitiendo un electrón (positivo o negativo) realiza *decaimiento beta.** He aquí dos ejemplos:

$$^{32}\text{P} \rightarrow {}^{32}\text{S} + e^- + \bar{\nu} \qquad (t_{1/2} = 14.3\ \text{d}) \qquad (50\text{-}14)$$

y

$$^{64}\text{Cu} \rightarrow {}^{64}\text{Ni} + e^+ + \nu \qquad (t_{1/2} = 12.7\ \text{h}). \qquad (50\text{-}15)$$

Los símbolos ν y $\bar{\nu}$ representan el *neutrino* y su antipartícula —el *antineutrino*—, partículas neutras que se emiten, junto con el electrón o el positrón (electrón positivo), durante el decaimiento. Los neutrinos interactúan muy débilmente con la materia, y por ello, resulta extremadamente difícil darse cuenta que por largos años su presencia pasó inadvertida. En el capítulo 52 estudiaremos la naturaleza e importancia fundamentales de estas partículas tan elusivas.

Tal vez sorprenda el hecho de que el núcleo puede emitir electrones (y neutrinos), pues antes dijimos que consta de neutrones y protones únicamente. No obstante, también dijimos que los átomos emiten fotones y no afirmamos en absoluto que el átomo "contiene" fotones. Señalamos que pueden crearse durante el proceso de emisión.

Lo mismo sucede con los electrones y neutrinos emitidos de los núcleos durante el decaimiento beta. Se producen en el proceso de emisión; el neutrón se transforma en protón dentro del núcleo (o a la inversa) de acuerdo con

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \qquad (\beta^- \text{ decaimiento}) \qquad (50\text{-}16)$$

o

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu \qquad (\beta^+ \text{ decaimiento}) \qquad (50\text{-}17)$$

Son los procesos básicos del decaimiento beta.

En cualquier proceso de decaimiento, la energía liberada depende exclusivamente de la diferencia de la energía en reposo entre el núcleo inicial y el final, más los productos del decaimiento (Ec. 50-11). En un proceso particular de decaimiento alfa, como el de ^{238}U, todas las partículas α emitidas transportan la misma energía cinética. Por el contrario, en el decaimiento beta la energía cinética de los electrones emitidos no se determina en esa forma. Más bien, los electrones emitidos presentan un espectro continuo de energía, desde cero hasta un máximo $K_{\text{máx}}$, según lo ilustra la figura 50-10 en el caso del decaimiento beta de ^{64}Cu (Ec. 50-15).

Durante muchos años, antes que se identificara el neutrino, las curvas como la de la figura 50-10, constituían un enigma fascinante. Indicaban que parte de la energía "faltaba" en el proceso del decaimiento e impulsaron a muchos físicos de renombre, entre ellos Niels Bohr, a pensar que tal vez la ley de conservación de la energía podría ser válida solo estadísticamente en este tipo de decaimiento.

La respuesta al enigma se encuentra en la emisión del neutrino o del antineutrino, que transporta parte de la energía del decaimiento. Si quisiéramos medir la de ambas partículas (electrón y antineutrino o positrón y neutrino) en un proceso determinado y sumarlas, todas las veces obtendríamos el mismo valor fijo, igual a la energía del decaimiento. En efecto, la energía se conserva en todo proceso de decaimiento.

En 1931 De Pauli propuso la existencia de una partícula no detectada para resolver el problema de la energía faltante; en 1934 Fermi hizo del neutrino parte de una teoría formal del decaimiento beta. No obstante, transcurrieron otros 20 años antes que fuesen descubiertos en el laboratorio. El problema de la medición obedece a sus interacciones demasiado débiles con la materia: su trayectoria libre media en la materia sólida es del orden de miles de años luz. En la actualidad la física del neutrino constituye un subcampo de la física nuclear y corpuscular, y los especialistas estudian los neutrinos emitidos de fuentes radiactivas o producidos durante reacciones nucleares en la Tierra, en el Sol o en las supernovas.

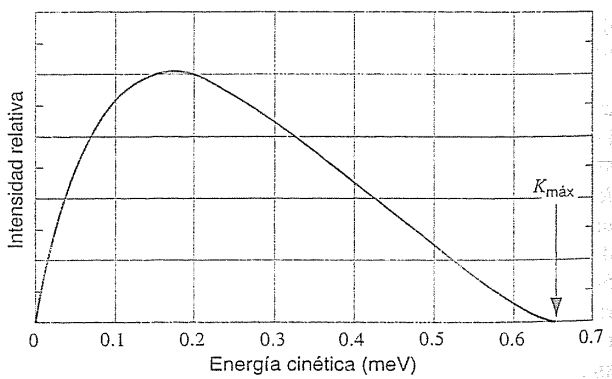


FIGURA 50-10. Distribución de energía cinética de los positrones emitidos en el decaimiento beta de ^{64}Cu. La energía cinética máxima es 0.653 MeV.

* El decaimiento beta incluye además la captura de electrones, en que un núcleo decae absorbiendo uno de sus electrones orbitales. Este proceso no lo estudiamos aquí.

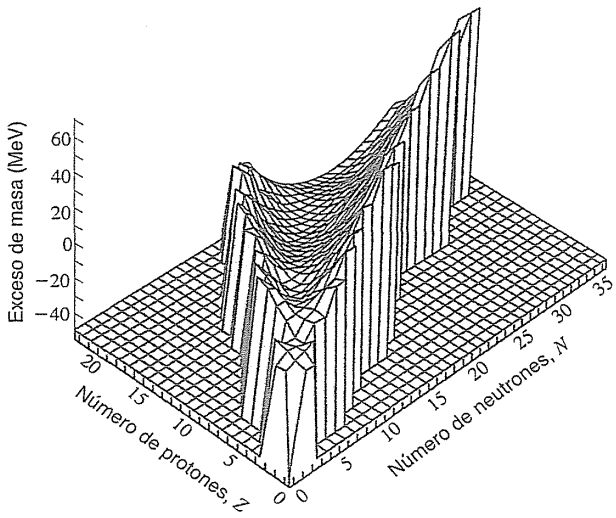


FIGURA 50-11. Parte del valle de núclidos, que únicamente muestra los núclidos más ligeros. La cantidad graficada en el eje vertical es el exceso de masa definida como $(m - \mathrm{A})c^2$, donde m es la masa atómica en u.

El estudio de los decaimientos alfa y beta nos permite examinar desde una nueva perspectiva el diagrama de núclidos de la figura 50-4. Construyamos una superficie tridimensional graficando la masa de cada núclido en una dirección que forme ángulos rectos con el plano NZ de la figura. La superficie así formada ofrece una representación gráfica de la estabilidad nuclear. Según se aprecia en la figura 50-11 (en relación con los núclidos ligeros), describe un "valle de núclidos"; la zona de estabilidad de la figura 50-4 se desplaza por su fondo. Los núclidos en la "cabecera" del valle (región que no aparece en la Fig. 50-11) decaen y se dirigen a su interior por la acción de cadenas del decaimiento alfa y por fisión espontánea. Lo mismo sucede con los situados en el lado abundante en protones que emiten electrones positivos, y con los situados en el lado abundante en neutrones que emiten electrones negativos.

PROBLEMA RESUELTO 50-7. Calcule la energía de desintegración (valor Q) en el decaimiento beta de ^{32}P, como se describe en la ecuación 50-14. Las masas atómicas necesarias son 31.973907 u de ^{32}P y 31.972071 u de ^{32}S.

Solución Dada la presencia del electrón emitido, hay que distinguir con mucho cuidado las masas nucleares y las atómicas. Representemos con m' las masas nucleares de ^{32}P y ^{32}S, y con m sus masas atómicas. Suponemos que la energía Q de desintegración es $\Delta m\, c^2$, donde

$$\Delta m = m'(^{32}\mathrm{P}) - [m'(^{32}\mathrm{S}) + m_e],$$

con m_e, la masa del electrón y del neutrino que se suponía que no la tenía. Si sumamos y sustraemos $15m_e$ en el lado derecho, obtendremos

$$\Delta m = [m'(^{32}\mathrm{P}) + 15m_e] - [m'(^{32}\mathrm{S}) + 16m_e].$$

Las magnitudes dentro de los corchetes son las masas atómicas. Por tanto, tenemos

$$\Delta m = m(^{32}\mathrm{P}) - m(^{32}\mathrm{S}).$$

Si restamos las masas atómicas en esta forma, automáticamente se tendrá en cuenta la del electrón emitido.*

Entonces la energía de desintegración en el decaimiento de ^{32}P será

$$Q = \Delta m\, c^2 = (31.973907\ \mathrm{u} - 31.972071\ \mathrm{u})(931.5\ \mathrm{MeV/u})$$
$$= 1.71\ \mathrm{MeV}.$$

El valor anterior es idéntico al medido de $K_{\text{máx}}$, la energía cinética máxima de los electrones emitidos. Así pues, aunque 1.71 MeV se libera siempre que decae un núcleo de ^{32}P, esencialmente en todos los casos el electrón libera menos energía que ésta. El neutrino recibe la restante, pasando inadvertido cuando la extrae del laboratorio. (Una parte insignificante, del orden de eV, se dirige al núcleo ^{32}S para conservar el momento en el decaimiento.)

50-6 MEDICIÓN DE LA RADIACIÓN DE IONIZACIÓN†

Cuando la radiación como la de rayos X, de rayos gamma, de partículas beta o alfa se topa con un átomo, lo puede hacer expulsar electrones y ionizarse. Como la ionización puede dañar las células de los tejidos vivos, los efectos han despertado el interés del público. En la naturaleza, este tipo de radiación proviene de los rayos cósmicos y también de los elementos radiactivos de la corteza terrestre. Otra fuente son las radiaciones producidas con medios artificiales: rayos X utilizados con fines diagnósticos y terapéuticos; las radiaciones de radionúclidos que se usan en medicina y en la industria. La eliminación de los desechos radiactivos y la evaluación de las probabilidades de los accidentes nucleares siguen siendo objeto de políticas nacionales.

Aquí no vamos a analizar las fuentes de la radiación de ionización, sino que nos limitaremos a describir las unidades en que se expresan sus propiedades y sus efectos. Son cuatro y a menudo se emplean incorrectamente o con poco rigor en las comunicaciones populares.

1. *El curie (cuya abreviatura es Ci).* Es una medida de la *actividad* de rapidez de decaimiento de una fuente radiactiva. Se definió originalmente como la actividad de 1 g de radio en equilibrio con sus productos secundarios, pero hoy se define simplemente como

$$1\ \text{curie} = 3.7 \times 10^{10}\ \text{desintegraciones por segundo.}$$

La definición nada dice sobre la naturaleza de los decaimientos o la cantidad de energía liberada durante dicho decaimiento. Además nótese que esta unidad no describe adecuadamente los efectos de ionización de los rayos X procedentes —por ejemplo— de una máquina de laboratorio médico. Las radiaciones han de emitirse de un radionúclido.

* No sucede lo mismo en el decaimiento de positrones ni en la captura de electrones (Probs. 11 y 12). Nótese asimismo que en este problema hemos despreciado la (pequeña) diferencia de las energías de enlace en los electrones atómicos antes y después del decaimiento beta.

†Véase "Radiation Exposure in Our Daily Lives", de Stewart C. Bushong, *The Physics Teacher,* marzo de 1977, p. 135.

Un ejemplo del uso correcto del curie es la afirmación: "Un miligramo de ^{239}Pu tiene una actividad de 62 μCi". Se desprecia el hecho de que ^{239}Pu es un emisor alfa.

2. *El roentgen (cuya abreviatura es R).* Es una medida de *exposición*, es decir, de la capacidad de un haz de rayos X o de rayos gamma para producir iones en una sustancia. En concreto, el roentgen se define como la exposición que producirá 1.6×10^{12} pares de iones por gramo de aire; con este último seco y a una temperatura y presión estándar. Por ejemplo, podríamos decir: "En 0.1 s este haz de rayos X dental ofrece una exposición de 30 mR". Nada se dice si los iones en realidad se produjeron o si un paciente está sentado en el sillón del dentista.

3. *El rad.* Es un acrónimo de *ra*diation *a*bsorbed *d*osis (dosis absorbida de radiación) y, como lo indica su nombre, mide la dosis que se administra a un objeto, medida por la energía que se le transfiere. Un objeto, que podría ser una persona (el cuerpo entero) o una parte del cuerpo (las manos, por ejemplo) ha recibido una dosis de 1 rad cuando se le administran 10^{-2} J/kg mediante radiaciones de ionización. Una expresión común que muestra esta aplicación es: "Una dosis de rayos gamma de 300 rad en todo el cuerpo causará la muerte del 50% de la población expuesta". Para tranquilizar al lector le recordamos que la exposición promedio actual a la radiación proveniente de fuentes naturales y artificiales es 0.2 rad (= 200 mrad) por año aproximadamente. La unidad de la dosis absorbida en el SI es el *gray* (Gy), que equivale a 100 rad.

4. *El rem.* Es un acrónimo de *r*oentgen *e*quivalent in *m*an (equivalente del roentgen en el hombre) y es una medida de *equivalente de dosis.* Tiene en cuenta el hecho de que, aunque diversos tipos de radiación (rayos gamma y neutrones entre ellos) pueden suministrarle al cuerpo la misma energía por unidad de masa, no causan el mismo efecto. El equivalente de dosis (en rems) se obtiene multiplicando la dosis absorbida (en rads) por un *factor de calidad* QF, que viene tabulado en varios libros. QF = 1 en los rayos X y en los electrones. QF = 5 en los neutrones lentos y así sucesivamente. Los dispositivos para proteger al personal, entre ellos las placas de película o dosímetros están diseñados para registrar en rams el equivalente de dosis.

Un ejemplo del uso correcto del rem es: "El National Council on Radiation Protection recomienda que nadie que haya estado expuesto (no ocupacionalmente) a radiación deberá recibir un equivalente de dosis mayor que 500 mrem (= 0.5 rem) en un año". Se incluye todo tipo de radiación, empleando los factores correspondientes de calidad. La unidad de equivalente de dosis en el SI es el *sievert* (Sv): 1 Sv = 100 rem.

PROBLEMA RESUELTO 50-8. Una dosis de 300 rad es letal para el 50% de la población que la recibe. Si se absorbiera directamente como calor la cantidad equivalente de energía, ¿cuánto aumentaría la temperatura? Suponga que c, la capacidad de calor específico del cuerpo humano, es la misma que la del agua, 4180 J/kg · K.

Solución Una dosis absorbida de 300 rad corresponde a la siguiente energía absorbida por unidad de masa:

$$(300 \text{ rad})\left(\frac{10^{-2} \text{ J/kg}}{1 \text{ rad}}\right) = 3 \text{ J/kg}.$$

El incremento térmico que se produciría con esa introducción de calor se calcula por medio de

$$\Delta T = \frac{Q/m}{c} = \frac{3 \text{ J/kg}}{4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K}} = 7.2 \times 10^{-4} \text{ K}.$$

Este aumento tan pequeño nos permite comprobar que el daño causado por la radiación de ionización tiene muy poco que ver con el calentamiento. El daño se debe a que la radiación de ionización logra romper los enlaces moleculares y entorpecer así el funcionamiento normal del tejido donde ha sido absorbido.

50-7 RADIACTIVIDAD NATURAL

Fuera del hidrógeno y del helio, todos los elementos se originaron en las reacciones nucleares dentro de las estrellas o en supernovas explosivas. En ellas se formaron núclidos radiactivos y estables. El sistema solar se compone de núclidos que se formaron hará unos 4.5×10^9 años. (Más adelante en la sección explicaremos cómo se descubrió eso.) La mayor parte de los núclidos radiactivos formados en esa época tienen una vida media mucho menor que 1,000 millones de años; así que desde hace mucho decayeron y produjeron núclidos estables a través de la emisión alfa o beta. Sin embargo, la vida media de algunos de esos núclidos radiactivos no es tan breve en comparación con la edad del sistema solar. Su decaimiento puede observarse en la actualidad y forma parte del origen de la radiactividad natural del ambiente.

Algunas de estas especies radiactivas son parte de las cadenas de decaimiento que comienzan con núclidos pesados como ^{232}Th ($t_{1/2} = 1.4 \times 10^{10}$ años) o ^{238}U ($t_{1/2} = 4.5 \times 10^9$ años). Éstos decaen en una secuencia de decaimientos alfa y beta, hasta que finalmente alcanzan los productos finales estables (respectivamente, ^{208}Pb y ^{206}Pb. La vida media de los núcleos intermedios de las cadenas dura mucho menos; la rapidez con que el núclido original desaparece y es reemplazado con el producto final estable depende del número de los miembros de más larga vida de la cadena. Se piensa que los procesos de decaimiento se iniciaron desde que se formó el sistema solar; de ahí que (como veremos luego) la cantidad relativa del núclido inicial y de los productos estables del decaimiento presentes en un material ofrezcan una medida de su edad. También se piensa que los decaimientos contribuyen al calentamiento interno de los planetas.

En condiciones normales, los productos de estos procesos permanecen en las rocas o minerales que contienen al núclido padre. Sin embargo, una de las sustancias intermedias producidas en las cadenas de decaimiento —el radón— es un gas. El decaimiento natural que ocurre cerca de la superficie terrestre (y en materiales de construcción como el concreto) libera gas radón radioactivo hacia la atmósfera. Los peligros que entraña respirarlos son actualmente objeto de una investigación minuciosa. El gas radón también puede liberarse en la fractura de rocas debajo de la superficie; por ello su detección ha sido explorada como una forma de predecir los sismos.

TABLA 50-3 Algunos isótopos radiactivos naturales

Isótopo	$t_{1/2}$ (y)
^{40}K	1.28×10^{9}
^{87}Rb	4.8×10^{10}
^{113}Cd	9×10^{15}
^{115}In	4.4×10^{14}
^{138}La	1.3×10^{11}
^{176}Lu	3.6×10^{10}
^{187}Re	5×10^{10}

Además de los elementos pesados, hay otros núclidos radiactivos de vida larga en las sustancias naturales. Algunos de ellos se incluyen en la tabla 50-3.

Otros núclidos radiactivos se producen sin cesar en procesos naturales, generalmente en la atmósfera terrestre por reacciones de moléculas del aire con los rayos cósmicos (protones con mucha energía procedentes del espacio). Entre ellos destaca ^{14}C ($t_{1/2}$ = 5730 años), que tiene importantes aplicaciones en el fechado radiactivo de los materiales orgánicos.

Fechado radiactivo

Supóngase que tenemos un radionúclido inicial I que decae hasta convertirse en el producto final F, cuya vida media es $t_{1/2}$. En un momento dado $t = 0$, comenzamos con N_0 núcleos iniciales y ninguno de los del producto final. En un momento posterior t descubrimos N_I del resto de los núcleos originales, mientras que han aparecido N_F ($= N_0 - N_I$) de los núcleos del producto. Los núcleos iniciales decaen de acuerdo con

$$N_I = N_0 e^{-\lambda t},$$

así que

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N_I} = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N_I}$$

o, al sustituir $N_I + N$ por N_0,

$$t = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{N_F}{N_I} \right). \qquad (50\text{-}18)$$

Es decir, para determinar la edad de la muestra se mide la razón presente del producto y de los núcleos originales.

El cálculo anterior se basó en la suposición de que ninguno de los núcleos del producto existían en $t = 0$. La suposición no siempre será válida, pero ya se cuenta con técnicas de fechado radiactivo que permiten corregir por la presencia de estos núcleos del producto original.

Este método sirve para determinar el tiempo transcurrido desde la formación del sistema solar; por ejemplo, las razones de ^{238}U a ^{206}Pb, ^{87}Rb a ^{87}Sr y ^{40}K a ^{40}Ar. Las rocas terrestres, las de la Luna y los meteoritos analizados por medio de él parecen tener una edad común de alrededor de 4.5×10^9 años, que consideramos como la edad del sistema solar.

El isótopo radiactivo ^{14}C existe en la atmósfera; aproximadamente 1 átomo de carbono en 10^{12} es ^{14}C radiactivo. Un gramo de carbono tiene una actividad aproximada de 12 decaimientos por minuto a causa del ^{14}C. Los organismos vivos pueden absorber esta actividad aspirando CO_2 o comiendo plantas que lo hayan aspirado. Cuando el organismo muere deja de absorber ^{14}C y el que existe en el momento de su muerte empieza a decaer. Para determinar la edad de la muestra se mide la rapidez de decaimiento de ^{14}C. Por ejemplo, si examinamos una muestra y cada minuto presenta 6 decaimientos por gramo, sabremos que la actividad original se redujo a la mitad y que la muestra debe tener una vida media de edad (5730 años).

Este método de *fechado por radiocarbono* (que en 1947 inventó Willard Libby, a quien se le concedió el Premio Nobel de Física de 1960 por este trabajo) es útil con muestras de materia orgánica que tienen menos de aproximadamente 10 vidas medias de edad. En ese lapso la actividad de la muestra disminuye en un factor de 2^{-10} o sea alrededor de 10^{-3}; la rapidez del decaimiento es demasiado pequeña para calcularla con precisión. El límite superior práctico de la edad de las muestras fechables con este método es de unos 50,000 años. En años recientes se inventó una nueva técnica en la que se utiliza un acelerador como espectrómetro de masas para determinar la razón $^{14}C/^{12}C$ con gran precisión. De este modo, la utilidad del fechado por radiocarbono se amplió a muestras hasta de 100,000 años de edad.

PROBLEMA RESUELTO 50-9. En una muestra de roca, se descubre que la razón de los núcleos de ^{206}Pb a ^{238}U es 0.65. ¿Qué edad tiene la roca?

Solución Con base en la ecuación 50-18, y usando 4.5×10^9 años para la vida media del ^{238}U, tenemos

$$t = \frac{4.5 \times 10^9 \text{ a}}{0.693} \ln (1 + 0.65) = 3.3 \times 10^9 \text{ años}.$$

Este roca es un poco más joven que la edad máxima de 4.5×10^9 años, obtenidas en el caso de la rocas del sistema solar, lo cual parece indicar que solidificó hace 3.3×10^9 años. El ^{206}Pb que se formó antes se desprendió de la roca fundida por ebullición. El ^{206}Pb pudo empezar a acumularse sólo después de solidificarse la roca.

50-8 REACCIONES NUCLEARES

Una reacción nuclear la representamos por medio de

$$X + a \rightarrow Y + b \qquad (50\text{-}19)$$

o, en una notación más compacta,

$$X(a,b)Y. \qquad (50\text{-}20)$$

Por lo regular, la partícula a es el *núcleo proyectil*, y la partícula X, el *núcleo blanco*, que normalmente se encuentra en reposo en el laboratorio. Si el proyectil es una partícula cargada, podemos elevarla hasta su energía deseada en un acelerador de Van de Graaff (Sec. 28-10) o en un ciclotrón (Sec. 32-3). El proyectil puede ser un neutrón proveniente del reactor nuclear. Se acostumbra designar la partícula producto Y como el *núcleo residual* más pesado, y b como el *núcleo emergente* más ligero.

La energía de reacción Q se define en analogía con la ecuación 50-11 como $m_i c^2 - m_f c^2$, o sea

$$Q = (m_X + m_a)c^2 - (m_Y + m_b)c^2. \qquad (50\text{-}21)$$

Al usar la conservación de la energía, la ecuación 50-21 puede escribirse así

$$Q = (K_Y + K_b) - (K_X + K_a), \qquad (50\text{-}22)$$

donde K representa la energía cinética.

Las ecuaciones 50-21 y 50-22 son válidas sólo cuando Y y b se hallan en estado base. Como veremos luego en la presente sección, la energía de excitación aminora la de reacción si los dos núclidos se producen en un estado excitado.

Una reacción común es

$$^{19}\mathrm{F}(\mathrm{p},\alpha)^{16}\mathrm{O},$$

donde $Q = 8.13$ MeV. Las ecuaciones 50-21 y 50-22 indican que en esta reacción el sistema pierde energía de reposo y adquiere energía cinética, en 8.13 MeV por evento. Este tipo de reacciones, donde $Q > 0$ se conocen como *exotérmicas,* y como *endotérmicas* aquellas en que $Q < 0$. Estas reacciones no se producen si el proyectil no introduce en el sistema energía cinética mínima (la *energía de umbral*).

Cuando a y b son partículas idénticas, las cuales exigen que también lo sean X y Y, la reacción se considera *dispersión.* Si la energía cinética de un sistema es igual antes y después del evento (lo cual significa que $Q = 0$ y que todos los núclidos permanecen en su estado base), tendremos una *dispersión elástica.* Si las energías son diferentes ($Q \neq 0$), habrá un *dispersión inelástica* y entonces Y o b pueden quedar en un estado excitado.

Para llevar un control de las reacciones nucleares basta graficarlas en un diagrama nuclídico como el de la figura 50-4. En la figura 50-12 se muestra una porción agrandada del diagrama, centrado arbitrariamente en el núclido ^{197}Au. Se sombrearon los

Número de protones, Z							
82	^{197}Pb 8 min.	^{198}Pb 2.4 h	^{199}Pb 1.5 h	^{200}Pb 21.5 h	^{201}Pb 9.42 h	^{202}Pb 5250 y	^{203}Pb 52.0 h
81	^{196}Tl 1.84 h	^{197}Tl 2.83 h	^{198}Tl 5.3 h	^{199}Tl 7.4 h	^{200}Tl 26.1 h	^{201}Tl 73.6 h	^{202}Tl 12.2 d
80	^{195}Hg 9.5 h	^{196}Hg 0.15 %	^{197}Hg 64.1 h	^{198}Hg 10.0 %	^{199}Hg 16.9 %	^{200}Hg 23.1 %	^{201}Hg 16.2 %
79	^{194}Au 39.5 h	^{195}Au 183 d	^{196}Au 6.18 d	^{197}Au 100 %	^{198}Au 2.70 d	^{199}Au 3.14 d	^{200}Au 48.4 min
78	^{193}Pt 50 y	^{194}Pt 32.9 %	^{195}Pt 33.8 %	^{196}Pt 25.3 %	^{197}Pt 18.3 h	^{198}Pt 7.2 %	^{199}Pt 30.8 min
77	^{192}Ir 74.2 d	^{193}Ir 62.7 %	^{194}Ir 19.2 h	^{195}Ir 2.5 h	^{196}Ir 52 s	^{197}Ir 5.8 min	^{198}Ir 8 s
76	^{191}Os 15.4 d	^{192}Os 41.0 %	^{193}Os 30.5 h	^{194}Os 6.0 y	^{195}Os 6.5 min	^{196}Os 35 min	
	115	116	117	118	119	120	121

Número de neutrones, N

FIGURA 50-12. Parte ampliada del diagrama de los núclidos (Fig. 50-4).

			α,n	α,γ
	p,n	p,γ d,n	d,γ α,d	α,p
	γ,n p,d		n,γ d,p	
p,α	γ,d d,α	n,d γ,p	n,p	
γ,α	n,α			

FIGURA 50-13. Al superponer esta figura a la figura 50-12, con el cuadrado central sombreado sobre un núclido blanco, aparecen los núclidos residuales que se obtienen de las reacciones indicadas.

núclidos estables y aparecen sus abundancias isotópicas. Las casillas sin sombreado representan radionúclidos y se incluye su vida media.

La figura 50-13 indica una capa superpuesta transparente que puede colocarse encima de un diagrama nuclídico como el de la figura 50-12. Si la casilla central sombreada de la figura 50-13 está superpuesta a un blanco particular del diagrama de la figura 50-12, están identificados los núclidos residuales resultantes de las reacciones impresas en la capa superpuesta.

Por tanto, en caso de escoger como blanco ^{197}Au, la reacción (p,α) producirá ^{194}Pt (estable) y una reacción (n,γ) o (d,p) generará el radionúclido ^{198}Au cuya vida media es 2.70 d.

Igual que los átomos, los núclidos presentan estados estacionarios de energía bien definida y pueden identificarse por medio de estudios de reacción. Tomemos por ejemplo la reacción

$$^{27}\mathrm{Al}(\mathrm{d},\mathrm{p})^{28}\mathrm{Al}, \qquad Q = 5.49\ \mathrm{MeV},$$

donde una delgada lámina de aluminio se bombardea con deuterones de 2.10 MeV. En el laboratorio, se ven salir los protones emergentes con energías discretas bien definidas y

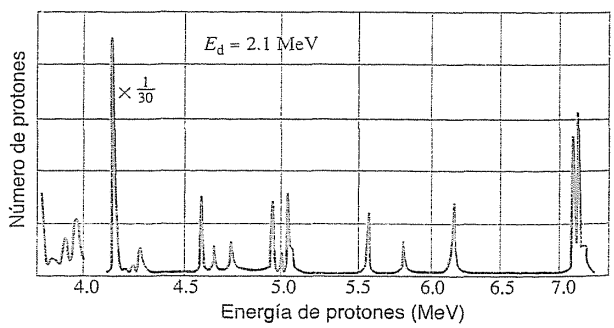


FIGURA 50-14. Distribución de energía de protones que resultan de la reacción ^{27}Al(d,p)^{28}Al. El deuterón incidente tiene una energía de 2.10 MeV. Se detectan los protones al salir del blanco formando ángulos rectos con el haz incidente.

se acompañan de rayos gamma. En la figura 50-14 se muestra la distribución de la energía de los protones emergentes.

En todo proceso de reacción sabemos que se dispone de una energía igual a la energía cinética del deuterón incidente (2.10 MeV) más la energía de reacción Q (=5.49 MeV) para compartirla entre los dos productos de la reacción, es decir, entre el núcleo residual ^{28}Al y el protón emergente p. ¿Cómo debe compartirse la energía total (2.10 MeV + 5.49 MeV = 7.59 MeV) entre las dos partículas?

Todo depende de si el núcleo residual ^{28}Al se produce en su estado base o en uno de sus estados estacionarios excitados. En el primer caso, el protón emergente tendrá la máxima energía posible, correspondiente al pico a la derecha extrema del espectro del protón en la figura 50-14. Pero si el núcleo residual se forma en un estado excitado, retendrá mayor cantidad de la energía disponible y quedará mucho más poca en el protón emergente. El núcleo residual no permanecerá mucho tiempo en estado excitado sino que se liberará del exceso de energía, emitiendo —por ejemplo— un rayo gamma.

El pico de los protones en el espectro de la figura 50-14 corresponde a un estado estacionario del núcleo residual ^{28}Al. La figura 50-15 muestra los niveles de energía que pueden deducirse analizando el espectro. Se observa la correspondencia entre los picos de la figura 50-14 y los niveles de energía de la figura 50-15. Hemos visto que el conocimiento de cómo los átomos se combinan se basa como fundamento sólido en las energías medidas de los estados del átomo de hidrógeno. Del mismo modo podemos conocer mucho sobre la estructura de los núcleos estudiando la energía y otras propiedades de sus estados estacionarios.

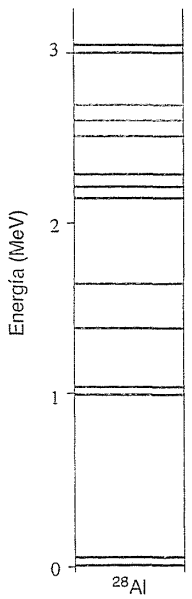


FIGURA 50-15. Niveles de energía de ^{28}Al, deducidos de datos como los de la figura 50-14.

PROBLEMA RESUELTO 50-10. En la reacción

$$^1\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + {}^2\text{H},$$

los protones (^{1}H) con una energía cinética de 5.70 MeV inciden en ^{3}H en reposo. *a)* ¿Qué valor tiene Q en esta reacción? *b)* Calcule la energía cinética de los deuterones emitidos en dirección del protón incidente.

Solución *a)* De acuerdo con la ecuación 50-21 tenemos

$$\begin{aligned} Q &= [m(^1\text{H}) + m(^3\text{H}) - m(^2\text{H}) - m(^2\text{H})]c^2 \\ &= (1.007825\ \text{u} + 3.016049\ \text{u} - 2.014102\ \text{u} \\ &\quad - 2.014102\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= -4.03\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Esta reacción es endotérmica; los productos finales tienen la mayor masa y al mismo tiempo la menor energía cinética dada por la ecuación 50-22.

b) Usando la ecuación 50-22, y con $K = 0$ en el ^{3}H inicial, tenemos

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= Q + K_p = -4.03\ \text{MeV} + 5.70\ \text{MeV} \\ &= 1.67\ \text{MeV}. \end{aligned} \tag{50-23}$$

Aquí, los subíndices 1 y 2 designan los dos núcleos producto ^{2}H. La conservación del momento en dirección del protón incidente nos da

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 = p_p &= \sqrt{2m(^1\text{H})K_p} = \sqrt{2(938\ \text{MeV}/c^2)(5.70\ \text{MeV})} \\ &= 103.4\ \text{MeV}/c. \end{aligned} \tag{50-24}$$

Las ecuaciones 50-23 y 50-24 pueden resolverse como dos ecuaciones con dos incognitas (cualquiera p_1 y p_2 o K_1 y K_2). Los resultados son

$$K_1 = 0.24\ \text{MeV} \quad \text{y} \quad K_2 = 1.43\ \text{MeV}.$$

Nótese que hemos utilizado una dinámica no relativista al resolver este problema. ¿Es una buena aproximación?

50-9 MODELOS NUCLEARES (Opcional)

Hoy se conoce bien la estructura del átomo. El centro masivo (el núcleo) ejerce la fuerza de Coulomb sobre los electrones y (con suficiente tiempo para efectuar los cálculos), podemos aplicar los métodos de la mecánica cuántica para determinar las propiedades del átomo.

Pero no entendemos aún muy bien la estructura del núcleo. La ley de la fuerza es complicada y no puede escribirse explícitamente con todos sus detalles. Tampoco hay un centro natural de fuerza que simplifique los cálculos. Al intentar conocer la estructura del núcleo nos enfrentamos con un problema de muchos cuerpos de gran complejidad.

Ante la inexistencia de una teoría global de la estructura del núcleo, nos vemos obligados a tratar de construir *modelos nucleares*. Los físicos se sirven de ellos como una manera simplificada de examinar un sistema complicado para conocer sus propiedades. La utilidad de un modelo depende de su capacidad de realizar predicciones verificables en el laboratorio por medios experimentales.

Se ha comprobado la utilidad de dos modelos. Uno (el *modelo colectivo*) describe situaciones donde cabe suponer que todos los protones y neutrones se comportan de modo cooperativo. El otro (el modelo de *partículas independientes*) no considera todos los protones y neutrones, sólo un protón y un neutrón, al determinar las propiedades del núcleo. Los dos modelos representan concepciones muy contrarias de la estructura nuclear, pero pueden combinarse para crear un solo modelo unificado.

El modelo colectivo

En él no se tienen en cuenta los movimientos de los nucleones individuales y al núcleo se le considera una entidad independiente. Este modelo, inicialmente llamado "modelo de gota líquida", fue diseñado por Niels Bohr para explicar la fisión nuclear. Imaginamos el núcleo como un cuerpo análogo a una gota líquida, donde los nucleones interactúan como las moléculas en un líquido.

La forma de equilibrio de la gota líquida depende de las interacciones de sus moléculas y la de un núcleo se basa en las interacciones de sus nucleones. Muchos núcleos presentan formas de equilibrio esférico y otros pueden ser elipsoidales.

A semejanza de una gota líquida, un núcleo puede absorber energía al girar alrededor de un eje o al vibrar alrededor de su forma de equilibrio. Mediante experimentos sobre el decaimiento radiactivo o la reacción nuclear es posible estudiar estos estados excitados. En la figura 50-16 se muestran ejemplos de las dos clases de situación. La energía rotacional $\frac{1}{2}I\omega^2$ puede escribirse en función del momento angular L $(=I\omega)$ como $L^2/2I$. Con base en la ecuación 47-28 escribimos el momento angular cuantizado como $L = \sqrt{J(J+1)}(h/2\pi)$, donde J es el número cuántico del núcleo entero; de ese modo obtenemos

$$E_J = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1). \qquad (50\text{-}25)$$

Nótese que el espaciamiento entre los estados crece al aumentar el momento angular.

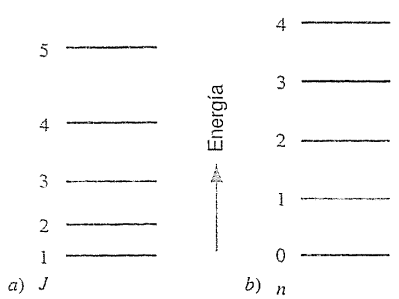


FIGURA 50-16. *a*) Estados excitados rotacionales, marcados con el número cuántico del momento angular. *b*) Estados vibratorios, marcados con el número cuántico vibratorio n.

Los estados vibratorios tienen energías dadas por

$$E_n = nhf \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (50\text{-}26)$$

donde f es la frecuencia vibratoria. Por lo regular el cuanto de energía vibratoria hf posee una energía aproximada de 0.5 MeV, correspondiente a una frecuencia del orden de 10^{20} Hz. Nótese que, en contraste con los estados rotacionales, los vibratorios de la figura 50-16*b* presentan el mismo espaciamiento.

Los datos experimentales referentes a la estructura colectiva del núcleo abarcan no sólo la observación de los estados excitados rotacionales y vibratorios similares a los de la figura 50-16, sino también los procesos de reacción nuclear en los cuales comparten la energía todos los nucleones del núcleo, las probabilidades de emisión de rayos gamma y las formas no esféricas (a menudo elipsoidales) de equilibrio en muchos núcleos.

El modelo de partículas independientes

En el otro extremo, el modelo de partículas independientes supone que a cada nucleón pueden asignársele estados bien definidos semejantes a los de los electrones en los átomos. Los neutrones y los protones deben seguir, al igual que los electrones, el principio de exclusión de Pauli; por eso, la estructura del núcleo en las partículas independientes se parece mucho a la del átomo que explicamos en el capítulo 48. Y también los nucleones como los electrones se disponen en capas con números cuánticos bien definidos. Cuando se llena una de ellas, se produce un núcleo de extraordinaria estabilidad, en analogía con los gases inertes que tienen a capas atómicas llenas.

En las capas cerradas de los nucleones ocurren los números "mágicos" 2, 8, 20, 28, 50, 82 y 126 de neutrones o protones; difieren un poco de las capas atómicas cerradas (2, 10, 18, 36, 54 y 86), debido en parte a las diferencias entre la fuerza nuclear y la de Coulomb que operan sobre los electrones. Algunos núcleos, denominados "doblemente mágicos", poseen capas cerradas de protones y neutrones y, por lo mismo, presentan gran estabilidad; por ejemplo, ^{40}Ca con 20 protones y 20 neutrones. Para extraer un protón del ^{40}Ca se requieren 8.3 MeV; en cambio, para extraer un protón de un núcleo que tiene un protón más (^{41}Sc, con un número no mágico de 21 protones) se requiere apenas 1.1 MeV. Y para extraer un neutrón del ^{40}Ca se necesitan 15.6 MeV, pero apenas 8.4 MeV para eliminar un neutrón en ^{41}Ca, con un no-mágico de 21 neutrones. Este incremento rápido de la energía para extraer una partícula de una capa cerrada se observa asimismo en el átomo (en la Fig. 48-6 se describen las energías de ionización del átomo). Un efecto parecido se observa en los radios iónicos del átomo, que muestran un incremento repentino conforme se llena una capa de electrones y el siguiente debe iniciar otra. En los radios nucleares se registra el mismo efecto de capa, según se aprecia en la figura 50-17. Nótense los saltos repentinos del radio con $N = 20$, 28, 50, 82 y 126, correspondientes a las capas llenas de neutrones.

Igual que en los radios nucleares o la energía necesaria para extraer un protón o neutrón, el modelo de partículas independientes en su límite extremo supone que las propiedades del núcleo dependen de un solo protón o neutrón de "valencia".

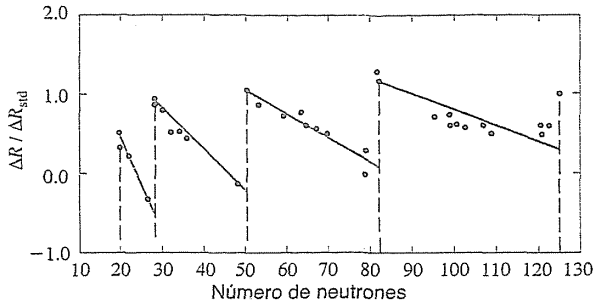


FIGURA 50-17. Variación del radio nuclear en función del número de neutrones. Se expresa en relación con la variación "estándar" esperada de la estructura "colectiva" de $R = R_0 A^{1/3}$. Los saltos abruptos indican la estructura de la capa.

He aquí otras propiedades nucleares que pueden interpretarse exitosamente en el modelo de partículas independientes: vida media de la desintegración alfa, momentos de dipolo magnético, probabilidades de reacción para capturar una partícula como el neutrón y las energías de los estados excitados.

PROBLEMA RESUELTO 50-11. El núclido ^{120}Sn ($Z = 50$) tiene una capa llena de protones y 50 es uno de los números mágicos del nucleón. El núclido ^{121}Sb ($Z = 51$) tiene un protón "adicional" fuera de esta capa. Según el concepto de capa, debería ser más fácil extraer este último que un protón en la capa llena. Para verificarlo calcule la energía requerida en cada caso. Utilice los siguientes datos relativos a la masa:

Núclidos	*Z*	*N*	*Masa atómica* (u)
^{121}Sb	50 + 1	70	120.903818
^{120}Sn	50	70	119.902197
^{119}In	50 − 1	70	118.905846

La masa atómica del protón es 1.007825 u.

Solución La extracción del protón "adicional" corresponde al proceso

$$^{121}\text{Sb} \longrightarrow {}^{120}\text{Sn} + \text{p}.$$

La energía requerida E se obtiene de

$$\begin{aligned} E &= [m(^{120}\text{Sn}) + m(^{1}\text{H}) - m(^{121}\text{Sb})]c^2 \\ &= (119.902197\ \text{u} + 1.007825\ \text{u} - 120.903818\ \text{u}) \\ &\quad \times (931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= 5.8\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

La extracción del protón de la capa llena corresponde a

$$^{120}\text{Sn} \longrightarrow {}^{119}\text{In} + \text{p}.$$

La energía requerida se calcula partiendo de

$$\begin{aligned} E &= [m(^{119}\text{In}) + m(^{1}\text{H}) - m(^{120}\text{Sn})]c^2 \\ &= (118.905846\ \text{u} + 1.007825\ \text{u} - 119.902197\ \text{u}) \\ &\quad \times (931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= 10.7\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Este resultado es mucho mayor que la energía requerida para extraer un protón "adicional" (= 5.8 MeV), justo como lo predice el modelo de capas. En forma muy parecida, la energía requerida para extraer un *electrón* en una *capa llena de electrones* (= 22 eV en la capa llena de neón) es mucho mayor que la necesaria para eliminar un electrón "adicional" en el exterior de la capa (= 5 eV en el caso del electrón "adicional" de sodio).

OPCIÓN MÚLTIPLE

50-1 Descubrimiento del núcleo

1. Rutherford logró ignorar el efecto de los electrones al analizar los experimentos de la dispersión de partículas alfa, porque
   A) los electrones no ejercen fuerza alguna sobre las partículas alfa.
   B) la masa de un electrón es mucho menor que la de una partícula alfa.
   C) los electrones se distribuyen uniformemente en todo el átomo.
   D) los electrones se mueven con tanta rapidez que una partícula alfa no puede chocar con ellos.

50-2 Algunas propiedades del núcleo

2. ¿Cuántos neutrones hay en el núclido ^{66}Zn?
   A) 26 B) 30 C) 36 D) 66
3. La energía de enlace del núcleo A es 7.7 MeV y la del núcleo B es 7.8 MeV. ¿Cuál de los dos tiene mayor masa?
   A) El núcleo A B) El núcleo B
   C) Se necesita más información para contestar.
4. Si un núcleo fuera tan grande como una uva, el átomo sería tan grande como
   A) una casa. B) un campo de fútbol americano.
   C) una ciudad. D) la Luna.

50-3 Decaimiento radiactivo

5. La vida media de una muestra radiactiva es de 30 minutos. A las 2 de la tarde la rapidez del decaimiento se mide y se descubre que es 1200/s. ¿Cuál será el resultado de una medición de la rapidez a las 3 de la tarde de ese mismo día?
   A) 4800/s B) 1200/s C) 600/s D) 300/s

50-4 Decaimiento alfa

6. Un núcleo pesado alfa decae con una energía de desintegración de 1.50 MeV. De ello puede concluirse que las energía cinéticas observadas en las partículas alfa
   A) son iguales a 1.50 MeV.
   B) son apenas de 1.50 Mev.
   C) en ocasiones podrían ser mayores que 1.50 MeV.
   D) varían continuamente entre cero y 1.50 MeV.

50-5 Decaimiento beta

7. Un núclido estable, tras absorber un neutrón, emite un electrón negativo y luego se divide espontáneamente en dos partículas alfa. El núclido original es
   A) ^{8}Be. B) ^{7}Be. C) ^{7}B. D) ^{7}Li.

8. En un experimento de decaimiento beta, se observa un electrón que tiene una energía cinética de 1.0 MeV. Con base en este hecho, ¿qué puede concluirse sobre la energía de desintegración Q del decaimiento?
   A) $Q = 1.0$ Mev
   B) $Q \leq 1.0$ Mev
   C) $Q \geq 1.0$ Mev
   D) Nada puede concluirse respecto a Q.

50-6 Medición de la radiación de ionización

9. La rapidez de decaimiento de una fuente radiactiva se mide en unidades de _____ y el efecto biológico que esa radiación causa en el ser humano se mide en unidades de _____.
   A) curies B) roentgens C) rads D) rems

50-7 Radiactividad natural

10. La cadena de decaimiento que lleva de $^{238}_{92}$U a $^{206}_{82}$Pb consta de una serie de decaimiento alfa y beta. ¿Cuántas partículas alfa se emiten?
   A) 4 B) 5 C) 6 D) 8

50-8 Reacciones nucleares

11. En una reacción nuclear, un haz de partículas alfa (^{4}He) choca contra un blanco de ^{60}Ni. Los productos de la reacción podrían ser
   A) ^{63}Zn + n. B) ^{63}Cu + p. C) ^{61}Ni + ^{3}He.
   D) Todos los anteriores.

50-9 Modelos nucleares

12. ¿Cuántos elementos se encuentran en la naturaleza que tengan capas llenas de electrones en el átomo y también capas llenas de protones y de neutrones en el núcleo?
   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

PREGUNTAS

1. Cuando una lámina delgada se bombardea con partículas α, algunas de ellas vuelven a dispersarse hacia la fuente. De esto Rutherford dedujo que la carga positiva del átomo —y también la mayor parte de su masa— ha de estar concentrada en un "núcleo" dentro del átomo. ¿Cómo razonó para llegar a esa conclusión?
2. ¿En qué se distinguen la fuerza fuerte y la electrostática o la de Coulomb?
3. ¿Por qué la importancia *relativa* de la fuerza de Coulomb crece más con números grandes de masa que la fuerza fuerte nuclear?
4. ¿Hay más neutrones que protones en el cuerpo humano? ¿Y más protones que electrones? Comente su respuesta.
5. ¿Por qué los núcleos tienden a tener más neutrones que protones con números de masa altos?
6. ¿Por qué empleamos la masa atómica, y no la nuclear, al analizar la mayor parte de los procesos de decaimiento y reacción nuclear?
7. ¿Cómo se comprueba la igualdad $1\ \text{u} = 1.6605 \times 10^{-27}$ kg en el laboratorio?
8. Los átomos de un elemento pueden diferir en su masa, poseer distintas características físicas y aun así no variar químicamente. ¿A qué se debe?
9. La desviación de las masas isotópicas respecto a los valores enteros obedece a muchos factores. Mencione algunos. ¿Cuál de ellos es la causa principal?
10. ¿Cómo se determina la masa del neutrón?
11. Los núclidos más estables tienen un número de masa A cercano a 60 (Fig. 50-6). ¿Por qué no *todos* ellos tienen un número de masa cercano a esa cantidad?
12. Si ignoramos los núclidos más ligeros, la energía de enlace por nucleón en la figura 50-6 es más o menos constante de 7 a 8 MeV/nucleón. ¿Cabe esperar que en los átomos la energía electrónica media de enlace por electrón también sea más o menos constante en toda la tabla periódica?
13. ¿Por qué la energía de enlace por nucleón (Fig. 50-6) es poca con números pequeños de masa? ¿Y con números grandes?
14. En la curva de la energía de enlace de la figura 50-6, ¿qué tienen de especial o notable los núclidos ^{2}H, ^{4}He, ^{62}Ni y ^{239}Pu?
15. El momento magnético del neutrón es $-1.9130\ \mu_N$. ¿Qué es un magnetón nuclear y cómo se distingue de un magnetón de Bohr? ¿Qué significa el signo de menos? ¿Cómo puede el neutrón, que no transporta carga neta, tener un momento magnético?
16. Un núcleo ^{238}U se creó en una explosión masiva de estrellas, hará quizá 10^{10} años. De repente decae con una emisión α mientras lo observamos. Después de tantos años, ¿por qué decide desintegrarse en este momento en particular?
17. ¿Puede justificar la siguiente afirmación: "Al medir la vida media con el método utilizado en el problema resuelto 50-4, no es necesario medir la rapidez absoluta del decaimiento R, sino que bastará cualquier cantidad proporcional. Sin embargo, *sí se necesita* una rapidez absoluta en el método que aplicamos en el problema resuelto 50-5".
18. ¿Afecta la temperatura a la tasa de decaimiento de los núclidos radiactivos? De ser así, ¿en qué forma?
19. Está usted realizando pruebas de longevidad de las lámparas. ¿Espera que su "decaimiento" sea exponencial? ¿Cuál es la diferencia esencial entre el decaimiento de ellas y el de los radionúclidos?
20. Los relojes suelen ofrecer completa regularidad en algunos procesos periódicos. Recordando que el decaimiento radiactivo es totalmente aleatorio, ¿podemos servirnos de él para medir el tiempo?
21. ¿Puede justificar, así sea de manera parcial, el fenómeno del efecto túnel basándose en las ideas fundamentales relativas a la naturaleza ondulatoria de la materia?
22. Explique por qué, en el decaimiento alfa, vidas medias cortas corresponden a grandes energías de desintegración y viceversa.
23. Un núcleo radiactivo puede emitir un positrón, e^+. Esto corresponde a convertir un positrón del núcleo en un neutrón. No obstante, la masa de un neutrón es mayor que la de protón. ¿Cómo puede entonces ocurrir la emisión del positrón?
24. En el decaimiento beta los electrones emitidos forman un espectro continuo, mientras que en el decaimiento alfa las partículas alfa crean un espectro discreto. ¿Qué problemas ocasiona esto al explicar el decaimiento beta y cómo pueden superarse finalmente?
25. ¿En qué se distinguen los neutrinos y los fotones? Ambos tienen carga cero y (supuestamente) una masa cero en reposo, y se mueven con la velocidad de la luz.

26. El decaimiento de elementos radiactivos produce helio, que con el tiempo llega a la atmósfera terrestre. La cantidad del que se encuentre en ella es mucho menor que la que se libera en esa forma. Explique por qué.
27. La vida media del ^{238}U es 4.5×10^9 años, más o menos la edad del sistema solar. ¿Cómo podemos medirla?
28. En el fechado radiactivo con ^{238}U, ¿cómo lo logra a pesar de no saber cuánta cantidad de este material había en las rocas inicialmente? (*Sugerencia:* ¿cuál es el producto final del decaimiento de ^{238}U?
29. Prepare una lista de varias fuentes de la radiación de ionización que se encuentran en el ambiente, tanto natural como artificial.
30. ¿Cuáles de las siguientes leyes se aplican a todas las reacciones nucleares: *a*) carga, *b*) masa, *c*) energía total, *d*) energía en reposo, *e*) energía cinética, *f*) momento lineal, *g*) momento angular y *h*) número total de nucleones?
31. Los cambios pequeños de temperatura causan un efecto importante en la rapidez de las reacciones físicas, pero generalmente su efecto es insignificante en la rapidez de las reacciones nucleares. Explique por qué.
32. En el desarrollo del conocimiento actual del átomo, ¿se emplearon los modelos atómicos como ahora se utilizan modelos nucleares? ¿Pertenece la teoría de Bohr al segundo tipo? ¿En qué se distinguen una teoría y un modelo?
33. ¿Cuáles son las suposiciones básicas de los modelos colectivos y de los de partículas independientes relativos a la estructura nuclear? ¿En qué se diferencian? ¿Presentan semejanzas?
34. ¿Nos ofrece el modelo colectivo del núcleo una descripción de los siguientes fenómenos: *a*) aceptación de una partícula que choca por parte del núcleo, *b*) pérdida de una partícula por emisión espontánea, *c*) fisión, *d*) dependencia de la estabilidad respecto al contenido de energía?
35. ¿Qué tienen de especial los números mágicos del nucleón?
36. ¿Por qué los números mágicos del nucleón y los del electrón no son iguales? ¿Cómo se explica cada uno?
37. El número promedio de isótopos estables (o de muy larga vida) de los gases inertes es 3.7. En cambio, el número promedio de los núclidos estables de los cuatro números mágicos de neutrones es 5.8, una cantidad considerablemente mayor. Si los gases inertes son tan estables, ¿por qué no se crearon más isótopos estables de ellos cuando se constituyeron los átomos?

EJERCICIOS

50-1 Descubrimiento del núcleo

1. Calcule la distancia de la máxima aproximación durante una colisión frontal entre una partícula α de 5.30 MeV y el núcleo de un átomo de cobre.
2. *a*) Calcule la fuerza eléctrica en una partícula α sobre la superficie de un átomo de oro, suponiendo que la carga positiva se distribuye uniformemente en todo el volumen del átomo. No tenga en cuenta los electrones atómicos. Un átomo de oro tiene un radio de 0.16 nm; trate la partícula α como una partícula puntual. *b*) ¿En qué distancia habrá de actuar esta fuerza, supuestamente constante, para poner en reposo una partícula α de 5.30 MeV? Exprese su respuesta en función del diámetro de un átomo de oro.
3. Suponga que un núcleo de oro tiene un radio de 6.98 fm (Tabla 50-1) y que una partícula α tiene un radio de 1.8 fm. ¿Qué energía debe tener una partícula α incidente para tocar apenas el núcleo?

50-2 Algunas propiedades del núcleo

4. Localice los núclidos de la tabla 50-1 en el diagrama nuclídico de la figura 50-4. ¿Cuáles de ellos se hallan dentro de la zona de estabilidad?
5. El radio de un núcleo se mide aplicando métodos de dispersión de electrones y se comprueba que tiene 3.6 fm. ¿Cuál es su número probable de masa?
6. Disponga los 25 núclidos dados aquí en cuadrados como una sección del diagrama nuclídico semejante a la figura 50-4. Trace y marque *a*) todas las líneas isobáricas (A constante) y *b*) todas las del exceso de neutrones constantes, definidas como $N - Z$. Considere los núclidos $^{118-122}Te$, $^{117-121}Sb$, $^{116-120}Sn$, $^{115-119}In$ y $^{114-118}Cd$.
7. Una estrella de neutrones es un objeto estelar cuya densidad equivale aproximadamente a la de la materia nuclear, tal como se calculó en el problema resuelto 50-2. Suponga que el Sol se colapsara como ella sin perder nada de su masa actual. ¿Cuál sería su radio esperado?
8. Verifique que la energía de enlace por nucleón que se indica en la figura 50-1 en el caso de ^{239}Pu es efectivamente 7.56 MeV/nucleón. Las masas atómicas necesarias son 239.052156 u (^{239}Pu), 1.007825 u (^{1}H) y 1.008665 u (neutrón).
9. Calcule la energía promedio de enlace por nucleón de ^{62}Ni, cuya masa atómica es 61.928349 u. Este núcleo tiene la máxima energía de enlace por nucleón de todos los núcleos estables conocidos.
10. Las masas atómicas de ^{1}H, ^{12}C y ^{238}U son 1.007825 u, 12.000000 u (por definición) y 238.050783 u, respectivamente. *a*) ¿Cuáles serían esas masas si la unidad de masa se definiese de modo que la masa de ^{1}H fuera (exactamente) 1.000000 u? *b*) Con el resultado indique por qué quizá no se hizo la elección más obvia.
11. *a*) Convénzase usted mismo de que la energía contenida en enlaces nucleares o de fuerza fuerte es proporcional a A, el número de masa del núcleo en cuestión. *b*) Convénzase usted mismo de que la energía de los enlaces de la fuerza de Coulomb entre los protones es proporcional a $Z(Z - 1)$. *c*) Demuestre que, al pasar a partículas cada vez más grandes (Fig. 50-4), la importancia de *b*) aumenta con mayor rapidez que la de *a*).
12. En la tabla periódica la entrada del magnesio es

12
Mg
24.305

Hay tres isótopos:

^{24}Mg, masa atómica = 23.985042 u;
^{25}Mg, masa atómica = 24.985837 u;
^{26}Mg, masa atómica = 25.982593 u.

La abundancia de ^{24}Mg es 78.99% por masa. Calcule la abundancia de los dos isótopos restantes.

13. Dado que el nucleón está confinado al núcleo, suponemos que la incertidumbre de la posición es aproximadamente el radio del núcleo R. ¿Qué produce el principio de incertidumbre en relación con la energía cinética de un nucleón de un núcleo con —digamos— $A = 100$? (*Sugerencia:* suponga que la incertidumbre del momento Δp es el momento total p.)
14. Le piden extraer una partícula α (^{4}He) extrayendo sucesivamente un protón, un neutrón y un protón. Calcule *a*) el trabajo necesario en cada paso, *b*) la energía total de enlace de la partícula α y c) la energía de enlace por nucleón. Las masas atómicas que se necesitan son

^{4}He 4.002603 u ^{2}H 2.014102 u

^{3}H 3.016049 u ^{1}H 1.007825 u

n 1.008665 u.

15. Para simplificar los cálculos se tabulan a veces las masas atómicas, no la masa real m sino $(m - A)c^2$, donde A es el número de masa expresado en unidades de masa. Esta cantidad, generalmente dada en MeV, se denomina *exceso de masa* y su símbolo es Δ. Con los datos del problema resuelto 50-3, calcule el exceso de masa para *a*) ^{1}H, *b*) el neutrón y *c*) ^{120}Sn.
16. *a*) Demuestre que la energía de enlace total de un núclido puede escribirse así

$$E_B = Z\Delta_H + N\Delta_n - \Delta,$$

donde Δ_H, Δ_n y Δ son los excesos de masa correspondientes (Ej. 15). *b*) Por medio de este método calcule la energía de enlace por nucleón para ^{197}Au. Compare su resultado con el valor de la tabla 50-1. Los excesos de masa requeridos son $\Delta_H = +7.289$ MeV, $\Delta_n = +8.071$ MeV y $\Delta_{197} = -31.157$ MeV. Δ_H es el exceso de masa del ^{1}H. Nótese que los cálculos disminuyen cuando se utilizan los excesos de masa en lugar de las masas reales.
17. Un centavo posee una masa de 3.00 g. Calcule la energía nuclear que se necesitaría para separar todos los neutrones y los protones en esta moneda. Ignore la energía de enlace de los electrones. Para simplificar los cálculos suponga que el centavo está hecho enteramente de átomos de ^{63}Cu (masa = 62.929601 u). La masa atómica del protón y el neutrón son, respectivamente, 1.007825 y 1.008665 u.
18. Los radios del núcleo pueden medirse dispersando del núcleo electrones de gran energía. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de de Broglie en los electrones de 480 MeV? *b*) ¿Son medios idóneos para este propósito? Hay que tener en cuenta la relatividad.

50-3 Decaimiento radiactivo

19. La vida media de un isótopo radiactivo es 140 d. ¿Cuántos días tardará la actividad de una muestra del isótopo en caer a un cuarto de su rapidez inicial de decaimiento?
20. La vida media de un isótopo radiactivo es 6.5 h. Si al iniciar hay 48×10^{19} átomos de este isótopo en una muestra, ¿cuántos quedarán al cabo de 26 h?
21. Un isótopo radiactivo de mercurio, ^{197}Hg, se transforma en oro ^{197}Au al decaer, con una constante de decaimiento de 0.0108 h^{-1}. *a*) Calcule su vida media. *b*) ¿Qué parte de la cantidad original quedará después de tres vidas medias? *c*) ¿Y después de 10 días?
22. De los datos ofrecidos en los primeros párrafos de la sección 50-3 deduzca *a*) la constante de desintegración λ y *b*) la vida media del ^{238}U.
23. ^{67}Ga, con masa atómica = 66.93 u, tiene una vida media de 78.25 h. Considere una muestra inicialmente pura de 3.42 g de este isótopo. *a*) Determine su actividad (rapidez de decaimiento). *b*) Determine su actividad 48.0 h más tarde.
24. Demuestre que la ley del decaimiento radiactivo (Ec. 50-6) puede escribirse como

$$N = N_0(\tfrac{1}{2})^{t/t_{1/2}}.$$

25. ^{223}Ra decae por decaimiento alfa con una vida media de 11.43 d. ¿Cuántos átomos se helio se crean en 28 d a partir de una muestra inicialmente pura de ^{223}Ra que contenga 4.70×10^{21} átomos?
26. El radionúclido ^{64}Cu tiene una vida media de 12.7 h. ¿Cuánto de una muestra inicialmente pura de ^{64}Cu decaerá durante un periodo de 2 horas a partir de 14.0 h más tarde?
27. El radionúclido ^{32}P (vida media = 14.28 d) se emplea a menudo como marcador para seguir la ruta de las reacciones químicas en que interviene el fósforo. *a*) Si la rapidez de conteo en un experimento es 3050 conteos/s, ¿al cabo de cuánto tiempo disminuirá a 170 conteos/s? *b*) Una solución que contiene ^{32}P se introduce en el sistema de raíces de una planta experimental de tomates y la actividad ^{32}P de una hoja se mide 3.48 d después. ¿Por qué factor debe multiplicarse esta lectura para corregir el decaimiento que ha ocurrido desde que se inició el experimento?
28. Una muestra de 1.00 g de samario emite partículas α con una rapidez de 120 partículas/s. ^{147}Sm, cuya abundancia natural en samario bruto es 15.0%. Calcule la vida media de este isótopo.
29. ^{239}Pu, con masa atómica = 239 u, decae por decaimiento alfa con una vida media de 24.100 años. ¿Cuántos gramos de helio produce una muestra inicialmente pura de 12.0 g de ^{239}Pu tras 20,000 años? (Recuerde que una partícula α es un núcleo de helio con una masa atómica de 4.00 u.)
30. Una fuente contiene dos radionúclidos de fósforo, ^{32}P ($t_{1/2}$ = 14.3 d) y ^{33}P ($t_{1/2}$ = 25.3 d). Al inicio 10.0% de los decaimientos provienen de ^{33}P. ¿Cuánto hay que aguardar para que lo haga el 90.0%?

50-4 Decaimiento alfa

31. Suponga que un núcleo ^{238}U se compone de una partícula α (^{4}He) y de un núcleo residual (^{234}Th). Grafique la energía potencial electrostática $U(r)$, donde r es la distancia entre estas partículas. Cubra el intervalo 10 fm $< r <$ 100 fm y compare su gráfica con la de la figura 50-9.
32. En términos generales, los núclidos más pesados tienden a ser más inestables ante el decaimiento alfa. Por ejemplo, el isótopo más estable del uranio, ^{238}U tiene una vida media de decaimiento alfa de 4.5×10^9 años. El isótopo más estable de plutonio es ^{244}Pu con una vida media 8.2×10^7 años; en el caso del curio tenemos ^{248}Cm y 3.4×10^5 años. Cuando la mitad de una muestra original de ^{238}U ha decaído, ¿qué partes quedan de los isótopos originales de *a*) plutonio y *b*) curio?
33. Los radionúclidos pesados emiten una partícula α en vez de otras combinaciones de nucleones, por ser una estructura muy estable y compacta. Para confirmarlo calcule la energía de desintegración de estos procesos hipotéticos de decaimiento y explique el significado de los resultados:

$$^{235}\text{U} \rightarrow {}^{232}\text{Th} + {}^3\text{He}, \quad Q_3;$$
$$^{235}\text{U} \rightarrow {}^{231}\text{Th} + {}^4\text{He}, \quad Q_4;$$
$$^{235}\text{U} \rightarrow {}^{230}\text{Th} + {}^5\text{He}, \quad Q_5.$$

Las masas atómicas que se necesitan son

^{232}Th 232.038050 u ^{3}He 3.016029 u

^{231}Th 231.036297 u ^{4}He 4.002603 u

^{230}Th 230.033127 u ^{5}He 5.012228 u.

^{235}U 235.043923 u

34. En ciertas circunstancias, un núcleo puede decaer emitiendo una partícula más pesada que una partícula α. Este tipo de decaimiento es muy raro. Considere los decaimientos

$$^{223}\text{Ra} \rightarrow {}^{209}\text{Pb} + {}^{14}\text{C}$$

y

$$^{223}\text{Ra} \rightarrow {}^{219}\text{Rn} + {}^{4}\text{He}.$$

a) Calcule los valores de Q para los decaimientos anteriores y determine que son posibles desde el punto de vista energético. *b)* En este decaimiento la altura de la barrera de Coulomb para las partículas α es 30 MeV. ¿Cuál es su altura en el decaimiento ^{14}C? Las masas atómicas son

^{223}Ra	223.018497 u	^{14}C	14.003242 u
^{209}Pb	208.981075 u	^{4}He	4.002603 u.
^{219}Rn	219.009475 u		

50-5 Decaimiento beta

35. Hay ^{137}Cs en la lluvia radiactiva causada por las detonaciones de bombas nucleares arriba de la superficie terrestre. Es un problema ambiental, ya que produce decaimiento beta con una lenta vida media de 30.2 años, hasta transformarse en ^{137}Ba, liberando una gran cantidad de energía en el proceso. La masa atómica de Cs y Ba es 136.907084 y 136.905821 u, respectivamente. Calcule la energía total liberada en un decaimiento.

36. Un neutrón libre decae conforme a la ecuación 50-16. Calcule la energía máxima del espectro beta. Las masas atómicas que se requieren son:

$$\text{n} \quad 1.008665 \text{ u}; \qquad {}^{1}\text{H} \quad 1.007825 \text{ u}.$$

37. Se emite un electrón desde un núclido de masa intermedia (A = 150, por ejemplo), con una energía cinética de 1.00 MeV. *a)* Determine su longitud de onda de de Broglie. *b)* Calcule el radio del núcleo emisor. *c)* ¿Puede un electrón quedar confinado como onda estacionaria dentro de una "caja" de esas dimensiones? *d)* ¿Podemos usar estos números para rechazar el argumento (abandonado desde hace mucho) de que existen electrones en el núcleo?

38. El radionúclido ^{32}P decae y se convierte en ^{32}S, como se describe en la ecuación 50-14. En un proceso de decaimiento se emite un electrón de 1.71 MeV, el mayor valor posible. Calcule la energía cinética de retroceso del átomo ^{32}S. Su masa atómica es 31.97 u. (*Sugerencia:* en el electrón es necesario utilizar las expresiones relativistas de la energía cinética y del momento angular. La mecánica newtoniana puede usarse con seguridad en el caso del átomo ^{32}S que se mueve con relativa lentitud.)

50-6 Medición de la radiación de ionización

39. El núclido ^{198}Au, con vida media = 2.693 d, se emplea en el tratamiento del cáncer. Calcule la masa de este isótopo que se necesita para producir una actividad de 250 Ci.

40. Un contador Geiger registra 8722 conteos en 1 minuto. Calcule en Ci la actividad de la fuente, suponiendo que registre todos los decaimientos.

41. Una dosis normal de radiación del tórax con rayos X es de 25 mrem, suministrada por rayos cuyo factor de calidad es 0.85. Calcule en joules la energía absorbida, suponiendo que la masa del tejido expuesto es la mitad de la masa total de un paciente de 88 kg.

42. Una persona de 75 kg recibe en todo el cuerpo una dosis de radiación de 24 mrad, suministrada por partículas α cuyo factor de calidad es 12. Calcule *a)* la energía absorbida en joules y *b)* la dosis equivalente en rem.

43. En una muestra radiactiva se requiere una actividad de 3.94 μCi para emplearla en un tratamiento médico. Una semana antes, se prepara una muestra de núclidos con una vida media de 1.82×10^5 s. ¿Cuál debe ser la actividad de la muestra en el momento de la preparación, a fin de que produzca la actividad requerida a la hora del tratamiento?

44. Un isótopo de Plutonio ^{239}Pu, con masa atómica de 239.05 u, se crea como producto secundario en los reactores nucleares, y por tanto, se acumula en los elementos del combustible. Es radiactivo y presenta un decaimiento alfa, con una vida media de 2.411×10^4 años. Pero el plutonio es una de las sustancias químicas más tóxicas; una dosis de 2.00 mg es letal para el ser humano. *a)* ¿Cuántos núcleos constituyen una dosis química mortal? *b)* ¿Con qué rapidez decae esa cantidad? *c)* ¿Cuál es su actividad en curies?

45. Las células cancerosas son más vulnerables a la radiación de rayos X y gamma que las células sanas. Hoy aceleradores lineales empiezan a reemplazarlo, antaño la fuente estándar de la radioterapia era el ^{60}Co radiactivo. Esta sustancia por decaimiento beta se transforma en un estado nuclear excitado de ^{60}Ni, que de inmediato cae al estado base, emitiendo dos fotones de rayos gamma, cada uno con una energía aproximada de 1.2 MeV. La vida media controladora del decaimiento beta es 5.27 años. ¿Cuántos núcleos radiactivos ^{60}Co hay en una fuente de 6000 Ci que se emplea en un hospital? La masa atómica de ^{60}Co es 59.93 u.

46. En promedio un piloto de aviación pasa 20 h por semana volando a 12,000 m, altitud a la cual una rapidez equivalente de dosis a causa de la radiación cósmica y solar es 12 μSv/h (1 Sv = 1 sievert = 100 rem; el sievert es la unidad SI equivalente de dosis). Calcule en mrem la dosis equivalente anual.

47. Tras un largo esfuerzo, en 1902 Marie y Pierre Curie consiguieron separar de una veta de uranio la primer cantidad importante de radio, 1 decigramo (dg) de $RaCl_2$ puro. El radio era el isótopo radiactivo ^{226}Ra, que decae con una vida media de 1600 años. *a)* ¿Cuántos núcleos de radio habían aislado? *b)* ¿Cuál era en Bq la rapidez de desintegración de la muestra? (1 Bq = 1 becquerel = 1 decaimiento/s.) *c)* ¿Y en curies? La masa molar de Cl es 35.453 g/mol; la masa atómica del isótopo de radio es 226.03 u.

48. Calcule la masa de 4.60 μCi de ^{40}K, cuya vida media es 1.28×10^9 años y cuya masa atómica es 40.0 u.

50-7 Radiactividad natural

49. Se descubre que una roca contiene 4.20 mg de ^{238}U y 2.00 mg de ^{206}Pb. Suponga que no contenía plomo en formación y que el plomo actualmente existente proviene del decaimiento del uranio. Determine la edad de la roca. La vida media de ^{238}U es 4.47×10^9 años.

50. Se cree que una roca tiene 260 millones de años de edad. Si contiene 3.71 mg de ^{238}U, ¿cuánto ^{206}Pb habrá de tener?

51. Se comprueba que una roca, sacada del subsuelo, contiene 860 μg de ^{238}U, 150 μg de ^{206}Pb y 1.60 mg de ^{40}Ca. ¿Cuánto ^{40}K contendrá con toda probabilidad? Las vidas medias que se requieren son 4.47×10^9 años para ^{238}U y 1.28×10^9 años para ^{40}K.

50-8 Reacciones nucleares

52. Llene el núclido faltante en las siguientes reacciones: *a)* ^{116}Sn(?,p)^{117}Sn; *b)* ^{40}Ca(α,n)? y *c)* ?(p,n)^{7}Be.

53. Calcule Q en la reacción ^{59}Co(p,n)^{59}Ni. Las masas atómicas que se necesitan son

^{59}Co	58.933200 u	^{1}H	1.007825 u
^{59}Ni	58.934352 u	n	1.008665 u.

54. Utilice mentalmente la capa superpuesta de la figura 50-13, aplicada a la figura 50-12; anote después las reacciones con que puede prepararse el radionúclido ^{197}Pt ($t_{1/2}$ = 18.3 h), por lo menos en teoría. Con excepción de circunstancias especiales, únicamente los núclidos estables pueden servir de blanco práctico a las reacciones nucleares.
55. El radionúclido ^{60}Co ($t_{1/2}$ = 5.27 años) se emplea mucho en el tratamiento del cáncer. Tabule las posibles reacciones que podrían utilizarse en su preparación. Limite los proyectiles a los neutrones, protones y deuterones. Limite el blanco a núclidos estables. Los adecuadamente cercanos a ^{60}Co son ^{63}Cu, ^{60,61}, ^{62}Ni, ^{59}Co y ^{57,58}Fe. (En la industria ^{60}Co se obtiene bombardeando el cobalto elemental, que consta de un solo isótopo ^{59}Co, con neutrones en un reactor.)
56. Un haz de deuterones cae en un blanco de cobre. Este metal tiene dos isótopos estables, ^{63}Cu (69.2%) y ^{65}Cu (30.8%). Tabule los núclidos residuales que pueden obtenerse mediante las reacciones (d,n), (d,p), (d,α) y (d,γ). Examine atentamente la figura 50-4 e indique cuáles núclidos residuales son estables y cuáles son radiactivos.
57. Prepare una capa superpuesta como la de la figura 50-13 donde la figura se extiende para incluir las reacciones en que intervienen los núclidos ligeros ^{3}H (tritio) y ^{3}He, considerados como proyectiles y partículas emergentes.
58. Durante varias horas un blanco de platino se bombardea con deuterones acelerados por un ciclotrón y luego, a través de procesos químicos, se separa de él al iridio elemental (Z = 77). ¿Qué radioisótopos de iridio existente y con cuales reacciones se forman? (*Nota:* ^{190}Pt y ^{192}Pt, que no aparecen en la figura 50-12, son isótopos estables de platino, pero sus abundancias isotópicas son tan pequeñas que podemos ignorar su presencia.)
59. Prepare una capa superpuesta como la de la figura 50-13, en la cual dos nucleones de núcleos ligeros pueden aparecer como partículas emergentes. La reacción ^{63}Cu(α,pn)^{65}Zn es un ejemplo. Considere como posibilidades las combinaciones nn, np y pd.

50-9 Modelos nucleares

60. En la siguiente lista de núclidos identifique *a*) los que tienen capas de nucleones, *b*) los que tienen un nucleón fuera de una capa llena y *c*) los que tienen un vacío en una capa llena en otras circunstancias. Los núclidos son ^{13}C, ^{18}O, ^{40}K, ^{49}Ti, ^{60}Ni, ^{91}Zr, ^{92}Mo, ^{121}Sb, ^{143}Nd, ^{144}Sm, ^{205}Tl y ^{207}Pb.
61. El núcleo ^{91}Zr (Z = 40, N = 51) tiene un solo protón fuera de un núcleo lleno de 50 neutrones. Por ser 50 un número mágico, tal vez este neutrón debería estar muy poco ligado. *a*) Calcule su energía de enlace, *b*) Calcule la del siguiente neutrón que debe extraerse del núcleo lleno. *c*) Determine la energía de enlace por partícula en todo el núcleo. Compare estos tres números y comente su significado. Las masas que se necesitan son

^{91}Zr	90.905645 u	n	1.008665 u
^{90}Zr	89.904704 u	^{1}H	1.007825 u.
^{89}Zr	88.908889 u		

PROBLEMAS

1. El núcleo retrocede cuando una partícula α choca elásticamente contra él. Una partícula α de 5.00 MeV tiene una colisión frontal elástica con un núcleo de oro, inicialmente en reposo. ¿Cuál es la energía cinética *a*) del núcleo que retrocede y *b*) de la partícula α que rebota? Puede suponerse que la masa de la partícula α tiene 4.00 u y que la del núcleo de oro tiene 197 u.
2. Dado que el neutrón no transporta carga, su masa debe calcularse en alguna otra forma sin emplear un espectrómetro de masa. Cuando se encuentran un neutrón en reposo y un protón, se combinan para formar un deuterón emitiendo un rayo gamma cuya energía es 2.2233 MeV. La masa atómica del protón y del deuterón son: respectivamente, 1.007825 y 2.014102 u. A partir de esos datos obtenga la masa del neutrón con tantas cifras significativas como lo exigen estos datos.
3. El espín y el momento magnético (componente z máximo) del ^{7}Li en su estado base (Tabla 50-1) son $\frac{3}{2}$ y + 3.26 magnetones nucleares, respectivamente. Un núcleo libre ^{7}Li se coloca en un campo magnético de 2.16 T. *a*) ¿En cuántos niveles se dividirá el estado base a causa de la cuantización espacial? *b*) ¿Qué diferencia de energía existe entre los pares adyacentes de niveles? *c*) ¿Cuál longitud de onda corresponde a una transición entre los pares? *d*) ¿En qué región del espectro electromagnético se halla esta longitud de onda?
4. *a*) Demuestre que la energía potencial electrostática de una esfera uniforme de carga Q y de radio R está dada por

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

(*Sugerencia:* forme la esfera a partir de las delgadas capas esféricas traídas del infinito.) *b*) Calcule la energía potencial electrostática del núclido ^{239}Pu, supuestamente esférico (Tabla 50-1). *c*) Compare su energía potencial electrostática por partícula con su energía de enlace por nucleón de 7.56 MeV. *d*) ¿Qué puede concluir de todo esto?
5. Un radionúclido está siendo fabricado en un ciclotrón con una rapidez constante P. También está decayendo con una constante de desintegración λ. Supóngase que el proceso de producción continúa durante suficiente tiempo para que el número de núcleos radiactivos presentes en esos momentos sea constante y esté dado por $N = P/\lambda$. Demuestre además que este resultado es válido sin importar cuántos núcleos radiactivos haya al inicio. Se dice que el núclido está en *equilibrio secular* con su fuente; en tal estado la rapidez de decaimiento es igual a su rapidez de producción.
6. El radionúclido ^{56}Mn tiene una vida media de 2.58 h y se produce en un ciclotrón bombardeando con deutrones un blanco de manganeso. El blanco contiene sólo el isótopo estable de ^{55}Mn manganeso y la reacción que produce ^{56}Mn es

$$^{55}\text{Mn} + \text{d} \rightarrow {}^{56}\text{Mn} + \text{p}.$$

Tras el bombardeo durante un tiempo $\gg$ 2.58 h, la actividad del blanco a causa de ^{56}Mn es 8.88 $\times$ 10^{10} s^{-1} (Prob. 5). *a*) ¿A qué rapidez constante P se producen los núcleos ^{56}Mn en el ciclotrón durante el bombardeo? *b*) ¿Con qué rapidez están decayendo (también durante el bombardeo)? *c*) ¿Cuántos núcleos ^{56}Mn hay al final del bombardeo? *d*) ¿Cuál es su masa total? La masa atómica de ^{56}Mn es 55.94 u.

7. Una fuente de radio contiene 1.00 mg de ^{226}Ra, que decae con una vida media de 1600 años para producir ^{222}Rn, un gas inerte. Este gas radón a su vez decae por decaimiento alfa con una vida media de 3.82 d. *a)* Calcule la rapidez de decaimiento de ^{226}Ra en la fuente. *b)* ¿Con qué rapidez decae el radón cuando alcanza el equilibrio secular con la fuente de radio? Consulte el problema. 5. *c)* ¿Cuánto radón se encuentra en equilibrio secular con la fuente de radio?
8. Se piensa que el protón libre tal vez no sea una partícula estable, pero puede ser radiactiva con una vida media aproximada de 1×10^{32} años. De ser así, ¿cuánto habría que esperar para estar razonablemente seguro de que un protón de su cuerpo haya decaído? Suponga que usted está hecho de agua y que tiene una masa de 70 kg.
9. Un núcleo de ^{238}U emite una partícula α de 4.196 MeV de energía. Calcule la energía de desintegración Q durante el proceso, teniendo en cuenta la energía de retroceso del núcleo residual de ^{234}Th. La masa atómica de una partícula α es 4.0026 u, y la de ^{234}Th 234.04 u. Compare su resultado con el del problema resuelto 50-6a.
10. Suponga que un núcleo de ^{238}U emite *a)* una partícula α o *b)* una secuencia de neutrón, protón, neutrón, protón. Calcule la energía liberada en cada caso. *c)* Con un argumento razonado y también con un cálculo directo, convénzase de que la diferencia entre esos dos números es exactamente la energía total de enlace de la partícula α. Calcule la energía de enlace. Las masas atómicas que se requieren son

^{238}U	238.050783 u	^{4}He	4.002603 u
^{237}U	237.048724 u	^{1}H	1.007825 u
^{236}Pa	236.048674 u	n	1.008665 u.
^{235}Pa	235.045432 u		
^{234}Th	234.043596 u		

11. El radionúclido ^{11}C decae de acuerdo con

$$^{11}\text{C} \rightarrow {}^{11}\text{B} + e^+ + \nu, \qquad t_{1/2} = 20.3 \text{ min}.$$

La energía máxima del espectro del positrón es 960.8 keV. a) Demuestre que la energía de desintegración Q en este proceso está dada por

$$Q = (m_C - m_B - 2m_e)c^2,$$

donde m_C y m_B son la masa atómica de ^{11}C y ^{11}B, respectivamente y m_e es la masa del electrón (positrón). *b)* Sabiendo que $m_C = 11.011434$ u, $m_B = 11.009305$ u y $m_e = 0.0005486$ u, calcule Q y compárela con la energía máxima del espectro del positrón dada antes. (*Sugerencia:* suponga que m'_C y m'_B son las masas nucleares y proceda como en el problema resuelto 50-7 con el decaimiento beta. Nótese que el decaimiento del positrón constituye una excepción de la regla general según la cual, si se utilizan masas atómicas en estos proceso, la masa del electrón emitido se elimina de modo automático.)
12. Algunos radionúclidos decaen capturando uno de sus propios electrones, digamos un electrón K. Un ejemplo es

$$^{49}\text{V} + e^- \rightarrow {}^{49}\text{Ti} + \nu, \qquad t_{1/2} = 331 \text{ d}.$$

a) Demuestre que en este proceso la energía de desintegración Q está dada por

$$Q = (m_V - m_{Ti})c^2 - E_K,$$

donde m_V y m_{Ti} son las masas atómicas de ^{49}V y ^{49}Ti, respectivamente, y donde E_K es la energía de enlace del electrón K del vanadio. (*Sugerencia:* ponga m'_V y m'_{Ti} como las correspondientes masas nucleares y proceda igual que en el problema resuelto 50-7; véase el pie de página de ese problema.) *b)* Calcule la energía de desintegración Q en el decaimiento de ^{49}V mediante la captura del electrón K. Los datos que se requieren son $m_V = 48.948517$ u, $m_{Ti} = 48.947871$ u y $E_K = 5.47$ keV.
13. Uno de los peligros de la lluvia radiactiva de una bomba nuclear es ^{90}Sr que presenta decaimiento beta con una vida media de 29 años. Sus propiedades químicas se parecen mucho a las del calcio; por eso, si lo come una vaca, queda concentrado en su leche y termina en los huesos de quien la beba. Los electrones energéticos del decaimiento dañan la médula ósea, deteriorando así la producción de eritrocitos. Una bomba de 1 megatón produce aproximadamente 400 g de ^{90}Sr. Si la lluvia radiactiva se esparce uniformemente en una superficie de 2000 km^2, ¿qué área tendrá una radiactividad igual a la carga ósea permitida en una persona de 0.002 mCi? La masa atómica de ^{90}Sr es 89.9 u.
14. Una persona de 87 kg que trabaja en una planta de un reactor reproductor ingiere accidentalmente 2.5 mg de polvo de ^{239}Pu. Éste tiene una vida media de 24,100 años, presentando un decaimiento alfa. La energía de las partículas α emitidas es 5.2 MeV, con una factor de calidad de 13. Suponga que el plutonio permanece en el cuerpo del trabajador 12 h y que se queda en el cuerpo el 95% de las partículas α emitidas. Calcule *a)* el número de átomos de plutonio ingeridos, *b)* la cantidad que decae durante ese lapso, *c)* la energía absorbida por el cuerpo, *d)* la dosis física resultante en rad y *e)* la dosis biológica equivalente en rem.
15. Dos materiales radiactivos inestables ante el decaimiento alfa, ^{238}U y ^{232}Th, y uno inestable al decaimiento beta, ^{40}K, abundan bastante en el granito para contribuir de modo significativo al calentamiento de la Tierra mediante la energía de decaimiento que producen. El isótopo inestable a alfa origina cadenas de decaimiento que se detienen en los isótopos estables del plomo. ^{40}K tiene un solo decaimiento beta. A continuación se da información sobre el decaimiento:

Núclido padre	*Modo de decaimiento*	*Vida media* (y)	*P. extremo estable*	*Q* (MeV)	*f* (ppm)
^{238}U	α	4.47×10^9	^{206}Pb	51.7	4
^{232}Th	α	1.41×10^{10}	^{208}Pb	42.7	13
^{40}K	β	1.28×10^9	^{40}Ca	1.32	4

Q es la energía total liberada en el decaimiento de un núcleo padre hasta llegar al punto final estable y f es la abundancia del isótopo en kilogramos por kilogramo de granito; ppm significa partes por millón. *a)* Demuestre que estos materiales producen un calor total de 987 pW por cada kilogramo de granito. *b)* Suponiendo que hay 2.7×10^{22} kg de granito en una capa esférica de 20 km de ancho alrededor de la Tierra, calcule la potencia que producirá sobre ella. Compare el resultado con la potencia solar total interceptada por la Tierra, 1.7×10^{17} W.
16. Considere la reacción $X(a,b,)Y$, donde X se halla en reposo dentro del marco de referencia de laboratorio. La energía cinética inicial en este marco es

$$K_{lab} = \tfrac{1}{2} m_a v_a^2.$$

a) Demuestre que la velocidad inicial del centro de masa del sistema dentro del marco de referencia del laboratorio es

$$V = v_a \left(\frac{m_a}{m_X + m_a} \right).$$

¿Cambia esta cantidad con la reacción? *b*) Demuestre que la energía cinética inicial, vista ahora desde un marco de referencia unido al centro de masa de las dos partículas, está dada por

$$K_{cm} = K_{lab}\left(\frac{m_X}{m_X + m_a}\right).$$

¿Cambia esta cantidad con la reacción? *c*) En la reacción ^{90}Zr (d,p)^{91}Zr la energía cinética del deuterón, medida dentro del marco de referencia del laboratorio, es 15.9 MeV. Calcule v_a (= v_d), V y K_{cm}. Ignore de los pequeños efectos relativistas.

17. En una reacción endotérmica ($Q < 0$), las partículas interactuantes a y X han de poseer energía cinética de por lo menos $|Q|$, medida dentro del marco de referencia del centro de masa, si queremos que la reacción se inicie. Por medio del resultado del problema 16, demuestre que la *energía umbral* de la partícula a, medida dentro del marco de referencia del laboratorio, es

$$K_{ésimo} = |Q|\frac{m_X + m_a}{m_X}.$$

¿Es razonable que $K_{ésimo}$ deba ser mayor que $|Q|$?

18. El núclido ^{208}Pb es "doblemente mágico", pues su número de protones Z (= 82) y su número de neutrones N (= 126) representan capas llenas de nucleones. Un protón adicional produciría ^{209}Bi, y un neutrón adicional, ^{209}Pb. Debería ser más fácil extraer estos nucleones en las capas llenas de ^{208}Pb que un protón o un neutrón. *a*) Calcule la energía necesaria para extraer un protón "adicional" de ^{209}Bi y compárela con la energía necesaria para extraer un protón de una capa llena de protones de ^{208}Pb. *b*) Calcule la energía que se requiere para eliminar el neutrón "adicional" de ^{209}Pb y compárela con la energía necesaria para extraer un neutrón de una capa llena de neutrones de ^{208}Pb. ¿Concuerdan los resultados con sus expectativas? Utilice los siguientes datos atómicos:

Núclidos	*Z*	*N*	*Masa atómica* (u)
^{209}Bi	82 + 1	126	208.980383
^{208}Pb	82	126	207.976636
^{207}Tl	82 − 1	126	206.977408
^{209}Pb	82	126 + 1	208.981075
^{207}Pb	82	126 − 1	206.975881

Las masas atómicas del protón y neutrón son, respectivamente, 1.007825 u y 1.008665 u.

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR COMPUTADORA

1. Tras una breve irradiación de plata con neutrones, surgen dos actividades: ^{105}Ag ($t_{1/2}$ = 2.42 min) con una rapidez inicial de decaimiento de 3.1×10^5/s y ^{110}Ag ($t_{1/2}$ = 24.6 s) con una rapidez inicial de decaimiento de 4.1×10^6/s. Haga una diagrama similar al de la figura 50-8 que muestre la rapidez combinada total de decaimiento de los dos isótopos en función del tiempo de $t = 0$ a t = 10 min. En la figura 50-8 se ilustra la obtención de la vida media para decaimientos simples. Si dispone sólo del diagrama de la rapidez del decaimiento total, ¿puede indicar una forma de analizarlo a fin de obtener la vida media de ambos isótopos?

CAPÍTULO 51

ENERGÍA PROCEDENTE DEL NÚCLEO

En un sistema de partículas interactuantes puede extraerse energía útil cuando pasa a un estado de menor energía (a un estado ligado más fuertemente). En un sistema atómico la energía se extrae a través de reacciones químicas, de la combustión entre ellas. En un sistema nuclear se extrae de diversos modos. Por ejemplo, la energía liberada durante el decaimiento radiactivo se ha utilizando para suministrar energía eléctrica a los marcapasos cardiacos y a las sondas espaciales.

En este capítulo vamos a estudiar los dos métodos principales con que se extrae energía del núcleo y se utiliza en aplicaciones prácticas. En la fisión nuclear *se divide un núcleo pesado en dos fragmentos. En la* fusión nuclear *se combinan dos núcleos ligeros en otro más pesado. La figura 50-6 indica que ninguno de los dos procesos puede crear núcleos ligados más fuertemente y que, por eso, puede liberar el exceso de la energía nuclear de enlace, susceptible de ser convertida en otras formas. Los reactores que se basan en la fisión nuclear producen una parte importante de la energía eléctrica del mundo. La investigación y la ingeniería avanzan a grandes pasos para desarrollar reactores que se basen en la fusión nuclear.*

51-1 EL ÁTOMO Y NÚCLEO

Cuando obtenemos energía del carbón quemándolo en un horno, estamos manipulando los *átomos* del carbón y oxígeno: reordenamos los *electrones* externos en combinaciones más estables. Cuando obtenemos energía del uranio al consumirlo en un reactor nuclear, estamos manipulando su *núcleo*, reordenando los *nucleones* en combinaciones más estables.

La fuerza de Coulomb mantiene los electrones en los átomos y se requieren unos cuantos electronvolts para extraer uno de los electrones externos. Por su parte, una intensa fuerza nuclear mantiene los nucleones en el núcleo y se necesitan *millones* de electronvolts para extraer uno de *ellos*. Este factor se refleja también en la capacidad de extraer aproximadamente un millón de veces más energía de un kilogramo de uranio que de un kilogramo de carbón.

En ambos casos, la aparición de energía se acompaña de un decremento en la energía de reposo del combustible. La única diferencia entre consumir uranio y quemar carbón radica en que, en el segundo caso, una parte mucho mayor de la energía disponible en reposo (una vez más, en un factor de varios millones) se convierte en otras formas de energía.

Hay que aclarar si lo que interesa es la cantidad de energía o la rapidez con que se libera, o sea la *potencia*. En el caso del núcleo, ¿el kilogramo de uranio se quemará lentamente en un reactor de potencia o explotará en una bomba? En el caso del átomo, ¿pensamos en explotar un cartucho de dinamita o en ingerir una rosca de jalea? (Por extraño que parezca, se libera más energía en el segundo caso que en el primero.)

En la tabla 51-1 se muestra cuánta energía puede extraerse de 1 kg de materia manipulada en diversas formas. En vez de registrarla directamente, la medimos indicando cuánto tiempo la energía extraída podría operar una lámpara de 100 W. El renglón 5, que denota la aniquilación mutua de la materia y de la antimateria, es lo último en la extracción de energía de la materia. Nada más puede hacerse una vez, consumida toda la

TABLA 51-1 Energía obtenida de 1 kg de materia

Forma de la materia	*Proceso*	*Tiempo*[a]
Agua	Caída de agua de 50 m	5 s
Carbón	Combustión	8 h
^{235}U	Fisión	3×10^4 a
Gas caliente de deuterio	Fusión	3×10^4 a
Materia y antimateria	Aniquilación	3×10^7 a

[a] Estos números muestran cuánto tiempo la energía generada podría mantener encendida una lámpara de 100 W.

masa disponible. (Sin embargo, nadie ha inventado todavía un método económico de producir y almacenar 1 kg de antimateria para utilizarlo en la producción de energía.)

Recuerde que las comparaciones en la tabla 51-1 se hacen por unidad de masa. Kilogramo por kilogramo obtenemos millones de veces más energía del uranio que del carbón o de caídas de agua. En cambio, hay abundante carbón en la corteza terrestre y mucha agua en el Dique Bonneville del Río Columbia.

51-2 FISIÓN NUCLEAR: EL PROCESO BÁSICO

En 1932 el físico inglés James Chadwick descubrió el neutrón. En Roma, unos años más tarde, Enrico Fermi y sus colaboradores observaron que se producían elementos radiactivos nuevos si bombardeaban varios elementos con esos proyectiles. Fermi predijo que el neutrón, por no tener carga, sería un proyectil nuclear de gran utilidad; a diferencia del protón o de la partícula α, no experimenta la fuerza repulsiva de Coulomb cuando se acerca a la superficie del núcleo. Como no existe barrera de Coulomb en su contra, el neutrón más lento puede penetrar en el núcleo más grande y de mayor carga e interactuar con él. Los *neutrones térmicos,* que están en equilibrio con la materia a temperatura ambiente, son partículas adecuadas y eficaces para bombardear. A 300 K, su energía cinética promedio es

$$K_{pro} = \tfrac{3}{2}kT = \tfrac{3}{2}(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K}) = 0.04\ \text{eV}.$$

En 1939 los químicos alemanes Otto Hahn y Fritz Strassmann, siguiendo el trabajo iniciado por Fermi y sus colaboradores, bombardearon el uranio con neutrones térmicos. Mediante análisis químicos descubrieron que, tras el bombardeo se obtenían varios elementos radiactivos nuevos, entre ellos uno cuyas propiedades químicas se parecían mucho a las del bario. Luego de varias pruebas se convencieron, finalmente, de que el "nuevo" elemento no lo era en absoluto; en realidad *se trataba* del bario. ¿Cómo este elemento de masa intermedia ($Z = 56$) se producía bombardeando uranio ($Z = 92$) con neutrones?

El enigma fue resuelto en unas semanas por los físicos Lise Meitner y su sobrino Otto Frisch. Demostraron que un núcleo de uranio, después de absorber un neutrón, podía dividirse liberando energía en dos partes más o menos iguales, una de las cuales bien podría ser el bario. A este proceso lo bautizaron con el nombre de *fisión nuclear.**

La fisión de ^{235}U por medio de neutrones térmicos, proceso de gran importancia práctica, puede representarse con

$$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow X + Y + b\text{n}. \qquad (51\text{-}1)$$

Aquí X y Y representan *fragmentos de fisión,* núcleos de masa intermedia que suelen ser extremadamente radiactivos. El factor b, que tiene un valor promedio de 2.47 en este tipo de procesos de fisión, es el número de neutrones liberados durante ellos.

En la figura 51-1 vemos dos trazas dejadas por los fragmentos de fisión X y Y en un proceso como el representado en la ecuación 51-1. Dos detalles se aprecian de inmediato: 1) no tienen la misma longitud. Ello se debe a que los fragmentos no poseen la misma masa; cuando el núcleo del uranio se divide, las dos partes tienden a tener masas distintas. En la figura 51-2 se observa la distribución de las masas: hay muchas probabilidades de que el número de masa de un fragmento sea aproximadamente 95 y el del otro 140. Además, se ve que la probabilidad de una división par es apenas 1 en 10^4. 2) La segunda característica sobresaliente de la figura 51-1 es que las dos trazas no están alineadas exactamente. ¿Puede explicarlo?

Un núcleo pesado como ^{235}U tiene una razón de neutrones a protones de 1.6 aproximadamente. En promedio, cabe suponer que los fragmentos X y Y tienen más o menos esa misma razón. Una ojeada a la figura 50-4 muestra que, por ejemplo, un núcleo estable con un número de masa 95 tiene unos 40 protones y 55 neutrones, lo cual nos da una razón aproximada de neutrones a protones de 1.4. Si el fragmento $A = 95$ formado en la fisión tiene una razón de neutrones a protones de 1.6, estará lejos de la

* Véase "The Discovery of Fission", de Otto Frisch y John Wheeler, *Physics Today,* noviembre de 1967, p. 43. Consúltese también *Lise Meitner, A Life in Physics*, de Ruth Lewin Sime (University of California Press, 1996).

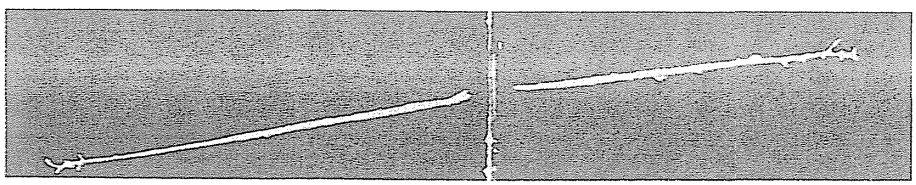


FIGURA 51-1. Cuando una partícula con carga eléctrica atraviesa una cámara de niebla, deja un rastro de gotas líquidas. Los dos rastros alineados representan fragmentos de fisión, producidos por un proceso que tiene lugar en una delgada lámina vertical de uranio en el centro de la cámara.

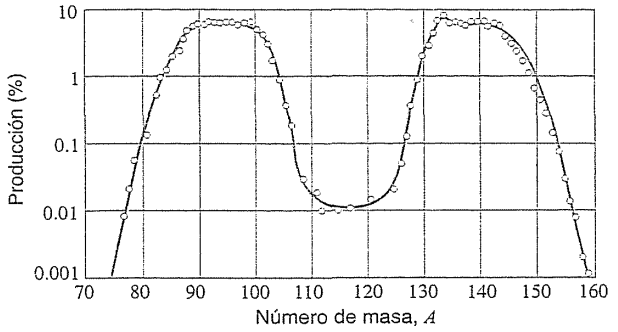


FIGURA 51-2. Distribución de masa en los fragmentos de fisión X y Y (Ec. 51-1) provenientes de la fisión de ^{235}U por neutrones térmicos. Nótese que la escala vertical es logarítmica.

línea de núcleos estables. Así se explica por qué los fragmentos de fisión son radiactivos. Generalmente, a través de decaimientos beta sucesivas (y en ocasiones a través de la emisión de neutrones), intentan liberar el exceso de neutrones y dirigirse a la región de los núcleos estables.

Veamos un ejemplo concreto de un proceso de fisión. Cuando ^{235}U captura un neutrón, por un instante crea un núcleo inestable y muy excitado de ^{236}U capaz de producir fisión después, acaso en la siguiente forma:

$$^{235}U + n \longrightarrow {}^{236}U \longrightarrow {}^{140}Xe + {}^{94}Sr + 2n. \qquad (51\text{-}2)$$

Los fragmentos de la fisión ^{140}Xe y ^{94}Sr decaen hasta que alcanzan un producto final estable:

$$^{140}Xe \xrightarrow[14\,s]{} {}^{140}Cs \xrightarrow[65\,s]{} {}^{140}Ba \xrightarrow[13\,d]{} {}^{140}La \xrightarrow[40\,h]{} {}^{140}Ce \text{ (estable)}$$

$$^{94}Sr \xrightarrow[75\,s]{} {}^{94}Y \xrightarrow[19\,min]{} {}^{94}Zr \text{ (estable)}$$

Los decaimientos son procesos β^-, cuya vida media está indicada en cada etapa. Igual que en todos los decaimientos beta, los números de masa (140 y 94) permanecen inalterados al proseguir las desintegraciones.

En la fisión la energía de desintegración Q es mucho mayor que en los procesos químicos. Esto podemos corroborarlo mediante un cálculo aproximado. En la curva de energía de enlace de la figura 50-6 vemos que, en el caso de núclidos pesados ($A = 240$, por ej.), la energía de enlace por nucleón es unos 7.6 MeV. En el intervalo intermedio ($A = 120$ por ej.) es unos 8.5 MeV. Entonces la diferencia de la energía total entre un núcleo individual ($A = 240$) y los dos fragmentos (supuestamente iguales) en que puede dividirse puede ser

$$Q = 2(8.5\text{ MeV})\frac{A}{2} - (7.6\text{ MeV})A \approx 200\text{ MeV}.$$

En el problema resuelto 51-1 se ofrece un cálculo más riguroso, que coincide muy bien con esta estimación aproximada.

PROBLEMA RESUELTO 51-1. Calcule la energía de desintegración Q en el proceso de fisión de la ecuación 51-2, teniendo en cuenta el decaimiento de los fragmentos. Las masas que se necesitan son

^{235}U	235.043923 u	^{140}Ce	139.905434 u
n	1.008665 u	^{94}Zr	93.906316 u.

Solución Si sustituimos los fragmentos de fisión en la ecuación 51-2 por sus productos finales estables, vemos que la transformación total es

$$^{235}U \longrightarrow {}^{140}Ce + {}^{94}Zr + n.$$

El neutrón individual se produce porque el neutrón (iniciador) en el lado izquierdo de la ecuación cancela uno de los dos que se hallaban en el lado derecho.

La diferencia de masa $\Delta m = m_i - m_f$ en esta reacción es

$$\begin{aligned}\Delta m &= 235.043923\text{ u} - (139.905434\text{ u} + 93.906316\text{ u} \\ &\quad + 1.008665\text{ u}) \\ &= 0.223508\text{ u},\end{aligned}$$

y la energía correspondiente es

$$Q = \Delta m\, c^2 = (0.223508\text{ u})(931.5\text{ MeV/u}) = 208.2\text{ MeV},$$

que concuerda bastante con la estimación aproximada anterior de 200 MeV.

Alrededor del 80% de la energía de desintegración se encuentra en forma de la energía cinética de los dos fragmentos, y el resto corresponde al neutrón y a los productos del decaimiento radiactivo.

Si el proceso de fisión tiene lugar en un sólido voluminoso, la mayor parte de la energía de desintegración se manifestará como un incremento de la energía interna del sólido, el cual muestra un incremento correspondiente de su temperatura. Alrededor de 5% de la energía se asocia a los neutrones que se emitieron durante el decaimiento beta de los fragmentos primarios de la fisión. Esta energía es extraída del sistema y no contribuye al aumento de su energía interna.

51-3 TEORÍA DE LA FISIÓN NUCLEAR

Poco después del descubrimiento de la fisión, Niels Bohr y John Wheeler formularon una teoría, basada en la analogía entre el núcleo y una gota de líquido con carga eléctrica, que explicaba sus características fundamentales.

En la figura 51-3 se describe cómo se lleva a cabo el proceso de fisión. Cuando un núcleo pesado como ^{235}U absorbe un neutrón lento, según se ve en la figura 51-3*a*, éste cae en el pozo de potencial asociado a las fuerzas nucleares fuertes que operan en el interior del núcleo. Entonces su energía potencial se transforma en energía interna de excitación, como se aprecia en la figura 51-3*b*. Según veremos en el problema resuelto 51-2, la energía de excitación resultante de ^{236}U es considerable, unos 6.5 MeV.

La figura 51-3*c* muestra que tarde o temprano el núcleo, el cual se comporta como una gota de líquido con carga eléctrica oscilando energéticamente, formará un "cuello" pequeño y empezará a separarse para formar dos "globos" cargados. Si se dan las condiciones adecuadas, la repulsión electrostática entre ellos los apartará y romperá el cuello. Entonces los dos fragmentos se dividirán, llevando cada uno un poco de la energía residual de excitación. Ha ocurrido la fisión.

Hasta hora este modelo ofrece una buena descripción cualitativa del proceso de fisión. Sin embargo, queda por comprobar si contesta o no la pregunta: ¿por qué hay algunos núclidos pesados (^{235}U y ^{239}Pu, por ej.) fácilmente fisionables mediante neutrones lentos, no así por otros núclidos igualmente pesados (^{238}U y ^{243}Am, por ej.)?

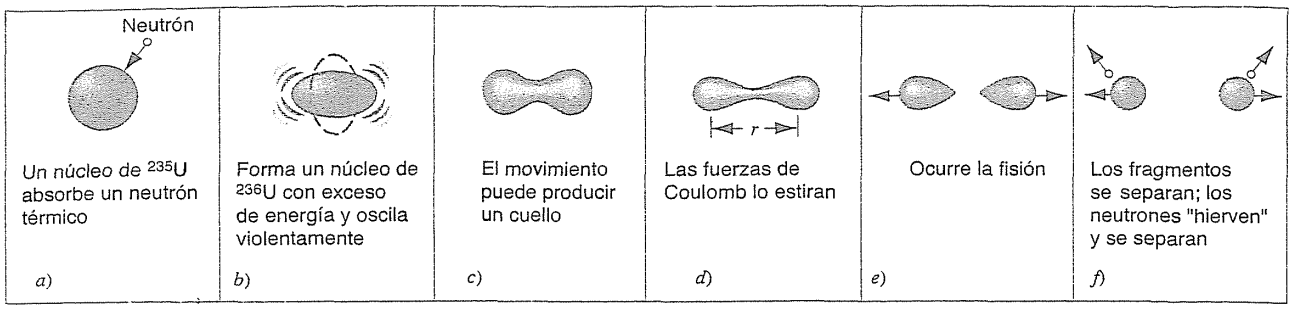


FIGURA 51-3. Etapas de un proceso de fisión según el modelo de fisión de una gota de líquido.

Bohr y Wheeler lograron contestar esta pregunta. En la figura 51-4 se describe gráficamente la curva de energía potencial de la fisión que obtuvieron de su modelo. En el eje horizontal se indica el *parámetro de distorsión* r, medida aproximada de la desviación del núcleo oscilante respecto a una forma esférica. La figura 51-3*d* indica cómo este parámetro se define antes que ocurra la fisión. Cuando los fragmentos están muy separados, el parámetro no es más que la distancia entre sus centros.

El intervalo de energía entre los estados inicial y final del núcleo fisionante —es decir, la energía de desintegración Q— se muestra en la figura 51-4. La característica principal de la figura es que la curva de la energía potencial pasa por un máximo con cierto valor de r. Existe una *barrera de potencial* de altura E_b, que debe superarse (o atravesarse) antes que se produzca la fisión. Lo anterior nos recuerda el decaimiento alfa (Fig. 50-9), otro proceso inhibido también por una barrera de potencial. Vemos entonces que la fisión tendrá lugar *sólo* si el neutrón absorbido suministra suficiente energía de excitación E_n para superar la barrera o para tener buenas probabilidades de atravesarla.

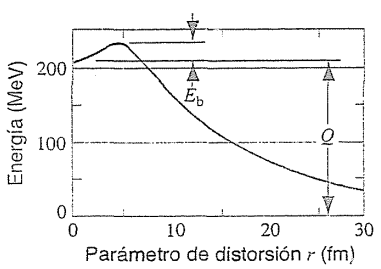


FIGURA 51-4. Energía potencial en varias etapas del proceso de fisión, que muestra la energía de desintegración Q y la altura de la barrera E_b.

La tabla 51-2 contiene una prueba de fisionabilidad mediante los neutrones térmicos aplicados a cuatro núclidos pesados, escogidos entre docenas de candidatos que podrían haberse considerado. En cada núclido se dan la altura de la barrera E_b y la energía de excitación E_n. Se calculó E_b a partir de la teoría de Bohr y Wheeler (como en el Prob. res. 51-2); se calculó E_n usando a las masas conocidas.

Para ^{235}U y ^{239}Pu vemos que $E_n > E_b$. Es decir, se predice que la fisión mediante la absorción de un neutrón térmico ocurrirá en estos núclidos. Eso se confirma observando en la tabla las grandes secciones transversales medidas (las probabilidades de reacción) del proceso.

En los dos núcleos restantes (^{238}U y ^{243}Am) tenemos $E_n < E_b$, de modo que no se dispone de suficiente energía para superar la barrera o atravesarla eficazmente. El núcleo excitado (Fig. 51-3*b*) prefiere liberarse de su energía de excitación emitiendo un rayo gamma en vez de dividirse en dos fragmentos grandes. La tabla 51-2 indica, como cabe suponer, que las secciones transversales durante la fisión del neutrón térmico son demasiado pequeñas en estos casos. No obstante, *es posible* hacer que se dividan los núclidos, si absorben un neutrón bastante energético (más que térmico). Por ejemplo, en ^{238}U el neutrón absorbido debe tener una energía por lo menos de 1.3 MeV para que el proceso de fisión ocurra con suficiente probabilidad.

TABLA 51-2 Prueba de fisionabilidad de cuatro núclidos

Núclido blanco	*Núclido en proceso de fisión*	E_b *(MeV)*	E_n *(MeV)*	$E_n - E_b$ *(MeV)*	*Sección transversal de fisión*[a] *(barns)*
^{235}U	^{236}U	5.2	6.5	+1.3	584
^{238}U	^{239}U	5.7	4.8	−0.6	5×10^{-6}
^{239}Pu	^{240}Pu	4.8	6.4	+1.6	742
^{243}Am	^{244}Am	5.8	5.5	−0.3	<0.08

[a] La sección transversal es una medida de la probabilidad de que se realice una reacción nuclear. Se mide en unidades de barns donde 1 barn = 10^{-28} m^2.

PROBLEMA RESUELTO 51-2. Consideremos un núcleo de ^{236}U en su estado base. ¿Cuánta energía se requiere para extraerle un neutrón, dejando un núcleo de ^{235}U? Las masas atómicas necesarias son

^{235}U 235.043923 u; n 1.008665 u; ^{236}U 236.045562 u.

Solución El aumento de la masa del sistema al extraer el neutrón es

$$\Delta m = 1.008665 \text{ u} + 235.043923 \text{ u} - 236.045562 \text{ u} = 0.007026 \text{ u}.$$

Lo anterior significa que debe consumirse una energía igual a

$$E_n = \Delta m\, c^2 = (0.007026 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 6.545 \text{ MeV}$$

Esta definición es la energía de enlace del neutrón en el núcleo de ^{236}U.

Cuando un núcleo de ^{235}U absorbe un neutrón térmico, 6.545 MeV es la energía de excitación que introduce en el núcleo de ^{236}U. En efecto, este último se forma en un estado excitado 6.545 MeV por arriba del estado base. El núcleo excitado puede liberarse de esta energía emitiendo rayos gamma (lo cual deja al ^{236}U en su estado base) o por fisión (Ec. 51-1). Y la probabilidad de que ocurra la fisión es una seis veces mayor que la emisión de rayos gamma.

51-4 REACTORES NUCLEARES: LOS PRINCIPIOS BÁSICOS

La liberación de energía por átomo en los proceso nucleares individuales, entre ellos la emisión alfa, es aproximadamente un millón de veces mayor que en los procesos químicos. Si queremos utilizar la energía nuclear a gran escala, es preciso hacer que un proceso nuclear desencadene otro hasta que se difunda en la materia masiva como una llama en un leño ardiente. El hecho de que en la fisión se generen más neutrones que los que se consumen (Ec. 51-1) ofrece esas posibilidades: los neutrones producidos originan la fisión en los núcleos cercanos y de ese modo puede propagarse una cadena de fisiones. A este proceso se le conoce como *reacción en cadena.* Puede ser rápido e incontrolado como en una bomba nuclear o controlado como en un reactor nuclear.

Supóngase que queremos diseñar un reactor nuclear, basado como la mayoría de los actuales en la fisión de ^{235}U por neutrones lentos. Su combustible casi siempre se "enriquece" artificialmente, de modo que ^{235}U representa un bajo porcentaje de los núcleos de uranio y no el 0.7% que se presenta en el uranio natural; el 99.3% restante de éste es ^{238}U, el cual no pueden fisionar neutrones térmicos. Aunque en promedio se producen 2.47 neutrones en una fisión de ^{235}U por cada neutrón térmico consumido, plantea serios problemas lograr una reacción en cadena. A continuación se comentan tres de ellos junto con sus soluciones.

1. *El problema de la fuga de neutrones.* Cierto porcentaje de neutrones producidos saldrán simplemente del núcleo del reactor y se perderán para la reacción en cadena. El reactor no funcionará si muchos lo hacen. El escape constituye un efecto de superficie; su magnitud es proporcional al *cuadrado* de una dimensión común del núcleo del reactor (área superficial $= 4\pi r^2$ de una esfera). En cambio, la producción de neutrones representa un efecto de volumen y es proporcional al *cubo* de una dimensión típica (volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$ de una esfera). Podemos reducir al mínimo la fracción de neutrones perdida por fugas, haciendo el núcleo del reactor suficientemente grande; disminuye así su razón de superficie a volumen ($= 3/r$ en una esfera).

2. *El problema de energía de los neutrones.* En la fisión se producen neutrones *rápidos*, con una energía cinética aproximada de 2 MeV, pero se logra con la máxima eficacia mediante neutrones *lentos.* Puede reducirse la velocidad de los neutrones rápidos mezclando el combustible de uranio con una sustancia que tiene dos propiedades: *a*) hace que los neutrones pierdan energía cinética por las colisiones y *b*) no absorbe demasiados neutrones y, por lo mismo, las extrae de la cadena de fisión. A esa sustancia se le llama *moderador.* En Estados Unidos, la mayoría de los reactores de potencia se moderan con agua, en la cual los núcleos de hidrógeno (protones) son el elemento moderador efectivo.

3. *El problema de la captura de neutrones.* Los neutrones pueden ser capturados por los núcleos en formas que no producen fisión. La posibilidad más frecuente es la captura acompañada de la emisión de un rayo gamma. En particular, a medida que en el moderador se reduce la velocidad de los neutrones rápidos generados en los procesos de fisión hasta que alcanzan el equilibrio térmico (0.04 eV), han de pasar por un intervalo de energía (1 − 100 eV) donde son muy susceptibles a la captura sin fisión por ^{238}U.

Con el fin de minimizar la *captura por resonancia*, nombre que se le da al fenómeno, no se mezclan íntimamente el combustible de uranio y el moderador (agua, por ejemplo) sino que se "amontonan", permaneciendo en estrecho contacto, pero ocupando distintas regiones del volumen del reactor. Se espera que un neutrón rápido de fisión, producido en una masa de uranio (que bien pudiera ser una varilla de combustible), se encuentre muy probablemente en el moderador al pasar por el "peligroso" intervalo de energía de resonancia. Una vez que alcance las energías térmicas, seguramente retornará a una masa de combustible y ocasionará el fenómeno de fisión. Los diseñadores del reactor deben crear el arreglo geométrico más eficaz de combustible y moderador.

La figura 51-5 describe el balance de neutrones en un reactor de potencia típico que funciona con una salida estacionaria. Sigamos el comportamiento de una muestra de 1000 neutrones térmicos en el núcleo. Generan 1330 neutrones por fisión en el combustible de ^{235}U y 40 más por fisión rápida en el ^{238}U; esto nos da un total de 370 neutrones nuevos, todos ellos rápidos. Exactamente el mismo número se pierde en la cadena por fuga desde el núcleo del reactor y por la captura de no fisión, dejando 1000 neutrones térmicos que continúan en la cadena. Lo que se ganó en este ciclo es que los 370 neutrones obtenidos por fisión depositen cada uno aproximadamente 200 MeV de energía en el núcleo del reactor, calentándolo.

Un importante parámetro del reactor es el *factor de multiplicación k,* razón del número de neutrones presentes al iniciarse una generación y del número existente al iniciarse la siguiente. Para la situación de la figura 51-5, el factor de mul-

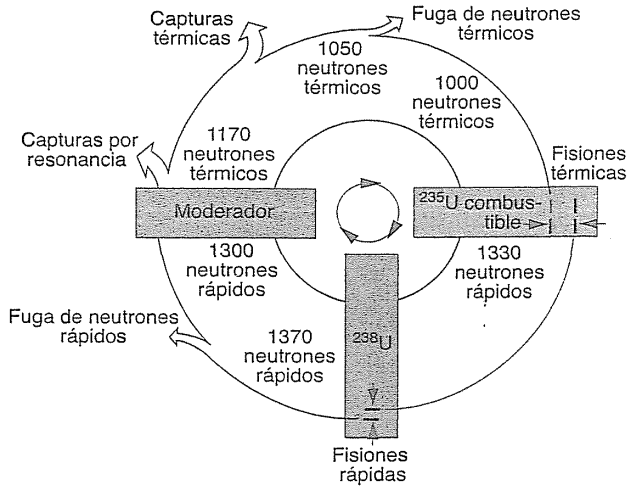


FIGURA 51-5. La generación de 1000 neutrones térmicos pasa por varias etapas en un reactor. En un nivel estacionario de operación, la pérdida de neutrones debido a capturas (en el combustible, en el moderador y en los elementos estructurales) y a fugas en la superficie se equilibra exactamente con la producción de neutrones en los procesos de fisión.

tiplicación es exactamente 1. Con $k = 1$, se dice que la operación del reactor es exactamente *crítica*, como lo deseamos en la producción estacionaria de potencia. Los reactores se diseñan de modo que sean intrínsecamente *supercríticos* ($k > 1$); después el factor de multiplicación se ajusta a la operación crítica ($k = 1$) introduciendo *varillas de control* en el núcleo del reactor. Después estas varillas, las cuales contienen un material como el cadmio, que absorbe neutrones fácilmente, pueden retirarse según se necesite para compensar la tendencia del reactor a descender a un nivel subcrítico a medida que los productos de la fisión (absorbedores de neutrones) vayan acumulándose en el núcleo del reactor durante la operación continua.

Si se extrae una de las varillas de control, ¿con qué rapidez aumentará el nivel de potencia del reactor? Este *tiempo de respuesta* es controlado por la fascinante circunstancia de que una pequeña fracción de los neutrones generados por fisión no se emiten inmediatamente de los fragmentos recién formados sino más tarde, al ir decayendo por la emisión beta. Por ejemplo, de los 370 neutrones "nuevos" analizados en la figura 51-5, se retrasa a unos 16, pues se emiten de los fragmentos tras decaimientos beta cuya vida media fluctúa entre 0.2 y 55 s. Estos neutrones son pocos, pero cumplen la función tan útil de aminorar el tiempo de respuesta para igualar el tiempo de las reacciones humanas.

La figura 51-6 ofrece el esquema general de una central eléctrica que se basa en un *reactor de agua presurizada*, tipo de uso frecuente en Estados Unidos. El agua se utiliza como moderador y como medio para transferir calor. En la *espira primaria*, el agua a alta temperatura y presión (posiblemente 600 K y 150 atm) circula por el vaso del rector y transfiere calor del núcleo al generador de vapor; éste suministra vapor de alta presión para activar la turbina que impulsa al generador. Para completar la *espira secundaria*, el vapor de baja presión proveniente de la turbina se convierte en agua por condensación y una bomba lo devuelve al generador de vapor. Para darnos una idea de la escala en cuestión, un vaso de un reactor común en una planta eléctrica de 1000 MW puede estar situado a 10 m de altura y pesar 450 toneladas. El agua fluye por la espira primaria con una velocidad aproximada de 300,000 gal/min.

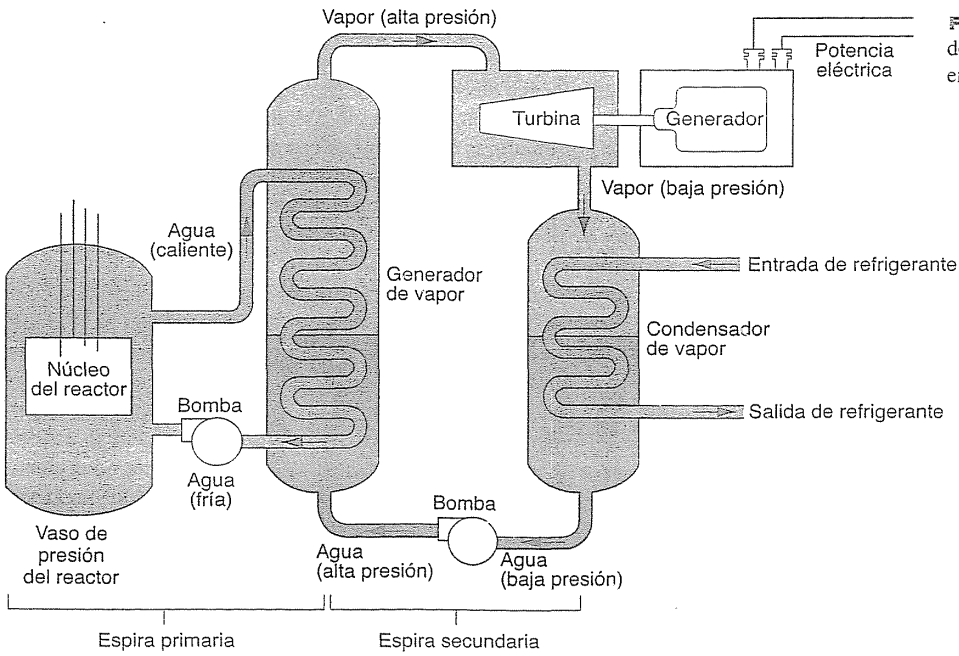


FIGURA 51-6. Diseño simplificado de una planta de energía nuclear basada en un reactor de agua presurizada.

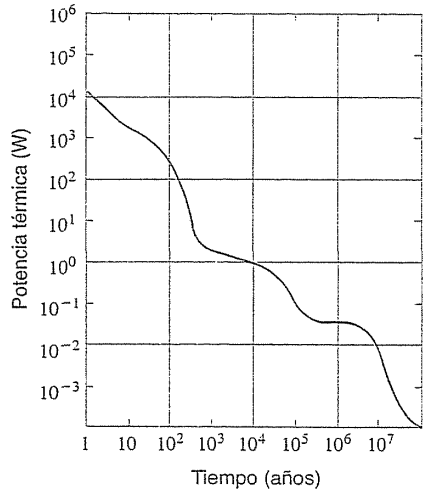


FIGURA 51-7. Potencia térmica liberada por desechos radiactivos en una gran planta de energía nuclear que opera durante un año, teniendo en cuenta el tiempo transcurrido desde que se extrajo el combustible. La curva representa el efecto de muchos radionúclidos con varias vidas medias. Nótese que ambas escalas son logarítmicas.

Una característica inevitable del funcionamiento del reactor es la acumulación de desechos radiactivos, entre ellos los productos de fisión y los núclidos pesados "transuránicos" como el plutonio y el americio. Una medida de su radiactividad es la rapidez con que libera energía en forma térmica. En la figura 51-7 se muestra la variación que con el tiempo experimenta la potencia térmica generada por los desechos durante un año de operación de una gran planta nuclear ordinaria. Nótese que ambas escalas son logarítmicas. La actividad total del desecho 10 años después de desprenderse del reactor es aproximadamente 3×10^7 Ci.

PROBLEMA RESUELTO 51-3. Un reactor nuclear de agua presurizada alimenta una gran central eléctrica. La potencia térmica del núcleo del reactor es 3400 MW y se generan 1100 MW de electricidad. El combustible son 86,000 kg de uranio en forma de 110 toneladas de óxido de uranio, distribuidas entre 57,000 varillas. El uranio está enriquecido con ^{235}U al 3.0%. *a*) ¿Qué eficiencia tiene la central? *b*) ¿Con qué rapidez R ocurren los procesos de fisión en el núcleo del reactor? *c*) ¿Con que velocidad desaparece el combustible ^{235}U? *d*) ¿Cuánto dura el suministro de combustible a esta velocidad de consumo? *e*) ¿Con qué rapidez se pierde masa en el núcleo del reactor?

Solución *a*) La eficiencia e es la razón entre la salida de potencia (en forma de energía eléctrica) y la de potencia (en forma de energía térmica), es decir,

$$e = \frac{\text{salida eléctrica}}{\text{entrada térmica}} = \frac{1100\ \text{MW}}{3400\ \text{MW}} = 0.32 \text{ o } 32\%.$$

En todas las plantas eléctricas, su eficiencia está controlada por la segunda ley de la termodinámica, sin importar si consumen combustible fósil o nuclear. En esta planta, 3400 MW − 1100 MW, o sea 2300 MW de potencia, deben liberarse como energía térmica al ambiente. *b*) Si P (= 3400 MW) es la potencia térmica del núcleo del reactor, y si Q (= 200 MeV) es la energía promedio liberada por proceso de fisión, en una operación estable

$$R = \frac{P}{Q} = \frac{3.4 \times 10^9\ \text{J/s}}{(200\ \text{MeV/fisión})(1.6 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV})}$$
$$= 1.06 \times 10^{20}\ \text{fisiones/s}.$$

c) El ^{235}U desaparece por fisión a la velocidad calculada en *b*). También lo consume la captura de neutrones (sin fisión) con una rapidez aproximada de un cuarto. Entonces la rapidez total de consumo ^{235}U será $(1.25)(1.06 \times 10^{20}\ \text{s}^{-1})$ o $1.33 \times 10^{20}\ \text{s}^{-1}$. Esto lo reexpresamos como una rapidez de masa en la siguiente forma:

$$\frac{dM}{dt} = (1.33 \times 10^{20}\ \text{s}^{-1})\left(\frac{0.235\ \text{kg/mol}}{6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}}\right)$$
$$= 5.19 \times 10^{-5}\ \text{kg/s} = 4.5\ \text{kg/d}.$$

d) Con los datos anteriores, es posible calcular que al inicio había aproximadamente (0.03)(86,000 kg), o sea 2600 kg de ^{235}U. Por tanto, una respuesta simplista pudiera ser

$$T = \frac{2600\ \text{kg}}{4.5\ \text{kg/d}} = 580\ \text{d}.$$

En la práctica, las varillas de combustible se sustituyen (a menudo por lotes) antes que se consuma enteramente su contenido de ^{235}U. *e*) Con base en la relación de Einstein $E = \Delta m\, c^2$, podemos escribir

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dE/dt}{c^2} = \frac{3.4 \times 10^9\ \text{W}}{(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2}$$
$$= 3.8 \times 10^{-8}\ \text{kg/s} = 3.3\ \text{g/d}.$$

La rapidez con que se pierde la masa es más o menos la de un centavo diario. Esta rapidez (reducción de la energía en reposo) es una magnitud muy distinta a la del consumo de combustible (pérdida de ^{235}U), calculada en la parte *c*).

51-5 UN REACTOR NATURAL

El 2 de diciembre de 1942, cuando el reactor montado por Enrico Fermi y sus colaboradores entró por primera vez en la fase crítica, tenían todo el derecho de pensar que habían puesto a funcionar el primer reactor de fisión del planeta. Unos 30 años más tarde se descubrió que se equivocaron si en verdad lo habían creído.

Hará unos 2,000 millones de años, en un depósito de uranio que actualmente se extrae en Gabón (África Occidental), empezó a funcionar un reactor natural de fisión y estuvo activo quizá miles de años antes de apagarse.

La historia de este descubrimiento es tan fascinante como una novela de detectives. Más importante aún: ofrece un excelente ejemplo de la índole de los datos científicos necesarios para corroborar lo que al inicio puede parecer una afirmación poco probable. Es una norma que deben seguir los que intentan reconstruir el pasado. Aquí vamos a concentrarnos en dos puntos exclusivamente.*

* Una explicación más completa se da en "A natural Fission Reactor", de George A. Cowan, *Scientific American*, julio de 1976, p. 36.

1. *¿Había suficiente combustible?* El combustible de un reactor de fisión basado en uranio ha de ser el isótopo fácilmente fisionable ^{235}U, que represente apenas 0.72% del uranio natural. Esta razón isotópica se ha medido no sólo en muestras terrestres, sino también en rocas de la Luna y en meteoritos, donde siempre se registra el mismo valor. La pista inicial del descubrimiento en Gabón fue que el uranio del depósito contenía poco ^{235}U, pues algunas muestras tenían una abundancia apenas de 0.44%. La investigación condujo a suponer que el déficit podía explicarse si, en algún momento del pasado, parte del isótopo se consumió por la actividad de un reactor natural.

Queda por resolver el serio problema de que, en una abundancia isotópica de sólo 0.72%, el reactor puede montarse (como descubrieron Fermi y su equipo) con muchísima dificultad. Al parecer es poco probable que todo ello haya acaecido de modo natural.

Sin embargo, las cosas eran diferentes en el pasado remoto. ^{235}U y ^{238}U son radiactivos, con vidas medias de 0.704×10^9 años y 4.47×10^9 años, respectivamente. Por tanto, la vida media de ^{235}U fácilmente fisionable es unas 6.4 veces menor que la de ^{238}U. Como ^{235}U se desintegra más rápidamente, en el pasado debe haber existido mayor cantidad de él que de ^{238}U. De hecho, hace 2000 millones de años la abundancia no era 0.72% como hoy, sino 3.8%. Es decir, más o menos la abundancia a que el uranio natural es enriquecido artificialmente para servir de combustible en los modernos reactores.

La existencia de un reactor natural resulta mucho menos inverosímil, dada esta cantidad de combustible fácilmente fisionable que había en el pasado remoto. Se contaba con suficiente combustible. A propósito, hace 2000 millones de años el orden más alto de formas de vida que habían evolucionado eran las algas azul verdes.

2. *¿Qué pruebas hay?* El mero agotamiento de ^{235}U en un depósito de mineral no es una prueba suficiente en la cual basar la afirmación de que existió una reactor natural de fisión. Hacen falta datos más convincentes.

Si hubo un reactor, también debió haber productos de la fisión (Fig. 51-2). De los aproximadamente 30 o más elementos cuyos isótopos estables se producen en esta forma, algunos han de subsistir todavía. El estudio de sus razones isotópicas podría aportar las pruebas convincentes que necesitamos.

Entre los elementos investigados, el neodimio ofrece una fuerza probatoria extraordinaria. La figura 51-8*a* contiene las abundancias isotópicas de los siete isótopos estables de él, tal como se encuentran normalmente en la naturaleza. En la figura 51-8*b* se indican estas abundancias tal como aparecen en los productos estables finales de la fisión de ^{235}U. Las claras diferencias no nos sorprenden, si recordamos su origen totalmente distinto. Los isótopos de la figura 51-8*a* se produjeron durante las explosiones de las supernovas que acontecieron antes que se formara el sistema solar. Los de la figura 51-8*b* se generaron en un reactor mediante procesos radicalmente distintos. Nótese en especial que ^{142}Nc, el isótopo dominante en el elemento natural, no existe en los productos de fisión.

He aquí la gran pregunta: ¿qué aspecto ofrecen los isótopos de neodimimio que se hallan en la veta de uranio en Gabón? Cabe suponer que, si un reactor natural había funcionado allí, podrían haber subsistido los isótopos de *ambas* fuentes (es decir, los isótopos naturales y también los producidos por fisión). La figura 51-8*c* ofrece los resultados después de efectuar en los datos iniciales éstas y otras correcciones. La comparación de las figuras 51-8*b* y 51-8*c* sugiere, sin duda, que se produjo efectivamente una fisión natural.

PROBLEMA RESUELTO 51-4. Hoy la razón isotópica entre ^{235}U a ^{238}U en los depósitos naturales de uranio es 0.0072. ¿Cuál fue esta razón hace 2.0×10^9 años? Las vidas medias de los dos isótopos son 0.704×10^9 años y 4.47×10^9 años, respectivamente.

Solución Consideremos dos muestras que, en el tiempo t, contenían $N_5(0)$ y $N_8(0)$ átomos de ^{235}U y ^{238}U, respectivamente. El número de los que quedan en el momento actual son

$$N_5(t) = N_5(0)e^{-\lambda_5 t} \quad \text{y} \quad N_8(t) = N_8(0)e^{-\lambda_8 t},$$

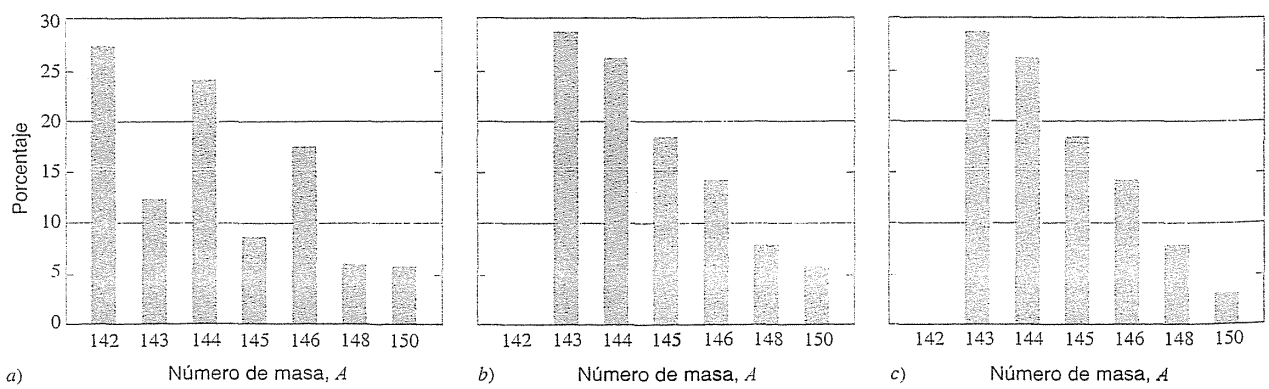


FIGURA 51-8. Distribución del número de masa de los isótopos de neodimio tal como existen *a*) en depósitos naturales terrestres, *b*) en el combustible consumido de un reactor de potencia y *c*) en la mina de uranio de Gabón (África Occidental). Nótese que *b*) y *c*) son prácticamente idénticos y muy distintos de *a*).

respectivamente, donde λ_5 y λ_8 son las constantes correspondientes de desintegración. La división da

$$\frac{N_5(t)}{N_8(t)} = \frac{N_5(0)}{N_8(0)} e^{-(\lambda_5 - \lambda_8)t}.$$

Expresado en función de la razón isotópica $R = N_5/N_8$, la expresión anterior queda así

$$R(0) = R(t)e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t}.$$

Las constantes de desintegración se relacionan con las vidas medias mediante la ecuación 50-8, o sea

$$\lambda_5 = \frac{\ln 2}{t_{1/2}(^{235}\text{U})} = \frac{0.693}{7.04 \times 10^8 \text{ años}} = 0.984 \times 10^{-9} \text{ a}^{-1}$$

y

$$\lambda_8 = \frac{\ln 2}{t_{1/2}(^{238}\text{U})} = \frac{0.693}{4.47 \times 10^9 \text{ años}} = 0.155 \times 10^{-9} \text{ a}^{-1}$$

La sustitución en la expresión para la razón isotópica nos da

$$\begin{aligned} R(0) &= R(t)e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t} \\ &= (0.0072)e^{(0.984 - 0.155)(10^{-9}\ \text{a}^{-1})(2.00 \times 10^9\ \text{a})} \\ &= (0.0072)e^{1.65} = 0.0378 \text{ o } 3.78\%. \end{aligned}$$

Comprobamos que hace 2000 millones de años la razón de ^{235}U a ^{238}U en los depósitos de uranio natural era mucho mayor que hoy. Era de 30% cuando se formó la Tierra (hace 4.5 mil millones de años).

51-6 FUSIÓN TERMONUCLEAR: EL PROCESO BÁSICO

Al tratar de la curva de la energía de enlace de la figura 50-6, señalamos que la energía puede liberarse si los núcleos ligeros se combinan para formar otros de número de masa un poco mayor, proceso conocido como *fusión nuclear.* Es un proceso que se ve obstaculizado por la repulsión mutua de Coulomb que tiende a impedir que dos partículas con carga positiva se combinen dentro del campo de acción de sus fuerzas nucleares de atracción y se "fusionen". Ello nos recuerda la barrera de potencial que inhibe la fisión nuclear (Fig. 51-4) y también la que inhibe el decaimiento alfa (Fig. 50-9).

En el caso del decaimiento alfa, al inicio dos partículas con carga —la partícula α y el núcleo residual— se hallan *en el interior* de su barrera de potencial mutua. Para que se produzca este decaimiento, la partícula alfa debe escapar de la barrera por un proceso de efecto túnel y aparecer en el *exterior.* La situación se invierte en la fusión nuclear: las dos partículas deben penetrar su barrera mutua desde el *exterior* para que se produzca la interacción nuclear.

La interacción de dos deuterones es muy importante en la fusión. En el problema resuelto 51-5 se ofrece un cálculo aproximado de la barrera de potencial entre ellos, que resulta ser de 200 keV aproximadamente. La barrera correspondiente de los dos núcleos interactuantes ^{3}He (carga = $+2e$) es 1 MeV más o menos. Desde luego será mayor en partículas con mayor carga eléctrica.

Para conseguir que los núcleos ligeros penetren en su barrera mutua de Coulomb, puede emplearse una partícula ligera a manera de blanco y acelerar la otra mediante un ciclotrón o un dispositivo similar. Si queremos generar energía en forma útil mediante un proceso de fusión, la interacción de la materia debe realizarse en forma masiva tal como se da en la combustión del carbón. El método del ciclotrón no es muy prometedor en este aspecto. La esperanza más prometedora de conseguirse en forma controlada consiste en elevar la temperatura del material para que las partículas tengan suficiente energía y penetren la barrera, debido exclusivamente a sus movimientos térmicos. A este proceso se le llama *fusión termonuclear.*

Según se señaló en la sección 22-4, la energía cinética promedio K_{pro} de una partícula en equilibrio y a una temperatura T está dada por

$$K_{\text{pro}} = \tfrac{3}{2}kT, \tag{51-3}$$

donde $k(= 8.62 \times 10^{-5}$ eV/K) es la constante de Boltzman. A la temperatura ambiente ($T \approx 300$ K), $K_{\text{pro}} = 0.04$ eV, valor desde luego demasiado pequeño para nuestros fines.

Inclusive en el centro del Sol, donde $T \approx 1.5 \times 10^7$ K, la energía térmica media calculada a partir de la ecuación 51-3 apenas es 1.9 keV. Todavía se antoja irremediablemente pequeña dada la magnitud de la barrera de Coulomb de 200 keV, calculada en el problema resuelto 51-5. Sin embargo, sabemos que la fusión termonuclear no sólo ocurre en el interior del Sol, sino que constituye su característica central y dominante.

El enigma se resuelve al observar que 1) la energía calculada según la ecuación 51-3 es una energía cinética *media;* las partículas con energía mayor que este valor medio son las "colas" de gran energía de las curvas maxwellianas de distribución de la velocidad (Fig. 22-6). 2) Las alturas de barrera que hemos mencionado representan apenas los *picos.* Puede registrarse el efecto túnel en alto grado con energías muy por debajo de ellos, como vimos en la sección 50-4 al tratar del decaimiento alfa.

En la figura 51-9 se resume la situación mediante un ejemplo cuantitativo. La curva marcada $n(K)$ es una distribución maxwelliana de las energías cinéticas (Sec. 22-5) trazadas en correspondencia con la temperatura del centro del Sol,

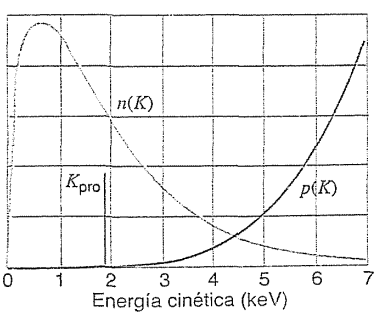


FIGURA 51-9. La curva marcada $n(K)$ indica la distribución de la energía de protones en el núcleo del Sol, que corresponde a la temperatura de 1.5×10^7 K. La línea vertical indica la energía cinética media por partícula a esa temperatura. La curva marcada como $p(K)$ denota la probabilidad de penetrar la barrera durante las colisiones de protón-protón. Las dos curvas están trazadas a diferentes escalas verticales arbitrarias.

1.5×10^7 K. Aunque la misma curva es válida sin importar la partícula en cuestión, nos concentramos en los protones teniendo presente que el hidrógeno representa aproximadamente 35% de la masa del núcleo central del Sol.

Para $T = 1.5 \times 10^7$ K, Ec. 51-3 produce $K_{pro} = 1.9$ keV, y este valor se indica con una línea vertical en la figura 51-9. Adviértase que hay muchas partículas cuya energía es mayor que el valor medio anterior.

La curva marcada $p(K)$ en la figura 51-9 es la probabilidad de penetrar la barrera de dos protones que chocan. Por ejemplo, con $K = 6$ keV tenemos $p = 2.4 \times 10^{-5}$. Es la probabilidad de que dos protones que chocan, cada uno con $K = 6$ keV, conseguirán penetrar su barrera mutua de Coulomb y llegar dentro del radio de acción de sus intensas fuerzas nucleares. Dicho de otra manera, en promedio 1 de cada 42,000 de esos encuentros resultará exitoso.

Resulta que la energía más probable de que ocurran los procesos de fusión de protón-protón es la temperatura del centro del Sol es 6 keV. Si la energía es mucho mayor, la barrera será penetrada más fácilmente (es decir, p será más grande), pero habrá muy pocos protones en la "cola" de Maxwell (n es más pequeño). Si la energía es mucho menor, habrá abundantes protones, pero la barrerá será enorme ahora.

PROBLEMA RESUELTO 51-5. El deuterón (^{2}H) tiene una carga $+e$ y su radio mide 2.1 fm. Dos de estas partículas se disparan una contra otra con la misma energía cinética inicial K. ¿Cuál debe ser K si las pone en reposo su repulsión mutua de Coulomb cuando apenas "se tocan"?

Solución Como los dos deuterones se encuentran momentáneamente en reposo cuando se "tocan", su energía cinética ha sido transformada en energía potencial electrostática asociada a la repulsión de Coulomb entre ellos. Si los tratamos como cargas puntuales separadas por una distancia $2R$, tendremos

$$2K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2R},$$

que nos da

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{4R}$$

$$= \frac{(9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{4(2.1 \times 10^{-15}\ \mathrm{m})}$$

$$= 2.7 \times 10^{-14}\ \mathrm{J} = 170\ \mathrm{keV}.$$

La cantidad anterior ofrece una medida razonable de la altura de la barrera de Coulomb entre dos deuterones.

51-7 FUSIÓN TERMONUCLEAR EN LAS ESTRELLAS

En esta sección vamos a analizar más a fondo los procesos de la fusión termonuclear que tienen lugar en el Sol y en otras estrellas. En lo profundo del Sol, donde su masa está concentrada y se produce la mayor parte de la energía, la temperatura (del centro) es 1.5×10^7 K y la densidad central es del orden de 10^5 kg/m^3, unas 13 veces la densidad del plomo. La temperatura del centro es tan grande que, a pesar de una elevada presión del centro (2×10^{11} atm) el Sol permanece gaseoso durante todo el proceso.

La actual composición aproximada de su núcleo es 35% de hidrógeno por masa, más o menos 65% de helio y 1% de otros elementos. A estas temperaturas los elementos ligeros quedan esencialmente ionizados por completo, por lo cual tenemos un conjunto de protones, electrones y partículas α en movimiento aleatorio.

El Sol irradia a una velocidad de 3.9×10^{26} W y lo ha venido haciendo desde que nació el sistema solar, o sea hará unos 4.5×10^9 años. Desde la década de 1930 se sabe que los procesos de fusión termonuclear en su interior explican su extraordinaria producción de energía. Sin embargo, antes de proseguir nuestro análisis, vamos a excluir otras dos posibilidades que fueron propuestas en épocas anteriores. Consideremos primero algunas reacciones químicas como la simple combustión. Si el Sol, cuya masa es 2.0×10^{30} kg, estuviera hecho de carbón y oxígeno en las proporciones adecuadas para quemar, duraría sólo unos 10^3 años, que naturalmente es muy poco tiempo (Ej. 41). Como veremos luego, el Sol no quema carbón sino hidrógeno y lo hace en un horno nuclear, no en uno atómico ni químico.

Una tercera posibilidad es que, al irse enfriando el Sol y al descender la presión, el Sol se encoja bajo la acción de sus propias fuerzas gravitacionales de gran intensidad. Al transferir la energía potencial gravitacional a la interna (como lo hacemos al dejar caer una piedra sobre la superficie de la Tierra), la temperatura del núcleo solar aumentará y, por lo mismo, proseguirá la radiación. Sin embargo, el cálculo indica que podría irradiar apenas durante unos 10^8 años, demasiado poco tiempo por un factor de 25 (Prob. 7).

La energía solar se genera mediante "combustión" termonuclear (es decir, por "fusión") del hidrógeno para formar helio. En la figura 51-10 se muestra el *ciclo de protón-protón* en virtud del cual se logra esto. Nótese que las reacciones son una reacción de fusión, pues uno de los productos (^{2}H, ^{3}He o ^{4}He) tiene un número mayor de masa que cualquiera de las partículas de la reacción que lo forman. Es positiva la energía Q de cada reacción que aparece en la figura 51-10. Esto caracteriza la reacción exotérmica, con la liberación neta de energía.

El ciclo se inicia con la colisión de dos protones (^{1}H + ^{1}H) para formar un deuterón (^{2}H), con la creación simultánea de un positrón (e^+) y de un neutrino (ν). El positrón se encuentra muy pronto con un electrón libre (e^-) en el Sol y ambas partículas se aniquilan, apareciendo su energía en reposo como dos fotones gamma (γ). En la figura 51-10 seguimos las consecuencias de dos de estos procesos. indicados en la hilera superior de la figura. Son extremadamente raros. De hecho, se forma un deuterón apenas una vez en unas 10^{26} colisiones de protón-protón. Es la lentitud del proceso lo que regula la rapidez con que se produce energía e impide que el Sol explote. No obstante esta lentitud, hay tan pocos protones en el inmenso volumen del núcleo solar que el deuterio se produce allí en esta forma con una rapidez aproximada de ¡10^{12} kg/s!

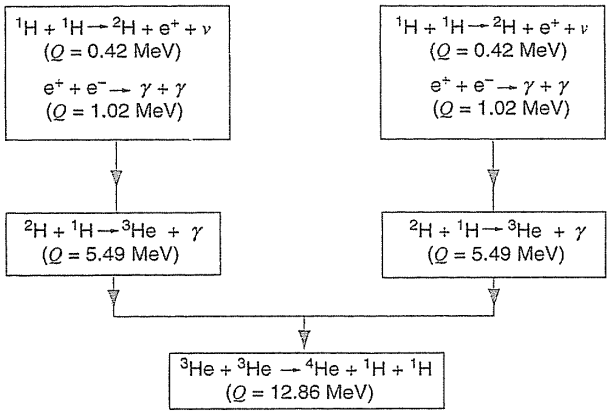


FIGURA 51-10. Ciclo de protón-protón que explica principalmente la producción de energía en el Sol.

Una vez producido el deuterón, choca pronto (en cuestión de segundos) contra otro protón y crea un núcleo ^{3}He como se aprecia en la segunda hilera de la figura 51-10. Después dos de esos núcleos terminan chocando (en unos 10^5 años), generando una partícula α (^{4}He) y dos protones, según se indica en la tercera hilera de la figura. Ocurren otras variaciones en el ciclo de protón-protón que incluyen otros elementos ligeros, pero vamos a concentrarnos en la secuencia principal representada en la figura 51-10.

Al adoptar una perspectiva global del ciclo de protón-protón, vemos que constituye una combinación de cuatro protones y de dos electrones para formar una partícula α, dos neutrones y seis rayos gamma:

$$4\,^1H + 2e^- \rightarrow {}^4He + 2\nu + 6\gamma. \qquad (51\text{-}4)$$

Ahora agreguemos formalmente dos electrones a ambos lados de la ecuación 51-4 y nos da

$$4(^1H + e^-) \rightarrow (^4He + 2e^-) + 2\nu + 6\gamma. \qquad (51\text{-}5)$$

Las cantidades entre paréntesis representan entonces *átomos* (no meros núcleos) de hidrógeno y helio.

Si utilizamos las masas de esos dos elementos, la liberación de energía en la reacción de la ecuación 51-5 es

$$\begin{aligned} Q &= (m_i - m_f)c^2 = [4m(^1H) - m(^4He)]c^2 \\ &= [4(1.007825\text{ u}) - 4.002603\text{ u}](931.5\text{ MeV/u}) \\ &= 26.7\text{ MeV}. \end{aligned}$$

(Los fotones de rayos gamma carecen de masa y los neutrinos tienen masa cero o insignificantemente pequeña; de ahí que ninguna de las dos partículas entre en el cálculo del valor Q en la reacción de fusión.) Este mismo valor se obtiene (como debiera ser) al sumar los valores Q en los pasos individuales del ciclo de protón-protón en la figura 51-10.

No toda la energía anterior está disponible como energía interna dentro del Sol. Unos 0.5 MeV se asocian a los dos neutrinos producidos en cada ciclo. Tienen tal fuerza de penetración que prácticamente en todos los casos escapan de él, transportando energía consigo. La Tierra intercepta algunos, trayéndonos sólo información directa sobre el interior del Sol.

Al sustraer la energía del neutrino quedan 26.2 MeV por ciclo disponibles en el interior del Sol. Como vimos en el problema resuelto 51-6, esa energía corresponde a un "calor de combustión" en la combustión nuclear del hidrógeno transformándose en helio de 6.3×10^{14} J/kg de hidrógeno consumido. En comparación, el calor de combustión del carbón es aproximadamente 3.3×10^7 J/kg, unas 20 millones de veces menor; eso refleja más o menos la razón general de las energías en los procesos nucleares y químicos.

Cabe preguntarse cuánto tiempo seguirá el Sol brillando con su intensidad actual antes que todo el hidrógeno de su núcleo se convierta en helio. El proceso lleva realizándose alrededor de 4.5×10^9 años, y los cálculos revelan que hay suficiente hidrógeno disponible para otros 5×10^9 años. Transcurrido ese lapso empezarán a ocurrir grandes cambios. El núcleo del Sol, que para entonces constará principalmente de helio, comenzará a colapsarse y a calentarse demasiado mientras la envoltura externa se expandirá mucho, quizá hasta abarcar la órbita terrestre. El Sol se convertirá entonces en lo que los astrónomos llaman *gigante rojo*.

Si la temperatura del núcleo se calienta hasta alcanzar unos 10^8 K, puede producirse energía quemando helio para obtener carbono. El helio no se quema fácilmente y la única reacción posible es

$$^4He + {}^4He + {}^4He \rightarrow {}^{12}C + \gamma \qquad (Q = +7.3\text{ MeV}).$$

Esta colisión entre tres cuerpos de tres partículas α debe ocurrir en 10^{-16} s, para que la reacción pueda proseguir. Pero si la densidad y la temperatura del núcleo de helio son lo bastante grandes, se formará carbono al quemar el helio en esta forma.

Al evolucionar una estrella y al calentarse todavía más, se crean otros elementos por reacciones de fusión. No obstante, los elementos más allá de $A = 56$ no pueden obtenerse mediante procesos posteriores de fusión. Los elementos con $A = 56$ (^{56}Fe, ^{56}Co, ^{56}Ni) se hallan cerca del pico de la curva de energía de enlace en la figura 50-6; la fusión entre núclidos más allá de este punto requiere consumo de energía y no su producción. En el capítulo 52 veremos cómo se originan los elementos durante los procesos de fusión.

PROBLEMA RESUELTO 51-6. ¿Con qué rapidez se consume hidrógeno en el núcleo del Sol, suponiendo que toda la energía irradiada es generada por el ciclo de protón-protón de la figura 51-10?

Solución Hemos visto que 26.2 MeV aparecen como energía interna del Sol en los cuatro protones consumidos, con una rapidez de 6.6 Mev/protón. Esto podemos expresarlo así

$$\frac{(6.6\text{ MeV/protón})(1.6 \times 10^{-13}\text{ J/MeV})}{1.67 \times 10^{-27}\text{ kg/protón}} = 6.3 \times 10^{14}\text{ J/kg},$$

el resultado nos indica que el Sol emite por irradiación 6.3×10^{14} J por cada kilogramo de protones consumido. La rapidez de consumo de hidrógeno es entonces la potencia de salida ($= 3.9 \times 10^{26}$ W), dividida entre esta cantidad, es decir,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{3.9 \times 10^{26}\text{ W}}{6.3 \times 10^{14}\text{ J/kg}} = 6.2 \times 10^{11}\text{ kg/s}.$$

Para mantener el número en perspectiva, recuerde que la masa del Sol es 2.0×10^{30} kg.

51-8 FUSIÓN TERMONUCLEAR CONTROLADA

Las reacciones termonucleares se han venido produciendo en el universo desde su creación durante el supuesto "Big Bang" cósmico de hace unos 15,000 millones de años. Sin embargo, en la Tierra empezaron a realizarse apenas en octubre de 1952, cuando se hizo explotar la primera bomba de fusión (o de hidrógeno). Las altas temperaturas necesarias para iniciar la reacción termonuclear en este caso se obtuvieron mediante una bomba de fisión usada como disparador.

Resulta mucho más difícil obtener una fuente controlable y sostenida de potencia termonuclear, esto es, un reactor de fusión. Pese a ello, se procura conseguirla porque para muchos es la fuente más poderosa de potencia, por lo menos respecto a la generación de electricidad.

La interacción de protón-protón presentada gráficamente en la figura 51-10 no es idónea para emplearse en un reactor terrestre de fusión, porque el proceso descrito en la primera hilera es desesperadamente lento. De hecho, la probabilidad de reacción es tan pequeña que es imposible medirle en el laboratorio. La reacción se produce en condiciones que predominan en el interior de las estrellas, debido exclusivamente al enorme número de protones disponibles en los núcleos de estrellas de gran densidad.

Las reacciones más atractivas para usarlas en la Tierra parecen ser la de deuterón-deuterón (d-d) y deuterón-tritón (d-t):

$$\text{d-d:}\quad {}^2\text{H} + {}^2\text{H} \longrightarrow {}^3\text{He} + \text{n} \qquad (Q = +3.27\ \text{MeV}), \tag{51-6}$$

$$\text{d-d:}\quad {}^2\text{H} + {}^2\text{H} \longrightarrow {}^3\text{H} + {}^1\text{H} \qquad (Q = +4.03\ \text{MeV}), \tag{51-7}$$

$$\text{d-t:}\quad {}^2\text{H} + {}^3\text{H} \longrightarrow {}^4\text{He} + \text{n} \qquad (Q = +17.59\ \text{MeV}). \tag{51-8}$$

Aquí *tritón* indica ^{3}H, el núcleo de hidrógeno con $A = 3$. Nótese que las reacciones anteriores son efectivamente de fusión y tienen un valor positivo Q. El deuterio, cuya abundancia isotópica en el hidrógeno normal es 0.015%, está disponible en cantidades ilimitadas como un componente del agua de mar. El tritio (^{3}H atómico) es radiactivo y generalmente se encuentra en el hidrógeno natural.

El funcionamiento exitoso de un reactor termonuclear exige tres condiciones básicas.

1. *Una alta densidad de n partículas.* El número de partículas interactuantes (deuterones, por ejemplo) por unidad de volumen debe ser lo bastante grande para garantizar una rapidez bastante alta de colisión deuterón-deuterón. Con las altas temperaturas que se requieren, el gas deuterio se ionizará por completo convirtiéndose en *plasma* neutro compuesto de deuterones y electrones.

2. *Una alta temperatura T del plasma.* El plasma debe estar caliente. De lo contrario los deuterones que chocan no tendrán suficiente fuerza para penetrar en la barrera mutua de Coulomb que tiende a mantenerlos separados. En la investigación de la fusión, a menudo las temperaturas se registran dando el valor correspondiente de kT (no $\frac{3}{2}kT$). En el laboratorio se ha conseguido una temperatura del plasma de 43 keV, correspondiente a 5.0×10^8 K. Es mucho más alta que la temperatura del centro del sol (1.3 keV o 1.5×10^7 K).

3. *Un largo tiempo de confinamiento* τ. Un problema consiste en contener el plasma caliente suficiente tiempo para garantizar que su densidad y su temperatura se mantengan a un nivel alto. Evidentemente ningún contenedor sólido puede soportar las altas temperaturas en cuestión, de modo que es preciso emplear técnicas especiales que describiremos más adelante. Con una de ellas se han conseguido tiempos de confinamientos mayores que 1 s.

En el funcionamiento eficaz de un reactor termonuclear, puede demostrar que n, T y τ deben ser lo bastante grandes para que

$$n\tau T \geq 50 \times 10^{20}\ \text{keV} \cdot \text{s/m}^3, \tag{51-9}$$

estado al que se le conoce también como *criterio de Lawson.* Esta ecuación nos indica que, con una temperatura suficientemente elevada del plasma, puede optarse entre confinar muchas partículas durante un tiempo relativamente corto o confinar menos partículas por un tiempo más largo.

Se han empleado dos métodos para cumplir con el criterio de Lawson y controlar así la fusión. En el *confinamiento magnético* se usan campos magnéticos para aislar el plasma al mismo tiempo que se aumenta su temperatura. Por el contrario, en el *confinamiento inercial*, se comprime y se calienta una cantidad pequeña de combustible con tanta rapidez que ocurre la fusión antes que el combustible se expanda y se enfríe. Ambos métodos se explican en las dos secciones siguientes.

Confinamiento magnético

El plasma está constituido por partículas cargadas y, por eso, su movimiento puede controlarse mediante campos magnéticos. Por ejemplo, las partículas cargadas se mueven en espiral en dirección de un campo magnético uniforme. Si se modifica convenientemente la fuerza del campo, es posible diseñar un "espejo magnético" (Fig. 32-14) contra el cual se reflejan las partículas. Otro diseño aplica la geometría toroidal, donde las partículas se desplazan en espiral alrededor del eje de un toroide dentro de una cámara al vacío en forma de rosca. Al tipo de reactor de fusión basado en este principio, inventado en Rusia, se le llama *tokamak*, acrónimo ruso que significa "cámara magnética toroidal". Se han construido y probado máquinas grandes de este tipo.

En un tokamak el campo magnético consta de dos componentes, como se ilustra gráficamente en la figura 51-11. El campo *toroidal* B_t es el que suele asociarse a un devanado toroidal de alambres; en la figura 51-11 se muestra una pequeña sección de una bobina externa que contribuye al campo toroidal. El campo disminuye al aumentar el radio; de ahí la necesidad de agregar un segundo campo para confinar las partículas. Este componente *poloidal* B_p se agrega al toroidal para darle al campo total una estructura helicoidal, según se aprecia en la figura 51-11. El campo poloidal se origina en una corriente i' en el plasma, la cual se induce mediante un conjunto

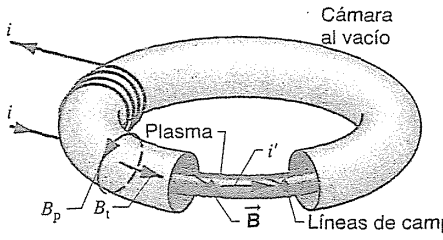


FIGURA 51-11. Cámara toroidal que constituye la base del tokamak. Obsérvese el plasma, el campo magnético helicoidal $\vec{B}$ que lo confina y la corriente inducida i' que lo calienta.

de devanados que no aparecen en la figura. Otro efecto de esta corriente consiste en calentar el plasma. Par alcanzar su temperatura deseada se requieren otros medios más de calentamiento; por ejemplo, disparar haces neutros de partículas hacia el interior del plasma.

En la figura 51-12 se muestra la cámara toroidal al vacío del Tokamak Fusion Test Reactor en el Princeton Plasma Physics Laboratory. El radio interior de la cámara mide unos 2 m y el radio principal del toroide, 2.5 m. Esta instalación operó hasta 1998 ; en ella se desarrollaron y probaron muchos de los conceptos necesarios para construir un reactor funcional de fusión. Podía producir 10 MW de potencia de fusión durante 1 segundo aproximadamente. Una instalación experimental más amplia, denominada International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER) se prepara actualmente en un esfuerzo conjunto de la Unión Europea, Japón y Rusia. Planeada para empezar a funcionar en el año 2008, su operación inicial se diseña para que genere 500 MW de potencia de fusión durante varios minutos.

Se pretende incrementar n, τ y T al diseñar dispositivos de confinamiento magnético como el tokamak. Con valores suficientemente altos de estos parámetros, se cumple el criterio de Lawson y las reacciones de fusión en el plasma crearán bastante energía para igualar la que debe suministrarse para calentar el plasma. Esta condición recibe el nombre de "equilibrio". Con valores todavía más elevados de esos parámetros, el dispositivo alcanzará la "ignición", estado en que se producirán reacciones de fusión autosustentables. En la figura 51-13 se observa que se ha avanzado constantemente hacia la consecución de tales metas. Ya estamos a punto de lograr el estado de equilibrio, pero todavía quedan formidables problemas de ingeniería por resolver y pasarán décadas antes de que se produzca energía eléctrica por medio de la fusión.

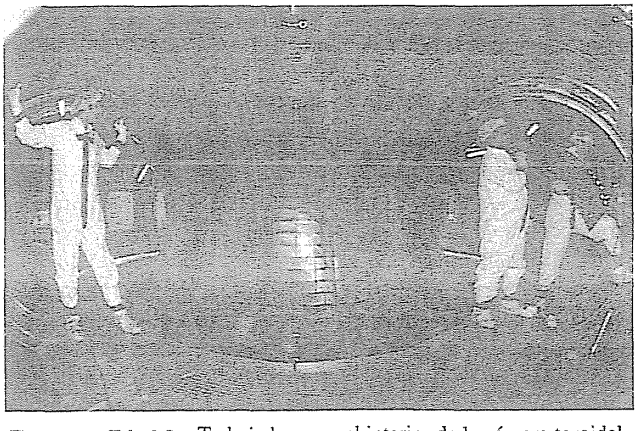


FIGURA 51-12. Trabajadores en el interior de la cámara toroidal del Tokamak Fusion Test Reactor en Princeton University.

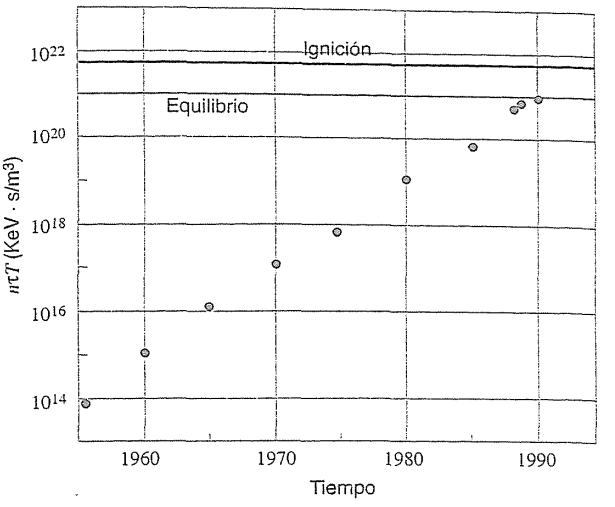


FIGURA 51-13. Método con que se logran el equilibrio y la ignición en los reactores de fusión controlada, descritos como un diagrama de $n\tau T$ en función del tiempo.

PROBLEMA RESUELTO 51-7. El Tokamak Fusion Test Reactor en Princeton logró un tiempo de confinamiento de 400 ms. *a*) Si la temperatura del plasma, medida como kT en unidades de energía, es 20 keV, ¿qué densidad deben tener las partículas del plasma para que se cumpla el criterio de ignición de Lawson? *b*) ¿Cómo se relaciona este número con la densidad de partículas de los átomos de un gas ideal en condiciones estándar? (*c*) En esas mismas condiciones de densidad y de temperatura, ¿qué tiempo de confinamiento se requiere para alcanzar el estado de equilibrio?

Solución *a*) Al aplicar el criterio de Lawson (Ec. 51-9), debemos obtener

$$n = \frac{50 \times 10^{20}\ \text{keV}\cdot\text{s/m}^3}{\tau T}$$

$$= \frac{50 \times 10^{20}\ \text{keV}\cdot\text{s/m}^3}{(400 \times 10^{-3}\ \text{s})(20\ \text{keV})} = 6.3 \times 10^{20}\ \text{m}^{-3}.$$

b) La densidad numérica de los átomos de un gas ideal en condiciones normales está dada por $n' = N_A/V_m$, donde N_A es la constante de Avogadro, y V_m ($= 2.24 \times 10^{-2}\ \text{m}^3/\text{mol}$) el volumen molar de un gas ideal en dichas condiciones, lo cual nos da

$$n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{6.02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}}{2.24 \times 10^{-2}\ \text{m}^3/\text{mol}} = 2.7 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}.$$

La densidad de partículas del plasma que calculamos en la parte *a*) es menor que la de un gas ideal en un factor de 4×10^4 aproximadamente.

c) En la figura 51-13 se indica que para alcanzar el equilibrio hay que tener $n\tau T \approx 1 \times 10^{21}$ keV · s/m^3, o sea alrededor de $\frac{1}{5}$ del criterio de Lawson de ignición. Así pues, con la misma densidad y temperatura que en la parte *a*) tendremos $\frac{1}{5}$ del tiempo de confinamiento, o sea unos 80 ms.

Confinamiento inercial

El *confinamiento inercial* es un segundo método que permite aislar el plasma para que se produzca la fusión termonuclear. Atendiendo al criterio de Lawson (Ec. 51-9), consiste en trabajar con densidades n de partículas extremadamente elevadas durante tiempos muy breves de confinamiento τ. Los tiempos se disponen para que sean tan cortos que el proceso de fusión concluya antes que las partículas del plasma tengan tiempo para dejar las posiciones que ocupan al comenzar la fusión. Las partículas que interactúan se ven confinadas por su propia inercia.

La *fusión láser*, que se basa en el principio del confinamiento inercial, se investiga en los laboratorios de todo el mundo. Por ejemplo, en el Lawrence Livermore National Laboratory el proyecto de fusión láser NOVA (Fig. 51-14) consiste en lo siguiente: unos perdigones de alimentación de deuterio-tritio, más pequeñas que un grano de arena (Fig. 51-15), deben ser eliminados por 10 pulsos láser sincronizados y de alta potencia, dispuestos simétricamente alrededor del perdigón. Los pulsos se diseñan para proporcionar un total aproximado de 35 kJ de energía a cada perdigón en menos de un nanosegundo. Eso equivale a una potencia suministrada de 4×10^{13} W durante el pulso, es decir, unas 100 veces la capacidad total instalada de generación de energía eléctrica del mundo.

La energía del pulso láser sirve para calentar el perdigón, ionizándolo hasta convertirlo en plasma y —se espera— elevando su temperatura a alrededor de 10^8 K. Conforme las capas superficiales del perdigón van evaporándose a estas altas temperaturas térmicas, la fuerza de reacción de las partículas que escapan comprime el núcleo del perdigón, aumentando su densidad en un factor quizá de 10^3. Si ocurren todas estas cosas, las condiciones serán propicias para que tenga lugar la fusión termonuclear en el núcleo muy comprimido del plasma, siendo la reacción de fusión la reacción d-t de la ecuación 51-8.

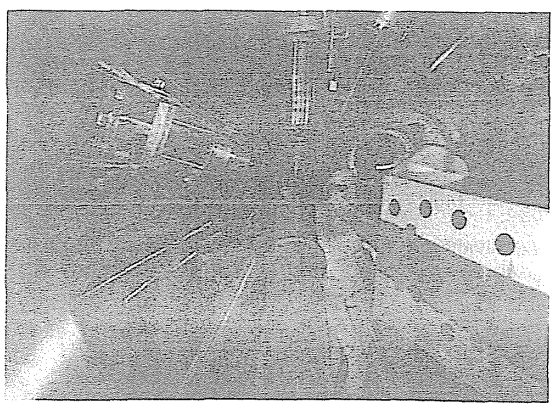


FIGURA 51-14. Cámara blanco de la instalación NOVA para fusión por confinamiento inercial en el Lawrence Livermore National Laboratory. La foto muestra algunos de los 10 tubos de haces láser.

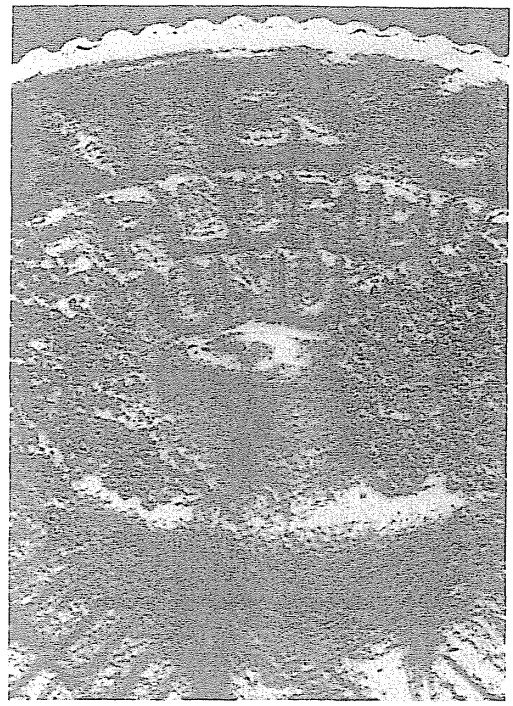


FIGURA 51-15. Las esferas delgadas, que aparecen en una moneda de 10 centavos, son perdigones de combustible de deuterio -tritio para utilizarse en los experimentos de confinamiento inercial.

En un reactor termonuclear de fusión láser en funcionamiento, se visualiza que los perdigones de alimentación explotarán como bombas de hidrógeno en miniatura con una velocidad probable de 10-100 por segundo. Las partículas energéticas que emergen de la reacción de fusión (^{4}He y n) podrían quedar absorbidas en una "manta" formada por una corriente de litio fundido en movimiento que la calentaría. Después la energía interna sería extraída de la corriente en otro sitio y serviría para generar vapor, tal como sucede en un reactor de fisión o en una central eléctrica de combustible fósil. El litio sería una opción adecuada como medio de transferir calor, porque con muchas probabilidades el neutrón energético suministraría su energía a la "manta" mediante la reacción

$$^6\text{Li} + \text{n} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^3\text{H}.$$

Sería fácil poner las dos partículas cargadas en reposo en litio. El tritio generado en la reacción puede extraerse para utilizarlo como combustible en el reactor.

En el Livermore Laboratory se está construyendo una nueva instalación experimental de fusión por confinamiento inercial. La instalación National Ignition Facility, que se planea terminar en el año 2002, centrará 192 haces láser en un blanco de deuterio-tritio, suministrando una energía de 1.8 MJ. A semejanza del confinamiento magnético, la fusión mediante el confinamiento se sigue investigando exhaustivamente y se han logrado grandes avances.

PROBLEMA RESUELTO 51-8. Supóngase que un perdigón de combustible en un dispositivo de fusión láser se compone de una mezcla líquida de deuterio-tritio; ésta contiene igual cantidad de átomos de ambos. La densidad d (= 200 kg/m^3) del perdigón crece en un factor de 10^3 por la acción de los pulsos láser. *a*) ¿Cuántas partículas por unidad de volumen (deuterones o tritones) contiene el perdigón en el estado comprimido? *b*) En la temperatura del plasma correspondiente a kT = 50 keV, ¿cuánto tiempo hay que mantener esta densidad de partícula para cumplir con el criterio de Lawson?

Solución *a*) En el caso de la densidad d' del perdigón comprimido podemos escribir

$$d' = 10^3 d = m_d \frac{n}{2} + m_t \frac{n}{2},$$

donde n es el número de partículas por unidad de volumen (deuterones o tritones) en el perdigón comprimido, m_d es la masa de un átomo de deuterio y m_t es la masa de un átomo de tritio. Estas masas atómicas se relacionan con la constante de Avogadro N_A y con las masas molares correspondientes (M_d y M_t) por medio de

$$m_d = M_d/N_A \quad \text{y} \quad m_t = M_t/N_A.$$

Al combinar las ecuaciones anteriores y al resolver para n se obtiene

$$n = \frac{2d'N_A}{M_d + M_t}$$

$$= \frac{(2)(10^3 \times 200\ \text{kg/m}^3)(6.02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1})}{2.0 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol} + 3.0 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}}$$

$$= 4.8 \times 10^{31}\ \text{m}^{-3}.$$

b) Conforme al criterio de Lawson (Ec. 51-9), tenemos

$$\tau = \frac{50 \times 10^{20}\ \text{keV} \cdot \text{s/m}^{-3}}{nT}$$

$$= \frac{50 \times 10^{20}\ \text{keV} \cdot \text{s/m}^{-3}}{(4.8 \times 10^{31}\ \text{m}^{-3})(50\ \text{keV})} = 2 \times 10^{-12}\ \text{s}.$$

El perdigón debe permanecer comprimido al menos ese tiempo para que ocurra la operación de equilibrio.

Una comparación con el problema resuelto 51-7 indica que, a diferencia de la operación tokamak, la fusión láser trata de producirse en el ámbito de densidades muy altas de partícula y, por lo mismo, con tiempos extremadamente breves de confinamiento.

OPCIÓN MÚLTIPLE

51-1 El átomo y el núcleo

51-2 Fisión nuclear: el proceso básico

1. Considere la reacción de fisión $^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow {}^{99}\text{X} + {}^{134}\text{Te} + x\text{n}$.
   a) ¿Qué elemento químico representa X?
   A) Sr B) Zr C) Nb
   D) No se cuenta con suficiente información para contestar la pregunta.
   b) ¿Qué valor tiene x?
   A) 1 B) 2 C) 2.47 D) 3
2. ¿Por qué los fragmentos de fisión suelen ser radiactivos?
   A) Provienen originalmente de ^{235}U radiactivo.
   B) Tienen gran exceso de neutrones.
   C) Poseen gran energía de enlace por nucleón.
   D) Se mueven a gran velocidad.
3. En un proceso de fisión de un átomo de uranio en reposo se producen fragmentos de números de masa A_1 y A_2. Una buena estimación de la razón de las energías cinéticas K_1/K_2 es
   A) A_2/A_1. B) $(A_2/A_1)^2$. C) A_1/A_2. D) $(A_1/A_2)^2$.

51-3 Teoría de la fisión nuclear

51-4 Reactores nucleares: los principios básicos

4. En un reactor nuclear la función del moderador consiste en
   A) absorber neutrones.
   B) evitar que el reactor alcance el nivel crítico.
   C) reducir la velocidad de los neutrones.
   D) absorber calor del núcleo.

51-5 Un reactor natural

51-6 Fusión termonuclear: el proceso básico

5. Los protones con velocidad extremadamente alta no son importantes en la fusión termonuclar porque
   A) les es más difícil penetrar la barrera de Coulomb.
   B) se mueven demasiado rápido como para chocar con otro protón.
   C) se registra un incremento relativista en su carga eléctrica.
   D) hay relativamente muy pocos de ellos.

51-7 Fusión termonuclear en las estrellas

6. En promedio el universo se compone aproximadamente de 25% de helio y 75% de hidrógeno. El núcleo de Sol está constituido más o menos por 65% de helio. Este exceso de helio
   A) se necesita en las reacciones de fusión que producen la energía solar.
   B) es sólo una fluctuación aleatoria de su concentración en el universo.
   C) es un producto de las reacciones de fusión en el Sol.
   D) es un catalizador que mejora la producción de energía por la fusión.

51-8 Fusión termonuclear controlada

7. ¿Cuál es el principal problema relacionado con el proceso de fusión como fuente de energía eléctrica?
   A) La escasez de combustible
   B) La barrera de Coulomb
   C) La radiactividad de los productos
   D) El peligro de una explosión
8. El carbono y oxígeno también son elementos abundantes y baratos. ¿Por qué no se intenta utilizarlos en vez del hidrógeno como combustible de un reactor de fusión?
   A) La energía obtenida por nucleón es mucho menor.
   B) La barrera de Coulomb es mucho más alta.
   C) Debido a (A) y a (B).
   D) Ni por (A) ni por (B).

9. En comparación con las reacciones d-d, se libera mucha energía en la reacción d-t porque
   A) el tritio (^{3}H) es radiactivo y, por tanto, acumula más energía.
   B) el producto de la reacción ^{4}He está muy ligado.
   C) participan más nucleones en la reacción d-t.
   D) la barrera de Coulomb es menos alta.

PREGUNTAS

1. Es mucho más difícil extraer un nucleón de un núcleo que un electrón de un átomo. ¿Por qué intentarlo entonces?
2. Tras examinar la tabla 51-1, ¿puede decir que una fuente de energía, o de potencia, es mejor que otra? De no ser sí, ¿qué otras consideraciones intervienen?
3. ¿A cuál de los procesos de la tabla 51-1 se aplica la relación $E = \Delta m\, c^2$?
4. De las trazas de los dos fragmentos de fisión que aparecen en la figura 51-1, ¿cuál tiene el *a*) momento, *b*) energía cinética, *c*) velocidad o *d)* masa más grandes?
5. En la ecuación generalizada de la fisión de ^{235}U por neutrones térmicos, $^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow X + Y + b\text{n}$, ¿espera que la Q de la reacción dependa de la identidad de X y de Y?
6. ¿Es la curva del fragmento de fisión en la figura 51-2 necesariamente simétrica alrededor de su mínimo central? Explique su respuesta.
7. En los decaimientos de cadena de los fragmentos de fisión primaria (Ec. 51-21), ¿por qué no ocurren decamientos β^+?
8. La vida media de ^{235}U es 7.0×10^8 años. Explique la afirmación de que hoy no existiría la bomba atómica si su duración fuera menor en un factor de 10 aproximadamente.
9. ^{238}U no es fisionable por medio de neutrones térmicos. ¿Qué energía mínima cree que necesitaría para provocar la fisión en este núclido?
10. La vida media para el decaimiento de ^{235}U por la emisión alfa es 7×10^8 años; sería 3×10^{17} años por una fisión espontánea que actuara sola. Ambos son procesos del efecto túnel, como se indica en las figuras 50-9 y 51-4. ¿A qué se debe esta enorme diferencia en la probabilidad del efecto túnel?
11. Compare la fisión con el decaimiento beta en todas las formas que pueda. ¿Cómo puede un neutrón térmico generar millones de electrovolts de energía de excitación a un núcleo que lo absorba, según se muestra en la figura 51-3*a*? El neutrón carece esencialmente de energía.
12. En la figura 50-6, la curva de energía de enlace nos indica que un núcleo mayor que $A \approx 56$ puede liberar energía en un proceso de fisión. Pero sólo los núclidos muy voluminosos parecen hacerlo. ¿Por qué el plomo —por ejemplo— no puede liberar energía mediante ese proceso?
13. Con el bombardeo de núclidos pesados en el laboratorio, es posible preparar otros núclidos pesados que decaen, por lo menos en parte, a través de *fisión espontánea*. Dicho de otra manera, después de cierta vida media se dividen espontáneamente en dos grandes fragmentos. ¿Puede explicarlo basándose en la teorías de Bohr y de Wheeler?
14. Los neutrones lentos producen más eficazmente la fisión que los rápidos. ¿Puede hacerlo plausible? (*Sugerencia:* considere cómo las longitudes de onda de de Broglie de un neutrón podría relacionarse con la sección transversal de captura en ^{235}U.)
15. Compare un reactor nuclear con la lumbre de carbón. ¿En qué sentido la reacción en cadena ocurre en ambos? ¿Cuál es el mecanismo liberador de energía?
16. No todos los neutrones producidos en un reactor están destinados a iniciar un proceso de fisión. ¿Qué sucede con los que no lo están?
17. Explique lo que significa decir que en un núcleo de reactor la fuga de neutrones es un efecto de superficie y su producción es un efecto de volumen.
18. Explique el propósito del moderador en un reactor nuclear. ¿Es posible diseñar un reactor que no lo necesite? Y de ser así, mencione algunas ventajas y desventajas del reactor.
19. Describa cómo operar las varillas de control de un reactor nuclear *a*) durante el arranque; *b*) para reducir el nivel de potencial; *c*) a largo plazo a medida que va consumiéndose el combustible.
20. Un reactor funciona a toda potencia con su factor de multiplicación k ajustado a la unidad. ¿Qué valor habrá de tener k si lo ajustamos para que opere establemente a media potencial?
21. La separación de los dos isótopos ^{238}U y ^{235}U del uranio natural requiere un método físico, como la difusión, y no un método químico. Explique por qué.
22. Un trozo de ^{235}U (o ^{239}Pu) puro explotará espontáneamente si supera cierto "tamaño crítico". Un trozo más pequeño no lo hará. Explique por qué.
23. ¿Qué puede decirse sobre el valor del factor de multiplicación k en una bomba atómica (de fisión)?
24. Se piensa que el núcleo de la Tierra se compone principalmente de hierro porque, cuando se formó, algunos elementos pesados como él se hundieron en el centro de ella y algunos más ligeros como el silicio flotaron hacia arriba para formar la superficie terrestre. Sin embargo, el hierro dista mucho de ser el elemento más pesado. ¿Por qué el núcleo de la Tierra no está hecho de uranio?
25. Con la información proporcionada en el texto, reúna y anote las alturas aproximadas de la barrera de Coulomb en *a*) el decaimiento alfa de ^{238}U, *b*) en la fisión de ^{235}U por neutrones térmicos y *c*) en la colisión frontal de dos deuterones.
26. Se supone que la energía solar se genera a través de reacciones nuclearse como el ciclo de protón-protón. ¿Qué formas alternas de producirla se propusieron en el pasado y por qué se rechazaron?
27. Los elementos con un número de masa ≈ 56 se crean por fusión termonuclear en el núcleo de las estrellas. ¿Por qué los elementos más pesados no se crean también mediante este proceso?
28. ¿Cree que la reacción por fusión termonuclear controlada por las dos curvas de la figura 51-9 necesariamente alcanza su eficacia máxima en la energía en que se cruzan? Explique su contestación.

29. En la figura 51-9 ¿le sorprende que, a juzgar por las áreas bajo la curva marcada $n(K)$, el número de partículas con $K > K_{pro}$ sea menor que el número con $K < K_{pro}$, donde K_{pro} es la energía térmica promedio?
30. Los núclidos de uranio que existen hoy en la Tierra se acumularon y se dispersaron por el espacio cuando explotaron las estrellas, en los llamados eventos de supernova. Las explosiones, que tuvieron lugar antes que se formara el sistema solar, representan el colapso de las estrellas bajo su propia gravedad. ¿Puede entonces decirse que la energía procedente de la fisión estuvo una vez almacenada en el campo gravitacional? ¿Tiene entonces la fisión en este sentido limitado algo en común con la energía proveniente de las fuentes hidroeléctricas?
31. ¿Por qué tardan tanto en difundirse a la superficie los fotones de los rayos gamma (¡$\sim 10^6$ años!) generados durante las reacciones nucleares del núcleo central del Sol? ¿Qué clases de interacciones tienen con los protones, con las partículas α y con los electrones que constituyen el núcleo?
32. Se cree que la materia primordial del universo fue principalmente el hidrógeno. ¿De dónde proviene el silicio de la Tierra? ¿Y todo el oro?
33. ¿Cumple las condiciones en el núcleo del Sol el criterio de Lawson para que se produzca a una reacción sostenida de fusión nuclear? Explique su respuesta.
34. Para lograr la ignición en un tokamak, ¿por qué se necesita una elevada temperatura del plasma? ¿Una gran densidad de sus partículas? ¿Y un largo tiempo de confinamiento?
35. ¿Qué generará más productos radiactivos de desecho, un reactor de fisión o uno de fusión?
36. ¿Se cumple el criterio de Lawson en los tokamaks y en los dispositivos de fusión láser?

EJERCICIOS

51-1 El átomo y el núcleo

51-2 Fisión nuclear: el proceso básico

1. Quiere usted producir 1.0 GJ de energía. Calcule y compare *a*) la cantidad de carbón necesaria si se obtiene la energía quemándolo y b) el uranio natural requerido para obtenerla por fisión en un reactor. Suponga que la combustión de 1.0 kg de carbón libera 2.9×10^7 J; la fisión de 1.0 kg de uranio en un reactor libera 8.2×10^{13} J.
2. En Estados Unidos, el carbón contiene normalmente unas 3 partes por millón (3 ppm) de uranio y torio fisionable. Calcule y compare *a*) la energía obtenida al quemar 100 kg de carbón y *b*) la que podría obtenerse con la fisión de las impurezas fisionables que quedan en sus cenizas. Suponga que la combustión de 1 kg de carbón produce 2.9×10^7 J; la fisión de 1 kg de uranio o torio en un reactor genera 8.2×10^{13} J.
3. *a*) ¿Cuántos átomos están contenidos en 1.00 kg de ^{235}U puro? *b*) ¿Cuánta energía en joules se produce en la fisión completa de 1.00 kg de ^{235}U? Suponga que $Q = 200$ MeV. *c*) ¿Durante cuántos años esta energía encenderá una lámpara de 100 W?
4. ¿Con qué rapidez deben los núcleos de ^{235}U experimentar fisión por neutrones para generar 2.00 W? Suponga que $Q = 200$ MeV.
5. Verifique que, como se indica en la tabla 51-1, la fisión de 1 kg de ^{235}U podría mantener encendida una lámpara de 100 W durante 3×10^4 años.
6. Las propiedades de fisión del isótopo de plutonio ^{239}Pu se parecen mucho a las de ^{235}U. La energía promedio liberada por fisión es 180 MeV. ¿Cuánta se produce en joules si todos los átomos de 1.00 kg de ^{239}Pu experimentan fisión?
7. De modo muy esporádico un núcleo de ^{233}U, luego de absorber un neutrón, se divide en *tres* fragmentos. Si dos de ellos se identifican con medios químicos como isótopos del cromio y de galio y si no hay neutrones rápidos mezclados, ¿cuál es por lo menos una posibilidad de identificarlos? Consulte un diagrama o tabla nuclídica.
8. Demuestre que, en el problema resuelto 51-1, no es necesario tener en cuenta explícitamente las masas de los electrones emitidos durante el decaimiento beta de los fragmentos de fisión primaria.
9. ^{235}U decae por la emisión alfa con una vida media de 7.04×10^8 años. También lo hace (rara vez) por fisión espontánea; si no ocurre el decaimiento alfa, su vida media a causa sólo de este proceso será 3.50×10^{17} años. *a*) ¿Con qué rapidez se realiza la fisión espontánea de 1.00 g de ^{235}U? *b*) ¿Cuántos procesos de decaimiento alfa se producen en cada evento de fisión espontánea?

51-3 Teoría de la fisión nuclear

10. Llene la siguiente tabla, que se refiere a la reacción de fisión generalizada

$$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow X + Y + b\text{n}.$$

X	Y	b
^{140}Xe	—	1
^{139}I	—	2
—	^{100}Zr	2
^{141}Cs	^{92}Rb	—

11. Calcule la energía de desintegración Q en la fisión espontánea de ^{52}Cr en dos fragmentos iguales. Las masas que se requieren son ^{52}Cr, 51.94012 u y ^{26}Mg, 25.982593 u. Explique su resultado.
12. Calcule la energía de desintegración Q en la fisión de ^{98}Mo en dos partes iguales. Las masas que se necesitan son ^{98}Mo, 97.905408 u y ^{49}Sc, 48.950024 u . Si Q resulta ser positiva, explique por qué este proceso no se efectúa de modo espontáneo.
13. Calcule la energía liberada en la reacción de fisión

$$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow {}^{141}\text{Cs} + {}^{92}\text{Rb} + 3\text{n}.$$

Las masas atómicas requeridas son

^{235}U	235.043923 u	^{92}Rb	91.919726 u
^{141}Cs	140.920044 u	n	1.008665 u.

14. El ^{238}Np tiene una energía de barrera para la fisión de 4.2 MeV. Para extraer un neutrón en este núclido hay que consumir una energía de 5.0 MeV. ¿Puede lograrse la fisión de ^{237}Np por medio de neutrones térmicos?
15. Considere la fisión de ^{238}U por neutrones rápidos. En un proceso de fisión no se emiten neutrones y los productos finales estables, tras el decaimiento beta de los fragmentos primarios del

proceso, fueron ^{140}Ce y ^{99}Ru. *a*) ¿Cuántos procesos de decaimiento beta hubo en las dos cadenas de decaimiento beta tomadas en conjunto? *b*) Calcule Q. Las masas atómicas relevantes son

^{238}U	238.050783 u	^{140}Ce	139.905434 u
n	1.008665 u	^{99}Ru	98.905939 u.

16. En una fisión de ^{235}U por neutrones lentos, no se emiten electrones y uno de los fragmentos primarios de la fisión es ^{83}Ge. *a*) ¿Cuál es el otro fragmento? *b*) ¿Cómo la energía de desintegración Q = 170 MeV se divide entre los dos? *c*) Calcule la rapidez inicial de cada uno de estos fragmentos.

51-4 Reactores nucleares: los principios básicos

17. Muchos temen que al ayudar a otras naciones a desarrollar la tecnología del reactor de potencia nuclear, aumentarán las probabilidades de una guerra nuclear, porque los reactores pueden usarse no sólo para producir energía, sino —como un producto secundario mediante la captura de neutrones con ^{238}U, para obtener ^{239}Pu, que es un "combustible" de las bombas nucleares (reactores *reproductores*). ¿Con qué serie simple de reacciones en que interviene la captura de neutrones y el decaimiento beta se obtendrá este isótopo de plutonio?
18. Un reactor de fisión de 190 MW consume la mitad de su combustible en 3 años. ¿Cuánto ^{235}U contenía al inicio? Suponga que toda la energía generada proviene de la fisión de ^{235}U y que este núclido se consume sólo en el proceso de fisión. Consulte el problema resuelto 51-3.
19. Repita el ejercicio 18 teniendo en cuenta la captura de neutrones sin fisión por ^{235}U. Vea el ejercicio 51-3.
20. ^{90}Sr ($t_{1/2}$ = 29 años) es uno de los numerosos productos de fisión que por medios químicos pueden extraerse del combustible consumido de un reactor de potencia nuclear. Se produce en los grandes reactores con velocidad aproximada de 18 kg/año. Por su radiactividad genera energía térmica a una velocidad de 2.3 W/g. *a*) Calcule la energía efectiva de desintegración Q_{pro} que acompaña al decaimiento de un núcleo de ^{90}Sr. (Q_{pro} incluye las contribuciones procedentes del decaimiento de los productos afines de ^{90}Sr en su cadena de decaimientos pero no los procedentes de los neutrinos, que escapan totalmente de la muestra.) *b*) Se quiere construir una fuente de energía (eléctrica) que genere 150 W para usarla en operar equipo electrónico, una baliza acústica subacuática. Si la fuente se basa en la energía térmica generada por ^{90}Sr y si la eficiencia del proceso de conversión termoeléctrico es de 5.0%, ¿cuánto ^{90}Sr se necesita? La masa atómica de ^{90}Sr es 89.9 u.
21. En un reactor el tiempo de generación de neutrones t_{gen} es el tiempo promedio entre una fisión y las causadas por los neutrones que se emiten durante el proceso. Suponga que la salida de potencia del reactor en el tiempo $t = 0$ es P_0. Demuestre que la salida en t más tarde es $P(t)$ en que

$$P(t) = P_0 k^{t/t_{gen}},$$

donde k es el factor de multiplicación. Nótese que $k = 1$ con una salida de potencia constante.
22. El tiempo de generación de neutrones (Ej. 21) de un reactor de potencia es 1.3 ms. Produce energía con una rapidez de 1200 MW. Para realizar ciertas revisiones de mantenimiento, hay que reducir temporalmente el nivel de potencia a 350 MW. Se quiere que la transición alcance ese nivel en 2.6 s. ¿En qué valor (constante) deberá ponerse el factor de multiplicación para que logre la transición en el tiempo deseado?
23. El tiempo de generación de neutrones t_{gen} (Ej. 21) en un reactor es de 1.0 ms. Si éste opera en un nivel de potencia de 500 MW, ¿aproximadamente cuántos neutrones libres (que después causarán una fisión) hay en el reactor en un momento cualquiera?
24. Un reactor opera a 400 MW con un tiempo de generación de neutrones de 30 ms. Si su potencia crece durante 5.0 min en un factor de multiplicación de 1.0003, calcule la salida de potencia al cabo de 5.0 min. Consulte el ejercicio 21.
25. La energía térmica producida cuando las radiaciones procedentes de radionúclidos se absorben en la materia puede servir de base a una pequeña fuente de potencia para utilizarla en satélites, en estaciones meteorológica remotas, etc. Los radionúclidos se construyen en abundancia en los reactores de energía nuclear y pueden separarse del combustible consumido por medios químicos. Un radionúclido idóneo es ^{238}Pu ($t_{1/2}$ = 87.7 años), que es un emisor alfa con Q = 5.59 MeV. ¿Con qué rapidez se genera energía térmica en 1.00 kg de este material?
26. Un método posible de descubrir la presencia de armas nucleares encubiertas consiste en detectar los neutrones emitidos en la fisión espontánea de ^{240}Pu en la ojiva. En un intento, un detector de neutrones de 2.5 m^2 de superficie, transportado en un helicóptero, midió un flujo de neutrones de 4.0 s^{-1} a 35 m de distancia de una ojiva de misil. Calcule la masa de ^{240}Pu en la ojiva. La mitad de la fisión espontánea en ^{240}Pu es 1.34×10^{11} años y en promedio se emiten 2.5 neutrones en cada fisión.

51-5 Un reactor natural

27. ¿En qué época habría sido el uranio natural un combustible práctico de reactor, con una razón de ^{235}U/^{238}U de 3.00%? Consulte el problema resuelto 51-4.
28. Se calcula que el reactor natural de fisión descrito en la sección 51-5 ha generado 15 gigawatt-años de energía en toda su vida. *a*) Si duró 200,000 años, ¿en que nivel promedio de potencia operó? *b*) ¿Cuánto ^{235}U consumió durante ella?
29. Se descubrió que algunas muestras de uranio tomadas de un reactor natural descrito en la sección 51-5, estaban un poco *enriquecidas* con ^{235}U en vez de agotadas. Explique esto en función de la absorción de neutrones por el isótopo abundante ^{238}U y el subsecuente decaimiento beta y alfa de sus productos.

51-6 Fusión termonuclear: el proceso básico

30. ¿Durante cuánto tiempo podría la fusión de 1.00 kg de deuterio mediante la reacción

$$^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \text{n} \qquad (Q = +3.27\ \text{MeV})$$

mantener encendida una lámpara de 100 W? La masa atómica del deuterio es 2.014 u.
31. Calcule la altura de la barrera de Coulomb en la colisión de dos protones frontales. El radio efectivo de un protón es de 0.80 fm. Consulte el ejemplo resuelto 51-5.
32. La ecuación de la curva $n(K)$ en la figura 51-9 es

$$n(K) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \frac{K^{1/2}}{(kT)^{3/2}} e^{-K/kT},$$

donde N es la densidad total de las partículas. En el centro del Sol la temperatura es 1.5×10^7 K y la energía media de los protones K_{pro} es 1.9 keV. Determine la razón entre la densidad de los protones a 5.0 keV y la densidad con la energía media de ellos.
33. Se han propuesto otros métodos además de calentar el material para superar la barrera de Coulomb en la fusión. Por ejemplo,

podría estudiarse la conveniencia de emplear aceleradores de partículas. Si quisiéramos utilizar dos de ellos para acelerar directamente dos haces de deuterones entre sí y lograr una colisión frontal, *a*) ¿qué voltaje requeriría cada uno para superar la barrera de Coulomb? *b*) ¿Sería difícil alcanzarlo? *c*) ¿Por qué supone que este método no se aplica en el momento actual?

51-7 Fusión termonuclear en las estrellas

34. Vimos que Q es 26.7 MeV en el ciclo global de protón-protón. ¿Cómo puede relacionar este número con los valores Q para las tres reacciones que lo constituyen, tal como se indica en la figura 51-10?
35. Demuestre que la energía liberada cuando tres partículas alfa se fusionan para formar ^{12}C es 7.27 MeV. La masa atómica de ^4He es 4.002603 u y de ^{12}C es 12.000000 u.
36. En el núcleo central del Sol la densidad es 1.5×10^5 kg/m^3, y la composición es esencialmente 35% de hidrógeno por masa y 65% de helio. *a*) ¿Qué densidad hay de protones en el núcleo del Sol? *b*) ¿Cuál es la razón entre esto y la densidad de las partículas en un gas ideal en condiciones estándar de temperatura y presión?
37. Calcule y compare en MeV la energía liberada por *a*) la fusión de 1.0 kg de hidrógeno en lo profundo del Sol y *b*) la fisión de 1.0 kg de ^{235}U en un reactor de fisión.
38. El Sol tiene una masa de 2.0×10^{30} kg e irradia energía con una rapidez de 3.9×10^{26} W. *a*) ¿Con que rapidez disminuye la masa? *b*) ¿Qué fracción de su masa original ha perdido en esa forma desde que empezó a quemar hidrógeno, hará unos 4.5×10^9 años?
39. Supongamos que el núcleo del Sol tiene un octavo de su masa y que está comprimido dentro de una esfera cuyo radio es un cuarto del radio solar. Supongamos asimismo que la composición del núcleo es 35% hidrógeno por masa y que prácticamente toda la energía solar se genera allí. Si el Sol sigue quemando hidrógeno con la rapidez calculada en el problema resuelto 51- 6, ¿cuánto tiempo pasará antes que se consuma todo el hidrógeno? La masa solar es 2.0×10^{30} kg.
40. Verifique los valores Q registrados en las reacciones de la figura 51-10. Las masas atómicas que se necesitan son

^1H	1.007825 u	^3He	3.016029 u
^2H	2.014102 u	^4He	4.002603 u

e^+ 0.0005486 u.

(*Sugerencia:* distinga rigurosamente entre masa atómica y nuclear, teniendo en cuenta los positrones.)

41. El carbón se quema de acuerdo con

$$C + O_2 \rightarrow CO_2.$$

El calor de combustión es 3.3×10^7 J/kg del carbono atómico consumido. *a*) Exprese esto en función de la energía por átomo de carbono. *b*) Exprese esto en función de la energía por kilogramo de los reactivos iniciales: carbono y oxígeno. *c*) Suponga que la masa del Sol ($= 2.0 \times 10^{30}$ kg) estuviera constituida por carbono y oxígeno en proporciones combustibles y que continuara irradiando energía con la rapidez actual de 3.9×10^{26} W. ¿Cuánto tiempo duraría?

42. Luego de convertir todo su hidrógeno en helio, una estrella presenta una composición de 100% de ese elemento. Ahora empieza a convertir todo el helio en carbono a través del proceso triple alfa

$$^4He + {}^4He + {}^4He \rightarrow {}^{12}C + \gamma \qquad (Q = 7.27 \text{ MeV}).$$

La masa de la estrella es 4.6×10^{32} kg y genera energía con una rapidez de 5.3×10^{30} W. ¿Cuánto tardará en convertirse todo el helio en carbono?

51-8 Fusión termonuclear controlada

43. Verifique los valores Q señalados en las ecuaciones 51-6, 51-7 y 51-8. Las masas que se necesitan son

^1H	1.007825 u	^3He	3.016029 u
^2H	2.014102 u	^4He	4.002603 u
^3H	3.016049 u	n	1.008665 u.

44. El agua ordinaria tiene aproximadamente 0.015% por masa de "agua pesada", donde el deuterio, ^2H reemplaza uno de los dos hidrógenos. ¿Cuánta potencia promedio de fusión podría obtenerse si durante 1 día "quemáramos" todo el ^2H en 1 litro de agua mediante la reacción $^2H + {}^2H \rightarrow {}^3He + n$ ($Q = 3.27$ MeV)?
45. En la reacción de fusión deuterón-tritón de la ecuación 51-8, ¿cómo comparten la energía de reacción Q la partícula α y el neutrón (es decir, calcule las energías cinéticas K_α y K_n)? Desprecie las energías cinéticas relativamente pequeñas de las dos partículas que se combinan.
46. En la figura 51-16 se muestra una representación idealizada de la bomba de hidrógeno. El combustible de fusión es deutérido de litio (LiD). Un "disparador" de bomba atómica (fisión) produce la temperatura elevada, la densidad de partículas y los neutrones para provocar la fusión. Las reacciones de fusión son

$$^6Li + n \rightarrow {}^3H + {}^4He$$

y

$$^2H + {}^3H \rightarrow {}^4He + n \qquad (Q = 17.59 \text{ MeV}),$$

es decir, el tritio (^3H) producido en la primera reacción fusionándose con el deuterio (D) en el combustible (Ec. 51-8). Calcule Q en la primera reacción para obtener la masa LiD que se necesita y así producir una fusión de 1 megatón de TNT ($= 2.6 \times 10^{28}$ MeV). Las masas atómicas que se requieren son

^6Li	6.015122 u	^4He	4.002603 u
^3H	3.016049 u	n	1.008665 u.

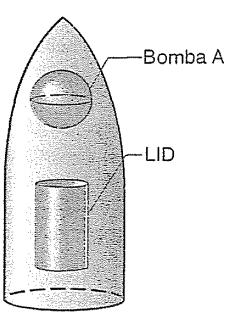


FIGURA 51-16. Ejercicio 46.

47. Suponga que una temperatura de plasma de 1.3×10^8 K se alcanza en un dispositivo de fusión láser. *a*) ¿Cuál es la velocidad más probable de un deuterón a esta temperatura? *b*) ¿Qué distancia recorre ese deuterón en el tiempo de confinamiento calculado en el problema resuelto 51-8?

PROBLEMAS

1. Suponga que, según la ecuación 51-2, inmediatamente después de la fisión de ^{236}U apenas se toca la superficie con los núcleos resultantes ^{140}Xe y ^{94}Sr. *a*) Suponiendo que los núcleos sean esféricos, calcule la energía potencial de Coulomb (en MeV) de repulsión entre los dos fragmentos. (*Sugerencia:* con la Ec. 50-1 calcule los radios de ellos.) *b*) Compare esta energía con la que se libera en un proceso ordinario de fisión. ¿En qué forma aparecerá finalmente en el laboratorio?
2. Un núcleo ^{236}U experimenta fisión y se divide en dos fragmentos de masa intermedia, ^{140}Xe y ^{96}Sr. *a*) ¿En qué porcentaje cambia el área superficial del núcleo de ^{236}U durante el proceso? *b*) ¿En qué porcentaje cambia su volumen? *c*) ¿En qué porcentaje cambia su energía potencial electrostática? La energía potencial de una esfera con carga uniforme de radio r y de carga Q está dada por
$$U = \frac{3}{5}\left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right).$$
3. En una bomba atómica se libera energía por la fisión incontrolada de plutonio ^{239}Pu (o ^{235}U). La magnitud de la energía se especifica atendiendo a la masa de TNT que se requiere para producir la misma liberación ("clasificación" de la bomba). Un megatón (10^6 tons) de TNT produce 2.6×10^{28} MeV de energía. *a*) Calcule en toneladas de TNT la clasificación de una bomba atómica que contiene 95 kg de ^{239}Pu, 2.5 de los cuales experimentan fisión. En el plutonio la Q promedio es 180 MeV. *b*) ¿Por qué los restantes 92.5 kg de ^{239}Pu se requieren si no se produce la fisión?
4. *a*) Un neutrón con una energía cinética inicial K realiza una colisión elástica frontal con un átomo en reposo de masa m. Demuestre que su pérdida fraccional de energía está dada por
$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{4m_n m}{(m + m_n)^2},$$
donde m_n es la masa del neutrón. *b*) Determine $\Delta K/K$ si el átomo en reposo es hidrógeno, deuterio, carbono o plomo. *c*) Si $k = 1.00$ MeV al inicio, ¿cuántas colisiones se tardaría en reducir la energía del neutrón a los valores térmicos (0.025 eV) en caso de que el material sea deuterio, un moderador de uso común? (*Nota:* en los moderadores actuales la mayor parte de las colisiones no son frontales.)
5. Calcule la altura de la barrera de Coulomb en dos núcleos ^7Li disparados entre sí con la misma energía cinética inicial K. Consulte el problema resuelto 51-5. (*Sugerencia:* utilice la ecuación 50-1 para calcular los radios de los núcleos.)
6. En algunas estrellas el *ciclo de carbono* es más probable que el de protón-protón sea más eficaz para generar energía. Este ciclo es

$$^{12}C + {}^1H \rightarrow {}^{13}N + \gamma, \qquad Q_1 = 1.95 \text{ MeV},$$
$$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^+ + \nu, \qquad Q_2 = 1.19 \text{ MeV},$$
$$^{13}C + {}^1H \rightarrow {}^{14}N + \gamma, \qquad Q_3 = 7.55 \text{ MeV},$$
$$^{14}N + {}^1H \rightarrow {}^{15}O + \gamma, \qquad Q_4 = 7.30 \text{ MeV},$$
$$^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^+ + \nu, \qquad Q_5 = 1.73 \text{ MeV},$$
$$^{15}N + {}^1H \rightarrow {}^{12}C + {}^4He, \qquad Q_6 = 4.97 \text{ MeV}.$$

a) Demuestre que los efectos globales de este ciclo de reacciones equivalen exactamente al de protón-protón de la figura 51-10. *b*) Verifique que ambos ciclos poseen la misma Q conforme a lo esperado.

7. La energía potencial gravitacional de un objeto esférico uniforme de masa M y de radio R es
$$U = -3GM^2/5R,$$
donde G es la constante gravitacional. *a*) Demuestre la compatibilidad de esta expresión con la del problema 4 en el capítulo 50. *b*) Utilice esta expresión para determinar la energía máxima que podría liberar un objeto esférico, inicialmente de radio infinito, al encogerse hasta alcanzar el tamaño actual del Sol. *c*) Suponga que durante este encogimiento, el Sol irradia energía a la velocidad actual y calcule la edad del Sol basándose en la hipótesis de que el Sol obtiene su energía de la contracción gravitacional.
8. *a*) Calcule la velocidad con que el Sol genera neutrinos. Suponga que la energía se produce enteramente durante el ciclo protón-protón. *b*) ¿Con qué velocidad los neutrinos solares chocan contra la Tierra?
9. Suponga que tuviéramos una cantidad N de deuterones (^2H núcleos). *a*) ¿Cuál de los siguientes procedimientos con que se fusionan estos núcleos libera más energía y cuánta más? (A) $N/2$ reacciones de fusión del tipo $^2H + {}^2H \rightarrow {}^3H + {}^1H$, o (B) $N/3$ reacciones del tipo $^2H + {}^3H \rightarrow {}^4He + n$, empleando $N/3$ núcleos de ^3H que se obtienen primero en $N/3$ reacciones de tipo A. *b*) Indique los núcleos del producto final que se obtienen con los dos procedimientos y la cantidad de cada uno.
10. El radio no comprimido del perdigón de combustible del problema resuelto 51-8 es 20 μm. Suponga que el perdigón comprimido "se quema" con una eficiencia de 10%. Es decir, apenas 10% de los deuterones y 10% de los tritones participan en la reacción de fusión de la ecuación 51-8. *a*) ¿Cuánta energía se libera en cada microexplosión de un perdigón? *b*) ¿A cuánta TNT equivale cada perdigón? El calor de combustión de TNT es 4.6 MJ/kg. *c*) Si se construye un reactor de fusión basando en 100 microexplosiones por segundo, ¿qué potencia se generará? (Nótese que una parte de esta potencia debe servir para operar los láseres.)

CAPÍTULO 52

FÍSICA DE PARTÍCULAS Y COSMOLOGÍA

La física de partículas se ocupa de lo muy pequeño. Formula preguntas referentes a la estructura de la materia en su nivel más elemental o fundamental. A partir de los desechos de colisiones de mucha energía, los físicos han logrado crear una enorme variedad de partículas, estudiar sus propiedades, clasificarlas en grupos y desentrañar así su estructura interna. La cosmología se ocupa de lo muy grande: el origen y la evolución del universo. Al estudiar la radiación que nos llega del universo es posible extraer conclusiones de cómo se formó y de cuál será su futuro. Quizá sorprenda el hecho de que hayamos agrupado esos dos temas en un capítulo. En realidad están estrechamente conectados: lo que los físicos descubren sobre las propiedades de las partículas elementales nos revela la estructura del universo justo después de su nacimiento, y las conclusiones de los cosmólogos fijan el límite a la diversidad de partículas que pueden existir y a sus interacciones.

52-1 INTERACCIONES DE LAS PARTÍCULAS

Existen miles de compuestos químicos con diverso grado de complejidad. Sería imposible entender esa enorme cantidad de sistemas si no fuera por la simplicidad básica de las 116 unidades fundamentales (elementos) de que constan y del número relativamente pequeño de tipos de enlaces a través de los que interactúan. Si queremos entender la química, no es necesario estudiar las propiedades de tantos compuestos, sino tan sólo las de unos 100 elementos, junto con unos pocos tipos fundamentales de enlaces entre ellos.

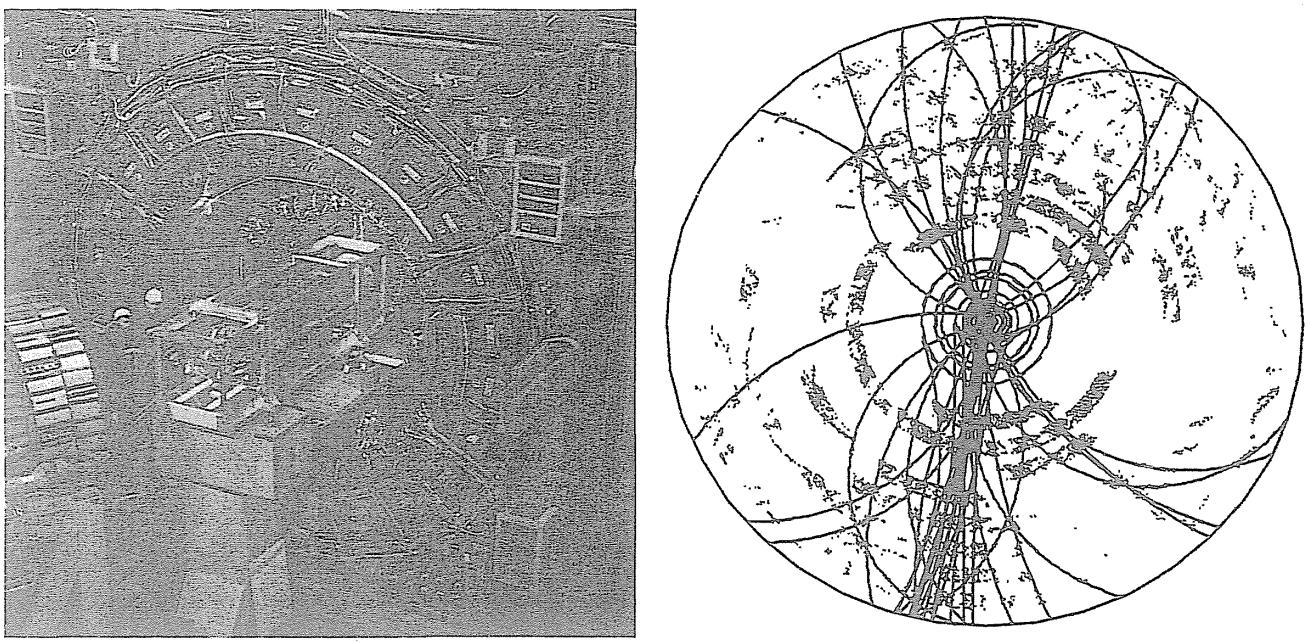
En realidad la tarea es más simple todavía. Los 116 elementos conocidos hasta hoy pueden clasificarse en grupos de propiedades semejantes: gases inertes, halógenos, metales alcalinos, metales de transición, tierras raras, etc. Si conocemos las propiedades de un miembro de un grupo, será posible inferir las propiedades del resto de ese grupo.

El mundo subatómico puede conocerse en una forma parecida. Sabemos que los 116 tipos de átomos no son unidades fundamentales, sino que a su vez se componen de tres partículas distintas: protones, neutrones y electrones. Cuando profundizamos en su análisis, haciendo chocar las partículas a alta energía y examinando el resultado de las colisiones (Fig. 52-1), descubrimos lo que a primera vista parece una gran complejidad similar a la de la química: se producen cientos de partículas diferentes. Pero cuando nos fijamos bien, nos damos cuenta de que es posible clasificarlas en unos cuantos grupos cuyos miembros presentan propiedades afines. A la postre esa clasificación nos ofrece pistas sobre la subestructura que una vez más se basa en un reducido número de partículas verdaderamente fundamentales y de posibles interacciones entre ellas.

Las cuatro fuerzas

Las fuerzas conocidas del universo pueden agruparse en cuatro grandes tipos. Por orden de intensidad creciente son la gravitacional, la fuerza débil, la electromagnética y la fuerza fuerte. Las cuatro desempeñan funciones importantes no sólo en las interacciones entre partículas, sino también en su decaimiento y conversión en otras.

1. *Fuerza gravitacional.* Sobra decir que la gravedad tiene extremada importancia en la vida diaria, pero carece abso-



a) *b)*

FIGURA 52-1. *a)* Sistema detector CDF en Fermilab. Las colisiones entre protones y antiprotones tienen lugar en su interior y producen multitud de partículas que el detector registra y sigue. *b)* Un ejemplo de las trayectorias de las partículas que salen de la región de las colisiones, tal como las reconstruye el detector. Las trayectorias curvas se deben a la presencia de un campo magnético, el cual permite determinar el momento de las partículas. Si desea más información visite http://www-cdf.fnal.gov.

lutamente de ella en la escala de las interacciones fundamentales entre partículas en el ámbito subatómico. Una cifra nos dará una idea más clara: la fuerza gravitacional entre dos protones cuyas superficies apenas se toquen es aproximadamente 10^{-38} de la fuerte fuerza existente entre ellos. La principal diferencia entre la fuerza de gravedad fuerte y el resto de las fuerzas radica en que, en la escala práctica, la gravedad es acumulativa y de alcance infinito. Por ejemplo, el peso del lector es el efecto acumulativo de la fuerza gravitacional ejercida por cada átomo de la Tierra, sobre todos los átomos de su cuerpo.

2. *Fuerza débil.* Causa el decaimiento nuclear beta (Sec. 50-5) y otros procesos similares de decaimiento que afectan a las partículas fundamentales. No interviene de manera importante en el enlace de los núcleos. La fuerza débil que existe entre dos protones vecinos representa un 10^{-7} de la que hay entre ellos; su alcance no llega a 1 fm. En otras palabras, con separaciones mayores que esa cantidad, la fuerza débil entre partículas resulta insignificante. Con todo, ayuda a conocer el comportamiento de las partículas fundamentales, y sin ella no podríamos entender la evolución del universo.

3. *Fuerza electromagnética.* El electromagnetismo es importante en la estructura y en las interacciones de las partículas fundamentales. Por ejemplo, algunas interactúan o se desintegran principalmente a través de este mecanismo. Las fuerzas electromagnéticas tienen alcance infinito, pero el blindaje generalmente atenúa su efecto en los objetos ordinarios. Las propiedades de átomos y moléculas depende de ellas y, en último término, muchas fuerzas macroscópicas comunes (fricción, resistencia al aire, arrastre y tensión) se deben a ella. La fuerza electromagnética entre protones vecinos es unas 10^{-2} menor que la fuerza fuerte, pero dentro del núcleo puede operar de modo acumulativo porque no hay blindaje. De ahí que pueda competir con la fuerza fuerte para determinar la estabilidad y la estructura de los núcleos.

4. *Fuerza fuerte.* Esta fuerza, causante del enlace de los núcleos, es la que predomina en las reacciones y decaimiento de las partículas fundamentales. Pero, como veremos luego, algunas partículas (entre ellas los electrones) no la experimentan en absoluto. Tiene un alcance relativamente corto, del orden de 1 fm.

Su intensidad relativa determina la escala de tiempo en la que opera. Si acercamos lo bastante dos partículas para que actúen algunas de estas fuerzas, la fuerza débil tardará más tiempo en provocar un decaimiento o reacciones que la fuerza fuerte. Como veremos más adelante, la vida media de un proceso de decaimiento suele ser una señal del tipo de interacción causante del proceso: las fuerzas fuertes se hallan en el extremo más corto de la escala de tiempo (a menudo apenas de 10^{-23} s). En la tabla 52-1 se resumen las cuatro fuerzas y algunas de sus propiedades. El tiempo normal de cada una ofrece una serie típica de intervalos temporales observados en

TABLA 52-1 Las cuatro fuerzas básicas

Tipo	*Intervalo*	*Intensidad relativa*	*Tiempo normal*
Fuerte	fm	1	10^{-23} s
Electromagnética	∞	10^{-2}	$10^{-14} - 10^{-20}$ s
Débil	$\ll 1$ fm	10^{-7}	$10^{-8} - 10^{-13}$ s
Gravitacional	∞	10^{-38}	Años

sistemas sobre los que opera cada una. Por lo general, ésta representa la típica vida media de una partícula que decae por esa fuerza.

Unificación de las fuerzas

Uno de los hitos en los avances de la historia de la física es la teoría del electromagnetismo formulada en el siglo XIX. Ésta se basó en la teoría de Maxwell y en los experimentos de Faraday y de Oersted según los cuales los efectos magnéticos podían producir campos y efectos eléctricos capaces de crear campos magnéticos. La electricidad y el magnetismo, ciencias hasta entonces separadas, quedaron vinculadas bajo la designación común de electromagnetismo. Más tarde se demostró que esta combinación constituye parte esencial de la teoría especial de la relatividad, según la cual los campos eléctricos y magnéticos pueden transformarse entre sí, debido enteramente al movimiento relativo del observador.

En el siglo XX se intentó profundizar este vínculo para incluir otras fuerzas. Primero se demostró que el electromagnetismo y la fuerza débil pueden interpretarse como dos aspectos de una misma fuerza denominada *electrodébil*. Ambas fuerzas se comportan de manera similar, si estudiamos las interacciones de las partículas que transportan una energía suficientemente alta. Conviene considerarlas independientes en muchos de los efectos que vamos a explicar, como lo hicimos con las fuerzas eléctricas y magnéticas al tratar los fenómenos electromagnéticos. La teoría de la fuerza electrodébil, que en 1967 fue propuesta independientemente por Stephen Weinberg y Abdus Salama (quienes, junto con Sheldon Glashow, otro creador de la teoría, recibieron el Premio Nobel de Física en 1979), establece lo siguiente: del mismo modo que el fotón es portador de la fuerza electromagnética, debe haber partículas pesadas que lleven la fuerza débil estas partículas nuevas y, en una escala de energía de 100 GeV (unas 100 veces la energía en reposo del protón), deberían comportarse de modo similar a un protón de mucha energía. En 1983 un equipo de investigación en el Centro Europeo de Física Nuclear, encabezado por Carlo Rubba y usando los métodos experimentales ideados por Simon van der Meer, descubrió esas partículas, conocidas ahora como W^+, W^- y Z^0; por este descubrimiento Rubbia y van der Meer obtuvieron el Premio Nobel de Física en 1984. Se consiguió así la evidencia para unificar las interacciones electromagnéticas y débiles en la interacción electrodébil.

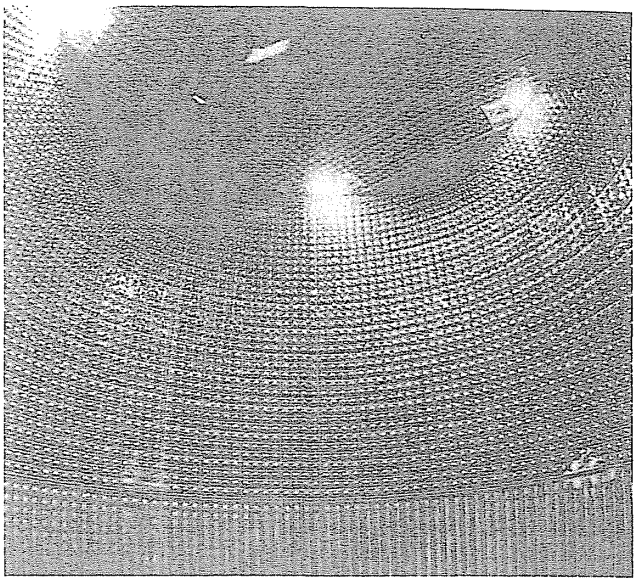


FIGURA 52-2. El detector Super-Kamiokande, situado en Japón. Contiene 32.000 toneladas de agua. El decaimiento de los protones en la molécula de agua produce destellos de luz, que se visualizan mediante 11,200 tubos fotomultiplicadores que pueden verse recubriendo los muros de la cámara. A la derecha los investigadores emplean una balsa para darles mantenimiento. El detector sirve además para observar los neutrinos emitidos por el Sol. Visite http:/www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp.

Después se intentó combinar las fuerzas fuertes y electrodébiles en un nivel más alto de unificación. Las teorías con que se hace se llaman *teorías unificadas grandes*; en el momento actual se han formulado muchas pero ninguna es hasta ahora la correcta. La energía de estas fuerzas es inmensa, quizá 10^{15} GeV (10^{11} veces la energía del acelerador de partículas más grande que se haya construido o proyectado). Por eso no es posible efectuar experimentos para probar directamente este tipo de teorías. En consecuencia, hay que basarse en energías obtenibles, en que los efectos son demasiado pequeños. Según una predicción de las teorías, el protón no debería ser una partícula estable pero decaer en una escala temporal mayor que 10^{31} años. (Compare esta cifra con la edad del universo, unos 10^{10} años.) Se ha investigado el decaimiento de los protones buscando una señal de luz característica de su decaimiento en un gran volumen de agua (Fig. 52-2). Hasta ahora en los experimentos no se ha observado el decaimiento de los protones, pero se ha impuesto un límite inferior de 10^{33} años a la vida media del decaimiento. Los resultados anteriores excluyen algunas de las grandes teorías unificadas y siguen efectuando experimentos para verificarlas.

El paso final de la unificación ha de incluir en el esquema la gravedad para crear una *teoría de todo*. Como todavía no se cuenta con una teoría cuántica de la gravedad, resulta difícil prever la forma que estas teorías adoptarán, pero pese a ello plantean un desafío al razonamiento teórico.

PROBLEMA RESUELTO 52-1. Supóngase que la vida media de los protones fuera 10^{31} años, tal como lo prevén algunas de las grandes teorías unificadas. *a)* ¿Cuánto hay que observar en promedio un litro de agua antes que veamos decaer uno de sus protones? *b)* ¿Qué volumen de agua se requerirá para que alcance una rapidez de decaimiento de un protón por día?

Solución *a)* Un litro de agua (aproximadamente 1000 g) contiene varias moléculas dadas por

$$\frac{(1000\text{ g})(6.02 \times 10^{23}\text{ moléculas/mol})}{18\text{ g/mol}} = 3.3 \times 10^{25}\text{ moléculas.}$$

Cada molécula contiene 10 protones (2 procedentes del hidrógeno y 8 del oxígeno), por lo cual el número de protones en un litro de agua es $N = 3.3 \times 10^{26}$. La rapidez de decaimiento R está dada por la ecuación 50-5 como

$$R = \lambda N = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} N = \frac{0.693}{10^{31}\text{ años}}\, 3.3 \times 10^{26}$$

$$= 2.3 \times 10^{-5}\text{ a}^{-1} = \frac{1}{43{,}000\text{ años}}.$$

En otras palabras, en promedio habrá que esperar 43,000 años para que un protón decaiga en un litro de agua.

b) Si $R = 1\text{ d}^{-1}$, obtendremos

$$N = \frac{R}{\lambda} = \frac{1\text{ d}^{-1}}{0.693/(10^{31}\text{ a})} = 5.3 \times 10^{33}\text{ protones}$$

o sea 5.3×10^{32} moléculas de agua. Esto nos da 1.6×10^{7} L, equivalente a un cubo de agua cuyos lados midan 25 m.

52-2 FAMILIAS DE PARTÍCULAS

Aprendemos mucho de las cosas clasificándolas. Es una técnica que utilizan comúnmente los científicos; por ejemplo, al agrupar plantas o animales en categorías basadas en ciertas características obvias de su estructura, el biólogo crea una base para estudiar su comportamiento. Desde el punto de vista científico, puede resultar más revelador comparar una araña con otra que con una mosca o una polilla. Una parte de la formación del científico consiste en aprender a hacer clasificaciones y emplearlas.

La taxonomía más antigua de las partículas se fundaba en su masa. A las más ligeras, entre ellas el electrón ($m_e c^2 = 0.511$ MeV), se les llamaba *leptones* (palabra de origen griego que significa "pequeño"). A las más pesadas, entre otras el protón ($m_p c^2 = 938$ MeV), se les llamaba *bariones* (palabra de origen griego que significa "pesado"). Un lugar intermedio ocupaban las partículas, entre ellas el pión ($m_\pi c^2 = 140$ MeV), que se conocían como *mesones* (palabra de origen griego que significa "medio"). Hoy estas clasificaciones basadas en la masa han dejado de ser válidas; por ejemplo, un leptón y muchos mesones poseen mayores masas que el protón. A pesar de ello, conservamos los tres nombres que describen partículas de propiedades afines. En la tabla 52-2 se resumen estas tres familias y algunas de sus propiedades.

Leptones

Son partículas fundamentales que interactúan sólo a través de interacciones débiles y electromagnéticas; aun cuando la fuerza fuerte pueda ser mayor que la débil o electromagnética en muchos órdenes de magnitud, no la experimentan en absoluto. Los leptones son verdaderas partículas fundamentales; carecen de estructura interna y no se componen de otras partículas todavía más pequeñas. Cabe suponer que se trata de partículas puntuales sin dimensiones finitas. Sabemos que poseen un espín de $\frac{1}{2}$.

En la tabla 52-3 se muestran los seis leptones que aparecen como tres pares de partículas. Cada par contiene una partícula con carga eléctrica (e^-, μ^-, τ^-) y un neutrino sin carga (ν_e, ν_μ, ν_τ). Ya tratamos del neutrino de electrón al referirnos al decaimiento beta (Sec. 50-5). Tanto los leptones con carga como los neutrinos tienen antipartículas.

Los neutrinos y los antineutrinos de electrón se producen en el decaimiento beta (Sec. 50-5) de los elementos radiactivos. También se crean en grandes cantidades durante los procesos de fusión solar; para observar los neutrinos solares y medir sus propiedades se han construido grandes detectores subterráneos como el de la figura 52-2. Dado que los neutrinos interactúan sólo muy débilmente con la materia, los solares nos llegan directamente del núcleo del Sol, donde tienen lugar las reacciones de fusión. (En cambio, los fotones solares nos llegan desde su superficie y, por consiguiente, no contienen información directa referente a los procesos de fusión del núcleo.) En los últimos 40 años han venido realizándose experimentos para contar esos neutrinos solares; los resultados indican que a la Tierra llega apenas de una tercera a una mitad del número esperado. También se producen neutrinos en las fuertes explosiones de las supernovas; la primera de las observaciones de estos neutrinos se realizó en 1987 (Fig. 52-3).

Algunas teorías de las propiedades de los neutrinos exigen que carezcan de masa. Otras permiten una masa pequeña pero definitivamente no cero. Medir la masa de un neutrino

TABLA 52-2 Tres familias de partículas

Familia	*Estructura*	*Interacciones*	*Espín*	*Ejemplos*
Leptones	Fundamental	Débiles, electromagnéticas,	Semi entero	e, ν
Mesones	Compuesta	Débiles, electromagnéticas, fuertes	Entero	π,K
Bariones	Compuesta	Débiles, electromagnéticas, fuertes	Semi entero	p,n

TABLA 52-3 La familia de leptones

Partícula	*Antipartícula*	*Carga de partícula (e)*	*Espín ($h/2\pi$)*	*Energía en reposo (MeV)*	*Vida media (s)*	*Productos comunes del decaimiento*
e^-	e^+	−1	$\frac{1}{2}$	0.511	∞	—
ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	$\frac{1}{2}$	<0.000015	∞	—
μ^-	μ^+	−1	$\frac{1}{2}$	105.7	2.2×10^{-6}	$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	$\frac{1}{2}$	<0.19	∞	—
τ^-	τ^+	−1	$\frac{1}{2}$	1777	2.9×10^{-13}	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$
ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0	$\frac{1}{2}$	<18	∞	—

pequeño, sobre todo el del electrón, plantea un gran problema experimental. Hasta ahora el mejor límite superior experimental de la energía en reposo del neutrino del electrón proviene del decaimiento beta de ^3H. Se calculó un límite similar de unos 20 eV, al comparar el tiempo de llegada de la explosión de neutrino proveniente de Supernova 1987A (Fig. 52-3) con el de la señal de luz de la supernvoa.

Si los neutrinos tienen masa, se les permite transformarse de un tipo a otro; por ejemplo, los neutrinos de electrón en neutrinos de muón. Esta conversión, llamada *oscilación de neutrinos*, todavía no se observa directamente, pero se sospecha como una explicación de la reducción del número de neutrinos de electrón que nos llegan del Sol. En 1999 el detector de la figura 52-2 aportó las primeras pruebas en favor de las oscilaciones de neutrino: el número de neutrinos de muón (producidos en la atmósfera por colisiones de rayos cósmicos de energía con las moléculas del aire) que nos llegan de arriba era distinto al que nos llegan de abajo (es decir, que se desplazan por la Tierra). Semejante discrepancia no podía explicarse simplemente por la absorción durante el paso por la Tierra, ya que los neutrinos tienen una trayectoria libre media que se mide en años luz; así que eran prácticamente nulas las probabilidades de ser absorbidos en esos momentos. En el momento actual se efectúan numerosos experimentos destinados a medir la masa del neutrino, en parte para conocer más a fondo sus propiedades, pero también debido a las consecuencias que una masa no cero tiene en la cosmología como veremos más adelante en el capítulo.

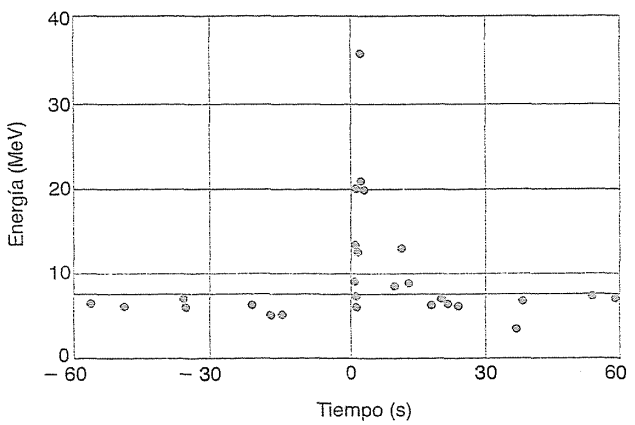


FIGURA 52-3. Datos de una ráfaga de neutrinos provenientes de la supernova SN 1987A.

El electrón es una partícula estable; en cambio, el muón y el tau se desintegran formando otros leptones según

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad \text{(vida media} = 2.2 \times 10^{-6}\ \text{s)},$$

$$\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \quad \text{(vida media} = 2.9 \times 10^{-13}\ \text{s)}.$$

Estos decaimientos se deben a la interacción débil, como concluimos de la presencia de neutrinos (que *siempre* indica un proceso de interacción débil) entre los productos de decaimiento y como inferimos al comparar la vida media del decaimiento con los tiempos típicos de la tabla 52-1. La forma de estos decaimientos se entiende a partir de la ley de conservación de los leptones explicada en la sección 52-3.

Mesones

Son partículas que interactúan con mucha fuerza y que tienen un espín entero. En la tabla 52-4 se ofrece una lista parcial de algunos mesones. En general, se producen en reacciones por una interacción fuerte; decaen casi siempre formando otros mesones o leptones, a través de interacciones electromagnéticas, fuertes o débiles. Por ejemplo, los piones pueden deberse a reacciones de nucleoenes; por ejemplo,

$$p + n \rightarrow p + p + \pi^- \quad \text{o} \quad p + n \rightarrow p + n + \pi^0,$$

y los piones pueden disminuir conforme a

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad \text{(vida media} = 2.6 \times 10^{-8}\ \text{s)},$$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad \text{(vida media} = 8.4 \times 10^{-17}\ \text{s)},$$

donde el primer decaimiento proviene de la interacción débil (indicada por los neutrinos y por la vida media), y el segundo de la interacción electromagnética (indicada por los fotones y por la vida media).*

* Aunque los neutrinos indican siempre un decaimiento de interacción débil, no todos los decaimientos de este tipo producen neutrinos. Lo mismo sucede con los fotones en el decaimiento electromagnético.

TABLA 52-4 Algunos mesones seleccionados

Partícula	*Antipartícula*	*Carga*[a] *(e)*	*Espín* $(h/2\pi)$	*Extrañeza*[a]	*Energía en reposo (MeV)*	*Vida media (s)*	*Productos comunes del decaimiento*
π^+	π^-	+1	0	0	140	2.6×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
π^0	π^0	0	0	0	135	8.4×10^{-17}	$\gamma + \gamma$
K^+	K^-	+1	0	+1	494	1.2×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
K^0	$\overline{K^0}$	0	0	+1	498	0.9×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$
η	η	0	0	0	547	5.5×10^{-19}	$\gamma + \gamma$
ρ^+	ρ^-	+1	1	0	770	4.4×10^{-24}	$\pi^+ + \pi^0$
η'	η'	0	0	0	958	2.2×10^{-21}	$\eta + \pi^+ + \pi^-$
D^+	D^-	+1	0	0	1869	1.1×10^{-12}	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
ψ	ψ	0	1	0	3097	7.6×10^{-21}	$e^+ + e^-$
B^+	B^-	+1	0	0	5279	1.6×10^{-12}	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
Υ	Υ	0	1	0	9460	1.3×10^{-20}	$e^+ + e^-$

[a] La carga y la extrañeza se refieren a la partícula. Los valores de las antipartículas llevan signo contrario. El espín, la energía en reposo y la vida media son iguales en una partícula y en su antipartícula.

Bariones

Son partículas que interactúan con mucha fuerza y que tiene espín semientero ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$,). La tabla 52-5 tiene una lista parcial de algunos bariones. Los miembros más conocidos de esta familia son los protones y los neutrones. Los bariones tienen antipartículas bien definidas; por ejemplo, el antiprotón ($\bar{p}$) y el antinuetrón ($\bar{n}$).

Podemos producir bariones más pesados en reacciones entre nucleones como

$$p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + K^+,$$

que produce el barión Λ^0 y el mesón K^+. El Λ^0 decae de acuerdo con

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \quad \text{(vida media} = 2.6 \times 10^{-8}\ \text{s)}.$$

Aunque en el decaimiento no se crean neutrinos, la vida media indica que el proceso está gobernado por la interacción débil. En la sección 52-3 expondremos las causas de este decaimiento "lento".

Las partículas de campo y las fuerzas de intercambio

Hay otra familia pequeña de partículas que no puede clasificarse en la categoría de leptones, mesones o bariones. Nos referimos a las *partículas de campo*, las que transportan las fuerzas con que interactúan.

La ley de gravitación de Newton y la de electrostática de Coulomb se basaron originalmente en el concepto de "acción a distancia". Más tarde, en el siglo XIX este concepto fue

TABLA 52-5 Algunos mesones seleccionados

Partícula	*Antipartícula*	*Carga*[a] *(e)*	*Espín* $(h/2\pi)$	*Extrañeza*[a]	*Energía en reposo (MeV)*	*Vida media (s)*	*Productos comunes del decaimiento*
p	$\bar{p}$	+1	$\frac{1}{2}$	0	938	∞	
n	$\bar{n}$	0	$\frac{1}{2}$	0	940	887	$p + e^- + \bar{\nu}_e$
Λ^0	$\overline{\Lambda^0}$	0	$\frac{1}{2}$	−1	1116	2.6×10^{-10}	$p + \pi^-$
Σ^+	$\overline{\Sigma^+}$	+1	$\frac{1}{2}$	−1	1189	0.8×10^{-10}	$p + \pi^0$
Σ^0	$\overline{\Sigma^0}$	0	$\frac{1}{2}$	−1	1193	7.4×10^{-20}	$\Lambda^0 + \gamma$
Σ^-	$\overline{\Sigma^-}$	−1	$\frac{1}{2}$	−1	1197	1.5×10^{-10}	$n + \pi^-$
Ξ^0	$\overline{\Xi^0}$	0	$\frac{1}{2}$	−2	1315	2.9×10^{-10}	$\Lambda^0 + \pi^0$
Ξ^-	$\overline{\Xi^-}$	−1	$\frac{1}{2}$	−2	1321	1.6×10^{-10}	$\Lambda^0 + \pi^-$
Δ^*	$\overline{\Delta^*}$	+2, +1, 0, −1	$\frac{3}{2}$	0	1232	5.9×10^{-24}	$p + \pi$
Σ^*	$\overline{\Sigma^*}$	+1, 0, −1	$\frac{3}{2}$	−1	1385	1.8×10^{-23}	$\Lambda^0 + \pi$
Ξ^*	$\overline{\Xi^*}$	−1, 0	$\frac{3}{2}$	−2	1530	7.3×10^{-23}	$\Xi + \pi$
Ω^-	$\overline{\Omega^-}$	−1	$\frac{3}{2}$	−3	1672	8.2×10^{-11}	$\Lambda^0 + K^-$
Λ_c^+	$\overline{\Lambda_c^+}$	+1	$\frac{1}{2}$	0	2285	2.1×10^{-13}	$p + K^- + \pi^+$
Λ_b^0	$\overline{\Lambda_b^0}$	0	$\frac{1}{2}$	0	5624	1.2×10^{-12}	$p + D^0 + \pi^-$

[a] La carga y la extrañeza se refieren a la partícula. Los valores de las antipartículas llevan signo contrario. El espín, la energía en reposo y la vida media son iguales en una partícula y en su antipartícula.

TABLA 52-6 Partículas de campo

Partícula	*Símbolo*	*Interacción*	*Carga (e)*	*Espín ($h/2\pi$)*	*Energía en reposo (GeV)*
Gravitón		Gravitación	0	2	0
Bosón débil	W^+, W^-	Débil	± 1	1	80.4
Bosón débil	Z^0	Débil	0	1	91.2
Fotón	γ	Electromagnética	0	1	0
Gluon	g	Fuerte (color)	0	1	0

reemplazado por el de campo. Dos partículas interactúan en los campos que crean; uno da origen a uno y la otra interactúa con ese campo en vez de hacerlo directamente con la primera partícula. La teoría cuántica del campo lleva esta noción más allá: supone que los campos son transportados por cuantos. En esta perspectiva, no decimos que la primera partícula genera el campo, sino que emite cuantos de él. Y después la segunda los absorbe. Por ejemplo, la interacción electromagnética entre dos partículas puede explicarse en función de la emisión y absorción de fotones, que son cuantos del campo electromagnético. Cada tipo de campo tiene sus partículas especiales. En la tabla 52-6 se incluye una lista de las partículas asociados a las cuatro fuerzas fundamentales.

Se da el nombre de *fuerza de intercambio,* a la que se obtiene a través del intercambio de partículas. Por ejemplo, una fuerza entre dos nucleones de un núcleo tiene lugar en el intercambio de piones. En este caso los piones, junto con otros mesones, actúan como partículas de campo relacionadas con la gran fuerza entre los nucleones.

¿Cómo es posible que una partícula —el protón por ejemplo— emita otra con masa cero y pese a ello siga siendo un protón? Este proceso parece violar la conservación de la energía. La solución del dilema nos la da la forma de las relaciones de incertidumbre entre energía-tiempo. El principio de incertidumbre constituye una limitación de la capacidad de medir un sistema. En otras palabras, si lo observamos en un intervalo temporal Δt, según la ecuación 46-9 habrá la incertidumbre correspondiente ΔE en su energía, cuyo mínimo está dado por

$$\Delta E = \frac{h}{2\pi\,\Delta t}. \qquad (52\text{-}1)$$

No es posible conocer la energía de un sistema con mayor precisión que esta ΔE, salvo que midamos un tiempo mayor que Δt. Si observamos durante un tiempo muy corto, la incertidumbre de la energía en reposo de un protón podrá al menos ser la misma que la de un pión, como se demuestra en el siguiente problema resuelto.

PROBLEMA RESUELTO 52-2. *a)* ¿Cuál es el intervalo de tiempo más largo en que puede observarse un protón para que la incertidumbre de su energía en reposo sea igual a la energía en reposo del pion? *b)* ¿Cuál es la distancia máxima que el pión puede recorrer durante ese lapso?

Solución *a)* Para que la energía en reposo del protón tenga una incertidumbre de $\Delta E = m_\pi c^2$, según la ecuación 52-1 el intervalo del tiempo de observación puede ser como máximo

$$\Delta t = \frac{h}{2\pi\,\Delta E} = \frac{h}{2\pi m_\pi c^2}$$
$$= \frac{4.14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}}{(2\pi)(140\ \text{MeV})} = 4.7 \times 10^{-24}\ \text{s}.$$

Con un intervalo temporal menor que 4.7×10^{-24} s, el protón puede emitir y absorber un pión, sin que observemos una violación de la conservación de la energía.

b) Si el pión se desplaza casi con la velocidad de la luz, la distancia máxima d que puede recorrer en dicho intervalo es

$$d = c\,\Delta t = (3.00 \times 10^8\ \text{m/s})(4.7 \times 10^{-24}\ \text{s})$$
$$= 1.4 \times 10^{-15}\ \text{m} = 1.4\ \text{fm}.$$

Esta distancia define el *intervalo* de la fuerza nuclear. Dos nucleones, situados a una distancia menor que 1.4 fm aproximadamente, pueden interactuar intercambiando piones. Si la distancia es más grande, no se da el intercambio y tampoco existe una fuerza nuclear.

52-3 LEYES DE CONSERVACIÓN

Sería difícil analizar los procesos físicos sin las leyes de conservación de la energía y sin las del momento linear y angular. Estas leyes de conservación nos ayudan a entender por qué se dan ciertos resultados (como en el caso de las colisiones que se estudiaron en el Cap. 6). Nos ayudan además a entender por qué nunca se observan algunos procesos (los que violan las leyes de conservación de la energía). En cierto sentido se trata de leyes empíricas, deducidas de la observación de procesos físicos y comprobadas rigurosamente en el laboratorio. En otro sentido nos revelan aspectos fundamentales de las leyes de la naturaleza.

Un ejemplo de una de estas leyes es la conservación de la carga eléctrica. Se llega a su formulación al observar los resultados de muchos procesos: la cantidad neta de carga no debe modificarse en ninguno de ellos. En forma equivalente podemos decir que la carga antes de una reacción o decaimiento debe ser igual a la existente después de esos procesos. Jamás se ha observado una violación de esta ley, aun cuando ha sido sometida a pruebas muy estrictas (Sec. 25-6).

Conservación del número de leptones

En las reacciones y en los decaimientos de las partículas fundamentales, a menudo aparece cierto conjunto de resultados, pero no se observa un conjunto de resultados relacionados que de lo contrario cabría esperar. En tales casos sospecha-

mos que interviene alguna ley de conservación desconocida, la cual permite el primer conjunto y prohíbe el segundo. Por ejemplo, podemos producir un neutrino de electrón cuando un protón captura un electrón:

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e.$$

Siempre encontramos neutrinos en este proceso, pero nunca antineutrinos. Más aún, la reacción, invariablemente, crea neutrinos de electrón, pero jamás muones ni neutrinos tau.

Explicamos la imposibilidad de observar determinados procesos proponiendo una ley de conservación del *número de leptones*, parecida a la de conservación de la carga eléctrica. A cada leptón le asignamos un número + 1 y a cada antileptón un número − 1. El resto de las partículas tienen número 0 de leptones. La ley de conservación aplicada a este número establece lo siguiente:

> *En cualquier proceso el número de leptones de tipo electrón, el de los de tipo muón y el de los de tipo tau han de permanecer constantes todos.*

Por lo que sabemos, la ley de la conservación de leptones es rigurosamente válida: no se ha descubierto ninguna violación a pesar de haberse realizado búsquedas experimentales sumamente rigurosas.

En el proceso de captura de electrones se asigna un número de leptón de electrón L_e de + 1 a éste y al neutrino de electrón, mientras que $L_e = 0$ en el protón y en el neutrón. Este proceso tiene entonces $L_e = +1$ en ambos lados y cumple con la ley de conservación del número de leptones. En caso de que se produjera un *anti*neutrino de electrón, el lado derecho tendría $L_e = -1$ y se violaría la ley. Se explica así la imposibilidad de observar este proceso. Si obtuviera otro tipo de neutrino (uno de muón, por ejemplo), el proceso tendría $L_e = +1$ a la izquierda y $L_e = 0$ en el lado derecho. Más aún, tendría $L_\mu = 0$ en el izquierdo y $L_\mu = +1$ en el derecho. Así pues, el proceso violaría la conservación del número de electrones y de letpones de muón, cosa que jamás se ha comprobado.

La ley de conservación de leptones nos permite explicar muchas observaciones experimentales. Igual que las leyes de conservación, resulta de gran utilidad cuando se analizan los decaimientos y las reacciones.

PROBLEMA RESUELTO 52-3. Use la conservación del número de leptones para averiguar la identidad de la partícula X en el siguiente decaimiento $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + X$.

Solución Asignamos a las partículas el número de leptones de tipo electrón L_e y el de leptones de tipo muón L_μ como sigue:

	μ^+	$\rightarrow e^+$	$+ \nu_e$	$+ X$
L_e:	0	−1	+1	?
L_μ:	−1	0	0	?

Nótese que a los leptones de tipo electrón se les asigna $L_\mu = 0$, y a los de tipo muón se les asigna $L_e = 0$.

La conservación del número de leptones significa que la cantidad de leptones de tipo electrón ha de ser igual antes y después del decaimiento; lo mismo puede afirmarse del número de leptones de tipo muón. El número de los del primer tipo es 0 antes del proceso, y por tanto, habrá de serlo también una vez concluido, para lo cual se requiere que la partícula X tenga $L_e = 0$. El número de leptones de tipo muón es − 1 antes del decaimiento y la partícula X ha de tener $L\mu = -1$ para que el número de leptones de tipo muón sea − 1 después del decaimiento.

Así pues, la partícula X ha de ser un leptón con $L_e = 0$ y $L\mu = -1$. Deberá estar cargada, pues en el proceso las otras partículas ya cumplen con la conservación de la carga de electrones. Una ojeada a la tabla 52-3 indica que la única partícula con estas características es el antineutrino de tipo muón $\bar{\nu}_\mu$.

Conservación del número de bariones

Una ley similar de conservación se aplica a los bariones. A cada uno —el protón o el neutrón, por ejemplo— le asignamos un número B de + 1 y les asignamos $B = -1$ a los antibariones como el antiprotón. La ley de conservación del número de bariones establece:

> *En cualquier proceso el número total de bariones debe permanecer constante.*

Todavía no se ha observado una violación de esta ley. (Sin embargo, según algunas teorías, las grandes teorías unificadas explicadas en la Sec. 52-1, el protón puede desintegrarse y convertirse en no bariones. Esto violaría la ley de conservación de su número. Nunca se ha comprobado que ocurra; si se comprobara, habría que modificar la ley de conservación del número de bariones.)

Por ejemplo, consideremos la reacción en que se producen antiprotones cuando un haz de protones incide sobre un blanco de protones:

	p	$+ p \rightarrow$	p	$+ p$	$+ p$	$+ \bar{p}$
B:	+1	+1	+1	+1	+1	−1

En la reacción anterior, el número neto de bariones es + 2 en los lados derecho e izquierdo.

A diferencia de lo que ocurre con el número de leptones, hay un solo tipo de número de bariones. La ley de conservación aplicada a este último es una versión más general de la regla con que se analizaron los procesos nucleares en los capítulos 50 y 51; allí mantuvimos constante el total de neutrones más protones en todos los decaimientos y reacciones, lo cual equivale a conservar el número total de bariones porque los neutrones y protones son bariones.

Aun cuando hay leyes de conservación para ambos tipos de partículas (leptones y bariones), no existe una que se aplique a los mesones. Así, en una reacción de protones sobre protones, puede obtenerse cualquier cantidad de mesones (a condición de que las partículas incidentes posean suficiente energía cinética):

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+,$$

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-,$$

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+ + \pi^0 + \pi^0.$$

Obsérvese que se conserva la carga eléctrica en este proceso.

Extrañeza

Existen otros procesos difíciles de entender, si uno se basa exclusivamente en las leyes de conservación que acabamos de explicar. Consideremos, por ejemplo, el grupo de kaones (mesones K), que en muchos aspectos se asemejan a los piones. Como no hay una ley de conservación aplicable a ellos, cabría suponer que en las reacciones puede producirse cualquier cantidad de kaones. Por el contrario, comprobamos que se producen en pares; por ejemplo,

$$p + p \rightarrow p + p + K^+ + K^-,$$
$$p + p \rightarrow p + n + K^+ + \overline{K^0},$$

o, si se produce una solo, siempre está acompañado de otra partícula "extraña"; por ejemplo, un Λ^0.

$$p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + K^+.$$

Explicamos estos procesos (y la imposibilidad de observar otros que al parecer permiten las leyes previamente conocidas de conservación) asignando a las partículas un nuevo número cuántico denominado *extrañeza*, que obedece a otra ley conocida como *conservación de extrañeza.* Dos kaones (K^+ y K^0) se asignan para que tengan una extrañeza $S = +1$, y otros dos (K^- y $\overline{K^0}$) se asignan de modo que $S = -1$. Las partículas no extrañas (como p, n y e) tienen $S = 0$. Entonces la reacción en que se producen dos kaones tienen $S = 0$ en la izquierda (sólo partículas no extrañas) y también $S = 0$ en la derecha. Al barión Λ^0 se le asigna $S = -1$, de modo que la reacción donde se crea $\Lambda^0 + K^+$ tenga también $S = 0$ a ambos lados.

Cuando analizamos el decaimiento de las partículas extrañas, en ocasiones no se cumple la conservación de la extrañeza. Los kaones pueden desintegrarse y transformarse en dos piones (no extraños); por ejemplo,

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0.$$

Aquí tenemos $S = +1$ en la izquierda y $S = 0$ en la derecha, una clara violación de la conservación de extrañeza. Obtenemos una pista de cómo resolver el problema cuando medimos la vida de este decaimiento, que resulta ser de unos 10^{-8} s. Los kaones y los piones son partículas que interactúan con mucha fuerza; cabe, pues, esperar que el decaimiento ocurra con un tiempo de vida típica de interacción intensa en el rango de 10^{-23} s (Tab. 52-1). Pero sorpresivamente resulta que su velocidad disminuye en 15 órdenes de magnitud. ¿A qué se debe esta reducción?

Otra pista proviene del modo de decaimiento del K^+ que se observa con mayor frecuencia:

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

un proceso de interacción débil en que la vida media de 10^{-8} s no debería ser inusual. Al parecer la *interacción débil puede modificar la extrañeza* en una unidad. En ambos modos de decaimiento de los kaones, S cambia en una unidad. Pese a que no produce los neutrinos que suelen caracterizar un proceso de interacción débil, el decaimiento $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ se rige por la interacción débil. En este caso, la violación de la extrañeza es un indicio de que no puede ser una interacción fuerte (la extrañeza se conserva en ellas) y que por lo mismo ha de ser un decaimiento de interacción débil.

¿Se conserva la extrañeza durante la interacción electromagnética? Para contestar la pregunta buscamos decaimientos electromagnéticos que la violen, entre ellos $\Lambda^0 \rightarrow n + \gamma$. Por lo visto este no ocurre, por lo cual concluimos que *en la interacción electromagnética se conserva la extrañeza.*

Podemos resumir los resultados anteriores en la ley de conservación de la extrañeza:

> *En los procesos gobernados por interacciones fuertes o electromagnéticas, la extrañeza total debe permanecer constante. En los gobernados por la interacción débil, permanecerá constante o se modificará en una unidad.*

PROBLEMA RESUELTO 52-4. El barión Ω tiene $S = -3$. *a*) Se desea producirlo usando un haz de K^- que incide en los protones. ¿Qué otras partículas se originan durante esta reacción? *b*) ¿Cómo podría realizarse el decaimiento Ω?

Solución *a*) Las reacciones suelen ocurrir exclusivamente a través de la interacción fuerte que conserva la extrañeza. Consideremos la reacción

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + ?$$

En el lado izquierdo tenemos $S = 1$, $B = +1$ y $Q = 0$. En el lado derecho tenemos $S = -3$, $B = +1$ y $Q = -1$. Por eso, a las partículas de la derecha hay que agregar $S = +2$, $B = 0$ y $Q = +1$. Al analizar las tablas de mesones y bariones descubrimos que estos criterios pueden cumplirse con K^+ y K^0, de modo que la reacción es

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0.$$

b) El barión Ω no puede desintegrarse en una interacción fuerte por no estar disponibles los estados finales $S = -3$. En consecuencia, debe decaer y convertirse en partículas con $S = -2$ mediante la interacción débil, que puede modificar S en una unidad. Una de las partículas ha de ser un barión para que se conserve el número de ellos. He aquí dos posibilidades:

$$\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^- \quad \text{y} \quad \Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-.$$

52-4 EL MODELO DE LOS QUARKS

Los decaimientos y las reacciones en que intervienen mesones y bariones están sujetos a las leyes de conservación referentes a dos magnitudes: la carga eléctrica Q y la extrañeza S. Así, es lógico preguntar si existe alguna conexión entre ambas propiedades de una partícula. ¿Encontramos en un grupo de partículas semejantes (por ej. los mesones de espín 0 y los bariones de espín $\frac{1}{2}$) todas las combinaciones posibles de Q y de S? El hecho de hallar sólo un pequeño conjunto de combinaciones indica lo siguiente: las partículas están construidas conforme a una serie de reglas provenientes de unidades más fundamentales cuya carga eléctrica y extrañeza poseen ciertos valores.

Para empezar a contestar la pregunta referente a la posible estructura interna de las partículas, examinaremos la relación entre carga eléctrica y extrañeza. Para ello dibujamos un diagrama que muestre la carga eléctrica sobre un eje y la extrañeza sobre

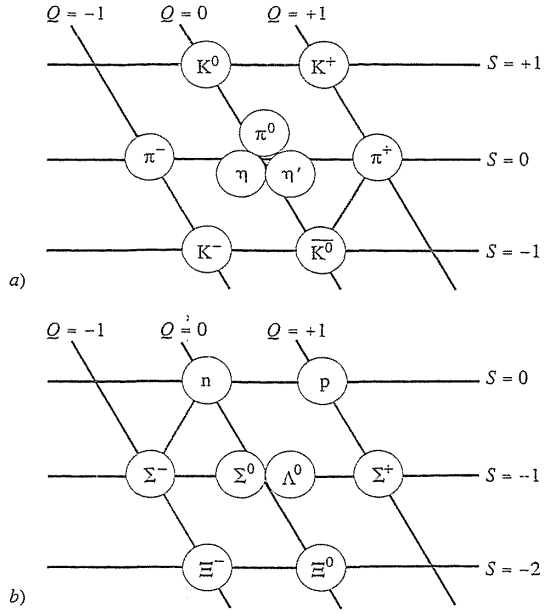


FIGURA 52-4. Diagrama que muestra *a*) los mesones de espín 0 y b) los bariones de medio espín. Las partículas se encuentran en una rejilla según su extrañeza S y su carga eléctrica Q. Las líneas de la rejilla para la carga eléctrica se trazaron oblicuamente para que los patrones aparezcan más simétricos.

otro. Al poner en esta rejilla un grupo de nueve de los mesones de espín 0 (Tab. 52-4), obtenemos la figura 52-4*a*; al hacer lo mismo con los bariones de espín $\frac{1}{2}$ (Tab. 52-5), obtenemos la figura 52-4*b*. La regularidad de estos patrones significa que quizá las partículas presenten una estructura básica común.

En 1964, Murray Gellman y George Zweig señalaron en forma independiente que los patrones regulares podían explicarse suponiendo que los mesones y los bariones se componen de partículas más fundamentales, denominadas *quarks*. El modelo original propuesto por ellos constaba de tres quarks, que se conoce como arriba (u), abajo (d) y extraño (s), junto con sus antipartículas (los antiquarks $\bar{u}$, $\bar{d}$ y $\bar{s}$). Sus propiedades se enlistan en la tabla 52-7. Más tarde se descubrió que los tres quarks no bastan para explicar las propiedades de todos los mesones y bariones; hace falta un total de seis de ellos, como veremos más adelante.

Los quarks poseen dos propiedades muy especiales que los distinguen de las demás partículas: 1) tienen cargas eléctricas fraccionales, iguales (en unidades de carga elemental e) $+\frac{2}{3}$ en el quark u y $-\frac{1}{3}$ en los quarks d y s. Ninguna otra partícula lleva este tipo de carga y no se ha confirmado experimentalmente la existencia de partículas libres con la carga fraccional. 2) Los quarks tienen además números fraccionales de bariones; los números de todas las partículas libres conocidas son + 1 (en los bariones), − 1 (en los antibariones) y 0 (en los no bariones como los mesones y los leptones). La carga eléctrica y el número de bariones en los antiquarks poseen la misma magnitud, pero signo contrario como los valores del quark correspondiente.

Todos los quarks tienen un espín de $\frac{1}{2}$. Eso significa que (según las reglas que rigen la combinación de espines en la mecánica cuántica) las combinaciones de dos quarks (o de un quark con un antiquark) pueden tener un espín total de 0 o 1 y la combinación de tres un espín total de $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$. En el caso de los mesones y bariones más ligeros a que nos hemos referido aquí, supondremos que las combinaciones de los quarks carecen de momento angular orbital. Es decir, en el lenguaje del capítulo 48, se combinan en estados s ($l = 0$). Y efectivamente hay combinaciones de quarks que incluyen estados p ($l = 1$) o estados d ($l = 2$), pero son más masivos que las partículas que estamos estudiando.

De acuerdo con este modelo los mesones se componen de un quark y de un antiquark, en tanto que los bariones se componen de tres quarks. Consideremos la combinación $u\bar{d}$ de un quark arriba y de un antiquark abajo tal que sus dos espines sumen 0. La carga del quark arriba (en unidades de e) es $+\frac{2}{3}$, y la del antiquark abajo es $+\frac{1}{3}$ (la carga de una antipartícula es lo contrario de la de la partícula). La combinación $u\bar{d}$ tiene $Q = +1$, $S = 0$ (porque ambos quarks tienen $S = 0$) y $B = 0$ (porque el quark tiene $B = +\frac{1}{3}$ y el antiquark tiene $B = -\frac{1}{3}$). Esta combinación tiene los mismos números cuánticos que el mesón π^+. Prosiguiendo en esta forma, descubrimos 9 combinaciones posibles de un quark y de un antiquark que se muestran en la tabla 52-8. Reproducen exactamente las combinaciones de carga eléctrica y de extrañeza de los mesones de espín 0.

Los bariones constan de tres quarks. Como cada uno de los quarks posee un número de barión de $+\frac{1}{3}$, el número total de barión de estas partículas compuestas será + 1, como cabe suponer tratándose de los bariones. Tomemos por ejemplo la combinación uno con el espín $\frac{1}{2}$. La carga eléctrica total es $Q = +\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = +1$, y la extrañeza total es 0. Ello corresponde a las propiedades del protón. Hay un total de 9 combinaciones posibles de tres quarks, las cuales se muestran en la tabla 52-9 junto con la identificación del barión correspondiente en la tabla 52-5. Una vez más, el modelo explica satisfactoriamente las propiedades de este grupo de partículas. Un éxito similar se consigue con los bariones de espín $\frac{3}{2}$ (Ejs. 14 y 15).

TABLA 52-7 Propiedades de tres quarks

Quark	*Símbolo*	*Antiquark*	*Carga*[a] (e)	*Espín* ($h/2\pi$)	*Número de barión* [a]	*Extrañeza*[a]
Arriba	u	$\bar{u}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0
Abajo	d	$\bar{d}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0
Extrañeza	s	$\bar{s}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	−1

[a] Los valores de la carga, del número de barión y de extrañeza se refiere a los quarks. Los de los antiquarks llevan signo contrario.

TABLA 52-8 Combinaciones quark-antiquark

Combinación	*Carga* (*e*)	*Número de barión*	*Extrañeza*	*Identidad*
$u\bar{u}$	0	0	0	π^0, η, η'
$d\bar{d}$	0	0	0	
$s\bar{s}$	0	0	0	
$u\bar{d}$	+1	0	0	π^+
$u\bar{s}$	+1	0	+1	K^+
$d\bar{u}$	−1	0	0	π^-
$d\bar{s}$	0	0	+1	K^0
$s\bar{u}$	−1	0	−1	K^-
$s\bar{d}$	0	0	−1	$\overline{K^0}$

El modelo de quarks no se limita tan sólo a reproducir los patrones geométricos simples de la figura 52-4. El lector debe ver en ellos una forma de organizar las partículas con propiedades similares, del mismo modo que la tabla periódica permite organizar los átomos con propiedades similares. La tabla periódica se basa en la teoría atómica que sirve para calcular las propiedades de los átomos prescindiendo de su estructura geométrica. De modo parecido, este modelo nos permite calcular las propiedades de las partículas: su masa, su momento dipolar magnético, su modo de decaimiento, su vida media y los productos de sus reacciones. La correspondencia entre las propiedades medidas y calculadas representa un éxito impresionante del modelo. De hecho, se explican todas las partículas conocidas (cientos de ellas) partiendo de él, con algunos quarks adicionales que describiremos más adelante.

El aspecto más original del modelo lo constituyen las cargas eléctricas fraccionales de los quarks. Todas las partículas descubiertas hasta la fecha transportan cargas eléctricas susceptibles de expresarse como múltiplos enteros de la unidad básica de carga *e*. Nunca se ha visto ninguna que lleve ese tipo de carga. En efecto, nadie ha visto jamás un quark libre, pese a los heroicos esfuerzos experimentales en busca de uno. Es posible que los aceleradores de partículas todavía no cuenten con suficiente energía para producir un quark libre. También se ha propuesto que su existencia está prohibida, de manera que quizá sólo observemos los ligados en mesones y bariones.

Aunque nunca se han visto quarks libres, sí se han observado quarks individuales *ligados*. Los experimentos de dispersión que penetran en el interior del nucleón revelan tres objetos en forma de punto que parecen tener un espín de $\frac{1}{2}$ y una carga de $+\frac{2}{3}$ o $-\frac{1}{3}$. Se obtiene así una prueba directa de que en el interior del núcleo existen partículas semejantes al quark.

La interacción entre quarks

¿Qué mantiene a los quarks unidos dentro de un mesón o un nucleón? Esta fuerza es la versión más básica de la fuerza fuerte, proveniente del intercambio de partículas denominadas *gluones*. Del mismo modo que la interacción electromagnética entre las partículas cargadas puede considerarse un intercambio de fotones, también la fuerte interacción entre quarks se logra intercambiando gluones. En consecuencia, imaginamos que un nucleón consta de tres quarks que intercambian gluones.

La interacción entre quarks presenta dos propiedades. 1) Se requiere mucha energía (quizá infinita) para separar dos con una distancia mayor que el tamaño de un nucleón o mesón (1 fm aproximadamente). Tal vez a ello se debe que todavía no se han visto quarks libres. Cuando tratamos de bombear energía en un nucleón para separar uno de sus quarks, lo que crea es un par quark-antiquark. El antiquark se combina con uno de los quarks para formar un mesón; esto coincide con nuestras observaciones: cuando estrellamos dos

TABLA 52-9 Combinaciones de tres quarks

Combinación	*Carga*[a] (*e*)	*Espín* ($h/2\pi$)	*Número de barión*	*Extrañeza*	*Identidad de medio espín*
uuu	+2	$\frac{3}{2}$	+1	0	—
uud	+1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	0	p
udd	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	0	n
uus	+1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	−1	Σ^+
uss	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	−2	Ξ^0
uds	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	−1	Λ^0, Σ^0
ddd	−1	$\frac{3}{2}$	+1	0	—
dds	−1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	−1	Σ^-
dss	−1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	−2	Ξ^-
sss	−1	$\frac{3}{2}$	+1	−3	—

nucleones con altas energías, obtenemos de nuevo los nucleones (u otros bariones) además de algunos mesones más. Cuanto más energía usemos más mesones producimos, pero sin que aparezcan quarks libres. 2) Aunque parezca paradójico, dentro del nucleón o del mesón los quarks parecen moverse libremente. La fuerza entre los quarks se aproxima a cero en distancias muy cortas (menos del tamaño de un nucleón).

Este comportamiento extraño de los quarks y de los gluones se entiende comparándolo con el electromagnetismo. Dos partículas con carga interactúan a través del intercambio de protones. Sin embargo, el fotón no transporta carga; de ahí que la interacción entre la partícula con carga y el fotón intercambiado no origine un intercambio de más fotones. En cambio, un quark puede emitir un gluón e interactuar con él. Y así pueden crearse gluones adicionales. Cuando un electrón interactúa con otro, un electrón puede emitir un fotón sin perder por ello su identidad. No sacrifica su "electricidad" (es decir, su carga eléctrica) para emitir el fotón. Por el contrario, un quark transfiere al gluón emitido una parte de su "fortaleza", que los físicos llaman "color". En la interacción de quarks, el color cumple la misma importante función que la carga eléctrica en la interacción de partículas cargadas. El fotón no transporta carga pero el gluón transporta color y, al hacerlo, cambia el color residual del quark que emitió al gluón. En realidad el quark está difundiendo su color en una esfera del tamaño de un nucleón (el alcance de los gluones), y por ello, la interacción entre los quarks se debilita mucho en estas distancias.

Los físicos de partículas escogieron nombres divertidos y caprichosos para designar las partículas fundamentales y sus propiedades. Algunos como quark, extrañeza, gluón o color son meras etiquetas. Los gluones proporcionan el "pegamento" que une los quarks, pero sin que se parezca a ninguna otro "pegamento" de la vida diaria. El "color" de los quarks y gluones nada tiene que ver con el uso ordinario de ese término. Simplemente es más fácil recordar esas propiedades y explicarles si les damos nombres conocidos.

Más quarks

En experimentos simultáneos efectuados durante 1974 en el Brookhaven National Laboratory de Nueva York y en el Stanford Linear Accelerator Center de California, los investigadores descubrieron un mesón especial cuya energía en reposo era tres veces mayor que la del protón. Se suponía que este nuevo mesón, llamado ψ (psi), decaería y formaría otros más ligeros en un tiempo de interacción fuerte quizá de unos 10^{-23} s. Por el contrario, se observó que lo hacía en 10^{-20} s aproximadamente, tiempo que caracteriza más la interacción electromagnética (Tab. 52-1). Más aún, los productos del decaimiento no eran mesones sino un electrón y un positrón, otra señal más de un proceso electromagnético.

¿Por qué la rápida trayectoria de interacción fuerte queda bloqueada por esa partícula, disminuyendo así su decaimiento en tres órdenes de magnitud? Un efecto similar lo comentamos en el caso de la extrañeza, un nuevo número cuántico que introdujimos en parte para explicar algunos decaimientos lentos. Atribuimos los decaimientos a una violación de la conservación de extrañeza.

En forma análoga suponemos que el decaimiento de ψ se hace lento cuando no se cumple otra ley de conservación, denominada *encanto*. De acuerdo con esta interpretación, el mesón ψ se compone de un nuevo quark c (encanto) y su antiquark $\bar{c}$. El quark c lleva una carga eléctrica de $+\frac{2}{3}$. Así como al quark extraño se le asigna un número cuántico de extrañeza $S = -1$, al quark encantado se le asigna un encanto de $C = +1$. Se disminuye la rapidez de decaimiento del mesón ψ, porque el quark c debe desintegrarse y formar otros (u, d, o s), en todos los cuales $C = 0$. Así pues, el decaimiento consiste en violar la conservación de encanto y, por consiguiente, no puede ocurrir en la interacción fuerte que conserva al encanto. El quark c puede combinarse también con otros para formar un mesón o un barión; por ejemplo, el mesón D^+ de la tabla 52-4 tiene un contenido de quark $c\bar{d}$, y el barión Λ_c^+ de la tabla 52, un contenido de quark udc.

En 1977 un descubrimiento similar se hizo en el Fermi National Accelerator Laboratory cerca de Chicago. Una vez más se descubrió un mesón pesado (en este caso, diez veces mayor que la energía en reposo del protón), que según se suponía se decaería y formaría otros en un tiempo característico de la interacción fuerte, pero se decayó originando $e^- + e^+$ en 10^{-20} s aproximadamente. En este caso, volvió a disminuir la rapidez del decaimiento por la violación de otra regla de conservación en que intervenía un nuevo quark, denominado b (fondo) y cuya carga eléctrica era de $-\frac{1}{3}$. Se supone que este nuevo mesón, denominado Υ (ípsilon) está constituido por la combinación $b\bar{b}$. Si al quark b le asignamos otro número cuántico que represente sin fondo, disminuirá la rapidez del decaimiento porque debe convertirse en quarks más ligeros que carezcan de dicha propiedad; esta violación de la conservación de sin fondo ocasiona la reducción de la rapidez del decaimiento. También el quark b puede combinarse con otros para formar varios mesones y bariones; por ejemplo, el mesón B^+ de la figura 52-4 tiene un contenido de quark $u\bar{b}$ y el barión Λ_b^0 de la tabla 52-5 se compone de quarks udb.

En 1994 se descubrió en Fermilab otro quark a partir de las colisiones de protón-protón.* Esas colisiones de gran energía crearon un nuevo quark y su antiquark, que al decaer rápidamente produjo multitud de partículas secundarias. A partir del momento de ellas se dedujo la existencia de las partículas originales en el decaimiento. A este nuevo quark, con una carga de $+\frac{2}{3}$ se le conoce como quark cima t y a semejanza de los quarks encantado y fondo tiene una propiedad común denominada *carácter cima*.

Una nueva simetría

La materia ordinaria consta de protones y neutrones, que a su vez están constituidos sólo por quarks u y d. Además consta de electrones y en la conversión de protones en neutrones o

* Para mayores detalles de este descubrimiento visite http://www. fnal.gov/pub/top95/top95_background.html.

de éstos en aquellos durante su decaimiento beta encontramos neutrinos de tipo electrón, junto con el positrón o el electrón.

Así pues, construimos el mundo entero y los fenómenos que observamos comúnmente a partir de dos pares de partículas fundamentales: los quarks u, y d y los leptones e^- y ν_e. Dentro de cada par las cargas eléctricas difieren en una unidad ($+\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{3}$; -1 y 0).

Si efectuamos experimentos a un nivel de energía un poco más alto, encontraremos nuevos tipos de partículas: un nuevo par de leptones (μ^- y su neutrino ν_μ) y otro de quarks (c y s). Una vez más, dentro de cada par las cargas eléctricas difieren en una unidad. Con energías aún más elevadas aparecen un nuevo par de leptones (τ y ν_τ) y de quarks (t y b).

Por tanto, las partículas verdaderamente fundamentales —los quarks y los leptones— aparecen en pares, y un par de quarks y de leptones puede combinarse en una "generación" así:

1a. generación: $\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$

2a. generación: $\begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$

3a. generación $\begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$

Las propiedades de estos seis quarks y leptones se resumen en el apéndice F.

Al modelo de la estructura de las partículas elementales descrito hasta ahora se le conoce como *modelo estándar*. En él hay tres generaciones de leptones y de quarks, que supuestamente son partículas elementales. El resto de las partículas materiales son compuestas. Las partículas interactúan a través de las fuerzas electrodébiles y fuerte (la gravitación ejerce un efecto insignificante en las interacciones de las partículas individuales). La fuerza electrodébil se debe al intercambio de fotones o de los llamados bosones débiles W^+, W^- y Z^0. Los seis quarks vienen en tres variedades o colores; hay ocho gluones coloreados que transportan la carga de color y que causan la interacción entre quarks. Ninguno de los bariones ni de los mesones tienen color; los tres quarks en un barión deben tener color diferente; el quark y el antiquark de un mesón deben llevar un color y su anticolor.

Aunque el modelo estándar ha logrado explicar satisfactoriamente las propiedades e interacciones de las partículas, ahora el lector se preguntará si nos hemos limitado a reemplazar un nivel de complejidad por otro. ¿Es posible que, en vez de cientos de mesones y bariones, nuestra lista de partículas contenga centenares de leptones y de quarks a media que efectuamos experimentos con energías cada vez más grandes? Hay datos sólidos de que el número de generaciones es exactamente tres y de que la lista de leptones y quarks descritos aquí sea completa. El número de generaciones de leptones se ve limitado por el decaimiento de ciertas partículas. Por ejemplo, Z^0 puede decaer y transformarse en un leptón y en su antileptón, digamos $e^+ + e^-$ o $\mu^+ + \mu^-$. El tiempo de vida del decaimiento depende de en cuántos de estos pares pueda decaer; del tiempo de vida observado se deduce que el número de generaciones de leptones no puede ser mayor de tres.

La pregunta anterior se contesta de modo muy distinto al examinar las propiedades del universo poco tiempo después de su nacimiento. En esa época era un gas caliente formado por leptones y quarks. Su evolución y sus propiedades subsecuentes se debían al número de generaciones existentes entonces. A partir de las observaciones sobre las propiedades actuales podemos concluir nuevamente que son tres. Es, pues, muy probable que nuestra lista de leptones y de quarks esté completa.

PROBLEMA RESUELTO 52-5. Analice los siguientes procesos a partir de su contenido de quarks:

a) $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$,

b) $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$,

c) $K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$.

Solución *a*) Por medio de la tabla 52-9 determinamos el contenido de quarks de las partículas y luego podemos escribir el decaimiento así

$$uud \rightarrow udd + e^+ + \nu_e.$$

Al cancelar en ambos lados el par común de quarks ud, obtenemos

$$u \rightarrow d + e^+ + \nu_e.$$

El quark u se transforma en un quark d por el decaimiento beta. Esta ecuación representa una interacción fundamental entre los quarks y también podemos escribirla como

$$u \rightarrow d + W^+ \quad \text{y} \quad W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e.$$

b) El contenido de quark de Ω^- es sss (porque tiene una extrañeza -3), de modo que el decaimiento puede escribirse

$$sss \rightarrow uds + s\bar{u}.$$

Al cancelar en ambos lados el par común de quarks s, encontramos que el proceso neto es

$$s \rightarrow u + d + \bar{u},$$

usando las identidades de Λ^0 y K^- incluidas en las tablas 52-9 y 52-8. Es decir, transformamos el quark s en un quark d y creamos un par $u\bar{u}$ a partir de la energía de decaimiento.

c) Volvemos a reemplazar las partículas por su contenido de quark y entonces podemos escribir así la reacción

$$s\bar{u} + uud \rightarrow sss + u\bar{s} + d\bar{s},$$

y, al eliminar en ambos lados los quarks comunes de u, d, y s, nos queda

$$u\bar{u} \rightarrow s\bar{s} + s\bar{s}.$$

El proceso neto consiste en cancelar el par $u\bar{u}$ y la producción de dos pares $s\bar{s}$ en la energía de reacción.

Los ejemplos anteriores son típicos de los procesos de quark: la interacción débil puede convertir un tipo de quark en otro. Una interacción fuerte crea o destruye los pares quark-antiquark, pero no puede transformar un tipo de quark en otro.

52-5 LA COSMOLOGÍA DEL BIG BANG

Desde el inicio de la historia escrita, el hombre ha reflexionado sobre el origen y el futuro del universo, una rama de la ciencia que hoy se conoce como *cosmología*. Antes del siglo XX estas ideas provenían en su mayor parte de filósofos y teólogos, porque no se contaba con evidencia experimental de ningún tipo para fundamentar una teoría científica. En ese siglo, dos trascendentales descubrimientos abrieron el camino para formular una teoría coherente que hoy aceptan casi todos los físicos.

La expansión del universo

El primero de ellos lo realizó el astrónomo Edwin Hubble (Fig. 52-5) durante la década de 1920. Estudiaba los diminutos objetos llamados *nebulosas* en aquellos años. Al resolver las estrellas individuales en nebulosas, consiguió demostrar que son galaxias como la Vía Láctea y que se componen de millones de estrellas. Más sorprendente aún, dedujo que las galaxias se alejan entre sí y de nosotros y que a una mayor distancia corresponde una velocidad rececional mayor. En otras palabras, si d es la distancia entre la galaxia y la Tierra (o cualquier otro punto de referencia en el universo) y si v es la velocidad con que parece alejarse, la ley de Hubble nos da

$$v = Hd, \qquad (52\text{-}2)$$

donde H es la constante de proporcionalidad denominada *parámetro de Hubble*.

El parámetro de Hubble tiene las dimensiones de inverso del tiempo. Su valor puede calcularse sólo mediante experimentos: hay que deducir en forma independiente la distancia entre una galaxia y la Tierra, así como la velocidad en relación con ella. La velocidad rececional puede medirse fácilmente usando el corrimiento Doppler de la luz proveniente de la galaxia (Fig. 39-28), pero la escala de distancias es difícil de determinar (de hecho, las primeras estimaciones de Hubble se equivocaron en un factor de 10). La figura 52-6 ofrece un ejemplo de datos más recientes que confirman la ley de Hubble* y dan una serie de valores de su parámetro. El mejor conjunto de datos actuales da un valor de

$$H = 72 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}},$$

donde Mpc (megaparseg) es una unidad con que suele medirse la distancia de la escala cósmica:

$$1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc} = 3.26 \times 10^6 \text{ años-luz} = 3.084 \times 10^{19} \text{ km}.$$

A causa de las incertidumbres que presentan las estimaciones de la escala cósmica de la distancia, el parámetro de Hubble también es incierto y sus valores posibles fluctúan entre 65 y 80 (km/s)/Mpc.

Si el universo se ha venido expandiendo desde siempre y a una misma velocidad, H^{-1} será su edad. Con el valor aceptado del parámetro de Hubble es posible estimarla en 14×10^9 años; la variación de la incertidumbre de H permite valores en el rango de $12 - 15 \times 10^9$ años. Pero, como veremos más adelante, la expansión del universo no ha sido constante, y por lo mismo, su verdadera edad es menor que el valor actualmente deducido de H^{-1}.

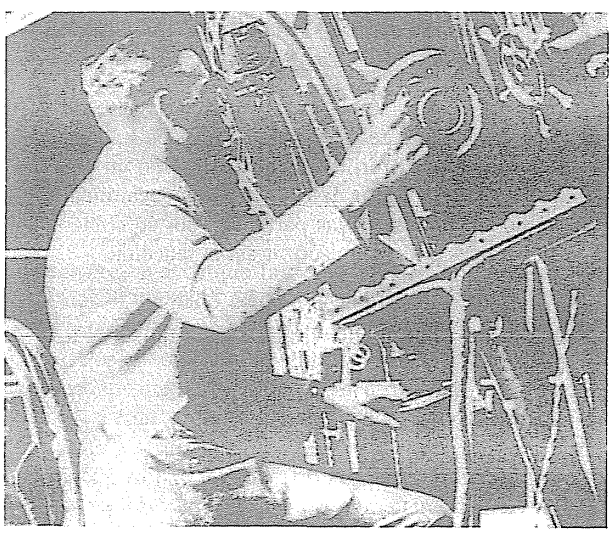


FIGURA 52-5. Edwin Hubble (1889-1953) en los controles de un telescopio de 100 in en Mount Wilson, donde realizó gran parte de las investigaciones que lo condujeron a proponer que el universo se está expandiendo.

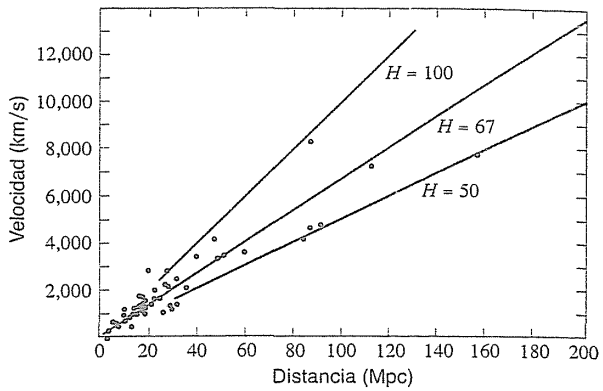


FIGURA 52-6. Relación entre velocidad y distancia en grupos y conglomerados de galaxias. Las líneas rectas indican las relaciones de Hubble con varios valores de su parámetro H.

La radiación de fondo de las microondas cósmicas

Aunque se propusieron otras explicaciones de la expansión del universo, la que obtuvo mayor aceptación fue la basada en la siguiente suposición: si hoy las galaxias se separan apresu-

* Véase "The Expansion Rate and Size of the Universe", de Wendy L. Freedman, Scientific American, noviembre de 1992. Consúltese también http:///www.hubbleconstant.com/.

radamente, debieron haber estado más cercanas en el pasado remoto. Si hacemos retroceder lo suficiente el reloj cósmico, descubriremos que en su estado primitivo el universo se componía de densidades extraordinariamente altas de materia y de radiación. Ambas se enfriaban a medida que se expandía; podemos imaginar la longitud de onda de los fotones radiantes que se alargaba durante el proceso. La radiación llenaba el universo entero en su estado compacto y sigue haciéndolo en la expansión. Esa expansión todavía la observamos hoy, enfriada al grado que su componente más intenso se halla en la región de microondas del espectro electromagnético. Se le da el nombre de *radiación de fondo de microondas cósmicas.*

Esta radiación la descubrieron en 1965 Arno Penzias y Robert Wilson de los Bell Laboratories en Nueva Jersey, mientras probaban una antena de microondas utilizada en las comunicaciones vía satélite (Fig. 52-7). Sin importar hacia donde dirigieran la antena, escuchaban el mismo silbido molesto de fondo. Con el tiempo se dieron cuenta de que estaban viendo un vestigio del universo primitivo y este descubrimiento les valió el Premio Nobel de Física de 1978.

La radiación de fondo de microondas tiene un verdadero espectro térmico como el que describimos en la sección 45-2. En la figura 52-8 se incluyen mediciones de su intensidad en varias longitudes de onda; el lector puede apreciar la gran correspondencia entre la ley de radiación de Planck y la temperatura de 2.725 K. Los puntos de los datos incluyen las mediciones recientes efectuadas de un satélite en órbita terrestre, con lo cual se elimina la absorción atmosférica.

Las mediciones de la intensidad de este tipo de radiación en varias direcciones muestran lo siguiente: presenta una intensidad uniforme en todas direcciones; al parecer no proviene de una fuente particular en el cielo, sino que lo llena totalmente de una modo uniforme, como cabe esperar de la que llenó el universo primitivo. Con todo, las observaciones recientes revelan que hay fluctuaciones de temperatura de unos 10^{-5} K entre diversas regiones del cielo. Estos resultados han sido interpretados como prueba de la distribución no uniforme de la materia en el universo primitivo que condujo finalmente a la condensación de las estrellas y de las galaxias.

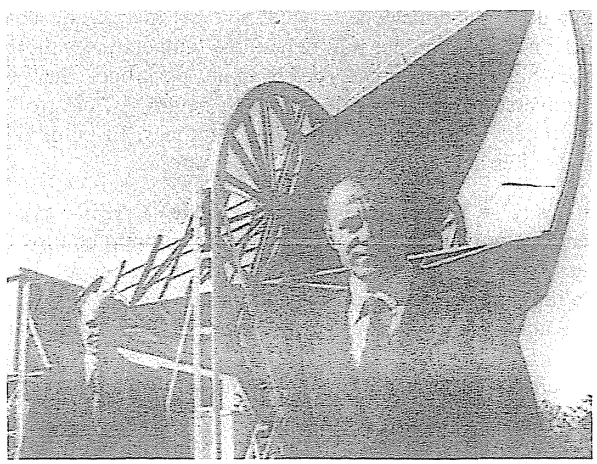


Figura 52-7. Arno Penzias (derecha) y Robert Wilson, de pie frente a una larga antena de cuerno, con la cual fueron los primeros en detectar la radiación de fondo de microondas.

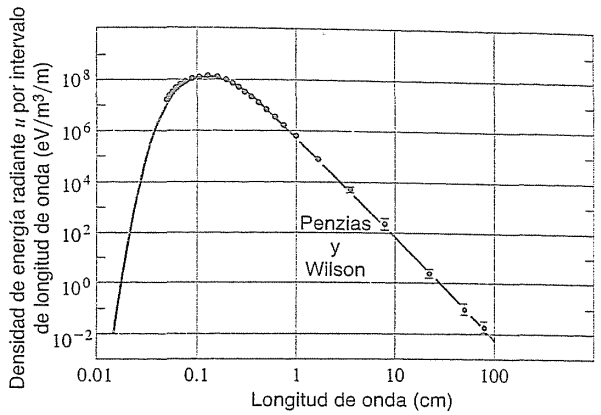


Figura 52-8. Espectro de la radiación cósmica de fondo de microondas. Los puntos representan las observaciones, y la línea llena, el espectro de Planck de la energía radiante correspondiente a una temperatura de 2.725 K. Nótese la excelente concordancia entre los puntos de datos y la curva teórica. Los datos entre 0.05 y 1.0 cm provienen de las observaciones hechas por el satélite COBE (COsmic Background Explorer) lanzado en 1989.

La densidad de energía de la radiación se calcula aplicando la ley de radiación de Planck (Ec. 45-6). La densidad numérica de estos fotones de fondo es de unos 400 por cm^3 y la densidad energética de unos 0.25 eV/cm^3 (correspondiente aproximadamente a la mitad de la energía en reposo de un electrón por m^3). La energía promedio por fotón es de unos 0.00063 eV, lo cual explica por qué rara vez nos percatamos de la presencia de estos fotones.

La cosmología del Big Bang

La teoría que mejor concuerda con estos dos resultados experimentales (la ley de Hubble y la radiación de fondo) es la *cosmología del Big Bang.* De acuerdo con ella, el universo nació hace unos 10-15 mil millones de años en un estado de extrema densidad y temperatura. No había galaxias o ni siquiera la materia amontonada como la conocemos hoy; en aquella época tan remota el universo estaba constituido por gran diversidad de partículas y antipartículas, más la radiación. La densidad de la radiación y de la materia se relacionan con la temperatura del universo. A medida que se expande va enfriándose (igual que se enfría cualquier sistema termodinámico). Si hacemos algunas suposiciones razonables sobre la rapidez de expansión, descubriremos una relación entre la temperatura y el tiempo transcurrido desde que se formó el universo:

$$T = \frac{1.5 \times 10^{10}\ s^{1/2} \cdot K}{t^{1/2}}, \qquad (52\text{-}3)$$

donde la temperatura T se da en K y el tiempo t en segundos.

La radiación en el universo primitivo estaba constituida por fotones de gran energía, cuya energía típica puede esti-

marse aproximadamente como kT, donde k es la constante de Boltzman, y T la temperatura en un tiempo particular t, determinado mediante la ecuación 52-3. Los procesos dominantes en aquella época pueden representarse como

$$\text{fotones} \longrightarrow \text{partícula} + \text{antipartícula} \qquad (52\text{-}4a)$$

$$\text{partícula} + \text{antipartícula} \longrightarrow \text{fotones} \qquad (52\text{-}4b)$$

Las reacciones de tipo 52-4*a* (llamadas *producción de pares*) son posibles sólo si la energía combinada de los fotones en el lado izquierdo es más grande que la energía total en reposo $2mc^2$ de la partícula y antipartícula en el lado derecho. Cuando la temperatura es lo bastante elevada, las dos reacciones serán posibles; la velocidad de ambas reacciones será la misma y habrá un equilibrio entre los fotones, lo mismo que entre las partículas y antipartículas. Conforme el universo se expande y se enfría, la energía promedio de los fotones disminuye hasta que en algún momento las reacciones del tipo 52-4*a* ya no serán posibles en determinado momento. Entonces no se producen nuevas partículas ni antipartículas de ese tipo y se altera el equilibrio porque pueden seguir apareciendo reacciones del tipo 52-4*b* (denominado *aniquilación*). El número de ambas partículas decrece a medida que se aniquilan entre sí.

Veamos un ejemplo concreto en el caso de los protones. La reacción puede representarse así

$$\gamma + \gamma \longrightarrow \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \quad \text{y} \quad \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \longrightarrow \gamma + \gamma.$$

La energía en reposo del protón es 938 MeV. Para que se produzca esta reacción, la energía en el lado izquierdo $2E\gamma$ debe al menos ser tan grande como $2m_pc^2$. Si representamos como kT la energía promedio del protón a una temperatura T, la temperatura correspondiente será

$$T = \frac{m_pc^2}{k} = \frac{938\ \text{MeV}}{8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K}} = 1.1 \times 10^{13}\ \text{K}.$$

Cuando la temperatura del universo cae por debajo de este valor, la reacción $\gamma + \gamma \rightarrow \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}$ será cada vez menos probable, mientras que $\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \rightarrow \gamma + \gamma$ continuará produciéndose. Conforme a la ecuación 52-3, se alcanza esa temperatura en el tiempo de

$$t = \left(\frac{1.5 \times 10^{10}\ \text{s}^{1/2}\cdot\text{K}}{T}\right)^2 = \left(\frac{1.5 \times 10^{10}\ \text{s}^{1/2}\cdot\text{K}}{1.1. \times 10^{13}\ \text{K}}\right)^2$$

$$= 2 \times 10^{-6}\ \text{s}.$$

En otras palabras, en épocas anteriores a unos 2 μs, el universo estaba lo bastante caliente para producir pares de protón-antiprotón, pero más tarde ocurre su aniquilación.

En épocas muy remotas, con temperaturas también más altas, quizá la radiación fue lo bastante caliente para crear parejas de quark-antiquark. De ser así, entonces el universo constaba fundamentalmente de leptones (y antileptones), de quarks (y antiquakrs) y de fotones. Posiblemente los quarks se unieron para crear mesones o bariones, pero la radiación era lo bastante fuerte para disociarlos tan pronto se formaban. No conocemos todavía los detalles de la interacción entre los quarks libres (ni siquiera si podían existir), tampoco podemos conocer mucho de las características del universo en aquellos años. Más bien comenzamos la historia en épocas posteriores, cuando el universo ya se había enfriado lo suficiente para que los quarks y los antiquarks formaran mesones y bariones.

$t = 10^{-6}$ s ($T = 1.5 \times 10^{13}$ K o $kT = 1300$ MeV). En ese entonces el universo constaba principalmente de protones, antiprotones, neutrones, antineutrones, leptones, antileptones y fotones. La rapidez con que se producían y se aniquilaban los pares (Ecs. 52-4*a* y 52-4*b*) era más o menos idéntica, de modo que el número de cada clase de partículas es aproximadamente igual al de su antipartícula. La cantidad de fotones es más o menos la misma que la de protones y ésta a su vez era aproximadamente igual a la de electrones.

Como los quarks y los antiquarks formaron mesones y bariones, la mayor parte de la influencia de la interacción fuerte ya había desaparecido para esta época. Las interacciones electromagnéticas y débiles continúan desempeñando una función central. Las primeras se representan por procesos como los de las ecuaciones 52-4*a, b* y las segundas pueden ocurrir en proceso como éste

$$\mathrm{n} + \nu_e \leftrightarrows \mathrm{p} + \mathrm{e}^- \quad \text{y} \quad \mathrm{p} + \bar{\nu}_e \leftrightarrows \mathrm{n} + \mathrm{e}^+$$

y otros similares, donde los neutrinos se crean y se destruyen con la misma rapidez. Mientras los leptones tengan suficiente energía, la rapidez de reacción inversa y hacia adelante serán iguales; así se conserva el equilibrio entre el número de leptones (e^+ y e^-) con carga eléctrica y neutrinos. Como esas reacciones convierten con la misma facilidad los neutrones en protones y viceversa, el universo primitivo contenía aproximadamente igual cantidad de protones y de neutrones.

$t = 10^{-2}$ s ($T = 1.5 \times 10^{11}$ K o $kT = 13$ MeV). En este momento dejan de producirse pares de nucleones (protones y neutrones). Sigue dándose la aniquilación de nucleones-antinucleones; debido a un ligero exceso de materia respecto a la antimateria (tema que abordaremos más adelante), desaparecen todos los antinucleones dejando sólo un exceso pequeño de nucleones. Los fotones aún tienen una temperatura suficientemente alta para crear pares de electrones-positrones. Entonces el universo se compone de protones, neutrones, electrones, positrones, neutrinos, antineutrinos y fotones. El número de protones es más o menos igual al de neutrones.

$t = 1$ s ($T = 1.5 \times 10^{10}$ K o $kT = 1.3$ MeV). Al irse expandiendo el universo, los neutrinos se enfrían junto con los fotones, y su energía promedio es aproximadamente kT. Dado que la diferencia de energía en reposo de neutrones-protones es de unos 1.8 MeV, los neutrinos ya no poseen bastante energía para convertir los protones en neutrones; pero es posible convertir neutrones en protones mediante —por ejemplo— la captura de neutrinos ($\mathrm{n} + \nu_e \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^-$). En este momento los neutrinos comienzan a "desacoplarse" de la materia en el universo, es decir, sus interacciones con ella se tornan menos frecuentes y las pocas restantes no ejercen mucha influencia sobre las propiedades de los neutrinos (sobre todo en su tem-

peratura o energía promedio). Desde entonces hasta el momento actual, los neutrinos siguen llenando el cosmos y enfriándose a medida que se enfría. Hoy su energía promedio es muy reducida, unos 0.0005 eV, y su densidad es de unos 400 por cm^3. A consecuencia de su desacoplamiento, se altera el equilibrio entre el número de neutrones y de protones y en $t = 1$ s los nucleones constan de un 73% de protones y de un 27% de neutrones.

$t = 6$ s ($T = 6 \times 10^9$ K o $kT = 0.5$ MeV). En la actualidad los fotones tienen muy poca energía para crear inclusive pares de electrones-positrones; la aniquilación de ellos ha acabado con casi todos los positrones y electrones. Con ello se altera aún más su capacidad de transformación para seguir ambas direcciones; por eso, el número relativo de protones continúa aumentando, y hoy hay aproximadamente 83% de protones y 17% de neutrones.

Hoy el universo se compone de un número N de protones, $0.2N$ neutrones, N electrones y una cantidad mucho mayor de fotones y neutrinos. En épocas pasadas el número de fotones era más o menos igual al de nucleones y de antinucleones; pero en el momento actual el número de protones representa apenas un ligero exceso respecto al de antiprotones que quedaron tras la aniquilación. Podemos deducir la razón entre fotones y nucleones, pues determina la cantidad relativa de ciertos elementos ligeros como el deuterio (^2H) que se formaron en el universo primitivo. Este número resulta ser 10^9 aproximadamente. En otras palabras, por cada 1,000,000,001 protones y, 1,000,000,000 antiprotones en el universo primitivo, después de la aniquilación queda apenas un protón y ningún antiprotón.

Por lo que sabemos, el universo actual no contiene estrellas ni galaxias hechas de antimateria. Consta enteramente del pequeño exceso de la que quedó tras la aniquilación. ¿Dónde se originó ese exceso de materia respecto a la antimateria? La prueba de esta asimetría entre ambas se observa en la diferencia en las propiedades de decaimiento del mesón neutro K K^0 y su antipartícula $\overline{K^0}$. La interacción que causa la asimetría todavía no se conoce bien, pero su efecto en la distribución de las partículas y de las antipartículas puede haber provocado el exceso durante la primera era en la evolución del universo cuando predominaban los quarks y los leptones. Hasta ahora el K^0 es el único sistema que muestra este efecto, aunque se piensa que también lo ocasionan el mesón neutro B B^0 y su antipartícula $\overline{B^0}$. En el Stanford Linear Accelerator Center está construyéndose una nueva instalación de aceleración y detección para probar esta predicción. Es otro ejemplo de cómo los resultados de la física de partículas incide profundamente en el desarrollo de la cosmología.

Esta descripción de la evolución del universo, ilustrada gráficamente en la figura 52-9 nos ha llevado desde su formación durante la Big Bang, a través de las eras calientes y turbulentas dominadas por reacciones nucleares, hasta el tiempo de unos cuantos segundos cuando la composición se volvió idéntica con las partículas que hoy lo constituyen. En la siguiente sección veremos cómo las partículas se combinaron para formar los núcleos y los átomos que se observan en la actualidad.

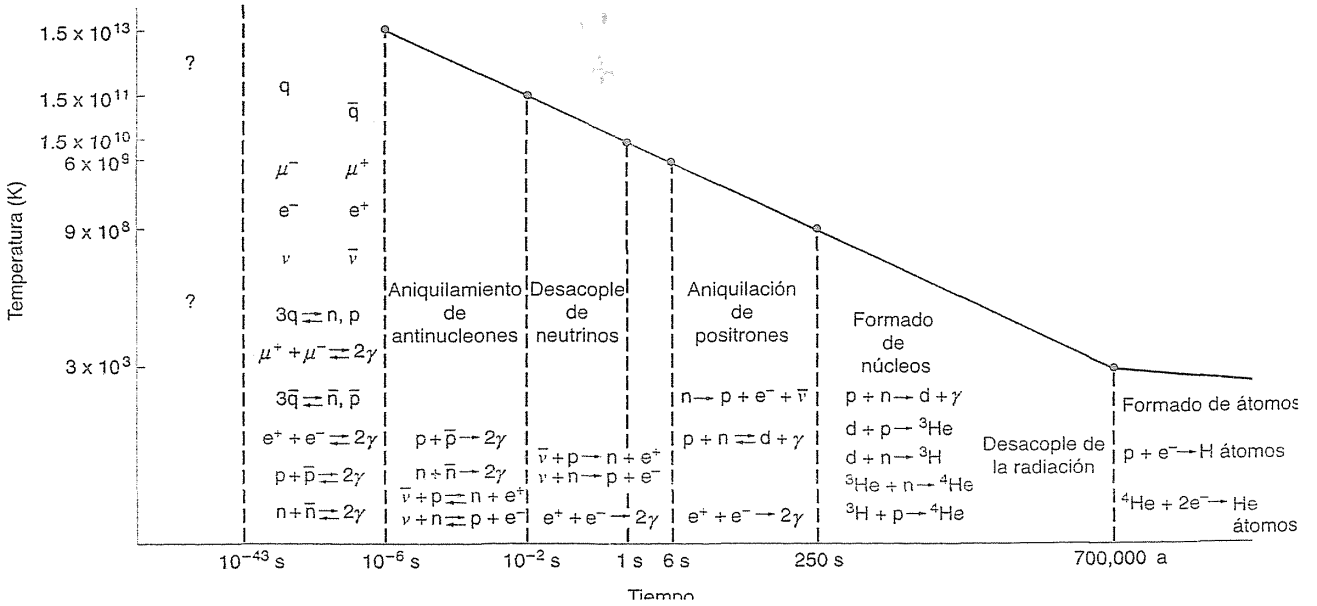


Figura 52-9. Evolución del universo según la cosmología de la Gran explosión (Big Bang). La línea llena indica la relación entre la temperatura y el tiempo conforme a la ecuación 52-3. Se muestran las reacciones importantes en cada área. (Aquí, q y $\bar{q}$ representan el quark y el antiquark, respectivamente.)

PROBLEMA RESUELTO 52-6. ¿Cuándo el universo se enfrió tanto como para permitir que la radiación creara pares $\mu^+ \mu^-$?

Solución Un muón de energía tiene una energía en reposo de 105.7 MeV. Los fotones presentan esta energía promedio a una temperatura determinada por

$$T = \frac{m_\mu c^2}{k} = \frac{105.7 \text{ MeV}}{8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}} = 1.23 \times 10^{12} \text{ K}.$$

El tiempo correspondiente se calcula por medio de la ecuación 52-3:

$$t = \left(\frac{1.5 \times 10^{10} \text{ s}^{1/2} \cdot \text{K}}{1.23 \times 10^{12} \text{ K}}\right)^2 = 1.5 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

52-6 NUCLEOSÍNTESIS

Cuando el universo tenía unos cuantos segundos de edad estaba constituido por protones, neutrones y electrones. Hoy se compone fundamentalmente de hidrógeno y de helio, con una pequeña abundancia de elementos más pesados. ¿Cómo se crearon los núcleos y átomos actuales a partir de la Big Bang? A la formación actual de los elementos se le conoce como *nucleosíntesis*. Según veremos luego, la observación de la abundancia presente de los elementos nos da pistas sobre los procesos que ocurrieron durante la gran explosión.

Nucleosíntesis en la Big Bang

El primer paso en la constitución de átomos complejos es la formación de los núcleos de deuterio (deuterones) debido a la combinación de un protón y de un neutrón de acuerdo con

$$\text{n} + \text{p} \rightarrow \text{d} + \gamma.$$

La energía de enlace del deuterón (Sec. 50-2) es 2.2 MeV, que es la del rayo γ que se libera durante la formación. La reacción inversa,

$$\text{d} + \gamma \rightarrow \text{n} + \text{p},$$

puede separar los núcleos de deuterio en sus protones y neutrones constitutivos, si la energía de rayos γ es por lo menos de 2.2 MeV.

Si el universo está lleno de fotones energéticos, las dos reacciones ocurrirán con la misma velocidad y el deuterio se disociará con la misma rapidez con que se creó. Pero si el universo es bastante viejo, los fotones no tendrán suficiente energía para realizar esa reacción y el deuterio empezará a acumularse.

Al concluir nuestra historia en la sección anterior, el universo tenía unos 6 s de edad y la energía promedio de la radiación era aproximadamente 0.5 MeV, menos de la que se requiere para evitar que el deuterio se siguiera formando. No obstante, recuérdese que la radiación tenía una distribución de energía de Planck (Fig. 52-10, que se comentó en la Sec. 45-2) y que hay quizá 10^9 fotones por cada protón o neutrón. Existe una cola de gran energía en la distribución; esto indica que con cualquier temperatura de la radiación siempre habrá algunos fotones de energía por arriba de 2.2 MeV capaces de separar los núcleos de deuterio. Si en promedio el número de ellos es menor que el de protones y de neutrones, el deuterio podrá comenzar a acumularse.

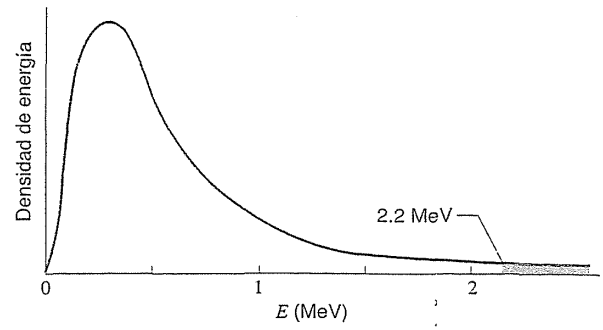


FIGURA 52-10. Espectro de energía de los fotones en un momento particular de la evolución del universo. Pueden disociar deuterones los fotones con energía por arriba de 2.2 MeV, que constituyen una pequeña parte del número total de fotones.

La razón aproximada de neutrón a protones es 0.2 en esta fase de la evolución del universo y hay alrededor de 10^9 fotones por nucleón, de manera que dicha razón es de unos 0.2×10^{-9}. Si la fracción de fotones con energía mayor que 2.2 MeV es más pequeña que 0.2×10^{-9}, de la cantidad total de fotones, habrá menos de un fotón energético por neutrón y el deuterio podrá continuar formándose. Con base en la expresión de la distribución de Planck (obtenida de la Ec. 45-6), encontramos que la fracción de fotones con una energía mayor de 2.2 MeV será más pequeña que 0.2×10^{-9} cuando la temperatura haya bajado a 9×10^8 K. En la ecuación 52-3 se ve que el descenso puede darse en un tiempo de 250 s.

En un tiempo de 250 s comienza a constituirse el núcleo de deuterio. Puesto que su abundancia es menor que la de protones o neutrones, los deuterones reaccionarán fácilmente con ellos conforme a las reacciones

$$\text{d} + \text{n} \rightarrow {}^3\text{H} + \gamma \quad \text{y} \quad \text{d} + \text{p} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma.$$

Por último, los ^{3}H y ^{3}He también reaccionarán con protones y neutrones, como se indica en

$${}^3\text{H} + \text{p} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma \quad \text{y} \quad {}^3\text{He} + \text{n} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma.$$

En las cuatro reacciones anteriores la energía de enlace de la partícula final es mayor que la del deuterón. Por eso, si la radiación es demasiado débil para impedir la formación de deuterones, también los será para evitar las reacciones sucesivas. Podemos, pues, suponer que casi todos los deuterones terminan convirtiéndose en ^{4}He, de modo que en esta etapa de la evolución del universo los productos finales son protones y las partículas α. No existen núcleos estables con un número de masa de 5, por lo cual estas reacciones no pueden proseguir más allá de ^{4}He.

Si queremos calcular el número relativo de núcleos de ^{4}He, hay que determinar el número de neutrones disponibles en $t = 250$ s, cuando los deuterones empiezan a formarse.

Cuando $t = 6$ s, alrededor de 17% de los nucleones son neutrones, pero a causa del decaimiento radiactivo del neutrón algunos serán convertidos en protones entre $t = 6$ s y $t = 250$ s. Usando la vida media del neutrón (unos 11 minutos), comprobamos que en $t = 250$ s los nucleones constarán aproximadamente de 12.5% de neutrones y de 87.5% de protones. Es decir, por cada 10,000 nucleones habrá 1250 neutrones y 8750 protones. Los neutrones se combinarán con 1250 protones para crear 625 núcleos de ^{4}He dejando $8750 - 1250 = 7500$ protones. De la cantidad total de núcleos existentes en el universo en este tiempo, 7.7% son ^{4}He y 92.3% son protones. En lo tocante a la masa, el ^{4}He constituye una parte de la masa total del universo dada por

$$\frac{4 \times 625}{7500 + 4 \times 625} = 0.25 \text{ o } 25\%.$$

La abundancia de ^{4}He en el universo actual debería ser igual a este valor, si ignoramos la combustión del hidrógeno para convertirse en helio que tiene lugar en la estrellas. La abundancia medida en varios sistemas, entre ellos las estrellas, las nebulosas gaseosas y planetarias, resulta ser $24 \pm 1\%$, valor que concuerda con nuestra estimación y según el cual nuestra descripción es sin duda razonable.

El último paso en la producción de materia durante la gran explosión es la formación de átomos neutros de hidrógeno y de helio, cuando los protones y los núcleos de ^{4}He se combinan con los electrones. Igual que en el caso de la formación de deuterones, esto no puede ocurrir cuando hay suficientes fotones en la cola de gran energía de la distribución de Planck para separar los átomos neutros que pueden producirse. En este caso queremos que la fracción relativa de fotones con energías por arriba de 13.6 eV (la energía de enlace del hidrógeno atómico) sea menor de 10^{-9}. Ello ocurre a temperaturas de unos 6000 K, que corresponde a una edad del universo de 200,000 años aproximadamente. (Al enfriarse la radiación, la densidad de energía queda más bajo el dominio de la materia que de la radiación. En este caso no es muy correcta la ecuación 52-3, que supone un universo dominado por la radiación. Si tenemos en cuenta dicho efecto, la temperatura del universo cuando empiezan a formarse átomos de hidrógeno se acerca más a 3000 K, correspondiente a una edad de 700,000 años aproximadamente.)

Una vez constituidos los átomos neutrales, prácticamente ya no quedan en el universo partículas libres con carga eléctrica. Es el momento de desacoplar la materia y el campo de radiación. El universo se torna transparente a la radiación, la cual recorre largas distancias sin interactuar con la materia. Esta radiación, que ha venido desplazándose desde la desacoplación, se observa hoy como el fondo de las microondas. La expansión del universo ha disminuido la temperatura de radiación en un factor de 1000 desde esa época.

La historia de la evolución del universo tal como la describe la cosmología inspirada en la Big Bang es sumamente interesante. Integra los experimentos modernos en la física nuclear y corpuscular a la física cuántica y a la termodinámica clásica. Aporta resultados susceptibles de comprobarse en el universo actual, entre ellos: la abundancia de helio, la radiación de fondo de las microondas y la pequeña abundancia del deuterio residual que no se "coció" integrándose a núcleos de masa 3. Es una historia que se basa decisivamente en la intensidad de las fuerzas nucleares o subnucleares y en varias partículas que intervinieron en el universo antiguo. Por ejemplo, si hubiera una cuarta generación de leptones, la rapidez de reacción en los procesos de interacción débil sería mayor y se formarían más neutrones, lo cual vendría a acrecentar la abundancia de ^{4}He. Para muchos cosmólogos su abundancia hoy observada limita a tres el número de generaciones de leptones.

Formación de los elementos pesados

Tras el desacoplamiento de la materia y de la radiación, la primera (constituida por hidrógeno y helio) quedó sometida exclusivamente a la fuerza gravitacional. En las observaciones recientes y muy precisas del fondo de microondas se ha descubierto que la distribución de la materia en esa época fue un poco no uniforme. Las regiones de densidad un poco mayor comenzaron a condensarse en nubes de densidad cada vez más grande. Al encontrarse las nubes bajo su propia gravedad, la temperatura se elevó hasta alcanzar suficiente intensidad como para desencadenar reacciones de fusión. Fue así como se formó la primera generación de estrellas.

En el capítulo 51 vimos que las estrellas convierten el hidrógeno en helio a través de reacciones de fusión. Después que una ha consumido su suministro de hidrógeno y se convierte en helio principalmente, puede empezar a contraerse otra vez, elevando así su temperatura. (Este incremento aumenta la presión de la radiación, lo cual a su vez agranda el radio de la estrella. El área superficial se incrementa más rápidamente que la temperatura, de modo que decrece la energía por unidad de área en la superficie y el color de la estrella pasa de amarillo a rojo. Ésta es la fase del *gigante rojo* en la evolución de una estrella.) Con el tiempo la temperatura alcanza un nivel tan alto que la barrera de Coulomb entre dos núcleos de ^{4}He puede franquearse exitosamente mediante su movimiento térmico y se produce la fusión del helio. Su reacción simple

$$^4\text{He} + {}^4\text{He} \longrightarrow {}^8\text{Be}$$

no contribuye a la fusión en una estrella, pues ^{8}Be es inestable y se divide con la misma rapidez con que se forma. La fusión de helio requiere que participe un tercer ^{4}He, de manera que la reacción neta es

$$^4\text{He} + {}^4\text{He} + {}^4\text{He} \longrightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma.$$

Una vez constituido el ^{12}C, podemos tener otras reacciones de ^{4}He, entre ellas

$$^{12}\text{C} + {}^4\text{He} \longrightarrow {}^{16}\text{O} + \gamma,$$

$$^{16}\text{O} + {}^4\text{He} \longrightarrow {}^{20}\text{Ne} + \gamma,$$

$$^{20}\text{Ne} + {}^4\text{He} \longrightarrow {}^{24}\text{Mg} + \gamma,$$

y así sucesivamente. Sus barreras de Coulomb son cada vez más altas y de ahí que exijan temperaturas crecientes.

Cuando el combustible de helio se agota, aparece de nuevo la contracción que eleva la temperatura y pueden ocurrir otras reacciones como la combustión del carbono:

$$^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \longrightarrow {}^{24}\text{Mg} + \gamma.$$

Con el tiempo alcanzan un nivel máximo en la curva de energía de enlace (Fig. 50-6) aproximadamente en $A = 56$. Más allá de este punto no se libera energía en las reacciones de fusión.

En la figura 52-11 se muestra la abundancia de núcleos en este intervalo de masa. Las abundancias relativas apoyan el escenario produciendo los elementos en las reacciones de fusión. Nótese que C tiene una abundancia de más de cinco órdenes de magnitud que Li, Be y B, que no se crearon durante estos procesos. Nótese asimismo que, en promedio, inclusive los núcleos Z pares presentan en promedio una abundancia de más de un orden de magnitud que sus vecinos Z impares. Las reacciones de fusión con ^{4}He producen sólo productos Z pares, de modo que la mayor abundancia observada de ellos concuerda con nuestra explicación de su formación.

Obsérvese detenidamente el último punto de la figura 52-11: indica que la abundancia *total* de los 50 elementos más allá de los núcleos en la variación de masa 56 es menor que la de todos los elementos, menos uno, en la región desde C hasta Zn. Al parecer, la mayor parte de la materia que conocemos se originó en los procesos de fusión.

El elemento más allá de $A = 56$ no puede obtenerse a través de reacciones de fusión en las estrellas. Más bien se crean mediante los procesos de captura de neutrones. Un núcleo en el interior de una estrella puede realizar esta acción hasta que su exceso de neutrones es suficiente y le hace querer convertir un neutrón adicional en protón con el decaimiento beta, $n \rightarrow p + e^+ + \bar{\nu}_e$, con lo cual aumenta en 1 el número de protones. De este modo, el número atómico crece un paso a la vez hasta alcanzar los núcleos más pesados que existen en la naturaleza. Por ejemplo, el proceso comienza así con Fe ($Z = 26$):

$$^{56}\text{Fe} + n \rightarrow {}^{57}\text{Fe} + \gamma$$

$$^{57}\text{Fe} + n \rightarrow {}^{58}\text{Fe} + \gamma$$

$$^{58}\text{Fe} + n \rightarrow {}^{59}\text{Fe} + \gamma$$

^{57}Fe y ^{58}Fe son estables, mientras que ^{59}Fe es radiactivo y presenta el decaimiento beta con una vida media de 45 días, transformándose en ^{59}Co ($Z = 27$). El proceso prosigue a medida que ^{59}Co captura un neutrón para convertirse en ^{60}Co, que es radiactivo, pasa por el decaimiento beta y se transforma en ^{60}Ni ($Z = 28$). Prosiguiendo así podemos producir todos los elementos más pesados a través del proceso de decaimiento beta-captura de neutrones.

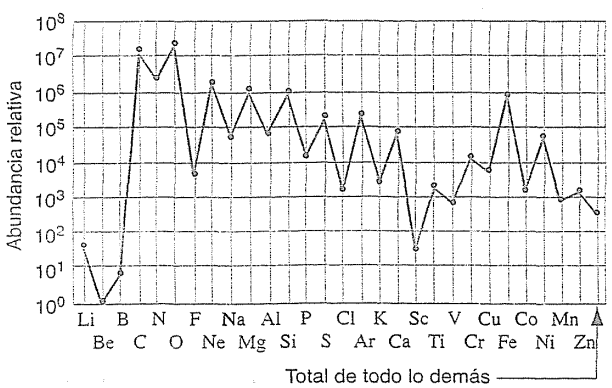


FIGURA 52-11. Abundancias relativas (por masa) de los elementos más allá del helio en el sistema solar.

Hay una densidad pequeña de neutrones en el interior de las estrellas, y por eso, este proceso tiene lugar lentamente durante la vida de una estrella. De ahí que se le conozca como nucleosíntesis por *proceso s* (s es la letra con que empieza la palabra inglesa *slow* = lentamente). Por otra parte, en una supernova explosiva la densidad de los neutrones puede ser $10^{10} - 10^{20}$ veces más grande, y el proceso entero a veces ocurre muy rápidamente (en cuestión de segundos o minutos). En este caso se le llama nucleosíntesis por *proceso r* (*r* es la letra con que empieza la palabra inglesa *rapid* = rápido). Muchos núcleos radiactivos se forman con mucha rapidez durante el proceso *r* para desintegrarse luego en los elementos estables de la naturaleza.

Los elementos resultantes se distribuyen en el espacio una vez concluida la nucleosíntesis por proceso s o r. Los elementos más allá de la masa 56 existentes en la Tierra se crearon de este modo en las estrellas de la primera generación. Los elementos del sistema solar (y de hecho también nosotros) están hechos de las cenizas recicladas de estrellas quemadas.

52-7 LA EDAD DEL UNIVERSO

En la sección 50-7 explicamos cómo con los métodos del fechado radiactivo se calcula la edad de la Tierra. Al examinar las cantidades relativas de isótopos padres e hijas en ciertos procesos del decaimiento radiactivo con una vida media en el intervalo $10^8 - 10^9$ años (por ejemplo, $^{238}\text{U} \rightarrow {}^{206}\text{Pb}$, $^{87}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}\text{Sr}$ y $^{40}\text{K} \rightarrow {}^{40}\text{Ar}$). Se ha determinado que las rocas más viejas de la Tierra tienen una edad aproximada de 4.5×10^9 años. Un valor idéntico se obtiene en el caso de los meteoritos y de las rocas procedentes de la Luna. Por tanto, podemos estar bastante seguros de que este valor representa el tiempo transcurrido desde que se condensó el sistema solar.

Sabemos que la edad del universo debe ser mayor que este valor, pues el sistema solar se constituyó a partir de elementos creados en el interior de las estrellas o en las supernovas. Su composición química actual quedó establecida durante una era anterior de nucleosíntesis, que tuvo lugar en una generación previa de las estrellas. Si queremos conocer la edad verdadera del universo, hay que determinar el intervalo temporal necesario para producir los elementos.

El tiempo total entre la Gran explosión (Big Bang) y el momento actual puede dividirse en cuatro periodos: 1) de la gran explosión a la formación de átomos neutros de H y He (t_1); 2) la condensación de galaxias y la formación de las estrellas de la primera generación (t_2); 3) la nucleosíntesis en las estrellas y las supernovas que dio origen a los elementos químicos actuales (t_3); 4) la formación y evolución del sistema solar a partir de los desechos de las primeras estrellas (t_4). La edad del universo es la suma de los siguientes cuatro términos:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4. \qquad (52\text{-}5)$$

Al estudiar la cosmología de la gran explosión, dijimos que el tiempo t_1 transcurrido desde ese momento hasta los átomos

neutros constituidos no es mayor de 10^6 años. No se conoce con exactitud el tiempo transcurrido t_2 desde las galaxias hasta la condensación a partir del hidrógeno y del helio creados en ella, pero se estima que se sitúa en el intervalo de $1–2 \times 10^9$ años. Sabemos que t_4 es 4.5×10^9 años, de modo que la edad del universo puede calcularse si obtenemos el tiempo t_3 asociado a la nucleosíntesis.

Este tiempo puede estimarse partiendo de las abundancias relativas de los productos que quedan al final de la nucleosíntesis. Tomemos, por ejemplo, los isótopos ^{235}U y ^{238}U, que hoy presentan una abundancia relativa de 0.72% (consúltese lo dicho en la Sec. 51-5 sobre el reactor de fisión natural). ^{235}U y ^{238}U han venido desintegrándose durante el intervalo transcurrido desde la formación del sistema solar. Su razón hace 4.5×10^9 años es (Prob. res. 51-4)

$$R(0) = R(t)e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t}$$
$$= (0.0072)e^{(0.984 - 0.155)(10^{-9}\ a^{-1})(4.5 \times 10^9\ a)} = 0.30.$$

Durante el intervalo t_3, ambos isótopos iban formándose más o menos continuamente a través del proceso r, en tanto que naturalmente también ocurría decaimiento relativo. Dada la producción de isótopos en este tiempo, la razón de su abundancia no se alteraba con la misma rapidez que durante el decaimiento libre en el intervalo t_4 (Fig. 52-12). La evidencia aportada por la abundancia del uranio indica que t_3 se halla en el intervalo $4–9 \times 10^9$ años; el análisis de las abundacias de otros núcleos con proceso r arroja valores similares aunque un poco mayores. La mejor estimación de t_3 es de unos 8×10^9 años, con un intervalo de $4–12 \times 10^9$ años.

Al combinar los resultados tenemos como estimación de la edad del universo

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$
$$= 10^6\ a + 1–2 \times 10^9\ a + 8 \times 10^9\ a + 4.5 \times 10^9\ años$$
$$= 14 \times 10^9\ años.$$

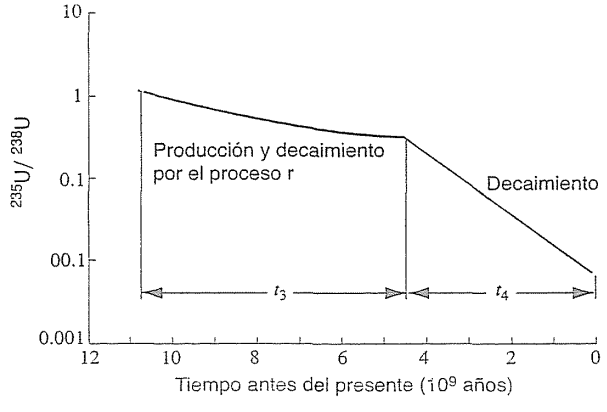


FIGURA 52-12. El cambio de la razón $^{235}U/^{238}U$ con el tiempo. Durante la vida del sistema solar (el tiempo t_4), la razón cambia debido solamente a los decaimientos relativos, alcanzando finalmente el valor actual de 0.0072. Durante el intervalo t_3, la producción por el proceso r ocurre junto con el decaimiento. La duración deducida para el intervalo t_3 depende del valor que adoptemos para la razón inicial, el cual debe determinarse mediante un cálculo.

Este número es un poco incierto a causa del intervalo de valores en el cálculo de t_3. Si tenemos en cuenta la incertidumbre obtendremos

$$t = 10–18 \times 10^9\ años.$$

Consideremos todas las implicaciones de la física contenidas en este resultado tan simple. Al calcular t_1 utilizamos el conocimiento acumulativo de la física de partículas, del electromagnetismo, de la física térmica y de la física atómica y nuclear para saber cómo se formó la materia tal como la conocemos. El intervalo t_2 se obtiene mediante cálculos en que se utilizan la termodinámica y la teoría gravitacional para analizar la condensación de la materia fría en estrellas calientes. La estimación de t_3 se basa en el conocimiento de la nucleosíntesis mediante los procesos r y s, basada en los estudios de la física nuclear efectuados en los laboratorios de la Tierra; el intervalo t_4 se basa en experimentos posteriores de física nuclear y en la investigación de la geoquímica.

Determinación cosmológica de la edad

Si hacemos la suposición aproximada, pero no muy correcta, de que el universo ha venido expandiéndose con la misma velocidad desde su formación, la separación d entre las galaxias comunes debería relacionarse con la edad de él conforme a

$$d = vt,$$

donde v es la velocidad (supuestamente constante) de separación. Al comparar el resultado anterior con la ecuación 52-2 vemos que la edad t del universo no es otra cosa que la inversa del parámetro de Hubble:

$$t = H^{-1}. \qquad (52\text{-}6)$$

La mejor estimación actual del parámetro de Hubble, $H = 72$ (km/s)/Mpc, produce un valor de la edad del universo

$$t = 14 \times 10^9\ años,$$

que concuerda de modo extraordinario con el valor obtenido mediante el cálculo por nucleosíntesis. El intervalo de incertidumbre del parámetro de Hubble, 65-80 (km/s)/Mpc, nos da el siguiente intervalo correspondiente de edades:

$$t = 12–15 \times 10^9\ años,$$

que se sobrepone con el conseguido a través de la nucleosíntesis.

La suposición referente a la velocidad constante de separación de las galaxias es casi ciertamente incorrecta. La atracción gravitacional mutua que ejercen ha disminuido la rapidez de su separación desde la (Big Bang) Gran explosión, de modo que en épocas anteriores pudo haber sido mayor que la actual. En la figura 52-13 se ofrece una representación de una distancia típica de separación intergaláctica en función del tiempo. Si fuera válido el modelo de "velocidad constante", la edad del universo sería $t = H^{-1}$. Si hubiera disminuido desde la gran explosión, la edad deducida dependería de la velocidad de desaceleración. El hombre no ha observado bastante tiempo para detectar cambios en la rapidez de separación; debemos,

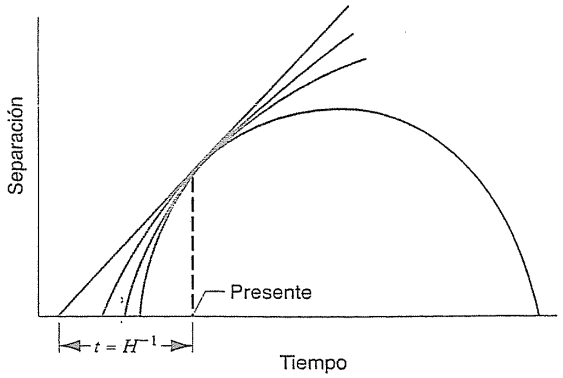


FIGURA 52-13. Dependencia de una distancia de separación galáctica normal respecto al tiempo durante la evolución del universo, según diversos modelos. Si el universo se hubiera venido expandiendo con una rapidez constante (línea recta), podríamos extrapolar hacia atrás hasta la separación cero (la Big Bang) la Gran explosión en un tiempo H^{-1} antes del presente. Si la rapidez de la expansión hubiera disminuido a causa de la interacción gravitacional (un escenario más razonable), la Gran explosión habría ocurrido en menos tiempo que H^{-1} antes del presente. La expansión se convertirá con el tiempo en una contracción, si la fuerza gravitacional es lo bastante fuerte.

pues, confiar en dos métodos indirectos para determinar la desaceleración: 1) podemos medir los corrimientos rojos al inferir así la rapidez de los objetos más lejanos (y por tanto los más viejos) observables por medio del telescopio; 2) podemos calcular la desaceleración a partir de los efectos gravitacionales que en el universo tiene la materia total.

Sorprende un poco lo siguiente: las mediciones recientes de los corrimientos al rojo de la mayoría de las galaxias lejanas indican que la expansión se *acelera* en vez de desacelerarse. En otras palabras, la rapidez de expansión en la era de esas galaxias viejas era más lenta de lo que cabría suponer al extrapolar la velocidad actual de expansión. Este efecto, que todavía no se explica de una manera convincente, se atribuye a la presencia de una "energía oscura" en todo el universo que impulsa la aceleración.

Es difícil calcular el efecto desacelerador de la materia en el universo, porque todavía ignoramos cuánta contiene. Las mediciones señalan que la materia observable no es suficiente para explicar la atracción gravitacional dentro de las galaxias o en grupos de ellas. Los astrofísicos han postulado la existencia de la materia oscura que no es visible, pero que debe existir para producir la atracción gravitacional. Su cantidad y su forma (desde los tipos conocidos o exóticos de las partículas elementales hasta las estrellas extinguidas) son inciertas, pero pueden representar hasta el 90% de la masa del universo.

Se han propuesto varios modelos cosmológicos que en la figura 52-13 dan curvas de distinta curvatura y, por tanto, distintas edades del universo. Por ejemplo, algunas ofrecen una edad equivalente a una mitad o a dos tercios de H^{-1}, o 6–10 $\times 10^9$ años. Aunque no sabemos cuál de ellos (si es que alguno) es correcto, parece claro que la nucleosíntesis y las estimaciones cosmológicas de la edad coinciden con valores en el intervalo 10–15 $\times 10^9$ años.

A los físicos les causa enorme frustración no poder visualizar la historia del universo con mayor certidumbre, pues también se ve limitada su capacidad de ver hacia adelante. ¿Continuará la expansión por siempre o existe suficiente materia para invertirla? La figura 52-13 contiene varios resultados posibles. Tal vez los cosmólogos del futuro observarán que las galaxias se apresuran a unirse a medida que el universo "se calienta" y ellas se juntan, alcanzando finalmente un punto (un "gran crujido") que podrá acompañarse de otra gran explosión. O quizá la expansión continué de modo indefinido, hasta que el universo se enfríe y se oscurezca. Si queremos encontrar la solución a este problema fundamental, habrá que efectuar investigaciones vigorosas en la vanguardia de la astrofísica, de la física nuclear y de la física de partículas.

OPCIÓN MÚLTIPLE

52-1 Interacciones de las partículas

1. Identifique la interacción causante de los siguientes decaimientos (se incluye la vida de cada uno):
   a) $\Delta^* \rightarrow p + \pi^-$ (10^{-23} s); *b)* $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (10^{-10} s),
   c) $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$ (10^{-18} s).
   A) Fuerte B) Electromagnético
   C) Débil D) Gravitacional

52-2 Familias de partículas

2. En el espín y los productos del decaimiento señalados, ¿a cuál familia pertenecen las siguientes partículas?
   a) Medio espín, los productos del decaimiento son únicamente leptones y/o antileptones.
   b) Espín entero, los productos del decaimiento son únicamente leptones y/o antileptones.
   c) Medio espín, los productos del decaimiento son un barión y algunos mesones.
   d) Espín entero, los productos del decaimiento son únicamente mesones.
   e) Medio espín, los productos del decaimiento son únicamente mesones.
   A) Leptón B) Mesón
   C) Barión D) No es posible

52-3 Leyes de conservación

3. Mencione la ley de conservación que se viola en cada uno de los siguientes decaimientos:
   a) $\mu^- \rightarrow e^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$; *b)* $\pi^+ \rightarrow e^+ + \gamma$;
   c) $\mu^+ \rightarrow \pi^+ + \bar{\nu}_\mu$.
   A) Carga eléctrica B) Número de leptones
   C) Energía D) Número de bariones

4. Mencione la ley de conservación que se viola en cada uno de los siguientes decaimientos:
a) $\Omega^- \rightarrow \Sigma^+ + \pi^0$; *b)* $\Lambda^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$;
c) $\Lambda^0 \rightarrow p + K^-$.
A) Energía B) Extrañeza
C) Número de bariones D) Número de mesones

52-4 El modelo de los quarks

5. Si q = quark y si $\bar{q}$ = antiquark, indique dos de las siguientes combinaciones que serían posibles?
A) $q\bar{q}$ B) $q\bar{q}\bar{q}$ C) $q\bar{q}\bar{q}$ D) $qqq\bar{q}$ E) $qqq\bar{q}\bar{q}$

52-5 La cosmología del Big Bang

6. La densidad de energía del universo primitivo ($t < 10^{-6}$ s) estuvo dominada por _____ y la del universo actual está dominada por _____.
A) radiación, radiación B) radiación, materia
C) materia, radiación D) materia, materia

52-6 Nucleosíntesis

52-7 La edad del universo

PREGUNTAS

1. En el átomo de hidrógeno, es aproximadamente 10^{-40} la razón de la fuerza gravitacional entre el electrón y el protón y la magnitud de la fuerza electromagnética entre ellos. Si ésta es mucho más débil que aquélla, ¿por qué se descubrió primero la fuerza gravitacional y es mucho más evidente para nosotros?
2. ¿Qué se entiende por partícula elemental? Al obtener una respuesta considere propiedades como vida, masa, tamaño, conversión en otras partículas por decaimiento, fusión para formar otras partículas y reacciones.
3. ¿Por qué los físicos de partículas quieren acelerarlas para generar energías cada vez más fuertes?
4. Mencione dos partículas que no tengan masa ni carga. ¿Cuáles serán sus propiedades?
5. ¿Por qué los neutrinos no dejan vestigios en las cámaras de detección?
6. Los nuetrinos carecen de masa (supuestamente) y se desplazan con la velocidad de la luz. ¿Cómo entonces transportan cantidades variables de energía?
7. ¿Tienen antipartículas todas las partículas? ¿Y los fotones?
8. En el decaimiento de un antineutrón para convertirse en antiprotón, ¿se emite un neutrino o un antineutrino?
9. Los fotones y los neutrinos se parecen en que tienen cero carga, cero masa y se desplazan con la velocidad de la luz. ¿Qué diferencia existe entre ellos? ¿Cómo los produciría? ¿En qué forma los detectaría?
10. Explique por qué decimos que el mesón π^0 es su propia antipartícula?
11. Un electrón no puede convertirse por decaimiento en dos neutrones. ¿A qué se debe?
12. ¿Por qué es estable el electrón? Es decir, ¿por qué no se desintegra y se convierte espontáneamente en otras partículas?
13. Un electrón en reposo no puede emitir un fotón de rayos gamma y desaparecer. ¿Por qué? ¿Podría hacerlo un electrón en movimiento?
14. Un neutrón es lo bastante voluminoso para decaer emitiendo un protón y dos neutrinos. ¿Por qué no lo hace?
15. Un positrón invariablemente encuentra un electrón y los dos se aniquilan entre sí. ¿Por qué entonces podemos llamarlo partícula estable?
16. ¿Cuál es el mecanismo en virtud del cual dos electrones ejercen una fuerza mutua?
17. ¿Por qué no agrupamos las partículas en familias a partir de su masa?
18. Una partícula que reacciona ante la fuerza fuerte es un mesón o un barión. Puede saberlo permitiendo que decaiga hasta que sólo queden productos finales estables. Si entre ellos hay un protón, la partícula original era un barión. Y si no lo hay era un mesón. Explique esta regla de clasificación.
19. ¿Cuántas clases de leptones estables existen? ¿De mesones estables? ¿De bariones estables? Menciónelas en cada caso.
20. La mayor parte de las reacciones físicas son endotérmicas en vez de exotérmicas. ¿Por qué?
21. ¿Cuál es la partícula más ligera que interactúa con mucha fuerza? ¿Cuál es la partícula más pesada que no se ve afectada por una interacción fuerte?
22. En las siguientes partículas indique cuál de las fuerzas básicas ejerce influencia: *a)* electrón, *b)* neutrinos, *c*) neutrón, *d)* pión.
23. Así como los rayos X sirven para descubrir las imperfecciones internas de la fusión de un metal causada por burbujas de gas, también los muones de rayos cósmicos se usan en los intentos de detectar cámaras mortuorias ocultas en la pirámides de Egipto. ¿Por qué se emplean los muones?
24. ¿Influye la interacción débil en las partículas de interacción fuerte?
25. ¿Producen neutrinos todos los decaimientos con interacción débil?
26. Los mesones y los bariones son sensibles a la fuerza intensa. ¿En qué aspectos se diferencian?
27. Compare las tablas 52-3 y 52-7; señale después el mayor número posible de semejanzas y diferencias entre los leptones y los quarks.
28. ¿Qué pruebas experimentales hay en favor de la existencia de los quarks?
29. Con dos leptones y dos quarks podemos explicar el mundo "ordinario" que nos rodea. Menciónelos.
30. El pión neutro presenta una estructura de quark $u\bar{u}$ y se desintegra con una vida media apenas de 8.3×10^{-17} s. Por el contrario, el pión con carga eléctrica tiene una estructura de $u\bar{d}$ y se desintegra con una vida media de 2.6×10^{-8} s. Basándose en la estructura del quark, explique por qué la vida media de un pión neutro debería ser mucho menor que la de un pión con carga. (*Sugerencia:* recuerde la aniquilación.)
31. ¿Contienen quarks los leptones? ¿Los mesones? ¿Los fotones? ¿Y los bariones?
32. El barión Δ^* puede tener una carga eléctrica de $+ 2e$ (Tab. 52-5). Con base en el modelo de quark, ¿cabe suponer que habrá mesones con la carga $+ 2e$? ¿Y bariones con la carga $- 2e$?

33. El barión Σ^+ se desintegra con una vida media típica de la interacción débil (Tabla 52-5). ¿Debería convertirse en el barión Λ^0 por la interacción fuerte sin modificar la extrañeza? ¿Por qué no lo hace?
34. ¿Por qué no podemos encontrar el centro del universo en expansión? ¿Lo estamos buscando?
35. Debido al efecto de la gravedad, la rapidez con que se expande el universo debe haber disminuido en el tiempo que siguió a la gran explosión. Demuestre que ello significa que el universo tiene una edad menor que $1/H$.
36. Usando telescopios sensibles en cualquier parte del espectro electromagnético, no es posible retroceder con la mirada más allá de unos 500,000 años antes de la gran explosión. ¿Por qué?
37. ¿Cómo se llega a la conclusión de que la materia visible puede representar alrededor de 10% de la materia del universo?
38. ¿Siempre estamos retrocediendo en el tiempo al observar una galaxia lejana? ¿Importa la dirección en que miremos?
39. ¿Se le ocurre alguna otra forma de explicar el universo en expansión aparte de la gran explosión?

EJERCICIOS

52-1 Interacciones de las partículas

1. *a*) Una distancia r separa un electrón y un positrón. Encuentre la razón de la fuerza gravitacional y la fuerza electrostática entre ellos. ¿Qué concluye del resultado respecto a las fuerzas que actúan entre las partículas detectadas en una cámara de burbujas o en un detector similar? *b*) Repita el ejercicio con un par de protón-antiprotón.
2. Algunas grandes teorías unificadas predicen los siguientes esquemas posibles de decaimiento del protón:

$$p \longrightarrow e^+ + \gamma,$$

$$p \longrightarrow e^+ + \pi^0.$$

a) Calcule los valores Q en estos decaimientos. *b*) Demuestre que no violan las leyes de conservación de la carga, de la energía relativista ni del momento lineal. La energía en reposo de un protón es 938.27 MeV; de un electrón 0.511 MeV, y de un pión neutro es 135 MeV.

3. Se ponen un electrón y un protón a una distancia igual a un radio de Bohr a_0. Determine el radio R de una esfera de plomo que debe colocarse detrás del electrón, de modo que la fuerza gravitacional que opera sobre él anule exactamente la atracción electrostática entre el protón y el electrón (Fig. 52-14). Suponga que se cumple la ley de gravitación de Newton y que la densidad de la esfera es igual a la del plomo en la Tierra.

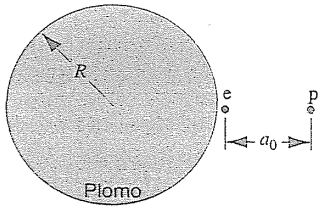


FIGURA 52-14. Ejercicio 3.

52-2 Familias de partículas

4. Un pión neutro se desintegra convirtiéndose en dos rayos gamma: $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$. Calcule la longitud de onda de los rayos producidos por el decaimiento de un pión neutro en reposo.
5. La energía en reposo de muchas partículas de vida corta no puede medirse directamente, sino que debe deducirse de los momentos medidos y de las energías en reposo conocidas de los productos del decaimiento. Considere el mesón ρ^0 que se desintegra así $\rho^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$. Calcule la energía en reposo del mesón ρ^0, si los momentos de los piones creados con dirección opuesta tienen una magnitud de 358.3 MeV/c. En la tabla 52-4 se incluyen las energías de los piones.
6. Las observaciones de los neutrinos emitidos por la supernova SN1987a en la gran nube Magellánica (Figs. 52-3 y 52-15) imponen un límite máximo a la energía en reposo del neutrino de electrón de 20 eV. Suponga que su energía en reposo es 20 eV en vez de cero. ¿Con cuánta menor velocidad que la luz se desplaza un neutrino de 1.5 MeV emitido en un decaimiento β.

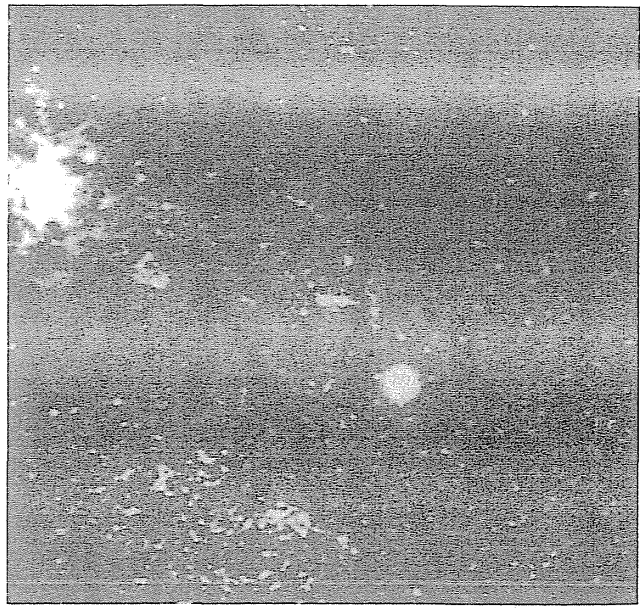


FIGURA 52-15. Ejercicio 6.

7. Calcule el intervalo de la fuerza débil entre dos protones vecinos. Suponga que el bosón Z^0 es la partícula de campo (Tabla 52-6).
8. Identifique la interacción que causa los siguientes decaimientos: *a*) $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$; *b*) $K^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$; c) $\eta' \longrightarrow \eta + \pi^+ + \pi^-$; *d*) $\sum^+ \longrightarrow p + \pi^0$.

52-3 Leyes de conservación

9. Por medio de las leyes de conservación identifique la partícula marcada x en las siguientes reacciones que se realizan a través de una interacción fuerte: *a)* $p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + x$; *b)* $p + \overline{p} \rightarrow n + x$; *c)* $\pi^- + p \rightarrow \Xi^0 + K^0 + x$.

10. La reacción $\pi^+ + p \rightarrow p + p + \overline{n}$ se lleva a cabo con una interacción fuerte. Aplique las leyes de conservación para deducir la carga, el número de bariones y la extrañeza del antineutrón.

11. Examine la extrañeza para determinar cuáles de los siguientes decaimientos o reacciones se realizan en una interacción fuerte: *a)* $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$; *b)* $\Lambda^0 + p \rightarrow \Sigma^+ + n$; *c)* $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$; *d)* $K^+ + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$. En las tablas 52-4 y 52-5 se ofrecen los valores de S.

12. Además del modo de decaimiento descrito en la tabla 52-4, mencione otros 4 decaimientos posibles del mesón K^+ que cumplan las leyes de conservación.

13. Indique un modo posible de decaimiento de *a)* Λ^0, *b)* $\overline{n}$, *c)* τ^+, *d)* K^-.

52-4 El modelo de los quarks

14. Trace un diagrama similar al de la figura 52-4 para los 10 bariones de espín de tres medios que se incluyen en la figura 52-5.

15. Identifique los 10 bariones de espín de tres medios con las combinaciones de tres quarks que se incluyen en la tabla 52-9.

16. Usando sólo los quarks arriba, abajo y extraño, de ser posible construya un barión *a)* con $Q = +1$ y con $S = -2$; *b)* con $Q = +2$ y con $S = 0$.

17. No se conoce un mesón con $Q = +1$ y con $S = -1$ ni con $Q = -1$ y $S = +1$. Explique por qué, basándose en el modelo de quarks.

18. La composición de quarks del protón y del neutrón son uud y udd, respectivamente. ¿Cuál es la composición de quarks del *a)* antiprotón y *b)* antineutrón?

19. *a)* Mencione las 7 posibles combinaciones quark-antiquark de u, d, c y s que contienen por lo menos un quark o antiquark c. Indique la carga eléctrica, la extrañeza y el encanto de cada combinación. *b)* Identifique los 10 mesones de espín 0 en la siguiente tabla con la combinación quark-antiquark de su lista.

20. Analice los siguientes decaimientos o reacciones a partir del contenido quark de las partículas. *a)* $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$; *b)* $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$; *c)* $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$; *d)* $\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$.

Partícula	*Antipartícula*	Q	S	C
η_c	η_c	0	0	0
D^+	D^-	+1	0	+1
D^0	$\overline{D^0}$	0	0	+1
D_s^+	D_s^-	+1	+1	+1

52-5 La cosmología del Big Bang

21. Para verificar los valores numéricos del parámetro de Hubble, seleccione dos puntos en las líneas de la figura 52-6 y calcule las pendientes.

22. Si la ley de Hubble puede extrapolarse a distancias muy grandes, ¿en cuál de ellas la velocidad recesional será igual a la velocidad de la luz?

23. ¿Por qué la longitud de onda observada de la línea H_α de 656.3 nm del hidrógeno emitido por una galaxia se encuentra a una distancia de 2.4×10^8 pc?

24. En el laboratorio una de las líneas de sodio se mide con una longitud de onda de 590.0 nm. Pero cuando se observa la luz proveniente de una galaxia en particular, la línea se ve en una longitud de onda de 602.0 nm. Calcule la distancia con la galaxia, suponiendo que se cumple la ley de Hubble.

25. *a)* ¿Cuál es la temperatura mínima del universo necesaria para que los fotones produzcan pares $\pi^+ \pi^-$? *b)* ¿A qué edad tenía esta temperatura?

26. *a)* Calcule la longitud de onda máxima de la radiación de fondo de microondas en la figura 52-8. *b)* Determine la frecuencia y la energía de los fotones correspondientes a esa longitud de onda.

27. *a)* ¿Qué edad tenía el universo cuando su temperatura era 5000 K? ¿En qué era sucedió eso (Fig. 52-9)? *b)* Calcule la energía promedio de los fotones en ese tiempo. *c)* Si en aquella época había 10^9 por nucleón, determine la razón entre la energía de la radiación y la energía de la materia en reposo.

52-6 Nucleosíntesis

52-7 La edad del universo

PROBLEMAS

1. Un pión neutro tiene una energía en reposo de 135 MeV y una vida media de 8.4×10^{-17}. Si se produce con una energía cinética inicial de 80 MeV y si decae al concluir una vida media, ¿cuál es la traza más larga que podría dejar en una cámara de burbujas? Tenga en cuenta la dilatación relativista del tiempo.

2. Una tau positiva (τ^+ energía en reposo = 1777 MeV) se mueve con 2200 MeV de energía cinética en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético uniforme de 1.2 T. *a)* Calcule el momento de tau en kg · m/s. Hay que tener presentes los efectos relativistas. *b)* Determine el radio de la trayectoria circular. (*Sugerencia:* consulte la Sec. 32-3.)

3. La longitud de onda de los fotones en que un campo de temperatura T irradia con la máxima intensidad está dada por $\lambda_{máx} = (2898\ \mu m \cdot K)/T$ (Ec. 45-4). *a)* Demuestre que la energía E en MeV del fotón puede obtenerse mediante

$$E = (4.28 \times 10^{-10}\ \text{MeV/K})T.$$

b) ¿A qué temperatura mínima puede el fotón crear un par de electrón-positrón?

4. A grandes distancias la velocidad recesional de las galaxias y de los quasares se acercan a la velocidad de la luz; por eso es necesario utilizar la fórmula relativista del cambio de Doppler (Sec. 39-6). El corrimiento al rojo se indica como z, donde $z = \Delta\lambda/\lambda_0$ es el corrimiento rojo (fraccional). *a)* Demuestre que, en función de z, el parámetro de la velocidad recesional $\beta = v/c$ está dado por

$$\beta = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2}.$$

b) Uno de los quasares más distantes detectado tiene $z = 4.43$. Calcule su parámetro de velocidad. *c*) Determine la distancia del quasar, suponiendo que la ley de Hubble es válida en estas distancias.

5. Como en todas partes se registra la radiación de fondo de las microondas, la temperatura mínima posible de un gas en el espacio interestelar o intergaláctico no es 0 K sino 2.7 K. Significa lo siguiente: una parte importante de las moléculas en el espacio que presentan estados excitados de poca energía de excitación puede hallarse efectivamente en ellos. La subsecuente desexcitación provoca la emisión de radiación detectable. Consideremos una molécula (hipotética) con un solo estado excitado. *a*) ¿Cuál debería ser la energía de excitación para que 23% de las moléculas se encuentre en ese estado? (*Sugerencia:* consulte la Sec. 48-9.) *b*) Calcule la longitud de onda del fotón emitido en una transición al estado base.

6. ¿Continuará expandiéndose el universo para siempre? Para contestar la pregunta haga la suposición (¿razonable?) de que la velocidad recesional v de una galaxia a una distancia r de nosotros se obtiene sólo por la materia situada en el interior de una esfera de radio r centrado en nosotros (Fig. 52-16). Si la masa total dentro de la esfera es M, la velocidad de escape v_e está dada por $v_e = \sqrt{2GM/r}$ (Sec. 14-6). *a*) Demuestre que la densidad promedio ρ dentro de la esfera ha de ser por lo menos igual al valor dado por

$$\rho = 3H^2/8\pi G$$

para impedir una expansión ilimitada. *b*) Evalúe numéricamente esta "densidad crítica" y después exprese la respuesta en función de H – átomos/m^3. Las mediciones de la densidad real se dificultan y se complican por presencia de la materia oscura.

7. La existencia de la materia oscura (es decir, no luminosa) en una galaxia como la nuestra se deduce determinando por observación la variación con la distancia del periodo orbital de las estrellas alrededor del centro galáctico. Después el resultado se compara con la variación obtenida partiendo de la distribución de la materia indicada por el material luminoso (estrellas en su mayor parte). Cualquier desviación significativa implica la existencia de materia oscura. Supongamos por ejemplo que la materia (estrellas, gas, polvo) de una galaxia particular —masa total

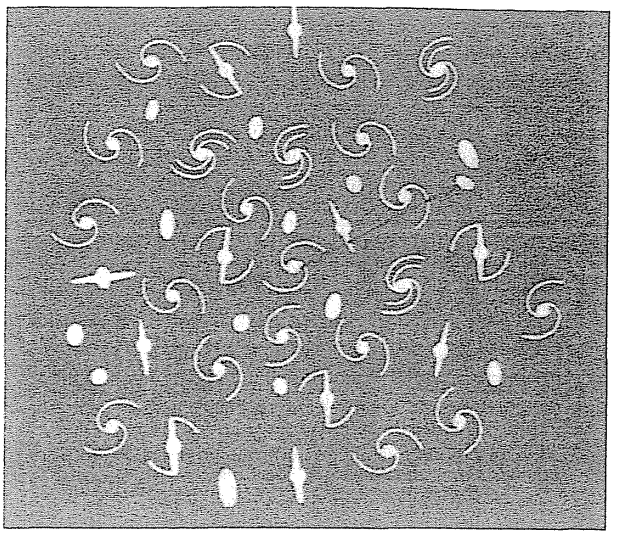


FIGURA 52-16. Problema 6.

M— está distribuida uniformemente en toda la esfera de radio R. Una estrella, de masa m, gira alrededor del centro de la galaxia en una órbita circular de radio $r < R$. *a*) Demuestre que la velocidad orbital v de la estrella esta dada por

$$v = r\sqrt{GM/R^3},$$

y que, en consecuencia, el periodo T de la revolución es

$$T = 2\pi\sqrt{R^3/GM},$$

independiente de r. *b*) ¿Cuál es la fórmula correspondiente del periodo orbital suponiendo que la masa de la galaxia está muy concentrada hacia el centro de ella, de modo que prácticamente toda la masa se encuentra a distancias del centro menores que r? Estas consideraciones aplicadas a la Vía Láctea indican que existen considerables cantidades de materia oscura.

8. Calcule la temperatura a la cual la fracción de protones con energía mayor que 2.2 MeV en la distribución de Planck es 0.2×10^{-9}. (Sugerencia: utilice la Ec. 45-6.)

APÉNDICE A

EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)*

Unidades básicas del SI

Cantidad	*Nombre*	*Símbolo*	*Definición*
Longitud	metro	m	". . . la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío en 1/299,792, 458 de segundo." (1983)
Masa	kilogramo	kg	". . . la masa del prototipo internacional del kilogramo." (1901)
Tiempo	segundo	s	"... la duración de 9, 192, 631, 770 periodos de la radiación correspondientes a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133." (1967)
Corriente eléctrica	ampere	A	". . . la corriente constante que, si se la mantiene en dos conductores paralelos rectos de longitud infinita, con una sección transversal despreciable y colocados 1 metro aparte en el vacío, producirá entre ellos una fuerza igual a 2×10^{-7} newton por metro de longitud." (1948)
Temperatura termodinámica	kelvin	K	". . . la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua." (1967)
Cantidad de sustancia	mol	mol	". . . la cantidad de sustancia de un sistema que contiene un número de entidades elementales equivalentes a los átomos presentes en 0.012 kilogramos de carbono 12." (1971)
Intensidad luminosa	candela	cd	". . . la intensidad luminosa, en determinada dirección, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de 1/683 watt por esteradián." (1979)

* Adaptado de "Guide for the Use of the International System of Units (SI)", National Bureau of Standards Special Publication 811, edición de 1995. Las definiciones fueron adoptadas por la Conferencia General de Pesos y Medidas, un organismo internacional, a partir de los datos citados. En este libro no se emplea la candela.

Algunas unidades derivadas del SI

Cantidad	*Nombre de la unidad*	*Símbolo*	*Equivalente*
Superficie	metro cuadrado	m^2	
Volumen	metro cúbico	m^3	
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}
Densidad de masa (densidad)	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
Rapidez, velocidad	metro por segundo	m/s	
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2	
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s^2	
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Presión	pascal	Pa	N/m^2
Trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$N \cdot m$
Potencia	watt	W	J/s
Cantidad de carga eléctrica	coulomb	C	$A \cdot s$
Diferencia de potencial, fuerza electromotriz	volt	V	$N \cdot m/C$
Campo eléctrico	volt por metro	V/m	N/C
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A
Capacitancia	farad	F	$A \cdot s/V$
Flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
Inductancia	henry	H	$V \cdot s/A$
Campo magnético	tesla	T	Wb/m^2, $N/A \cdot m$
Entropía	joule por kelvin	J/K	
Calor específico	joule por kilogramo kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
Conductividad térmica	watt por metro kelvin	$W/(m \cdot K)$	
Intensidad radiante	watt por esteradián	W/sr	

Unidades suplementarias del SI

Cantidad	*Nombre de la unidad*	*Símbolo*
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	esteradián	sr

APÉNDICE B

CONSTANTES FÍSICAS Y FUNDAMENTALES*

Constante	*Símbolo*	*Valor para cálculos*	*Valor óptimo (1998)*	
			Valor[a]	*Incerteza*[b]
Velocidad de la luz en el vacío	c	3.00×10^{8} m/s	2.99792458	exact
Carga elemental	e	1.60×10^{-19} C	1.602176462	0.039
Constante eléctrica (permitividad)	ϵ_0	8.85×10^{-12} F/m	8.85418781762	exact
Constante magnética (permeabilidad)	μ_0	1.26×10^{-6} H/m	1.25663706143	exact
Masa de electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg	9.10938188	0.079
Masa de electrón[c]	m_e	5.49×10^{-4} u	5.485799110	0.0021
Masa de protón	m_p	1.67×10^{-27} kg	1.67262158	0.079
Masa de protón[c]	m_p	1.0073 u	1.00727646688	0.00013
Masa de neutrón	m_n	1.67×10^{-27} kg	1.67492716	0.079
Masa de neutrón[c]	m_n	1.0087 u	1.00866491578	0.00054
Razón de carga a masa del electrón	e/m_e	1.76×10^{11} C/kg	1.758820174	0.040
Razón de masa de protón a electrón	m_p/m_e	1840	1836.1526675	0.0021
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J · s	6.62606876	0.078
Longitud de onda Compton del electrón	λ_e	2.43×10^{-12} m	2.426310215	0.0073
Constante molar de gas	R	8.31 J/mol · K	8.314472	1.7
Constante de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}	6.02214199	0.079
Constante de Boltzmann	k	1.38×10^{-23} J/K	1.3806503	1.7
Volumen molar de gas ideal a TPS[d]	V_m	2.24×10^{-2} m^3/mol	2.2413996	1.7
Constante de Faraday	F	9.65×10^{4} C/mol	9.64853415	0.040
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.67×10^{-8} W/m^2 · K^4	5.670400	7.0
Constante de Rydberg	R_∞	1.10×10^{7} m^{-1}	1.0973731568549	0.0000076
Constante gravitacional	G	6.67×10^{-11} m^3/s^2 · kg	6.673	1500
Radio de Bohr	a_0	5.29×10^{-11} m	5.291772083	0.0037
Momento magnético del electrón	μ_e	9.28×10^{-24} J/T	9.28476362	0.040
Momento magnético del protón	μ_p	1.41×10^{-26} J/T	1.410606633	0.041
Magnetón de Bohr	μ_B	9.27×10^{-24} J/T	9.27400899	0.040
Magnetón nuclear	μ_N	5.05×10^{-27} J/T	5.05078317	0.040
Constante de estructura fina	α	1/137	1/137.03599976	0.0037
Cuanto de flujo magnético	Φ_0	2.07×10^{-15} Wb	2.067833636	0.039
Constante de Von Klitzing	R_K	25800 Ω	25812.807572	0.0037

[a] Misma unidad y potencia de 10 que el valor para cálculos.

[b] Partes por millón.

[c] Masa dada en unidades de masa atómica unitaria, donde 1 u = $1.66053873 \times 10^{-27}$ kg.

[d] TPS: temperatura y presión estándar = 0°C y 1.0 bar.

* *Fuente:* Peter J. Mohr y Barry N. Taylor, *Journal of Physical and Chemical Reference Data,* vol. 28. núm. 6 (1999) y *Reviews of Modern Physics,* vol. 72, núm. 2 (2000). Véase también http:// physics.nist.gov/constants.

APÉNDICE C

DATOS ASTRONÓMICOS

El Sol, la Tierra y la Luna

Propiedad	*Sol*[a]	*Tierra*	*Luna*
Masa (kg)	1.99×10^{30}	5.98×10^{24}	7.36×10^{22}
Radio medio (m)	6.96×10^{8}	6.37×10^{6}	1.74×10^{6}
Densidad media (kg/m^3)	1410	5520	3340
Gravedad superficial (m/s^2)	274	9.81	1.67
Velocidad de escape (km/s)	618	11.2	2.38
Periodo de rotación[c] (d)	26 − 37[b]	0.997	27.3
Radio orbital medio (km)	2.6×10^{17}[d]	1.50×10^{8}[e]	3.82×10^{5}[f]
Periodo orbital	2.4×10^{8} año[d]	1.00 año[c]	27.3 d[f]

[a] El Sol irradia energía con una rapidez de 3.90×10^{26} W; justo fuera de la atmósfera terrestre se recibe energía solar, suponiendo una incidencia normal con una rapidez de 1,380 W/m^2.
[b] El Sol —una bola de gas— no gira como un cuerpo rígido. Su periodo rotacional fluctúa entre 26 d en el ecuador a 37 d en los polos.
[c] Medido respecto a las estrellas lejanas.
[d] Alrededor del centro galáctico.
[e] Alrededor del Sol.
[f] Alrededor de la Tierra.

Algunas propiedades de los planetas

	Mercurio	*Venus*	*Tierra*	*Marte*	*Júpiter*	*Saturno*	*Urano*	*Neptuno*	*Plutón*
Distancia media del Sol (10^6 km)	57.9	108	150	228	778	1,430	2,870	4,500	5,9000
Periodo de traslación (a)	0.241	0.615	1.00	1.88	11.9	29.5	84.0	165	248
Periodo de rotación[a] (d)	58.7	243[b]	0.997	1.03	0.409	0.426	0.451[b]	0.658	6.39
Rapidez orbital (km/s)	47.9	35.0	29.8	24.1	13.1	9.64	6.81	5.43	4.74
Inclinación del eje a la órbita	<28°	≈3°	23.4°	25.0°	3.08°	26.7°	97.9°	29.6°	57.5°
Inclinación de la órbita a la órbita terrestre	7.00°	3.39°	—	1.85°	1.30°	2.49°	0.77°	1.77°	17.2°
Excentricidad de la órbita	0.206	0.0068	0.0167	0.0934	0.0485	0.0556	0.0472	0.0086	0.250
Diámetro ecuatorial (km)	4,880	12,100	12,800	6,790	143,000	120,000	51,800	49,500	2,300
Masa (Tierra = 1)	0.0558	0.815	1.000	0.107	318	95.1	14.5	17.2	0.002
Densidad promedio (g/cm^3)	5.60	5.20	5.52	3.95	1.31	0.704	1.21	1.67	2.03
Gravedad superficial[c] (m/s^2)	3.78	8.60	9.78	3.72	22.9	9.05	7.77	11.0	0.03
Rapidez de escape (km/s)	4.3	10.3	11.2	5.0	59.5	35.6	21.2	23.6	1.3
Satélites conocidos	0	0	1	2	16 + anillos	19 + anillos	15 + anillos	8 + anillos	1

[a] Medido respecto a las estrellas lejanas.
[b] El sentido de rotación es contrario al del movimiento orbital.
[c] Medida en el ecuador del planeta.

APÉNDICE D

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

Elemento	*Símbolo*	*Número atómico, Z*	*Masa molar* (g/mol)	*Densidad* (g/cm^3) a 20°C	*Punto de fusión* (°C)	*Punto de ebullición* (°C)	*Calor específico* (J/g · C°) a 25°C
Actinio	Ac	89	(227)	10.1 (calc.)	1051	3200	0.120
Aluminio	Al	13	26.9815	2.699	660	2519	0.897
Americio	Am	95	(243)	13.7	1176	2011	—
Antimonio	Sb	51	121.76	6.69	630.6	1587	0.207
Argón	Ar	18	39.948	1.6626×10^{-3}	−189.3	−185.9	0.520
Arsénico	As	33	74.9216	5.72	817 (28 at.)	614 (subl.)	0.329
Astatino	At	85	(210)	—	302	337	—
Azufre	S	16	32.066	2.07	115.2	444.6	0.710
Bario	Ba	56	137.33	3.5	727	1597	0.204
Berkelio	Bk	97	(247)	14 (est.)	1050	—	—
Berilio	Be	4	9.0122	1.848	1287	2471	1.83
Bismuto	Bi	83	208.980	9.75	271.4	1564	0.122
Boro	Bh	107	(264)	—	—	—	—
Boron	B	5	10.81	2.34	2075	4000	1.03
Bromo	Br	35	79.904	3.12 (líquido)	−7.2	58.8	0.226
Cadmio	Cd	48	112.41	8.65	321.1	767	0.232
Calcio	Ca	20	40.08	1.55	842	1484	0.647
Californio	Cf	98	(251)	—	900 (est.)	—	—
Carbono	C	6	12.011	2.25	3550	—	0.709
Cerio	Ce	58	140.12	6.770	798	3424	0.192
Cesio	Cs	55	132.905	1.873	28.44	671	0.242
Cloro	Cl	17	35.453	3.214×10^{-3} (0°C)	−101.5	−34.0	0.479
Criptón	Kr	36	83.80	3.488×10^{-3}	−157.4	−153.2	0.248
Cromo	Cr	24	51.996	7.19	1907	2671	0.449
Cobalto	Co	27	58.9332	8.85	1495	2927	0.421
Cobre	Cu	29	63.54	8.96	1084.6	2562	0.385
Curio	Cm	96	(247)	13.5 (calc.)	1345	—	—
Dubnio	Db	105	(262)	—	—	—	—
Disprosio	Dy	66	162.50	8.55	1412	2567	0.170
Einsteinio	Es	99	(252)	—	860 (est.)	—	—
Erbio	Er	68	167.26	9.07	1529	2868	0.168
Escandio	Sc	21	44.956	2.99	1541	2836	0.568
Estaño	Sn	50	118.71	7.31	231.93	2602	0.228
Estroncio	Sr	38	87.62	2.54	777	1382	0.301
Europio	Eu	63	151.96	5.244	822	1529	0.182
Fermio	Fm	100	(257)	—	1527	—	—

(*Continúa*)

Elemento	*Símbolo*	*Número atómico, Z*	*Masa molar* (g/mol)	*Densidad* (g/cm^3) a 20°C	*Punto de fusión* (°C)	*Punto de ebullición* (°C)	*Calor específico* (J/g · C°) a 25°C
Flúor	F	9	18.9984	1.696×10^{-3} (0°C)	−219.6	−188.1	0.824
Fósforo	P	15	30.9738	1.82	44.15	280.5	0.769
Francio	Fr	87	(223)	—	27	677	—
Gadolinio	Gd	64	157.25	7.90	1313	3273	0.236
Galio	Ga	31	69.72	5.904	29.76	2204	0.371
Germanio	Ge	32	72.61	5.323	938.3	2833	0.320
Hafnio	Hf	72	178.49	13.31	2233	4603	0.144
Helio	He	2	4.0026	0.1664×10^{-3}	−272.2	−268.9	5.19
Hierro	Fe	26	55.845	7.87	1538	2861	0.449
Holmio	Ho	67	164.930	8.79	1474	2700	0.165
Hidrógeno	H	1	1.00797	0.08375×10^{-3}	−259.34	−252.87	14.3
Hassio	Hs	108	(269)	—	—	—	—
Indio	In	49	114.82	7.31	156.6	2072	0.233
Iridio	Ir	77	192.2	22.4	2446	4428	0.131
Iterbio	Yb	70	173.04	6.966	819	1196	0.155
Itrio	Y	39	88.905	4.469	1522	3345	0.298
Lantano	La	57	138.91	6.145	918	3464	0.195
Laurencio	Lr	103	(260)	—	—	—	—
Litio	Li	3	6.941	0.534	180.5	1342	3.58
Lutecio	Lu	71	174.97	9.84	1663	3402	0.154
Magnesio	Mg	12	24.305	1.74	650	1090	1.02
Manganeso	Mn	25	54.9380	7.43	1244	2061	0.79
Meitnerio	Mt	109	(268)	—	—	—	—
Mendelevio	Md	101	(258)	—	827	—	—
Mercurio	Hg	80	200.59	13.55	−38.83	356.7	0.140
Molibdeno	Mo	42	95.94	10.22	2623	4639	0.251
Neodimio	Nd	60	144.24	7.00	1021	3074	0.190
Neón	Ne	10	20.180	0.8387×10^{-3}	−248.6	−246.0	1.03
Neptunio	Np	93	(237)	20.25	644	3902	1.26
Níquel	Ni	28	58.69	8.902	1455	2913	0.444
Niobio	Nb	41	92.906	8.57	2477	4744	0.265
Nitrógeno	N	7	14.0067	1.1649×10^{-3}	−210.0	−195.8	1.04
Nobelio	No	102	(259)	—	—	—	—
Oro	Au	79	196.967	19.3	1064.18	2856	0.129
Osmio	Os	76	190.2	22.57	3033	5012	0.130
Oxígeno	O	8	15.9994	1.3318×10^{-3}	−218.8	−183.0	0.918
Paladio	Pd	46	106.4	12.02	1555	2963	0.246
Plata	Ag	47	107.68	10.49	961.8	2162	0.235
Platino	Pt	78	195.08	21.45	1768	3825	0.133
Plomo	Pb	82	207.19	11.35	327.5	1749	0.129
Plutonio	Pu	94	(244)	19.84	640	3228	0.130
Polonio	Po	84	(209)	9.32	254	962	—
Potasio	K	19	39.098	0.86	63.28	759	0.757
Praseodimio	Pr	59	140.907	6.773	931	3520	0.193
Prometeo	Pm	61	(145)	7.264	1042	3000 (est.)	—
Protactinio	Pa	91	(231)	15.4 (calc.)	1572	—	—
Radio	Ra	88	(226)	5.0	700	1140	—
Radón	Rn	86	(222)	9.96×10^{-3} (0°C)	−71	−61.7	0.094
Renio	Re	75	186.2	21.02	3186	5596	0.137
Rodio	Rh	45	102.905	12.41	1964	3695	0.243
Rubidio	Rb	37	85.47	1.53	39.31	688	0.363
Rutenio	Ru	44	101.07	12.41	2334	4150	0.238
Rutherfordio	Rf	104	(261)	—	—	—	—
Samario	Sm	62	150.35	7.52	1074	1794	0.197
Seaborgio	Sg	106	(266)	—	—	—	—

(*Continúa*)

Elemento	*Símbolo*	*Número atómico, Z*	*Masa molar* (g/mol)	*Densidad* (g/cm^3) a 20°C	*Punto de fusión* (°C)	*Punto de ebullición* (°C)	*Calor específico* (J/g · C°) a 25°C
Selenio	Se	34	78.96	4.79	221	685	0.321
Silicio	Si	14	28.086	2.33	1414	3265	0.705
Sodio	Na	11	22.9898	0.971	97.72	883	1.23
Talio	Tl	81	204.38	11.85	304	1473	0.129
Tántalo	Ta	73	180.948	16.6	3017	5458	0.140
Tecnecio	Tc	43	(98)	11.5 (calc.)	2157	4265	—
Telurio	Te	52	127.60	6.24	449.5	988	0.202
Terbio	Tb	65	158.924	8.23	1356	3230	0.182
Titanio	Ti	22	4788	4.54	1668	3287	0.523
Torio	Th	90	(232)	11.72	1750	4788	0.113
Tulio	Tm	69	168.934	9.32	1545	1950	0.160
Tungsteno	W	74	183.85	19.3	3422	5555	0.132
Ununilio*	Uun	110	(271)	—	—	—	—
Unununio*	Uuu	111	(272)	—	—	—	—
Unumbio*	Uub	112	(277)	—	—	—	—
Ununcuadio*	Uuq	114	(285)	—	—	—	—
Ununhexio*	Uuh	116	(289)	—	—	—	—
Ununnoccio*	Uuo	118	(293)	—	—	—	—
Uranio	U	92	(238)	18.95	1135	4131	0.116
Vanadio	V	23	50.942	6.11	1910	3407	0.489
Yodo	I	53	126.9044	4.93	113.7	184.4	0.145
Xenón	Xe	54	131.30	5.495×10^{-3}	−111.75	−108.0	0.158
Zinc	Zn	30	65.39	7.133	419.53	907	0.388
Zirconio	Zr	40	91.22	6.506	1855	4409	0.278

Los valores de las masas molares corresponden a un mol de *átomos* del elemento. En los gases diatómicos (H_2, O_2, N_2, etc.), la masa de un mol de *moléculas* es el doble del valor tabulado.

Los valores entre paréntesis en la columna de masas molares son el número de masa de isótopos de mayor vida de los elementos radiactivos.

Todas las propiedades físicas corresponden a una presión de una atmósfera, salvo que se indique otra cosa.

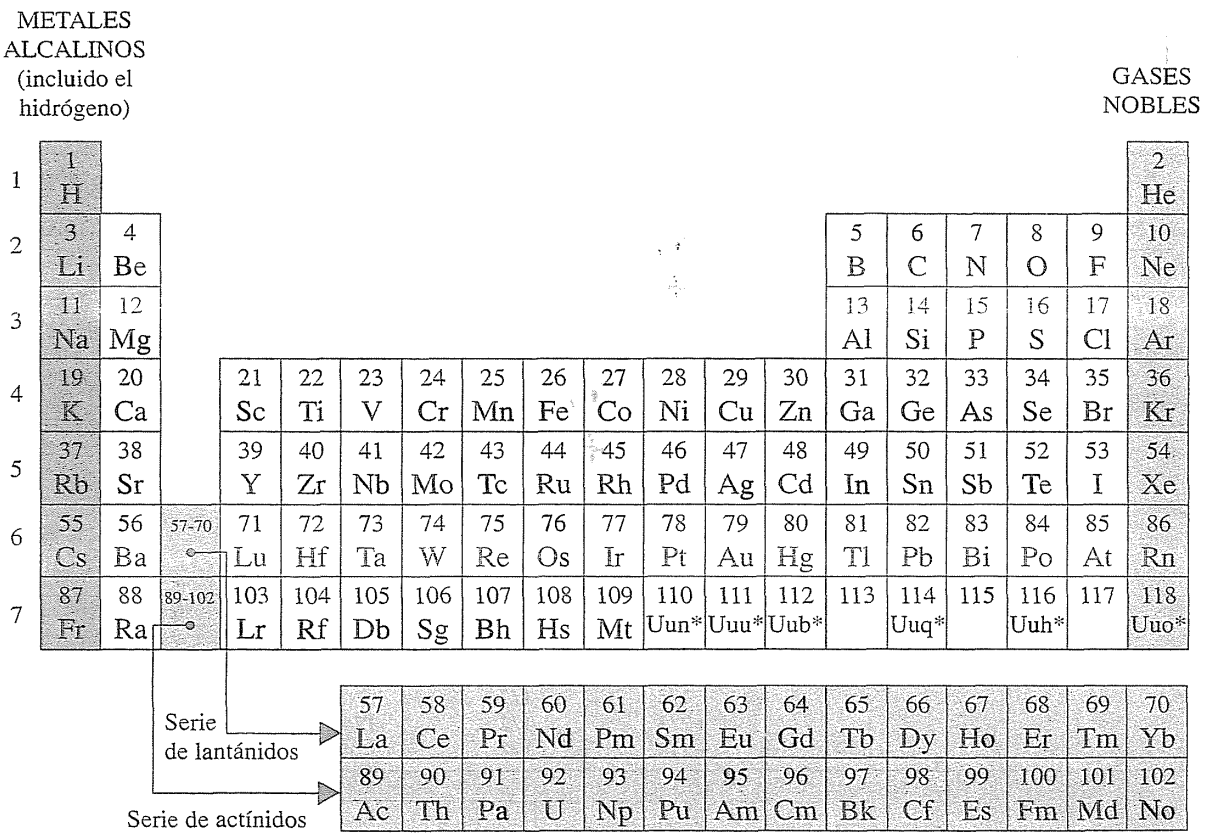
Con excepción de la masa molar, los datos referentes a los gases son válidos sólo cuando se encuentran en su estado molecular habitual, como H_2, He, O_2, Ne, etc. El calor específico de los gases es el valor a presión constante.

* Nombres temporales de estos elementos.

Fuente: Handbook of Chemistry and Physics, 79a. edición (CRC Press, 1998). Consúltese también http://www.webelements.com.

APÉNDICE E

TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS



*Se ha dado a conocer el descubrimiento de estos elementos, pero todavía no se adoptan los nombres respectivos. Los símbolos representan los nombres temporales asignados a los elementos. Consúltese en http://www.webelements.com la información más reciente sobre su descubrimiento y propiedades.

APÉNDICE F

PARTÍCULAS ELEMENTALES

1. LAS PARTÍCULAS FUNDAMENTALES

Leptones

Partícula	*Símbolo*	*Antipartícula*	*Carga (e)*	*Spín* $(h/2\pi)$	*Energía en reposo* (MeV)	*Vida media* (s)	*Productos típicos de decaimiento*
Electrón	e^-	e^+	−1	1/2	0.511	∞	
Electrón neutrino	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	1/2	<0.000015	∞	
Muón	μ^-	μ^+	−1	1/2	105.7	2.2×10^{-6}	$e- + \bar{\nu}_e + \nu\mu$
Muón neutrino	$\nu\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	0	1/2	<0.19	∞	
Tau	τ^-	τ^+	−1	1/2	1777	2.9×10^{-13}	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu\tau$
Tau neutrino	$\nu\tau$	$\bar{\nu}_\tau$	0	1/2	<18	∞	

Quarks

Sabor	*Símbolo*	*Antipartícula*	*Carga (e)*	*Spín* $(h/2\pi)$	*Energía en reposo* (MeV)	*Otras propiedades*
Arriba	u	$\bar{u}$	+2/3	1/2	3	$C = S = T = B = 0$
Abajo	d	$\bar{d}$	−1/3	1/2	6	$C = S = T = B = 0$
Encanto	c	$\bar{c}$	+2/3	1/2	1,300	Encanto $(C) = +1$
Extraño	s	$\bar{s}$	−1/3	1/2	120	Extrañeza $(S) = -1$
Cima	t	$\bar{t}$	+2/3	1/2	174,000	Lo alto $(T) = +1$
Inferior	b	$\bar{b}$	−1/3	1/2	4,300	Lo bajo $(B) = -1$

Partículas de campo

Partícula	*Símbolo*	*Interacción*	*Carga (e)*	*Spín* $(h/2\pi)$	*Energía en reposo* (GeV)
Gravitón[b]		Gravedad	0	2	0
Bosón débil	W^+, W^-	Débil	±1	1	80.4
Bosón débil	Z0	Débil	0	1	91.2
Fotón	l	Electromagnética	0	1	0
Gluón	g	Fuerte (color)	0	1	0

2. ALGUNAS PARTÍCULAS COMPUESTAS

Bariones

Partícula	*Símbolo*	*Contenido de quark*	*Anti-partícula*	*Carga (e)*	*Spín ($h/2\pi$)*	*Energía en reposo* (MeV)	*Vida media (s)*	*Decaimiento típico*
Protón	p	uud	$\bar{p}$	+1	1/2	938	$>10^{33}$	$\pi^0 + e^+$ (?)
Neutrón	n	udd	$\bar{n}$	0	1/2	940	887	$p + e^- + \bar{\nu}_e$
Lambda	Λ^0	uds	$\overline{\Lambda^0}$	0	1/2	1116	2.6×10^{-10}	$p + \pi^-$
Omega	Ω^-	sss	$\overline{\Omega^-}$	−1	3/2	1672	8.2×10^{-11}	$\Lambda^0 + K^-$
Delta	Δ^{++}	uuu	$\overline{\Delta^{++}}$	+2	3/2	1232	5.7×10^{-24}	$p + \pi^+$
Lambda encantada	Λ_c^+	udc	$\overline{\Lambda_c^+}$	+1	1/2	2285	1.9×10^{-13}	$\Lambda^0 + \pi^+$

Mesones

Partícula	*Símbolo*	*Contenido de quark*	*Anti-partícula*	*Carga (e)*	*Spín ($h/2\pi$)*	*Energía en reposo* (MeV)	*Vida media (s)*	*Decaimiento típico*
Pión	π^+	$u\bar{d}$	π^-	+1	0	140	2.6×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
Pión	π^0	$u\bar{u} + d\bar{d}$	π^0	0	0	135	8.4×10^{-17}	$\gamma + \gamma$
Kaón	K^+	$u\bar{s}$	K^-	+1	0	494	1.2×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
Kaón	K^0	$d\bar{s}$	$\overline{K^0}$	0	0	498	0.9×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$
Rho	ρ^+	$u\bar{d}$	ρ^-	+1	1	770	4.4×10^{-24}	$\pi^+ + \pi^-$
Mesón D	D^+	$c\bar{d}$	D^-	+1	0	1869	1.1×10^{-12}	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
Psi	ψ	$c\bar{c}$	ψ	0	1	3097	7.6×10^{-21}	$e^+ + e^-$
Mesón B	B^+	$u\bar{b}$	B^-	+1	0	5279	1.6×10^{-12}	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
Ípsilon	Υ	$b\bar{b}$	Υ	0	1	9460	1.3×10^{-20}	$e^+ + e^-$

[a] Las energías en reposo mencionadas para los quarks no son las relacionadas con los quarks libres; como todavía no se observan quarks libres, hasta la fecha no ha sido posible medir su energía en reposo durante el estado libre. Los valores tabulados son energías efectivas en reposo correspondientes a los quarks confinados en partículas compuestas.

[b] Se piensa que existen las partículas, pero todavía no se comprueba su existencia.

Fuente: "Review of Particle Properties", *European Physical Journal C*, vol. 15 (2000). Véase también http://pdg.lbl.gov/.

APÉNDICE G

FACTORES DE CONVERSIÓN

Los factores de conversión pueden leerse directamente en las tablas. Por ejemplo, 1 grado = 2.778×10^{-3} revoluciones, así que $16.7° = 16.7 \times 2.778 \times 10^{-3}$ rev. Las unidades del SI están en mayúsculas.

Adaptado en parte de G. Shortley y D. Williams, *Elements of Physics,* Prentice-Hall, 1971.

Ángulo plano

	°	′	″	RADIÁN	revolución
1 grado =	1	60	3600	1.745×10^{-2}	2.778×10^{-3}
1 minuto =	1.667×10^{-2}	1	60	2.909×10^{-4}	4.630×10^{-5}
1 segundo =	2.778×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1	4.848×10^{-6}	7.716×10^{-7}
1 RADIÁN =	57.30	3438	2.063×10^{5}	1	0.1592
1 revolución =	360	2.16×10^{4}	1.296×10^{6}	6.283	1

Ángulo sólido

1 esfera = 4π esteradianes = 12.57 esteradianes

Longitud

	cm	METRO	km	pulgada	pie	milla
1 centímetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0.3937	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 METRO =	100	1	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 kilómetro =	10^{5}	1000	1	3.937×10^{4}	3281	0.6214
1 pulgada =	2.540	2.540×10^{-2}	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie =	30.48	0.3048	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla =	1.609×10^{5}	1609	1.609	6.336×10^{4}	5280	1

1 angstrom = 10^{-10} m
1 milla náutica = 1852 m
= 1.151 millas = 6,076 pies
1 fermi = 10^{-15} m

1 año-luz = 9.460×10^{12} km
1 parsec = 3.084×10^{13} km
1 fathom = 6 pies
1 radio de Bohr = 5.292×10^{-11} m

1 yarda = 3 pies
1 rod = 16.5 pies
1 milla = 10^{-3} pulgadas
1 nm = 10^{-9} m

Área

	METRO^2	cm^2	pie^2	pulgada^2
1 METRO CUADRADO =	1	10^4	10.76	1550
1 centímetro cuadrado =	10^{-4}	1	1.076×10^{-3}	0.1550
1 pie cuadrado =	9.290×10^{-2}	929.0	1	144
1 pulgada cuadrada =	6.452×10^{-4}	6.452	6.944×10^{-3}	1

1 milla cuadrada = 2.788×10^7 pies^2 = 640 acres
1 acre = 43,560 pies^2
1 barn = 10^{-28} m^2
1 hectárea 10^4 m^2 = 2.471 acres

Volumen

	METRO^3	cm^3	L	pie^3	pulgada^3
1 METRO CÚBICO =	1	10^6	1000	35.31	6.102×10^4
1 centímetro cúbico	10^{-6}	1	1.000×10^{-3}	3.531×10^{-5}	6.102×10^{-2}
1 litro =	1.000×10^{-3}	1000	1	3.531×10^{-2}	61.02
1 pie cúbico =	2.832×10^{-2}	2.832×10^4	28.32	1	1728
1 pulgada cúbica =	1.639×10^{-5}	16.39	1.639×10^{-2}	5.787×10^{-4}	1

1 galón fluido USA = 4 cuartos de galón fluidos USA = 8 pintas fluidas USA = 128 onzas fluidas USA = 231 pulgadas^3.
1 galón imperial inglés = 277.4 pulgadas^3 = 1.201 galones fluidos USA.

Masa

	g	KILOGRAMO	slug	u	oz	lb	ton
1 gramo =	1	0.001	6.852×10^{-5}	6.022×10^{23}	3.527×10^{-2}	2.205×10^{-3}	1.102×10^{-6}
1 KILOGRAMO =	1000	1	6.852×10^{-2}	6.022×10^{26}	35.27	2.205	1.102×10^{-3}
1 slug =	1.459×10^4	14.59	1	8.786×10^{27}	514.8	32.17	1.609×10^{-2}
1 u =	1.661×10^{-24}	1.661×10^{-27}	1.138×10^{-28}	1	5.857×10^{-26}	3.662×10^{-27}	1.830×10^{-30}
1 onza =	28.35	2.835×10^{-2}	1.943×10^{-3}	1.718×10^{25}	1	6.250×10^{-2}	3.125×10^{-5}
1 libra =	453.6	0.4536	3.108×10^{-2}	2.732×10^{26}	16	1	0.0005
1 ton =	9.072×10^5	907.2	62.16	5.463×10^{29}	3.2×10^4	2000	1

1 tonelada métrica = 1000 kg
Las cantidades sombreadas en color no son unidades de masa, aunque a menudo se utilicen como tales. Por ejemplo, cuando escribimos kg "=" 2.205 lb, esto significa que un kilogramo es una *masa* que *pesa* 2.205 libras en condiciones normales de gravedad (g = 9.80665 m/s^2).

Densidad

	slug/pie^3	KILOGRAMO/METRO^3	g/cm^3	lb/pie^3	lb/pulgada^3
1 slug por pie^3	1	515.4	0.5154	32.17	1.862×10^{-2}
1 KILOGRAMO por METRO^3 =	1.940×10^{-3}	1	0.001	6.243×10^{-2}	3.613×10^{-5}
1 gramo por cm^3 =	1.940	1000	1	62.43	3.613×10^{-2}
1 libra por pie^3 =	3.108×10^{-2}	16.02	1.602×10^{-2}	1	5.787×10^{-4}
1 libra por pulgada^3 =	53.71	2.768×10^4	27.68	1728	1

Las cantidades en las áreas sombreadas en color son densidades de peso, y como tales se distinguen de la de masa desde el punto de vista dimensional. Véase la nota a la tabla de masa.

Tiempo

	a	d	h	min	SEGUNDOS
1 año =	1	365.25	8.766×10^3	5.259×10^5	3.156×10^7
1 día =	2.738×10^{-3}	1	24	1440	8.640×10^4
1 hora =	1.141×10^{-4}	4.167×10^{-2}	1	60	3600
1 minuto =	1.901×10^{-6}	6.944×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1	60
1 SEGUNDO =	3.169×10^{-8}	1.157×10^{-5}	2.778×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1

Velocidad

	pie/s	km/h	METRO/SEGUNDO	*min/h*	*cm/s*
1 pie por segundo =	1	1.097	0.3048	0.6818	30.48
1 kilómetro por hora =	0.9113	1	0.2778	0.6214	27.78
1 METRO por SEGUNDO =	3.281	3.6	1	2.237	100
1 milla por hora =	1.467	1.609	0.4470	1	44.70
1 centímetro por segundo =	3.281×10^{-2}	3.6×10^{-2}	0.01	2.237×10^{-2}	1

1 nudo = 1 milla náutica/h = 1.688 pies/s 1 min/min = 88.00 pies/s = 60.00 min/h.

Fuerza

	dina	NEWTON	lb	pdl	gf	kgf
1 dina =	1	10^{-5}	2.248×10^{-6}	7.233×10^{-5}	1.020×10^{-3}	1.020×10^{-6}
1 NEWTON =	10^5	1	0.2248	7.233	102.0	0.1020
1 libra =	4.448×10^5	4.448	1	32.17	453.6	0.4536
1 poundal =	1.383×10^4	0.1383	3.108×10^{-2}	1	14.10	1.410×10^{-2}
1 gramo fuerza =	980.7	9.807×10^{-3}	2.205×10^{-3}	7.093×10^{-2}	1	0.001
1 kilogramo fuerza =	9.807×10^{-5}	9.807	2.205	70.93	1000	1

Las cantidades en las áreas sombreadas en color no son unidades de fuerza, aunque a menudo se emplean como tales. Por ejemplo, si escribimos un gramo-fuerza " = " 980.7 dinas, queremos decir que un gramo-masa experimenta una fuerza de 980.7 dinas en condiciones normales de gravedad ($g = 9.80665\ m/s^2$).

Energía, trabajo, calor

	Btu	erg	ft · lb	hp · h	JOULE	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
1 Unidad térmica inglesa =	1	1.055×10^{10}	777.9	3.929×10^{-4}	1055	252.0	2.930×10^{-4}	6.585×10^{21}	6.585×10^{15}	1.174×10^{-14}	7.070×10^{12}
1 erg =	9.481×10^{-11}	1	7.376×10^{-8}	3.725×10^{-14}	10^{-7}	2.389×10^{-8}	2.778×10^{-14}	6.242×10^{11}	6.242×10^{5}	1.113×10^{-24}	670.2
1 pie-libra =	1.285×10^{-3}	1.356×10^{7}	1	5.051×10^{-7}	1.356	0.3238	3.766×10^{-7}	8.464×10^{18}	8.464×10^{12}	1.509×10^{-17}	9.037×10^{9}
1 caballo de fuerza-hora =	2545	2.685×10^{13}	1.980×10^{6}	1	2.685×10^{6}	6.413×10^{5}	0.7457	1.676×10^{25}	1.676×10^{19}	2.988×10^{-11}	1.799×10^{16}
1 JOULE =	9.481×10^{-4}	10^{7}	0.7376	3.725×10^{-7}	1	0.2389	2.778×10^{-7}	6.242×10^{18}	6.242×10^{12}	1.113×10^{-17}	6.702×10^{9}
1 caloría =	3.969×10^{-3}	4.186×10^{7}	3.088	1.560×10^{-6}	4.186	1	1.163×10^{-6}	2.613×10^{19}	2.613×10^{13}	4.660×10^{-17}	2.806×10^{10}
1 kilowatt-hora =	3413	3.6×10^{13}	2.655×10^{6}	1.341	3.6×10^{6}	8.600×10^{5}	1	2.247×10^{25}	2.247×10^{19}	4.007×10^{-11}	2.413×10^{16}
1 electrón-volt =	1.519×10^{-22}	1.602×10^{-12}	1.182×10^{-19}	5.967×10^{-26}	1.602×10^{-19}	3.827×10^{-20}	4.450×10^{-26}	1	10^{-6}	1.783×10^{-36}	1.074×10^{-9}
1 millón de electrón-volts =	1.519×10^{-16}	1.602×10^{-6}	1.182×10^{-13}	5.967×10^{-20}	1.602×10^{-13}	3.827×10^{-14}	4.450×10^{-20}	10^{6}	1	1.783×10^{-30}	1.074×10^{-3}
1 kilogramo =	8.521×10^{13}	8.987×10^{23}	6.629×10^{16}	3.348×10^{10}	8.987×10^{16}	2.146×10^{16}	2.497×10^{10}	5.610×10^{35}	5.610×10^{29}	1	6.022×10^{26}
1 unidad de masa atómica unificada =	1.415×10^{-13}	1.492×10^{-3}	1.101×10^{-10}	5.559×10^{-17}	1.492×10^{-10}	3.564×10^{-11}	4.146×10^{-17}	9.32×10^{8}	932.0	1.661×10^{-27}	1

Las cantidades en las áreas sombreadas en color no son estrictamente unidades de energía, pero se incluyen para facilitarle la consulta al lector. Provienen de la fórmula de equivalencia relativista de masa-energía $E = mc^2$ y representan el equivalente energético de una masa de un kilogramo o de una unidad de masa atómica unificada (u).

Presión

	atm	dina/cm^2	pulgada de agua	cm Hg	PASCAL	lb/pulgada^2	lb/pie^2
1 atmósfera =	1	1.013×106	406.8	76	1.013×10^5	14.70	2116
1 dina por cm^2 =	9.869×10^{-7}	1	4.015×10^{-4}	7.501×10^{-5}	0.1	1.405×10^{-5}	2.089×10^{-3}
1 pulgada de agua a 4°C =	2.458×10^{-3}	2491	1	0.1868	249.1	3.613×10^{-2}	5.202
1 centímetro de mercurio[a] a 0°C =	1.316×10^{-2}	1.333×10^{4}	5.353	1	1333	0.1934	27.85
1 PASCAL =	9.869×10^{-6}	10	4.015×10^{-3}	7.501×10^{-4}	1	1.450×10^{-4}	2.089×10^{-2}
1 libra por pulgada^2 =	6.805×10^{-2}	6.895×10^{4}	27.68	5.171	6.895×10^{3}	1	144
1 libra por pie^2 =	4.725×10^{-4}	478.8	0.1922	3.591×10^{-2}	47.88	6.944×10^{-3}	1

[a] Donde la aceleración de la gravedad tiene el valor estándar de 9.80665 m/s^2.

1 bar = 10^6 dina/cm^2 = 0.1 MPa 1 milibar = 10^3 dina/cm^2 = 10^2 Pa 1 torr = 1 milímetro de mercurio

Potencia

	Btu/h	pie · lb/s	hp	cal/s	kW	WATT
1 unidad térmica británica por hora =	1	0.2161	3.929×10^{-4}	6.998×10^{-2}	2.930×10^{-4}	0.2930
1 pie-libre por segundo =	4.628	1	1.818×10^{-3}	0.3239	1.356×10^{-3}	1.356
1 caballo de fuerza =	2545	550	1	178.1	0.7457	745.7
1 caloría por segundo =	14.29	3.088	5.615×10^{-3}	1	4.186×10^{-3}	4.186
1 kilowatt =	3413	737.6	1.341	238.9	1	1000
1 WATT =	3.413	0.7376	1.341×10^{-3}	0.2389	0.001	1

Flujo magnético

	maxwell	WEBER
1 maxwell =	1	10^{-8}
1 WEBER =	10^{8}	1

Campo magnético

	gauss	TESLA	miligauss
1 gauss =	1	10^{-4}	1000
1 TESLA =	10^{4}	1	10^{7}
1 miligauss =	0.001	10^{-7}	1

1 tesla = 1 weber/metro^2

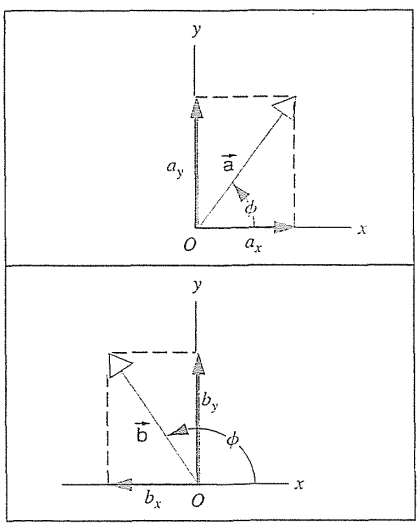
APÉNDICE *H*

VECTORES

H-1 COMPONENTES DE LOS VECTORES

$a_x = a \cos \phi \qquad a_y = a \operatorname{sen} \phi$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \tan \phi = a_y / a_x$



$b_x = b \cos \phi \ (<0)$

$b_y = b \operatorname{sen} \phi \ (>0)$

$a_x = a \operatorname{sen} \theta \cos \phi$

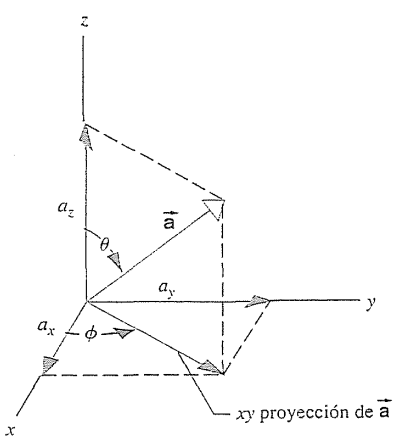
$a_y = a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$

$a_z = a \cos \theta$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$\tan \phi = a_y / a_x$

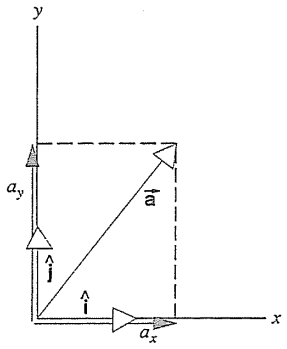
$\cos \theta = a_z / a$



H-2 VECTORES UNITARIOS

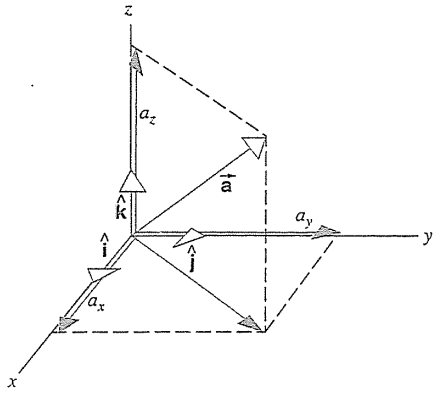
Cartesiano bidimensional

$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$



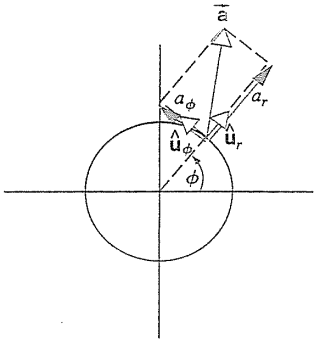
Cartesiano tridimensional

$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$



Polar bidimensional

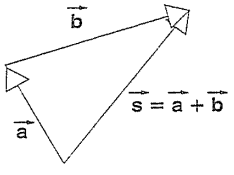
$\vec{a} = a_r\hat{u}_r + a_\phi\hat{u}_\phi$



H-3 ADICIÓN DE VECTORES

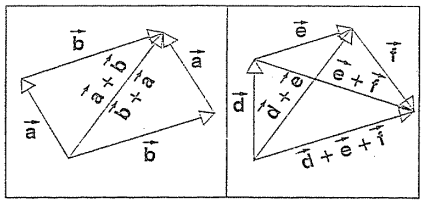
$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

$s_x = a_x + b_x \qquad s_y = a_y + b_y$



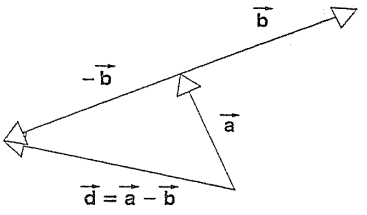
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (ley conmutativa)

$\vec{d} + (\vec{e} + \vec{f}) = (\vec{d} + \vec{e}) + \vec{f}$ (ley asociativa)



$$\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}})$$

$$d_x = a_x - b_x \qquad d_y = a_y - b_y$$



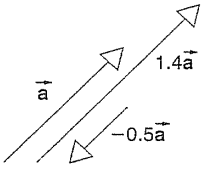
H-4 MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

Multiplicación de un vector por un escalar:

$$\vec{\mathbf{b}} = c\vec{\mathbf{a}}$$

$$b_x = ca_x \qquad b_y = ca_y$$

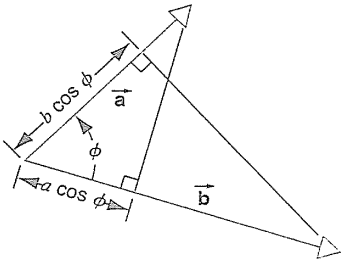
$$b = |c|\,a$$



Producto cruz (o producto escalar) de dos vectores:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = ab\cos\phi = a(b\cos\phi) = b(a\cos\phi)$$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$$



$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

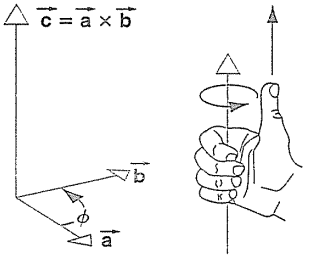
$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Producto cruz (o producto vectorial) de dos vectores:

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$$

$$|\vec{\mathbf{c}}| = |\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = ab\,\text{sen}\,\phi$$



La dirección de $\vec{\mathbf{c}}$ es perpendicular al plano de $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ determinada por la regla de la mano derecha.

$$\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} = -\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\mathbf{k}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) + (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}})$$

$$(s\vec{\mathbf{a}}) \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} \times (s\vec{\mathbf{b}}) = s(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \qquad (s = \text{un escalar}).$$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}$$

APÉNDICE I

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Geometría

Círculo de radio r: circunferencia $= 2\pi r$; área $= \pi r^2$. Esfera del radio r: área $= 4\pi r^2$; volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$. Cilindro circular recto de radio r y de altura h: área $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$; volumen $= \pi r^2 h$. Triángulo de base a y de altura h: *área* $= \frac{1}{2}\,ah$.

Fórmula cuadrática

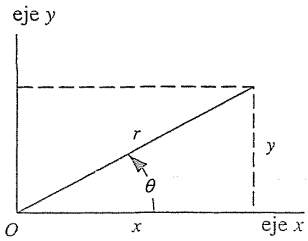
$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0, \text{ entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Funciones trigonométricas del ángulo θ

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

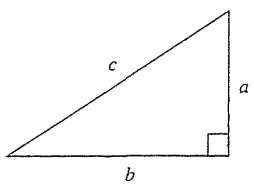
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$



Teorema de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$



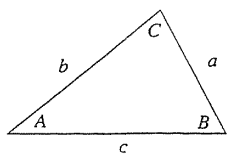
Triángulos

Ángulos A, B, C
Lados opuestos a, b, c

$$A + B + C = 180°$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



Signos y símbolos matemáticos

$=$	igual
$\approx$	aproximadamente igual
$\neq$	no es igual a
$\equiv$	idéntico a, definido como
$>$	mayor que ($>>$ es mucho mayor que)
$<$	menor que ($<<$ es mucho menor que)
$\geq$	mayor o igual que (o no menor que)
$\leq$	menor o igual que (o no mayor que)
$\pm$	más o menos
$\propto$	es proporcional a
Σ	la suma de
$\bar{x}$	valor promedio de x (también x_{pro})

Identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$$
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \qquad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$
$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

Expansión binomial

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \quad (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \cdots \quad (x^2 < 1)$$

Expansión exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Expansión logarítmica

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots \quad (|x| < 1)$$

Expansión trigonométrica (θ en radianes)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

Derivadas e integrales

En las fórmulas siguientes, las letras u y v representan cualquier función de x; a y m son constantes. A las integrales indefinidas debe agregarse una constante arbitraria de integración. En el *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) se incluye una tabulación más completa.

1. $\dfrac{dx}{dx} = 1$
2. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
8. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
9. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$
10. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
11. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
12. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
13. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$
14. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$
15. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\dfrac{du}{dx}$
16. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$

1. $\displaystyle\int dx = x$
2. $\displaystyle\int au\,dx = a\int u\,dx$
3. $\displaystyle\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4. $\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6. $\displaystyle\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$
7. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$
8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
9. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
10. $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln\cos x$
11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$
12. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$
13. $\displaystyle\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
14. $\displaystyle\int xe^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$
15. $\displaystyle\int x^2e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
16. $\displaystyle\int x^ne^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
17. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

APÉNDICE J

PREMIOS NOBEL DE FÍSICA*

1901	Wilhelm Konrad Röntgen	1845-1923	por el descubrimiento de los rayos X
1902	Hendrik Antoon Lorentz	1853-1928	por su investigación de la influencia del magnetismo en los fenómenos
	Pieter Zeeman	1865-1943	de la radiación
1903	Antoine Henri Becquerel	1852-1908	por el descubrimiento de la radiactividad espontánea
	Pierre Curie	1859-1906	por sus investigaciones conjuntas sobre los fenómenos
	Marie Sklowdowska-Curie	1867-1934	de la radiación descubiertos por el profesor Henri Becquerel
1904	Lord Rayleigh (John William Strutt)	1842-1919	por sus investigaciones de las densidades de los gases más importantes y por su descubrimiento del argón
1905	Philipp Eduard Anton von Lenard	1862-1947	por su trabajo sobre los rayos catódicos
1906	Joseph John Thomson	1856-1940	por sus investigaciones teóricas y experimentales sobre la conducción de electricidad por los gases
1907	Albert Abraham Michelson	1852-1931	por sus instrumentos de precisión óptica y por las investigaciones meteorológicas efectuadas con su ayuda
1908	Gabriel Lippmann	1845-1921	por su método para reproducir fotográficamente los colores basándose en los fenómenos de interferencia
1909	Guglielmo Marconi	1874-1937	por su contribución a la invención de la
	Carl Ferdinand Braun	1850-1918	telegrafía inalámbrica
1910	Johanees Diderik van der Waals	1837-1923	por su trabajo en la ecuación de estado de los gases y de los líquidos
1911	Wilhelm Wien	1864-1928	por sus descubrimientos referentes a las leyes que rigen la radiación del calor
1912	Nils Gustaf Dalén	1869-1937	por su invención de los reguladores automáticos para usarlos con acumuladores de gas para iluminar los faros y las boyas
1913	Heike Kamerlingh Onnes	1853-1926	por sus investigaciones de las propiedades de la materia a bajas temperaturas, que *entre otras cosas* condujeron a la producción del helio líquido
1914	Max von Laue	1879-1960	por su descubrimiento de la difracción de los rayos Röntgen por cristales
1915	William Henry Bragg	1862-1942	por sus trabajos en el análisis de la estructura cristalina
	William Lawrence Bragg	1890-1971	mediante los rayos X
1917	Charles Glover Barkla	1877-1944	por su descubrimiento de los rayos X característicos de los elementos
1918	Max Planck	1858-1947	por su descubrimiento de los cuantos de energía
1919	Johannes Stark	1874-1957	por su descubrimiento del efecto Doppler en la radiación de átomos en movimiento la división de las líneas espectrales en los campos eléctricos
1920	Charles-Édouard Guillaume	1861-1938	por los servicios que prestó a las mediciones de precisión en física por su descubrimiento de anomalías en las aleaciones de níquel y acero
1921	Albert Einstein	1879-1955	por sus trabajos en la física teórica y, especialmente, por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico
1922	Niels Bohr	1885-1962	por su investigación de la estructura del átomo y de la radiación que emana de ellos
1923	Robert Andrews Millikan	1868-1953	por su trabajo en la carga elemental de la electricidad y en el efecto fotoeléctrico

* Vea *Nobel Lectures, Physics*, 1901-1970. Elsevier Publishing Company, para biografías de los galardonados y para sus ponencias al recibir el premio. Para mayor información, vea http://www.nobel.se/physics/laureates/index.html.

1924	Karl Manne Georg Siegbahn	1886-1978	por sus descubrimientos e investigaciones en el campo de la espectroscopía por rayos X
1925	James Franck	1882-1964	por su descubrimiento de las leyes que rigen el impacto de un electrón en el átomo
	Gustav Hertz	1887-1975	
1926	Jean Baptiste Perrin	1870-1942	por su trabajo sobre la estructura discontinua de la materia y, especialmente, por su descubrimiento del equilibrio de sedimentación
1927	Arthur Holly Compton	1892-1962	por su descubrimiento del efecto que lleva su nombre por su método
	Charles Thomson Rees Wilson	1869-1959	de hacer visibles por condensación de vapor las trayectorias de las partículas con carga eléctrica
1928	Owen Williams Richardson	1879-1959	por su trabajo sobre los fenómenos termoiónicos y, especialmente, por la ley que lleva su nombre
1929	Prince Louis-Victor de Broglie	1892-1987	por su descubrimiento de la naturaleza ondulatoria de los electrones
1930	Sir Chandrasekhara Venkata Raman	1888-1970	por su trabajo sobre la dispersión de la luz y por el descubrimiento del efecto que lleva su nombre
1932	Werner Heisenberg	1901-1976	por su creación de la mecánica cuántica, cuya aplicación condujo, entre otras cosas, al descubrimiento de las formas alotrópicas del hidrógeno
1933	Erwin Schrödinger	1887-1961	por su descubrimiento de nuevas formas productivas de la teoría atómica
	Paul Adrien Maurice Dirac	1902-1984	
1935	James Chadwick	1891-1974	por su descubrimiento del neutrón
1936	Victor Franz Hess	1883-1964	por su descubrimiento de la radiación cósmica
	Carl David Anderson	1905-1991	por su descubrimiento del positrón
1937	Clinton Joseph Davisson	1881-1958	por su descubrimiento experimental de la difracción de electrones por cristales
	George Paget Thomson	1892-1975	
1938	Enrico Fermi	1901-1954	por su demostración de la existencia de nuevos elementos radiactivos producidos por la irradiación de neutrones y por el descubrimiento conexo de las reacciones nucleares producidas por neutrones lentos
1939	Ernest Orlando Lawrence	1901-1958	por la invención y el desarrollo del ciclotrón y por los resultados obtenidos con él, sobre todo con los elementos radiactivos artificiales
1943	Otto Stern	1888-1969	por su contribución al desarrollo del método de rayos moleculares y por su descubrimiento del momento magnético del protón
1944	Isidor Isaac Rabi	1898-1988	por su método de resonancia para registrar las propiedades magnéticas de los núcleos atómicos
1945	Wolfgang Pauli	1900-1958	por el descubrimiento del principio de exclusión (principio de Pauli)
1946	Percy Williams Bridgman	1882-1961	por la invención del aparato para producir presiones extremadamente altas y por descubrimientos que con ellas hizo en el área de la física a alta presión
1947	Sir Edward Victor Appleton	1892-1965	por sus investigaciones de la física de la atmósfera superior, sobre todo por el descubrimiento de la capa Appleton
1948	Patrick Maynard Stuart Blackett	1897-1974	por la creación del método de la cámara de niebla de Wilson y por los descubrimientos hechos con ella en la física nuclear y en la radiación cósmica
1949	Hideki Yukawa	1907-1981	por su predicción de la existencia de los mesones, basándose en el trabajo teórico relativo a las fuerzas nucleares
1950	Cecil Frank Powell	1903-1969	por el desarrollo del método fotográfico para estudiar los procesos nucleares y por sus descubrimientos concernientes a los mesones logrados con él
1951	Sir John Douglas Cockcroft	1897-1967	por su innovador trabajo sobre la transmutación de los núcleos atómicos
	Ernest Thomas Sinton Walton	1903-1995	por partículas aceleradas artificialmente
1952	Felix Bloch	1905-1983	por su invención de nuevas técnicas en los métodos de precisión
	Edward Mills Purcell	1912-1997	magnética nuclear y por los descubrimientos conexos
1953	Frits Zernike	1888-1966	por la demostración del método de contraste de fases, especialmente por su invención de la microscopía por contraste de fases
1954	Max Born	1882-1970	por su investigación fundamental en la mecánica cuántica, sobre todo por su interpretación estadística de la función ondulatoria
	Walter Bothe	1981-1957	por el método de coincidencias y por los descubrimientos hechos con él
1955	Willis Eugene Lamb	1913-	por sus descubrimientos referentes a la estructura fina del espectro de hidrógeno
	Polykarp Kusch	1911-1993	por su determinación de la precisión del momento magnético del electrón
1956	William Shockley	1910-1989	por su investigación sobre los semiconductores y por su descubrimiento
	John Bardeen	1908-1991	del efecto de transistor
	Walter Houser Brattain	1902-1987	

1957	Chen Ning Yang	1922-	por su penetrante investigación sobre las leyes de paridad, que condujeron a descubrimientos importantes relacionados con las partículas elementales
	Tsung Dao Lee	1926-	
1958	Pavel Aleksejecič Čerenkov	1904-1990	por el descubrimiento y la interpretación del efecto Cerenkov
	Il'ja Michajlovič Frank	1908-1990	
	Igor Yevgenyevich Tamm	1895-1971	
1959	Emilio Gino Segrè	1905-1989	por su descubrimiento del antiprotón
	Owen Chamberlain	1920-	
1960	Donald Arthur Glaser	1926-	por la invención de la cámara de burbujas
1961	Robert Hofstadter	1915-1990	por sus trabajos innovadores sobre la dispersión de electrones en los núcleos atómicos y por los descubrimientos del efecto que lleva su nombre
	Rudolf Ludwig Mössbauer	1929-	por sus investigaciones referentes a la absorción de resonancia de los rayos gamma y por su descubrimiento conexo del efecto que lleva su nombre
1962	Lev Davidovič Landau	1908-1968	por sus teorías innovadoras sobre la materia condensada, especialmente el helio líquido
1963	Eugene P. Wigner	1902-1995	por su contribución a la teoría del núcleo atómico y de las partículas elementales, especialmente con el descubrimiento y la aplicación de los principios fundamentales de la simetría
	Maria Goeppert Mayer	1906-1972	por sus descubrimientos acerca de la estructura nuclear de capas
	J. Hans D. Jensen	1907-1973	
1964	Charles H. Townes	1915-	por el importante trabajo en el campo de la electrónica cuántica, que llevó a construir osciladores y amplificadores basados en el principio de máser-láser
	Nikolai G. Basov	1922-	
	Alexander M. Prochorov	1916-	
1965	Sin-itiro Tomonaga	1906-1979	por su importante trabajo en la electrodinámica cuántica, con trascendentales consecuencias en la física de las partículas elementales
	Julian Schwinger	1918-1994	
	Richard P. Feynman	1918-1988	
1966	Alfred Kastler	1902-1984	por su descubrimiento y desarrollo de métodos ópticos para estudiar la resonancia hertziana en los átomos
1967	Hans Albrecht Bethe	1906-	por sus contribuciones a la teoría de las reacciones nucleares, en especial sus descubrimientos concernientes a la producción de energía en las estrellas
1968	Luis W. Alvarez	1911-1988	por su trascendental contribución a la física de las partículas elementales, en particular el descubrimiento de muchos estados de resonancia, que fueron posibles gracias a que inventó la técnica de usar la cámara de burbujas de hidrógeno y el análisis de datos
1969	Murray Gell-Mann	1929-	por su contribución y sus descubrimientos referentes a la clasificación de las partículas elementales y de sus interacciones
1970	Hannes Alfvén	1908-1995	por su trabajo y descubrimientos tan importantes en la magneto-hidrodinámica, con fecundas aplicaciones en varias partes de la física del plasma
	Louis Néel	1904-	por sus innovadores trabajos y descubrimientos concernientes al antiferromagnetismo y al ferromagnetismo, que condujeron a importantes aplicaciones en la física del estado sólido
1971	Dennis Gabor	1900-1979	por su descubrimiento de los principios de la holografía
1972	John Bardeen	1908-1991	por su formulación de la teoría de la superconductividad
	Leon N. Cooper	1930-	
	J. Robert Schrieffer	1931-	
1973	Leo Esaki	1925-	por su descubrimiento de túneles en los semiconductores
	Ivan Giaever	1929-	por su descubrimiento de túneles en los superconductores
	Brian D. Josephson	1940-	por su predicción teórica de las propiedades de una supercorriente a través de una barrera de túneles
1974	Anthony Hewish	1924-	por el descubrimiento de los pulsares
	Sir Martin Ryle	1918-1984	por su innovador trabajo en radioastronomía
1975	Aage Bohr	1922-	por el descubrimiento de la conexión entre el movimiento colectivo y el movimiento de las partículas, así como la formulación de la teoría de la estructura del núcleo atómico basada en esta conexión
	Ben Mottelson	1926-	
	James Rainwater	1917-1986	
1976	Burton Richter	1931-	por su descubrimiento (independiente) de una importante partícula fundamental
	Samuel Chao Chung Ting	1936	

1977	Philip Warren Anderson	1923	por sus importantes investigaciones teóricas sobre la estructura
	Nevill Francis Mott	1905-1996	electrónica de los sistemas magnéticos y desordenados
	John Hasbrouch Van Vleck	1899-1980	
1978	Peter L. Kapitza	1894-1984	por sus invenciones y descubrimientos básicos en la física de bajas temperaturas
	Arno A. Penzias	1926-	por su descubrimiento de la radiación de fondo de las microondas cósmicas
	Robert Woodrow Wilson	1936-	
1979	Sheldon Lee Glashow	1932-	por su modelo unificado de la acción de fuerzas electromagnéticas y
	Abdus Salam	1926-1996	débiles, y por su predicción de la existencia de corrientes neutrales
	Steven Weinberg	1933-	
1980	James W. Cronin	1931-	por el descubrimiento de las violaciones de los principios básicos de
	Val L. Fitch	1923-	la simetría en los decaimientos de los mesones neutrales K
1981	Nicolaas Bloembergen	1920-	por su contribución a la invención de la espectroscopía láser
	Arthur Leonard Schawlow	1921-1999	
	Kai M. Siegbahn	1918-1999	por su contribución de espectroscopía de electrones de alta resolución
1982	Kenneth Geddes Wilson	1936-	por su método de analizar los fenómenos críticos propios de los cambios de la materia bajo la influencia de la presión y de la temperatura
1983	Subrehmanyan Chandrasekhar	1910-1995	por sus estudios teóricos sobre la estructura y la evolución de las estrellas
	William A. Fowler	1911-1995	por sus estudios sobre la formación de los elementos químicos en el universo
1984	Carlo Rubbia	1934-	por sus decisivas contribuciones al gran proyecto que culminó
	Simon van der Meer	1925-	en el descubrimiento de las partículas de campo W y Z, comunicadoras de la interacción débil
1985	Klaus von Klitzing	1943-	por su descubrimiento de la resistencia cuantizada de Hall
1986	Ernst Ruska	1906-1988	por su invención del microscopio electrónico
	Gerd Binning	1947-	por su invención del microscopio
	Heinrich Rohrer	1933-	electrónico por barrido-túneles
1987	Karl Alex Müller	1927-	por su descubrimiento de una nueva clase de superconductores
	J. Georg Bednorz	1950-	
1988	Leon M. Lederman	1922-	por sus experimentos con haces de neutrino y por el descubrimiento
	Melvin Schwartz	1932-	del neutrino muón
	Jack Steinberger	1921-	
1989	Hans G. Dehmelt	1922-	por su invención de la técnica para atrapar átomos individuales
	Wolfgang Paul	1913-1993	
	Norman F. Ramsey	1915-	por sus descubrimientos en espectroscopía de resonancia atómica, que dieron origen a los máseres de hidrógeno y a los relojes atómicos
1990	Richard E. Taylor	1929-	por sus experimentos sobre la dispersión de electrones desde el
	Jerome I. Friedman	1930-	núcleo, que revelaron la presencia de quarks dentro de los nucleones
	Henry W. Kendall	1926-1999	
1991	Pierre-Gilles de Gennes	1932-	por sus descubrimientos sobre el ordenamiento de las moléculas en sustancias como los cristales líquidos, los superconductores y los polímeros
1992	George Charpak	1924-	por su invención de los detectores electrónicos rápidos para partículas de gran energía
1993	Joseph H. Taylor	1941-	por su descubrimiento e interpretación del primer pulsar binario
	Russell A. Hulse	1950-	
1994	Bertram N. Brockhouse	1918-	por el desarrollo de las técnicas de dispersión de los neutrones
	Clifford G. Shull	1915-	
1995	Martin L. Perl	1927-	por su descubrimiento del leptón tau
	Frederick Reines	1918-1998	por la detección del neutrino
1996	David M. Lee	1931-	por su descubrimiento de la superfluidez en ^{3}He
	Douglas M. Osheroff	1945-	
	Robert C. Richardson	1937-	
1997	Steven Chu	1948-	por la invención de los métodos para enfriar y atrapar los
	Claude Cohen-Tannoudji	1933-	átomos con luz láser
	William D. Phillips	1948-	
1998	Robert B. Laughlin	1950-	por sus descubrimientos de una nueva forma del fluido cuántico
	Horst L. Stormer	1949-	con excitaciones cargadas fraccionalmente
	Daniel C. Tsui	1939-	
1999	Gerardus 't Hooft	1946-	por explicar la estructura cuántica de las interacciones electrodébiles
	Martinus J. G. Veltman	1931-	en física
2000	Zhores I. Alferov	1930-	por inventar las heteroestructuras que se usan en alta velocidad y en
	Herbert Kroemer	1928-	optoelectrónica
	Jack S. Kilby	1923-	por su parte en la invención de los circuitos integrados

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS IMPARES

CAPÍTULO 25

Ejercicios

1. 0.50 C. **3.** 2.74 N. **5.** *(a)* 1.77 N. *(b)* 3.07 N.
7. $q_1 = -4q_2$ **9.** 24.5 N, a lo largo del bisector de ángulo.
11. En el punto a 82.3 cm de la carga positiva y a 144 cm de la carga negativa. **15.** *a)* $\vec{\mathbf{F}} = F_z\hat{\mathbf{k}}$.
b) $(2q_0q/4\pi\epsilon_0R^2)[1 - [z^2/(z^2 + R^2)]^{1/2}](z/|z|)\hat{\mathbf{k}}$.
17. A lo largo del eje y a una distancia de $(y^4 + y^2L^2/4)^{1/4}$ *a)* a la derecha de q_1 o *b)* a la izquierda de q_0.
19. $F_z = -(q_0\lambda/2\pi\epsilon_0)[1/y - 1/(y^2 + L^2/4)^{1/2}]$.
21. *a)* Borón. *b)* Nitrógeno. *b)* Carbono. **23.** 2.89 nN.
25. 3.8 N. **27.** 5.08 m debajo del electrón. **29.** 13.4 MC.
31. *a)* 57.1 TC; no. *b)* 598 toneladas métricas.

Problemas

1. 1.00 μC y 3.00 μC, pero de signo contrario. **3.** *a)* Debe localizarse una carga $-4q/9$ en el segmento lineal que une las dos cargas positivas, a una distancia $L/3$ de la carga $+q$.
5. *b)* 2.96 cm. **7.** $q = Q/2$. **9.** $(\pi^3m\epsilon_0d^3/2qQ)^{1/2}$. **11.** $a/\sqrt{2}$.

CAPÍTULO 26

Ejercicios

1. 10.5 mN/C, hacia el oeste. **3.** 203 nN/C, arriba. **5.** 144 pC.
7. 19.5 kN/C. **9.** 9:30. **13.** $R/\sqrt{3}$. **15.** *a)* 104 nC.
b) 1.31×10^{17}. *c)* 4.96×10^{-6}. **17.** *a)* 6.50 cm.
b) 4.80 μC. **23.** A la derecha. **27.** *a)* 6.53 cm. *b)* 26.9 ns.
c) 0.121. **29.** *a)* 585 kN/C, hacia la carga negativa.
b) 93.6 fN, hacia la carga positiva. **31.** $5e$.
33. 1.64×10^{-19} C ($\approx 2.5\%$ grande). **35.** 1.2 mm. **37.** *a)* Cero.
b) 8.50×10^{-22} N · m. *c)* Cero.

Problemas

1. *b)* Paralelo a $\vec{\mathbf{p}}$. **3.** *(a)* $qz/4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}$.
b) $(q_1 - q_2)R/2\pi^2\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}$. **5.** $+q$ en $z = +2a$ y $z = -2a$; $-4q$ en $z = +a$ y $z = -a$; $+6q$ en $z = 0$.
11. La placa superior; 4.06 cm. **13.** $2pE\cos\theta_0$. **15.** *a)* $8q/\pi\epsilon_0a^3$.

CAPÍTULO 27

Ejercicios

1. -7.8 mN · m²/C. **3.** *a)* $-\pi R^2E$. *b)* πR^2E.
5. 208 kN · m²/C. **7.** $q/6\epsilon_0$. **9.** 4.6 μC. **13.** *a)* 322 nC.
(b) 143 nC. **15.** *a)* Cero. *b)* σ/ϵ_0, a la izquierda *c)* Cero.
17. 5.09 μC/m³. **19.** -1.13 nC. **21.** *a)* 2.19 MN/C, radialmente hacia afuera. *b)* 436 kN/C, radialmente hacia adentro.
23. 97.9 cm. **25.** *(b)* $\rho R^2/2\epsilon_0r$. **27.** *(a)* 452 nC/m².
(b) 51.1 kN/C. **29.** *(a)* 53 MN/C. *(b)* 60 N/C.

Problemas

3. 5.11 nC/m². **5.** *(a)* $q/2\pi\epsilon_0Lr$, radialmente hacia afuera.
b) $-q$ en las superficies interna y externa. *c)* $q/2\pi\epsilon_0Lr$, radialmente hacia adentro. **7.** *a)* $\lambda/2\pi\epsilon_0r$. *b)* Cero. **9.** 270 eV.
11. *a)* $q/4\pi\epsilon_0r^2$. *b)* $q/4\pi\epsilon_0r^2$. *c)* Sólo dentro de la capa propiamente. *d)* Sí, las cargas se inducen en las superficies. *e)* Sí *f)* No. *g)* No.
13. $q/2\pi a^2$. **19.** *a)* $-Q$. *b)* $-Q$. *c)* $-(Q + q)$. *d)* Sí.

CAPÍTULO 28

Ejercicios

1. *a)* 484 keV. *b)* Cero. **3.** *a)* 27.2 fJ. *b)* 3.02×10^{-31} kg, en error por un factor aproximado de 3. **5.** *a)* 3.0 kN. *b)* 240 MeV.
7. *a)* 30 GJ. *b)* 7.1 km/s. *c)* 9.0×10^4 kg. **9.** 2.6 km/s.
11. *a)* 27.2 V. *b)* -27.2 eV. *c)* 13.6 eV. *d)* 13.6 eV.
13. *a)* 24.4 kV/m. *b)* 2.93 kV. **15.** *a)* 132 MV/m.
b) 8.43 kV/m. **17.** *a)* 32 MeV. **19.** *a)* -3.85 kV.
b) -3.85 kV. **21.** -1.1 nC. **23.** 637 MV.
25. *a)* $qd/2\pi\epsilon_0a(a + d)$. **27.** *a)* 2.76 MV. *b)* 5.27 J.
c) 7.35 J. **29.** 186 pJ. **31.** 746 V/m. **33.** -2.3×10^{21} V/m.
35. -39.2 V/m. **37.** *a)* 2.46 V. *b)* 2.46 V. *c)* Cero.
43. *a)* -115 mV. *b)* 18.1 nV/m. **45.** *a)* 3.64 nC.
b) 12.5 nC/m². **47.** *a)* Esfera grande; 38.6 nC; esfera pequeña 18.6 nC. *b)* 2.84 kV cada uno. **49.** *a)* 110 μC; 1.1 μC.
b) 8.75 μC/m²; 8.75 μC/m².

Problemas

1. *a)* 256 kV. *b)* $0.745c$. **3.** $(qQ/8\pi\epsilon_0)(1/r_1 - 1/r_2)$.
5. 2.17 d. **7.** *a)* 562 μm. *b)* 813 V. **9.** *a)* -5.40 nm.
b) 9.00 nm. *c)* No. **13.** *a)* $(k/4\pi\epsilon_0)[(L^2 + y^2)^{1/2} - y]$.
b) $(k/4\pi\epsilon_0)[1 - y/(L^2 + y^2)^{1/2}]$. *(c)* $0.75L$. **15.** 2.0×10^{-8}.
17. *a)* Cero. *b)* Cero. *c)* Cero. *d)* Cero. *e)* No.

CAPÍTULO 29

Ejercicios

1. *a)* 1.33 kC. *b)* 8.31×10^{21}. **3.** *a)* 9.41 A/m², norte.
5. 0.400 mm. **7.** 0.67 A, hacia la terminal negativa.
9. *(a)* 654 nA/m². *(b)* 83.4 MA. **11.** 52.5 min. **13.** 0.59 Ω.
15. *(a)* 1.5 kA. *(b)* 53 MA/m². *(c)* 110 nΩ · m; platino.
19. 3. **21.** *(a)* 6.00 mA. *(b)* 15.9 nV. *(c)* 21.2 nΩ.
23. 1190 $(\Omega \cdot m)^{-1}$. **25.** *(a)* Cu: 55.3 A/cm²; Al: 34.0 A/cm².
(b) Cu: 1.01 kg; Al: 495 g. **27.** *(a)* 8.52 kΩ. *(b)* 4.51 μA.
29. *(a)* 7.65×10^5 N/C. *(b)* 3.60×10^6 N/C.
(c) 2.51×10^{-5} C/m². **31.** *(a)* $(3 \times 10^6$ V/m$)R$

Problemas

1. 7.1 ms. **3.** *a*) 380 μV. *b*) Negativo. *c*) 4.3 min. **5.** *a*) 95.0 μC. *b*) 158 C°. **7.** *a*) 250°C. **9.** 54 Ω. **11.** *a*) Plata. *b*) 60.8 nΩ. **13.** 0.036. **15.** $R = (\rho/4\pi)(1/a - 1/b)$.

CAPÍTULO 30

Ejercicios

1. 7.5 pC. **3.** 3.25 mC. **5.** 0.546 pF. **7.** *a*) 84.5 pF. *b*) 191 cm^2. **9.** 9090. **11.** 7.17 μF. **13.** *a*) 2.4 μF. *b*) $q_4 = q_6 = 480$ μC. *c*) $\Delta V_4 = 120$ V; $\Delta V_6 = 80$ V. **15.** *a*) $d/3$. *b*) $3d$. **17.** *a*) 942 μC. *b*) 91.4 V. **21.** 13.2 ¢. **23.** *a*) 28.6 pF. *b*) 17.9 nC. *c*) 5.59 μJ. *d*) 482 kV/m. **25.** 74.1 mJ/m^3. **29.** 3.89. **31.** La hoja de mica. **33.** 86.3 nF. **35.** *a*) 730 pF. *b*) 28 kV. **37.** *a*) $\epsilon_0 A/(d - b)$. *b*) $d/(d - b)$. *c*) $q^2b/2A\epsilon_0$; jalado al interior. **39.** *a*) 13.4 kV/m. *b*) 6.16 nC. *c*) 5.02 nC.

Problemas

5. *a*) 45.4 V. *b*) 52.7 μC. *c*) 146 μC. **7.** *a*) 50 V. *b*) Cero. **9.** *a*) $q_1 = 9.0$ μC; $q_2 = 16$ μC; $q_3 = 9.0$ μC; $q_4 = 16$ μC. *b*) $q_1 = 8.40$ μC; $q_2 = 16.8$ μC; $q_3 = 10.8$ μC; $q_4 = 14.4$ μC. **11.** *a*) 2.0 J. **13.** *a*) $e^2/32\pi^2\epsilon_0 r^4$. *b*) $e^2/8\pi\epsilon_0 R$. *c*) 1.40 fm. **17.** 1.63 kV. **21.** *a*) $2\Delta V$. *b*) $U_i = \epsilon_0 A(\Delta V)^2/2d$; $U_f = \epsilon_0 A(\Delta V)^2/d$. *c*) $\epsilon_0 A(\Delta V)^2/2d$. **23.** *a*) 85.6 pF. *b*) 119 pF. *c*) 10.3 nC; 10.3 nC. *d*) 9.86 kV/m. *e*) 2.05 kV/m. *f*) 86.6 V. *g*) 170 nJ.

CAPÍTULO 31

Ejercicios

1. 10.6 kJ. **3.** 13 h 38 min. **5.** -10 V. **7.** *a*) 14 Ω. *b*) 35 mW. **9.** *a*) 44.2 V. *b*) 21.4 V. *c*) Izquierda. **11.** $\mathscr{E}/7R$. **13.** *a*) $i_1 = 668$ mA, abajo: $i_2 = 85.7$ mA, arriba; $i_3 = 582$ mA, arriba. *b*) -3.60 V. **15.** *a*) 3.4 A. *b*) 0.29 V. Y: *a*) 0.59 A. *b*) 1.7 V. **17.** 4.0 Ω; 12 Ω. **19.** 7.5 V. **21.** 262 Ω o 38.2 Ω. **23.** *a*) 131 Ω. *b*) $i_1 = 47.5$ mA; $i_2 = 21.2$ mA; $i_3 = 14.4$ mA; $i_4 = 11.9$ mA. **25.** *a*) $R/2$. *b*) $5R/8$. **29.** 18 kC. **31.** *a*) 1.03 kW. *b*) 34.5 ¢. **33.** *a*) R_2. *b*) R_1. **35.** *a*) \$4.46. *b*) 144 Ω. *c*) 833 mA. **37.** *a*) 2.88×10^{11}. *b*) 24.0 μA. *c*) 1.14 kW; 23.1 mW. **39.** *a*) 6.1 m. *b*) 13 m. **43.** 4.61. **45.** *a*) 2.20 s. *b*) 44 mV. **47.** 2.35 MΩ. **49.** *a*) 955 nA. *b*) 1.08 μW. *c*) 2.74 μW. *d*) 3.82 μW.

Problemas

1. El cable. **3.** *a*) 1.5 kΩ. *b*) 400 mV. *c*) 0.26%. **5.** *a*) $\rho_A = 16.3$ n$\Omega \cdot$m; $\rho_B = 7.48$ n$\Omega \cdot$m. *b*) $j_A = j_B = 62.3$ kA/cm^2. *c*) $E_A = 10.2$ V/m; $E_B = 4.66$ V/m. *d*) $\Delta V_A = 435$ V; $\Delta V_B = 195$ V. **7.** *a*) $3R/4$. *b*) $5R/6$. **9.** *a*) En paralelo. *b*) 72.0 Ω; 144 Ω. **11.** 0.45 A. **15.** 27.4 cm/s. **17.** *a*) $1.37L$. *b*) $0.730A$. **19.** $RC \ln 2$.

CAPÍTULO 32

Ejercicios

1. 1: +; 2: −; 3: 0; 4: −. **3.** *a*) 3.4 km/s. **5.** 8.2×10^9. **9.** *a*) 0.34 mm. *b*) 2.6 keV. **11.** *a*) 1.11×10^7 m/s. *b*) 0.316 mm. **13.** *a*) 2600 km/s. *b*) 110 ns. *c*) 140 keV. *d*) 70 kV. **15.** *a*) K_p. *b*) $K_p/2$. **17.** *a*) $\sqrt{2}r_p$. *b*) r_p. **19.** *a*) $0.999928c$. **21.** Una partícula alfa. **23.** ≈ 240 m. **25.** 37 cm/s. **29.** 467 mA; izquierda a derecha. **31.** *a*) 330 MA. *b*) 1.1×10^{17} W. **33.** $(-0.414\text{ N})\hat{\mathbf{k}}$ **35.** *a*) Cero; 0.138 N; 0.138 N. **37.** *a*) 20 min. *b*) 0.059 N $\cdot$ m.

Problemas

1. $(0.75\text{ T})\hat{\mathbf{k}}$ **3.** *a*) Al este. *b*) 6.27×10^{14} m/s^2. *c*) 2.98 mm. **7.** *a*) $B\Delta x(qm/2\Delta V)^{1/2}$. *b*) 7.91 mm. **9.** *a*) $-q$. *b*) $\pi m/qB$. **11.** *a*) 78.6 ns. *b*) 9.16 cm. *c*) 3.20 cm. **15.** 4.2 C. **19.** 1.63 A.

CAPÍTULO 33

Ejercicios

1. *a*) 3×10^8 m/s. **3.** 7.7 mT. **5.** 12 nT. **7.** *a*) 0.324 fN, paralelo a la corriente. *b*) 0.324 fN, radialmente hacia afuera. *c*) Cero. **9.** 30.0 A, antiparalelo. **11.** *a*) 2.43 A $\cdot$ m^2. *b*) 46 cm. **13.** $(\mu_0 i\theta/4\pi)(1/b - 1/a)$, fuera de la página. **15.** $(\mu_0 i/2\pi w)\ln(1 + w/d)$, arriba. **19.** *a*) 68 μT. *b*) 9.3×10^{-7} N $\cdot$ m. **21.** 606 μN, hacia el centro del cuadrado. **23.** *b*) 2.3 km/s. **27.** 109 m. **31.** *a*) -2.5 μT $\cdot$ m. *b*) Cero. **33.** *a*) $\mu_0 ir/2\pi c^2$. *b*) $\mu_0 i/2\pi r$. *c*) $(\mu_0 i/2\pi r)[(a^2 - r^2)/(a^2 - b^2)]$. *d*) Cero. **35.** $3i_0/8$, hacia el interior de la página. **37.** *a*) Negativo. *b*) 9.7 cm.

Problemas

1. $8N\mu_0 i/5\sqrt{5}R$. **5.** *c*) $\frac{1}{2}nia^2 \operatorname{sen}(2\pi/n)$. **7.** *a*) $(2\mu_0 i/3\pi L)(2\sqrt{2} + \sqrt{10})$. *b*) Mayor. **9.** 0.272 A. **13.** $\mu_0 ir^2/2\pi a^3$.

CAPÍTULO 34

Ejercicios

1. 57 μWb. **3.** *a*) 31 mV. *b*) Derecha a izquierda. **5.** *a*) 1.12 mΩ. *b*) 1.27 T/s. **7.** *b*) 58 mA. **9.** 4.97 μW. **11.** *b*) No. **13.** 600 nV. **15.** Cero. **17.** $iLBt/m$, lejos de G. **21.** 25 μC. **23.** *a*) $(\mu_0 ia/2\pi)\ln(1 + b/D)$. *b*) $\mu_0 iabv/2\pi RD(D + b)$. **25.** 6.3 rev/s. **27.** 5.5 kV. **29.** *a*: -1.20 mV; *b*: -2.79 mV; *c*: 1.59 mV. **31.** *a*) 4.53×10^7 m/s^2, a la derecha. *b*) Cero. *c*) 4.53×10^7 m/s^2, a la izquierda. **33.** *a*) 0.15°.

Problemas

3. *a*) 28.2 μV. *b*) De *c* a *b*. **5.** 80 μV, en dirección de las manecillas del reloj. **7.** 0.455 V. **11.** $(Bar)^2\omega\sigma t$. **15.** *a*) 34 V/m. *b*) 6.0×10^{12} m/s^2.

CAPÍTULO 35

Ejercicios

1. 2.1×10^9 A. **3.** *a*) $(-2.86\text{ A} \cdot \text{m}^2)\hat{\mathbf{k}}$. *b*) $(1.10\text{ A} \cdot \text{m}^2)\hat{\mathbf{k}}$. **5.** *b*) ia^2. **7.** $\frac{1}{2}\pi i(a^2 + b^2)$. **9.** *a*) 514 GV/m. *b*) 19.0 mT. **13.** 24 mJ/T. **15.** 0.58 K. **17.** *a*) 150 T. *b*) 450 T. **19.** Sí. **21.** *a*) 3.0 μT. *b*) 9.0×10^{-29} J. **23.** *a*) 180 km. *b*) 2.3×10^{-5}. **25.** 1660 km. **27.** 61 μT; 84°. **29.** +3 Wb. **31.** $(\mu_0 iL/\pi)\ln 3$.

Problemas

3. *b*) K_i/B, opuesto al campo. *b*) 312 A/m.

CAPÍTULO 36

Ejercicios

1. 100 nWb. **3.** 0.261 mH/m. **5.** *a*) 0.60 mH. *b*) 120. **7.** 7.87 H. **11.** 29.8 Ω. **13.** *a*) 4.78 mH. *b*) 2.42 ms.

13. *a*) 4.78 mH. *b*) 2.42 ms. **15.** 42 V + (20 V/s)t.
17. 12 A/s. **19.** *a*) $i_1 = i_2 = 3.33$ A. *b*) $i_1 = 4.55$ A; $i_2 = 2.73$ A. *c*) $i_1 = 0$; $i_2 = 1.82$ A. *d*) $i_1 = i_2 = 0$.
21. I. *a*) 2.0 A. *b*) Cero. *c*) 2.0 A. *d*) Cero. *e*) 10 V. *f*) 2.0 A/s. II. *a*) 2.0 A. *b*) 1.0 A. *c*) 3.0 A. *d*) 10 V. *e*) Cero. *f*) Cero. **23.** *a*) 13.2 H. *b*) 0.124 A.
25. 63.2 MJ/m^3. **27.** 150 MV/m. **29.** *a*) 117 H. *b*) 0.225 mJ.
31. 12×10^{15} J. **33.** 0.123 A. **35.** 0.038 mH.
39. *a*) 89.3 rad/s. *b*) 70.3 ms. *c*) 24.1 μF. **41.** *a*) 6.08 μs. *b*) 164 kHz. *c*) 3.04 μs. **43.** *a*) No. *b*) 6.1 kHz. *c*) 16 nF.
45. *a*) 5800 rad/s. *b*) 1.1 ms. **47.** *a*) $q_m/\sqrt{3}$. *b*) $t/T = 0.152$. **49.** *a*) 6.0 : 1. *b*) 36 pF; 220 μH.
51. *a*) 180 μC. *b*) $T/8$. *c*) 67 W. **53.** (L/R) ln 2.
55. 2.96 Ω.

Problemas
9. *a*) $\mu_0 i^2 N^2/8\pi^2 r^2$. *b*) $(\mu_0 N^2 h i^2/4\pi)$ ln (b/a). **13.** *a*) Cero. *b*) $2i$.

CAPÍTULO 37

Ejercicios
1. 377 rad/s. **3.** *a*) 3750 rad/s. *b*) 23.4 Ω.
5. *a*) 39.1 mA. *b*) Cero. *c*) 32.6 mA. *d*) Suministro de energía.
11. 1.0 kV ($> \mathcal{E}_m$). **13.** *a*) 36.0 V. (*b*) 27.4 V. *c*) 17.0 V. *d*) 8.4 V. **15.** *a*) 39.1 Ω. *b*) 21.7 Ω. *c*) Capacitivo.
17. 177 Ω. **19.** *a*) 1.82 W. *b*) 3.13 W. **21.** 100 V.
25. *a*) 2.49 A. *b*) 37.4, 153, 218, 65.0, 75.0 V. *c*) $P_C = P_L = 0$; $P_R = 93.0$ W. **27.** 1.8 kV.
29. Paso arriba: 5; 4; 1.25. Paso abajo: 0.8; 0.25; 0.2. **31.** 40 V.

Problemas
1. *a*) 6.73 m/s. *b*) 11.2 ms. *c*) Inductor. *d*) 144 mH.
3. *a*) 45°. *b*) 76.0 Ω. **7.** *a*) 229.0 rad/s. *b*) 6.11 A. (*c*) 233.5, 224.5 rad/s. *d*) 0.039. **9.** *a*) 41.2 W. *b*) −16.9 W. (*c*) 43.7 W. *d*) 14.3 W. **11.** *a*) 76.4 mH. *b*) 17.8 Ω.

CAPÍTULO 38

Ejercicios
1. $r = 2.5$ cm, 10 cm. **3.** Cambio de potencial en la placa a una rapidez de 1.0 kV/s. **5.** *a*) 1.84 A. *b*) 140 GV/m · s. *c*) 460 mA. *d*) 578 nT · m. **7.** *a*) 0.84 A. *b*) Cero. *c*) 1.3 A. **9.** 2.27 pT. **15.** 5.0×10^{-21} H. **17.** 1.07 pT.
21. 100 kJ. **23.** 4.62×10^{-29} W/m^2. **25.** 78 cm.
27. *a*) 883 m. *b*) No. **29.** *a*) 6.53 nT. *b*) 5.10 mW/m^2. *c*) 8.04 W. **31.** *a*) 76.8 mV/m. *b*) 256 pT. *c*) 12.6 kW.
33. 0.043 kg · m/s. **35.** 7.7 MPa. **37.** *a*) 586 MN. *b*) 1.66×10^{-14}. **39.** $I(2 - f)/c$. **43.** 490 nm.

Problemas
3. *a*) 7.63 μA. *b*) 862 kV · m/s. *c*) 3.48 mm. *d*) 5.07 pT.
5. *a*) $\pm Eba^2/\mu_0$ en las caras paralelas al plano xy; cero en las cuatro caras restantes. *b*) Cero.
9. *a*) $\omega/k = c$; $E_m = cB_m$. *b*) $S = (E_m^2/4\mu_0 c)$ sen $2\omega t$ sen $2kx$.
11. *a*) $E = \mathcal{E}/r$ ln (b/a); $B = \mu_0 \mathcal{E}/2\pi Rr$. (*b*) $S = \mathcal{E}^2/2\pi Rr^2$ ln (b/a). **13.** (*a*) 94.3 MHz. *b*) + z; 960 nT. (*c*) 1.98 m^{-1}; 593 Mrad/s. *d*) 110 W/m^2. *e*) 678 nN; 367 nPa.
15. (*a*) 3.60 GW/m^2. *b*) 12.0 Pa. *c*) 16.7 pN. (*d*) 2.78 km/s^2.

CAPÍTULO 39

Ejercicios
3. *a*) 4.5×10^{24} Hz. *b*) 10,000 km. **5.** *a*) 515 nm; 610 nm, aproximadamente. *b*) 555 nm; 541 THz; 1.85 fs. **7.** *a*) 8.68 y. *b*) 4.4 My. **9.** 67 ps. **13.** (*a*) 38.0°. *b*) 52.9°. **15.** 1.56.
17. 1.95×10^8 m/s. **19.** 1.25. **23.** 74 m. **27.** 43 mm.
29. *a*) 405 nm. *b*) 2.37 μm. *c*) 42.5°. **33.** *a*) 72.07°. *b*) De A a B. **35.** 187 cm. **37.** *a*) Sí. *b*) No. *c*) 43°.
41. Amarillo-anaranjado. **43.** *b*) 0.80c. **45.** ± 0.0036 nm.
47. *a*) 1.66×10^{-5}. *b*) 0.83×10^{-5}. **51.** 78.9°.

Problemas
3. 22°. **5.** *b*) 0.60 mm. **7.** 750 m. **9.** *a*) $n_{\text{líquido}} < n_{\text{vidrio}}$.
11. *b*) 0.170. **13.** *b*) 60.2 μs. **15.** 59.4 m/s.

CAPÍTULO 40

Ejercicios
1. *a*) $2v$. *b*) v. **7.** 390 cm debajo de la superficie del espejo.
9. 1.7 m m^2. **11.** Seis **13.** 11.0 cm.
15. *a*) +, +40, −20, +2, no, si *b*) Plano, ∞, ∞, −10, sí *c*) Cóncavo, +40, +60, −2, sí, no. *d*) Cóncavo, +20, +40, +30, sí, no. *e*) Cóncavo, −20, +20, +0.50, no, sí. *f*) Convexo, −, −40, −18, +180, no, sí. *g*) −20, −, −, +5.0, +0.80, no, sí. *h*) Cóncavo, +8.0, +16, +12, −, sí.
19. *b*) 2.0. *c*) Ninguno. **21.** 12 cm a la izquierda de la lente.
23. 2.5 mm. **25.** *a*) 40 cm. *b*) 80 cm. *c*) 240 cm. (*d*) −40 cm. *e*) −80 cm. *f*) −240 cm. **29.** 22 cm.
31. 30 cm a la izquierda de la lente divergente; virtual; recta; $m = 1.0$. **33.** *a*) 73.6 cm en el lado de la lente lejos del espejo. *b*) Real. *c*) Recta. *d*) 0.289. 35. 2.0 mm.
37. *a*) 2.34 cm. *b*) Más pequeño. **39.** 103.

Problemas
1. $I_{\text{nuevo}} = (10/9) I_{\text{viejo}}$ **9.** *b*) Separar las lentes por $f_2 - |f_1|$. (*c*) $(f_1/f_2)^2$. **13.** *a*) 5.3 cm. *b*) 3.0 mm. **15.** 25 ms.

CAPÍTULO 41

Ejercicios
1. *a*) 0.22 rad. *b*) 12°. **3.** 2.3 mm. **5.** 650 nm.
7. 0.103 mm. **9.** 600 nm. **13.** 3.2×10^{-4}. **15.** 0°.
19. *a*) 1.21, 3.22, 8.13 m. **21.** 124 nm. **23.** *a*) 552 nm. *b*) 442 nm. **25.** 215 nm. **27.** 840 nm. **29.** 141.
31. 1.89 μm. **33.** *a*) 34. *b*) 45. **35.** 1.00 m. **37.** *a*) 88%. *b*) 95%. **39.** 588 nm.

Problemas
1. *a*) 0.253 mm. *b*) Los máximos reeplazan a los mínimos y éstos a aquellos. **7.** 643 nm. **9.** 2.4 μm.

CAPÍTULO 42

Ejercicios
1. 690 nm. **3.** *a*) 0.430°. *b*) 118 μm. **5.** *a*) $\lambda_a = 2\lambda_b$. *b*) Los mínimos coinciden cuando $m_b = 2m_a$. **7.** 173 μm.
9. 1.49 mm. **11.** *a*) 0.186°. *b*) 0.478 rad. *c*) 0.926. **13.** 5.07°.
15. *a*) 0.137 mrad. *b*) 10.4 km. **17.** 51.8 m.
19. 1400 km. **21.** 15 m. **23.** *a*) 6.8°. *b*) No existe un mínimo. **25.** $\lambda D/d$. **27.** *a*) Tres.
29. *a*) Nueve. *b*) 0.255.

Problemas

1. 24.4 mm. **3.** (*b*) 0, 4.493, 7.725 rad, etcétera
c) − 0.50, 0.93, 1.96, etc. **5.** *b*) 70 μm.
c) Tres veces el diámetro de la luna **7.** (*a*) 5.0 μm. (*b*) 20 μm.

CAPÍTULO 43

Ejercicios

1. (*a*) 3.50 μm. (*b*) 9.69°; 19.7°; 30.3°; 42.3°; 57.3°.
3. 523 nm. **5.** (*a*) 6.0 μm. (*b*) 1.5 μm.
(*c*) $m = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9$. **7.** 400 nm $< \lambda <$ 635 nm.
9. Tres. **15.** 470 nm $< \lambda <$ 560 nm. **17.** 491.
19. 3650. **21.** 9.98 μm. (*b*) 3.27 mm.
23. (*a*) 0.032°/nm; 0.077°/nm; 0.25°/nm.
(*b*) 40,000; 80,000; 120,000. **25.** 2.68°. **27.** 26 pm; 39 pm.
29. 49.8 pm. **33.** 0.206 nm.

Problemas

3. *b*) A la mitad entre los máximos principales. *c*) $I_m/9$.
7. *a*) $a_0/\sqrt{2}$; $a_0/\sqrt{5}$; $a_0/\sqrt{10}$; $a_0/\sqrt{13}$; $a_0/\sqrt{17}$.

CAPÍTULO 44

Ejercicios

1. (*a*) $-y$. (*b*) $E_x = 0$; $E_y = 0$; $E_z = -cB$ sen $(ky + \omega t)$.
c) Polarizado linealmente; dirección z. **3.** (*a*) 2.14 V/m.
b) 20.3×10^{-12} Pa. **5.** 1/8. **7.** 27/128. **9.** 15.8 W/m^2.
11. *a*) 53.1°. *b*) Sí, ligeramente **13.** 55°31′ to 55°46′.
15. *a*) Gira el plano de polarización 90°.
b) Invierte la dirección de la polarización circular.
c) La luz permanece no polarizada.

Problemas

1. *a*) 0.16. (*b*) 0.84. **3.** $\frac{1}{2}[\cos^2(\theta/N)]^N \longrightarrow 0.5$ as $N \longrightarrow \infty$.
5. *a*) Hoja de polarización *b*) 45°.

CAPÍTULO 45

Ejercicios

1. *b*) 2.11 eV. **3.** 1.17 eV. **5.** Ultravioleta.
7. *a*) La lámpara infrarroja. *b*) 1.97×10^{20}. **9.** 91 K.
11. *a*) 1.06 mm; microonda. *b*) 9.4 μm; infrarroja.
c) 1.6 μm; infrarroja. *d*) 500 nm; visible. *e*) 0.29 nm; rayo X.
f) 2.9×10^{-41} m; rayos gamma duro. **13.** 580 mW.
15. *a*) 7650 K. *b*) 17,200 K. **17.** Cesio, litio, bario
19. *a*) No. *b*) 544 nm; verde. **21.** 172 nm. **23.** *a*) 1.17 V.
b) 641 km/s. **27.** *a*) 29.8 keV. *b*) 7.19×10^{18} Hz.
c) 1.59×10^{-23} kg · m/s = 29.8 keV/*c*. **29.** 2.95 cm/s.
31. *a*) 2.87 pm. *b*) 5.89 pm. **35.** 2.64 fm. **37.** *a*) 4.86 pm.
b) − 42.1 keV. *c*) 42.1 keV. **39.** 42.6°.
41. *a*) 588.9944 nm. *b*) 299.97 m/s. *c*) 299.94 m/s.

Problemas

1. 1.44 W. **3.** 1300 K. **5.** *b*) 6°C. **7.** *a*) 2.97×10^{20} s^{-1}.
b) 48,600 km. *c*) 281 m. *d*) 5.91×10^{18} (m^2 · s)$^{-1}$;
1.97×10^{10} m^{-3}. **9.** *a*) 3.10 keV. *b*) 14.4 keV.
11. *b*) 1.12 keV.

CAPÍTULO 46

Ejercicios

1. *a*) 1.7×10^{-35} m. **3.** *a*) 38.8 pm. *b*) 1.24 nm.
c) 907 fm. **5.** *a*) 3510 km/s. *b*) 64.4 kV. **7.** *a*) 5.3 fm.
9. 0.025 fm. **11.** Un neutrón. **13.** *a*) 7.77 pm. *b*) 7.68 pm.
15. 5.5°. **17.** *a*) No hay haces. *b*) 47°.
19. 0.69 Hz. **21.** 76 μeV. **23.** 8.8×10^{-24} kg · m/s.
25. $\lambda/2\pi$. **27.** *a*) 1.1×10^{-20} kg · m/s. *b*) 19 MeV.
29. *a*) 3.0×10^{-5}. *b*) 2.5×10^{-7}.

Problemas

1. 5.07 eV.

CAPÍTULO 47

Ejercicios

1. *a*) 1900 MeV. *b*) 1.0 MeV; no. **3.** 88.3 eV.
5. *a*) 6.2×10^{-41} J. *b*) 1.0×10^{-20}. *c*) 3.0×10^{-18} K.
7. *a*) 8.74 keV. *b*) 1.01×10^{-22} kg · m/s. *c*) 98.5 pm.
9. *a*) $x = Nl/2n$, $N = 1, 3, 5, \ldots, (n-1)$.
b) $x = Nl/n$, $N = 0, 1, 2, \ldots, n$. **13.** 656.3 nm; 486.1 nm; 434.1 nm; 410.2 nm; 397.0 nm. **15.** 3.40 eV.
17. *a*) $n = 5 \longrightarrow 3$. *b*) Paschen. **19.** 66 neV; $E_2 = 3.4$ eV.
27. *b*) 1013 nm; 364.6 nm. *c*) Ultravioleta, visible, infrarrojo.
29. *b*) n^2. *c*) n. *d*) $1/n$. *e*) $1/n^3$. *f*) $1/n$. *g*) $1/n^4$.
h) $1/n^4$. *i*) $1/n^2$. *j*) $1/n^2$. *k*) $1/n^2$.
31. *a*) 30.4 nm; 292 nm; 1055 nm.
b) 823 THz; 366 THz; 206 THz. **33.** *a*) 2150 nm^{-3}; cero.
b) 291 nm^{-3}; 10.2 nm^{-1} **35.** 1.85.
37. *a*) 3, 2, 1, 0, − 1, − 2 , − 3 $\hbar$. *b*) − 3, − 2, − 1, 0, 1, 2, 3 μ_B. *c*) 30.0°; 54.7°; 73.2°; 90.0°; 106.8°; 125.3°; 150.0°.
d) $\sqrt{12}\,\hbar$. (*e*) $\sqrt{12}\,\mu_B$. **41.** *a*) $0.764a_0$; $5.236a_0$.
b) 0.981 nm^{-1}; 3.61 nm^{-1}. **43.** $n = 4$; $l = 3$;
$m_l = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$; $m_s = \pm \frac{1}{2}$. **45.** $n \geq 5$;
$l = 4$; $m_s = \pm \frac{1}{2}$. **47.** 1, 0, 0, $\frac{1}{2}$; 1, 0, 0, $-\frac{1}{2}$.
49. Todas las afirmaciones son verdaderas.

Problemas

1. 18.1, 36.2, 54.3, 66.3, 72.4 μeV. **3.** (*b*) 0.0006. (*c*) 0.0003.
5. $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$. **7.** (a) 0.284 pm. (*b*) 2.53 keV. (*c*) 0.490 nm.
11. 1.5×10^{-15}. **13.** 0.439. **15.** 0.0527.

CAPÍTULO 48

Ejercicios

3. 9.84 kV. **5.** *a*) 24.8 pm. *b*) Sin cambio. *c*) Sin cambio.
7. 2.1 keV. **9.** 49.6 pm; 99.2 pm; 99.2 pm. **11.** *a*) 19.7 keV; 17.5 keV. *b*) Zr o Nb. **15.** *a*) 2, 0, 0, + $\frac{1}{2}$.
b) $n = 2$; $l = 1$; $m_l = 1, 0, -1$; $m_s = \pm \frac{1}{2}$.
17. Sólo el argón permanecerá como gas inerte. **19.** *a*) 1.84; 2.26.
(*b*) 0.167; 0.119. **23.** 72 km/s^2. **25.** 5.64 cm.
27. 2.0×10^{16} s^{-1}. **29.** 3.2×10^7. **31.** 9.0×10^{-7}.
33. *a*) Ninguno. *b*) 240 J. **35.** *b*) 7.33 μm. *c*) 73.7 W/cm^2.
d) 2.6 MW/cm^2.

Problemas

1. *a*) 5.72 keV. *b*) 86.8 pm, 14.3 keV; 217 pm, 5.72 keV.
5. *a*) 2.1 meV. *b*) 2.2 nm. **7.** *b*) − 83.3 eV. *c*) 28.9 eV.
9. 4.74 km.

CAPÍTULO 49

Ejercicios

3. 5.90×10^{28} m^{-3}. **5.** *a*) 0.90. *b*) 0.69. *c*) Sodio.
7. *a*) 1.00; 0.986; 0.500; 0.014; cero. *b*) 700 K. **9.** 5.53 eV.
11. 65.4 keV. **17.** 234 keV. **21.** 201°C.
23. *a*) 5.86×10^{28} m^{-3}. *b*) 5.51 eV. *c*) 1390 km/s.
d) 524 pm. **25.** *a*) 52.1 nm. *b*) 202. **27.** *a*) 1.5×10^{-6}.
b) 1.5×10^{-6}. **29.** *a*) 5.0×10^{21} m^{-3}. *b*) 1.7×10^5.
31. 46 nm. **33.** aislante, ninguno −; ext. semi., donador, n;

int. semi., ninguno, −; conductor, ninguno, −; conductor, ninguno, −; ext. semi., aceptor, *p*. **35.** 20 GΩ; 90 Ω. **37.** *a*) 230 nm. *b*) Ultravioleta. **39.** Opaco.

Problemas

1. 3. **3.** *a*) 20 kJ. *b*) 200 s. **5.** *a*) Puro: 2.8×10^{-10}; dopado: 0.034. *b*) 0.93. **7.** *b*) 4.9×10^{8}.

CAPÍTULO 50

Ejercicios

1. 15.7 fm. **3.** 26 MeV. **5.** 27. **7.** 13 km. **9.** 8.79 MeV. **13.** 670 keV. **15.** *a*) 7.289 MeV. *b*) 8.071 MeV. *c*) − 91.10 MeV. **17.** 2.53 TJ. **19.** 280 d. **21.** *a*) 64.2 h. *b*) 0.125. *c*) 0.0749 **23.** *a*) $7.57 \times 10^{16}\ s^{-1}$. *b*) $4.95 \times 10^{16}\ s^{-1}$. **25.** 3.84×10^{21}. **27.** (*a*) 59.5 d. *b*) 1.18. **29.** 87.8 mg. **33.** $Q_3 = -9.460$ MeV; $Q_4 = 4.679$ MeV; $Q_5 = -1.326$ MeV. **35.** 1.17 MeV. **37.** *a*) 874 fm. *b*) 6.4 fm. *c*) No. **39.** 1.02 mg. **41.** 13 mJ. **43.** 39.4 μCi. **43.** 5.33×10^{22}. **47.** *a*) 2.03×10^{20}. *b*) 2.78×10^{9} Bq. *c*) 75.1 mCi. **49.** 2.83 Gy. **51.** 1.78 mg. **53.** − 1.855 MeV. **61.** *a*) 7.19 MeV. *b*) 12.0 MeV. *c*) 8.69 MeV.

Problemas

1. *a*) 0.390 MeV. *b*) 4.61 MeV. **3.** *a*) 4. *b*) 148 neV. *c*) 8.38 m. *d*) Región de radio. **7.** *a*) $3.65 \times 10^{7}\ s^{-1}$. *b*) $3.65 \times 10^{7}\ s^{-1}$. *c*) 6.41 ng. **9.** 4.268 MeV. **11.** *b*) 960.2 keV. **13.** 730 cm^2. **15.** *b*) 27 TW.

CAPÍTULO 51

Ejercicios

1. *a*) 34 kg. *b*) 12 mg. **3.** *a*) 2.56×10^{24}. *b*) 81.9 TJ. *c*) 25,900 y. **9.** *a*) $13.9\ d^{-1}$. *b*) 4.97×10^{8}. **11.** − 23.0 MeV. **13.** 174 MeV. **15.** 231 MeV. **17.** $^{238}U + n \rightarrow {}^{239}U \rightarrow {}^{239}Np + e$; $^{239}Np \rightarrow {}^{239}Pu + e$. **19.** 548 kg. **23.** 1.6×10^{16}. **25.** 566 W. **27.** 1.72 Gy. **31.** 450 keV. **33.** *a*) 170 kV. **37.** *a*) 4.0×10^{27} MeV. *b*) 5.1×10^{26} MeV. **39.** 4.5 Gy. **41.** *a*) 4.1 eV/átomo *b*) 9.0 MJ/kg. *c*) 1500 y. **45.** $K_\alpha = 3.52$ MeV; $K_n = 14.07$ MeV. **47.** *a*) 1000 km/s. *b*) 2.0 μm.

Problemas

1. *a*) 253 MeV. **3.** *a*) 44 kilotón. **5.** 1.4 MeV. **7.** *b*) 2.28×10^{42} J. *c*) 185 My. **9.** *a*) B; 5.19*N*. MeV. *b*) A: $^1/_2N^3H$, n; B: $^1/_3N^1H$, ^4He, n.

CAPÍTULO 52

Ejercicios

1. *a*) 2.4×10^{-43}. *b*) 8.1×10^{-37}. **3.** 2.84×10^{28} m. **5.** 769 MeV. **7.** 31 nm. **9.** *a*) K^+. *b*) $\bar{n}$. *c*) π^0. **11.** *b*, *d*. **13.** *a*) $\overline{\Lambda^0} \rightarrow \bar{p} + \pi^+$. *b*) $\bar{n} \rightarrow \bar{p} + e^+ + \nu_e$. *c*) $\tau^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \overline{\nu_e}$. *d*) $K^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu_\mu}$. **23.** 690 nm. **25.** *a*) 1.6 TK. *b*) 88 μs. **27.** *a*) 285,000 y; era de formación nuclear. *b*) 0.43 eV. *c*) 0.5.

Problemas

1. 31 nm. **3.** (*b*) 2.39 GK. **5.** *a*) 280 μeV. *b*) 4.4 mm. **7.** *b*) $2\pi r^{3/2}(GM)^{-1/2}$.

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS

Capítulo 25
Página 569: cortesía de Xerox Corporation. Página 572: © Fundamental Photographs. Página 583: cortesía de Seattle Times.

Capítulo 26
Página 596: cortesía de Educational Services, Inc.

Capítulo 28
Página 651: cortesía de High Voltage Engineering Co. Página 656: cortesía de la NASA.

Capítulo 30
Página 680: cortesía de Spague Electric Co. Página 658: cortesía de Lawrence Livermore Laboratory. Página 693: cortesía de Pasco Scientific.

Capítulo 32
Página 729: cortesía de D. C. Heath and Co. with Education Development Center. Página 731: cortesía del profesor J. Le P. Webb, University of Sussex, Brighton, Inglaterra. Página 732: cortesía de Argonne National Laboratory. Página 742: cortesía de Lawrence Livermore Laboratory, University of California.

Capítulo 33
Página 754: cortesía de D.C. Heath and Co. with Education Development Center.

Capítulo 35
Página 806: Mehau Kulyk/Photo Researchers. Página 811: cortesía de R. W. De Blois. Página 812: Wayne R. Bilenduke/Stone.

Capítulo 38
Página 866: cortesía de Stanford Linear Accelerator Laboratory. Página 873: cortesía de David W. DuBois. Página 874: Eurelios/Phototake. Página 878: cortesía de la NASA.

Capítulo 39
Página 884 (parte superior): cortesía de la NASA. Página 884 (parte inferior): cortesía de Astronomical Society of the Pacific.Página 885 (parte superior izquierda): cortesía de AT&T Bell Labs. Página 885(parte inferior izquierda): cortesía de la NASA. Página 885 (derecha): cortesía de Astronomical Society of the Pacific. Página 887 (parte superior): Richard Megna/Fundamental Photographs. Página 887 (parte inferior): © Colourview Publications. Página 890: cortesía de D.C. Heath and Co. with Education Development Center. Página 897: Photo Researchers. Página 898: Bell System. Página 900: cortesía de Mount Wilson and Palomar Observatories.

Capítulo 40
Página 914: cortesía de Education Development Center. Página 930: cortesía de la NASA.

Capítulo 41
Página 942: cortesía de Education Development Center. Página 943: de *Atlas of Optical Phenomena*, de Cagnet y colaboradores, Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Página 949: Richard Megnal/Fundamental Photographs. Página 952: cortesía de Bausch & Lomb. Págin 953: cortesía de Robert Guenther.

Capítulo 42
Páginas 963 y 965 (izquierda): De *Atlas of Optical Phenomena*, de Cagnet y colaboradores, Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Página 965 (derecha): De Sears, Zemansky y Young, *University Physics, 5a. ed.* Addison-Wesley, © 1976. Página 970: de *Atlas of Optical Phenomena* de Cagnet y colaboradores, Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Página 971 (parte inferior): cortesía del Dr. G.D. Shockman, según D.C. Shing, J.B. Cornett, G.D. Shockman, *J. Bacteriology,* 138:598-608, 1979. Página 972: de *Atlas of Optical Phenomena*, de Cagnet y colaboradores, Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962.

Capítulo 43
Página 981: de *Atlas of Optical Phenomena*, de Cagnet y colaboradores, Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Página 989: cortesía de W. Arrington y J.L. Katz, Rensselaer Polytechnic Institute. Páginas 992- y 993 (parte superior): Ronal R. Erickson y Museum of Holography. Página 993 (parte inferior) de Rigden, *Physics and the Sound of Music*, Scientific American, John Wiley & Sons, Inc. 1985.

Capítulo 44
Página 999: Corbis-Bettman. Página 1002 (parte superior): ©R. Mark, *Experiments in Gothic Structure*, MIT Press, Cambridge, MA, 1982. Página 1002 (parte inferior): Fundamental Photographs. Página 1003: cortesía 3Com Corporation. Página 1004: de Robert Guenther, *Modern Optics*, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

Capítulo 46
Página 1036: cortesía de G. Mateucci. Página 1038: cortesía de A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda y T. Kawasaki, Advanced Research Laboratory, Hitachi, Ltd., Kokubinju, Tokio; H. Ezawa, Departamento de Física, Universidad Gakushuin, Mejiro, Tokio. Página 1039: Manfred Kage/Peter Arnold, Inc. Página 1043: cortesía de Lawrence Berkeley Laboratory. Página 1048: cortesía de IBM.

Capítulo 47
Página 1062: cortesía de IBM. Página 1063: de Finkelnburg, *Structure of Matter*, Springer-Verlg, 1964.

Capítulo 48
Página 1090: David Job/Stone. Página 1092 (parte inferior): © AP/Wide World Photos.

Capítulo 49
Página 1119: cortesía de AT&T.

Capítulo 51
Página 1165: Roger Ressmeyer/CORBIS. Página 1166 (izquierda): cortesía de University of California, Lawrence Livermore National Laboratory. Página 1166 (derecha): cortesía Los Alamos Scienti-fic Laboratory University of California.

Capítulo 52
Página 1174: cortesía de Fermi National Accelerator Laboratory. Página 1175: ©Kyodo News International. Página 1186: cortesía de American Institute of Physics, Neils Bohr Library, Margaret Bohr Collection. Página 1187: cortesía de AT&T.

ÍNDICE

A

Aberración cromática, 892, 930
Aberración esférica, 930
Absorción, de fotones, 1093
Acción a distancia, 588
Acelerador de Van de Graaff, 651-652, 1141
Acelerador electrostático, 651-652
Acelerador(es)
  ciclotrón, 731-733
  electrostático, 651-652
Aceleradores de partículas
  betatrón, 786
  ciclotrón, 731-733
  sincrotrón, 733
Actínidos, 1083
Actividad óptica, 1008
Agua, propiedades dieléctricas polares del, 671-672
Aislantes, 571, 661-662
  en el campo eléctrico, 670-672
  estructura de banda de, 1111
Alternador, de automóvil, 783
Alternancia del espín, 1089-1090
Amplificador simple, 928-929
Amortiguamiento magnético, 793 (pregunta 25)
Amperímetro analógico, principios del, 738-740
  ampere (unidad), 664
  fuerza entre corrientes paralelas, en definición de, 758
Amplificador simple, 928-929
Analizador, 1001-1003
Ancho de banda, 1042
Ancho de par, 1121
Ángulo crítico, 897
Ángulo de Brewster, 1003
Ángulo de polarización, 1003
Ángulo(s)
  de incidencia, 890
  de desviación mínima, 893
  de reflexión, 890, 894
  de refracción, 890, 895-896
Anillo de carga uniforme
  campo eléctrico del, 593-594
  fuerza del, en carga puntual, 577-578
  potencial eléctrico del, 645
Anillos de Newton, 952-953
Aniquilación, 1188
Antena, 866
Antena de dipolo, 866-867
Anticoincidencia(s), 1023
Antineutrino, 1138-1139, 1176-1177
Antineutrón, 1178
Antipartículas, 570
Antiprotón, 1178
Aparato de anticoincidencia, 1023-1024
Aparato de Fizeau, para medir la velocidad de la luz, 888
Aparato de la gota de aceite de Millikan, 598-599
Aproximación de lente delgado, 926
Aumento angular, 928
Átomo(s), 1062
  aceptor, 1113
  bombardeo de fotones del, 1026-1028
  donador, 1112
  energía de ionización del, 1085
  estado base del, 1065-1066
  estados capa del, 1071
  estados excitados del, 1064, 1069-1072
  estados subcapa del, 1071
  estructura del, 1062-1063
    periódica, 1083-1086
    reglas de la, 1082-1083
  estructura fina de líneas espectrales del, 1090-1092
  espectro de rayos X del, 1079-1081
  espectro lineal del, 1063
  magnetismo del, 1086-1087
    y radiación atómica,
  modelo de Bohr del, 1063-1065 1090-1092
  modelo nuclear del, 602-603
  momento angular de electrones en el, 1066-1067
  momento angular y magnetismo en el, 1086-1087
  núcleo del. *Véase* Núcleo
  números cuánticos del, 1067-1071
  y transiciones ópticas, 1085-1086
Aurora boreal, 812f
Autotransformador, 858 (ejercicio 30)

B

Banda de conducción, 1111
Banda de valencia, 1111
Bardeen, John, 1119, 1121
Barión(es), 1178
Barkla, Charles, 1010
Barrera de energía potencial, 1046
Baterías, 703-704
Betatrón, 786
Binnig, Gerd, 1047, 1048
Bioluminiscencia, 886
Birrefringencia, 1005-1006
Bloch, Felix, 1089
Bobina de Helmholtz, 772 (problema 1)
Bohr, Niels, 1063, 1129
  postulados de, 1063
  principio de correspondencia de, 1064
  teoría del átomo de hidrógeno, 747 (problema 10), 1063-1065
  teoría de la fisión nuclear, 1155-1156
Bombardeo con fotones, 1026-1028
Bordes, interferencia de, 942-943
  de espesor constante, 951
Born, Max, 1044
Bradley, James, 887-888, 909 (problema 1)
Bragg, W. L., 991
Brattain, Walter, 1119
Bremsstrahlung (radiación de frenado), 1080
Brewster, David, 1004
Brújula solar, 1009

C

Calentamiento de Joule, 713
  por corriente eléctrica inducida, 780
Campo cercano, 867
Campo de radiación electromagnético, 867-868
Campo eléctrico, 588
  almacenamiento de energía en el, 685-687
  aislantes en, 670-672
  cálculo del, 589
    a partir del potencial eléctrico, 646-648
  carga puntual en la, 597-598
  conductores del
    en condiciones dinámicas, 663-666
  de cargas puntuales, 590-592
  de dipolo, 591-592
  difusión de partículas por, 602-603
  dipolo en, 600-602
  ejemplos de, 589
  en circuitos, 709-710
  flujo de, 613-616
  fuentes y sumideros de, 613
  fuera de conductor. 622-624
  fuerza de, en carga puntual, 589
    inducido, 783-786. *Véase también* Flujo magnético
  líneas del, 595-597. *Véase también* Líneas de campo eléctrico
  magnético combinado y, 730-731
    en condiciones estáticas, 662-663
  no uniforme, movimiento en, 599-600
  potencial eléctrico calculado partiendo de, 640-641
Campo escalar, 587
Campo estático, 587
Campo gravitacional, de la Tierra, 587-588
Campo magnético
  almacenamiento de energía en el, 827-829
  aplicaciones de, 753-755, 761-764
  atrapamiento de partículas en el, 733-734
  campo eléctrico combinado y, 730-731
  de dipolo, 803
    efecto del, en la corriente eléctrica, 736-740
  de la corriente eléctrica, 752-755
    en una espira, 754-755
    en paralelo, 756-758
    en un solenoide, 758-760, 762-764
    en un alambre recto, 753-754, 761-762
    en un toroide, 763
  de partículas cargadas en movimiento, 749-752
  densidad de energía del, 829-830
  efecto Hall del, 734-736
  ley de Ampère en el cálculo del, 760-761
  ley de Biot-Savart en el cálculo del, 753
    en un alambre recto, 736-738
    en una espira, 738-740
  movimiento en el, 734
  valores típicos del, 729

Campo variante en el tiempo, 587
Campo vectorial, 587
  flujo de, 612-613
Campo(s), tipos de, 587-588
Capa atómica, 1071
Capa de carga uniforme esférica, campo eléctrico de, 594-595
Capa esférica de carga, campo eléctrico uniforme de, 594-595
  fuerza sobre carga puntual en la, 579-580
  ley de Gauss aplicada a la, 618-619
Capacitancia, 679-681
  cálculo de la, 681-683
  como constante de proporcionalidad, 680
  equivalente, 683
  unidad de, 680
Capacitor esférico, 682
Capacitor(es), 679
  carga de, 714-715
  cilíndricos, 682-683
  con dieléctrico, 687-690
  de placa paralela, 681-682
  descarga de, 715-716
  en paralelo, 683-684
  en serie, 684
  esféricos, 682
Capacitores de placas paralelas, 681-682
Capacitores paralelos, 683-684
Captura de electrón, 1077 (problema 10), 1138
Captura de resonancia, 1157
Carga eléctrica, 568
  carga por contacto, 572
  carga por inducción, 572
  conservación de la, 580, 702-703
  cuantización de, 570
  densidad de la, 576-577
  distribución continua de la, 576-580
    campo eléctrico de la, 592-595
    potencial eléctrico de la, 644-646
  elemental, 570
  en superficies de conductor, 621-622
  en movimiento
    campo magnético de, 749-752 *Véase también* Campo(s) magnético(s) fuerza magnética en, 727-731
    magnetismo y, 726-727
  fuerzas de la, 569, 574-576
  neta, 569
  polarización de, 571-572
  positiva y negativa, 569
  puntual, 573. *Véase también* Carga(s) puntual(es)
  unidad de medición de la, 569
  y flujo de fluidos, analogía de, 681
Carga elemental, 570
  medición de, 598-599
Carga libre, 689
Carga superficial inducida, 670, 689
Carga(s) puntual(es), 573
  colección de potencial debido a, 642-643
  campos eléctricos de, 590-592
  en campo eléctrico, 597-598
  energía potencial de sistema de, 638-639
  potencial debido a, 641-644
Carga. *Véase* Carga eléctrica
Carnal, O., 1039
Celda unitaria, 990
CERN *(European Center for Nuclear Physics)*, investigación de la física de partículas en, 1175
Ciclo de protón-protón, 1162-1163
Ciclo del carbono, 1172 (problema 6)
Ciclotrón, 731-733
  condición de resonancia en, 732
Cinturones de radiación de Van Allen, 733
Circuito de corriente alterna
  de espira simple, 848-851
  elemento capacitivo del, 847-848
  elemento inductivo del, 846-847
  elemento resistivo del, 846
  factor de potencia del, 852
  potencia del, 851-852
Circuito *LC*, 830-833
  frecuencia de oscilaciones del, 832-833
  frecuencia natural del, 834
  oscilante, y analogía con el movimiento armónico simple, 832
  condición de resonancia del, 835
Circuito *RLC*, 834-835, 848-851
  análisis diferencial del, 850-851
  análisis gráfico del, 849-850
  análisis trigonométrico del, 849
  condición de resonancia del, 835
  de espira simple, 848-851
  frecuencia natural del, 834
  impedancia del, 849
  oscilaciones amortiguadas y forzadas en, 833-835
  potencia en, 852
Circuito(s) eléctrico(s)
  análisis de, 704-709
  campos de, 709-710
  conexión en paralelo de los, 703
  corriente eléctrica en, 701-702
  de corriente alterna, 845-859 *Véase también* Circuito de corriente alterna
  de corriente directa (CD), 701
  diferencias de potencial en los, 706
  dirección de la corriente en, 705
  fuerza electromotriz en, 703-704
  independencia de trayectoria de los, 706
  inductores de, 826-827
  LC, 830-833
  LR, 826-827
  método de diferencia potencial en el análisis de los, 705
  oscilaciones amortiguadas y forzadas en, 833-835
  RC, 713-716
  regla de la espira para analizar los, 705
  regla de la unión para analizar el, 702-703
  RLC, 834-835, 848-851
  resistencia interna de fuerza electromotriz en, 706-709
  resistencia interna de la, 706-709
  transferencias de energía en, 713
Circuitos de corriente directa (CD), 701-724
Circuitos *LR*, 826-827
Circuitos *RC*, 713-716
Circuitos. *Véase* Circuito(s) eléctrico(s)
Coeficiente de reflexión de amplitud, 952
Coeficiente de transmisión de amplitud, 952
Coeficiente de transmisión, 1047
Cohen-Tannoudji, Claude, 1027
Compton, Arthur Holly, 1021
Condición de frecuencia de Bohr, 1063-1064
Condición de frontera, 1056
Condición de resonancia
  de circuitos *RLC*, 835
Conductividad, 666
  unidad de, 666
Conductores, 571-572, 661-662
  campo eléctrico fuera de, 622-624
  cargados, potencial eléctrico de los, 649-650
  en un campo eléctrico
    en condiciones dinámicas, 663-666
    en condiciones estáticas, 662-663
  estructura de banda de, 1111
  y ley de Gauss, 621-624
Conexiones de flujo, 824
Conexiones de polarización inversa, 1116-1117
Conjugado complejo, 1044
Conservación de energía, en electrostática, 637-638
Conservación de la carga eléctrica, 580, 702-703
Constante
  de Coulomb, 573-574
  de Curie, 809
  de permeabilidad, 751
  de Planck, 1016
  de Stefan-Boltzmann, 1017-1019
  de tiempo capacitiva, 714-715
  de tiempo inductiva, 826
  de von Klitzing, 736
  dieléctrica, 671
  eléctrica, 573
  magnética, 751
Contador Geiger, 632 *(problema 10)*
Cooper, Leon N., 1121
Corral cuántico, 1062
Corriente
  alterna (Ca) 782-783, 845-846
  de deriva, 1115
  de desplazamiento, 863-864
  de difusión, 1114
  de saturación inversa, 1127 (problema 7)
  desplazamiento de, 863-864
  eléctrica. *Véase* Corriente eléctrica
  transformador de, 852-854
  y voltajes, relaciones de fase y de amplitud en, 848*t*
  eléctrica inducida, 776
Corriente eléctrica, 663, 701-703
  calentamiento de Joule por, 780
  campo magnético de la, 752-755
  comportamiento transitorio de, 702
  corrientes parásitas, 780-782
  definición de, 664
  densidad de, 664
  dirección de la, 702
  efectos del campo magnético en, 736-740
  en alambre recto, 736-738, 753-754, 761-762
  en una espira, 738-740, 754-755
  en paralelo, 756-758
  en solenoide, 758-760, 762-764
  en toroide, 763
  inducida. *Véanse también* Fuerza electromotriz; Flujo magnético
  ley de Faraday y, 776-779
  ley de Lenz y, 777-778
  unidad de, en el SI, 664
  y flujo de calor, analogía del, 667-668
  y rapidez de deriva, 664-666
Corrimiento al rojo, 900
Corrimiento de Compton, 1021-1022
Cosmología, 1173, 1186
  del Big Bang, 1187-1190
  determinación de la edad del universo en la, 1192-1194
  expansión del universo en la, 1186-1187
  formación de elementos pesados en la, 1191-1192
  interacciones de partículas en la, 1187-1190
  nucleosíntesis en la, 1190-1191
coulomb (unidad), 569
  derivación del, 569-570
Coulomb, Charles A., 573
Criterio de Lawson, 1164
Criterio de Rayleigh, 970
Cuadrupolo eléctrico, 592, 606 (ejercicio 11), 609 (problema 4)
  potencial debido al, 644
Cuantización espacial, 1067, 1087-1089
Cuarzo(s), 570, 1181-1184
curie (unidad), 1139-1140
Curie, Jacques, 1048
Curie, Pierre, 1048
  descubrimiento de la relación entre magnetismo y temperatura, 809
Curva de histéresis, 810f
Curva de la energía de amarre, 1133-1134
Chadwick, James, 1154
Chu, Steven, 1027

D

Davisson, C. J., 1036
De Broglie, Louis-Victor, 1035
Decaimiento
  alfa, 1136-1138
  beta, 1138-1139
  radiactivo, 1135-1136
  valor Q de, 1136
Densidad
  de carga, 576
  de carga lineal, 576
  de carga superficial, 576

de carga volumétrica, 576
de corriente, 664
y velocidad de desplazamiento, 664-665
de estados, 1105
de probabilidad, 1044
de probabilidad radial, 1066
Descarga de corona, 650
Desmagnetización adiabática, 809
Detector Super-Kamiokande, 1175
Deuterón(es)
en el Sol, 1162-1163
energía de enlace de, 1133-1134
formación de en nucleosíntesis de Big Bang, 1190-1191
fusión de, 580, 1164
Diagrama de fasor, 846
Diamagnetismo, 806, 809-810
Dieléctrico no polar, 671
Diferencia de potencial de Hall (voltaje de Hall), 735
Difracción, 963
combinada con interferencia de ranura doble, 971-975
de Fraunhofer, 965
de Fresnel, 965
de ranura múltiple, 981-982. *Véanse también* Rejilla(s) de difracción;
de ranura simple, 965-967
intensidad de, 967-970
de rayos x, 988-989
ley de Bragg y, 990-992
por estructuras cristalinas, 989-992
espaciamientos interplanares en, 990-991
estructura molecular revelada por, 991
en apertura circular, 970-971
frente a interferencia, 973
y teoría ondulatoria de la luz, 963-965
Diodo de túnel, 1047
Diodos emisores de luz, 1117-1118
Dipolo
eléctrico, 591
en campo eléctrico, 600-602
campo eléctrico del, 591-592
líneas de campo del, 596-597, 596f
potencial debido al, 643-644
en campo no uniforme, 1088-1089
magnético, 755, 801-803
Dipolo eléctrico, 591-592. *Véase también* Dipolo
en campo eléctrico, 600-602
energía potencial del, 601
par en, 600
líneas de campo de, 596-597, 596f
potencial debido al, 643-644
Dipolo magnético, 755, 801-803
campo magnético del, 802-803
fuerzas sobre, en campo no uniforme, 804-805
Dirac, Paul, 815
Disco de Airy, 970
Disco de carga uniforme
campo eléctrico del, 593-594
fuerza del, en carga puntual, 578-579
potencial eléctrico del, 645-646
Dispersión
de la luz, 889, 891, 1008-1009
doble, 1009-1010
por rejilla, 986-987
Dispositivos de fibra óptica, 897-898
Divisor de voltaje, 706
Divisores de haz, 953, 1023
Doblete de sodio, 1091
Dominios magnéticos, 811
histéresis y, 810-811

E

Ecuación de normalización, 1058
Ecuación de Schröedinger, 1045-1046
aplicada al efecto túnel, 1046-1049
aplicada a partícula libre, 1045-1046
Ecuación del fabricante de lentes, 923
Ecuación fotoeléctrica de Einstein, 1020-1021
Ecuaciones de los espejos, 918
obtención de las, 920-921
Ecuaciones de Maxwell
característica simétrica de, 864
como básicas para el electromagnetismo, 861-862
compatibilidad de las, con la teoría de la relatividad, 864
electromagnetismo y, 862-864
ley de Gauss de electricidad, 861-862, 865t
ley de Gauss del magnetismo, 815, 861-862, 865t
monopolos magnéticos y, 864
ondas viajeras y, 868-870
predicción de ondas electromagnéticas partiendo de, 864
velocidad de la luz según consideraciones electromagnéticas mediante, 870
y ley de Ampère, 760, 861-862, 865t
y ley de Faraday, 784, 861-862, 865t
Efecto Compton, 1021-1023
Efecto Doppler
en ondas luminosas, 899-902
prueba experimental del, 899-900
relativista, 899-900
derivación del, 900-901
transversal, 901-902
Efecto fotoeléctrico, 1019-1020
Efecto Hall, 734-736
cuantizado, 736
Efecto túnel, 1046-1049
coeficiente de transmisión en, 1047
ejemplos de, 1047-1048
Einstein, Albert
análisis del efecto fotoeléctrico por, 1020-1021
experimento de, con Haas, 1086-1087
ideas de, sobre electrodinámica de cuerpos en movimiento, 765
prueba de, de la hipótesis de la velocidad de la luz, 954-955
teoría cuántica (fotónica) de, de la luz, 1016-1018
y concepto de emisión estimulada de la luz, 1093-1094
Eje óptico, 1005
Electrodinámica cuántica, 568
Electromagnetismo, 567-568
corriente de desplazamiento en el, 863-864
ecuaciones de Maxwell de, 568, 815, 861-864. *Véase también* Ecuaciones de Maxwell
invariancia de la transformación de Lorentz, 765, 788
relatividad especial y, 764-765
y marcos de referencia, 764-765
Electrón(es)
comportamiento ondulatorio de, 1035-1038
configuración de, en elementos, 1083-1085. *Véase también* Tabla periódica
de hidrógeno atómico, 1063-1072. *Véase también* Hidrógeno atómico ligado(s), 1055
de conducción, 571, 1103-1104. *Véase también* Semiconductores; Superconductores bandas y anchos en los estados de energía, 1109-1111
densidad de estados ocupados de, 1106-1108
en metales, 1104-1105, 1108-1109
función probabilística de, 1105-1108
del núcleo, 1110
densidad de estados ocupados de, 1106-1108
densidades de probabilidad del, 1061-1062
en pozo de potencial finito, 1060-1062
energía cuantizada de, 1065 *Véanse también* Mecánica cuántica; número(s) cuántico(s)
en metales, 1104-1105, 1108-1109
en pozo de potencial infinito, 1056-1060
densidades de probabilidad de, 1057-1058
nivel de energía de, 1056-1057
números de onda de, 1057-1058
estados de energía de, 1055-1061
bandas y anchos en, 1109-1111
función probabilística de, 1105-1108
libres, 1055
momento angular de, 1066-1067
naturaleza ondulatoria de, individuales, 1040-1041
niveles de energía del, 1060-1061
números de onda de, 1057-1058
rapidez de Fermi de, 1108-1109
y carga eléctrica, 568-579. *Véase también* Carga eléctrica
y efecto fotoeléctrico, 1019-1023
Electrones de conducción, 571, 668, 1103-1104. *Véanse también* Semiconductores; Superconductores bandas
y anchos en los estados de energía de, 1109-1111
densidad de estados ocupados de, 1106-1108
en metales, 1104-1105, 1108-1109
función probabilística de, 1105-1108
Electrónica óptica, 1117-1119
Electrostática, 569
conservación de energía en, 637-638
gravitación y, 579-580
Elementos. *véase también* Núclido(s)
configuración electrónica de los, 1083-1085
orden de los, y número atómico, 1081-1082
tabla periódica de los, 1083-1086
Emisión espontánea, 1093
Emisión estimulada, 1093-1094, 1094
Energía
de amarre, 637, 1133-1134
de disociación, 637
de Fermi, 1106
de ionización, 637, 1085
de par, 1121
eléctrica, 636-639
potencial, 635-636
Enfriamiento Láser, 1027-1028
Equilibrio de torsión, 573
Equilibrio secular, 1150 (problema 5)
Equipotenciales, cerca del conductor, 662-663
Esaki, Leo, 1047
Espaciadas interplanares, 990-991
Espectro de rayos x
características del, 1080
continuo, 1079-1080
de átomos, 1079-1081
Espectro electromagnético, 883-886
región de microondas del, 884
región de ondas de radio, 884
región de rayos gamma del, 885-886
región de rayos X del, 885
región infrarroja del, 884
región ultravioleta del, 884-885
región visible del, 883-884
Espectrografía de prisma, 986
Espectrógrafo(s), 985-986
de prisma, 986
Espectrómetro de masa de Bainbridge, 746 (problema 5)
Espectros, 985-986
Espectroscopio de rejilla, 985
Espejo esférico
convención de signos utilizada en, 918-919
formación de imágenes en el, 917-918
imagen real formada por el, 918
imagen virtual formada por, 918
longitud focal del, 918
obtención de la ecuación de espejo para, 920-921
punto focal del, 918

Espejo magnético, 733-734
Espejo plano
  formación de imágenes en, 914-917
  imagen de objeto extendido en, 915-916
  inversión de imágenes en, 916-917
Espejos
  planos, 914-917
  esféricos, 917-921
Espín del electrón, 1070-1071
Espín nuclear, 1134-1135
Espira de Ampère, 760-761
Espira de corriente eléctrica
  momento dipolar magnético de, 802
  campo magnético de, 803
Espira primaria, 1158
Espira secundaria, 1158
Estado base, 1057
Estado cuántico, concepto de, 1063-1064
Estado excitado, 1057
Estrellas
  fase de gigante rojo de las, 1191-1192
  fusión termonuclear en las, 1162-1163
Estructura atómica, 1062-1063
  reglas de la, 1082-1083
Estructura cristalina
  célula unitaria de, 990
  como rejilla de difracción, 988-989
  doblemente refractiva, 1005-1006
  índices principales de refracción de, 1005-1006
  ley de Bragg y difracción de rayos X por, 990-992
  simetría cúbica de, 989-990
Estructura fina, 1090-1091
  y efecto Zeeman, 1091-1092
European Center for Nuclear Physics (CERN), investigación de la física de partículas en, 1175
Exceso de masa, 1148 (ejercicio 15)
Expansión en multipolos, 644
Expansores de haz, 938 (problema 9)
Experimento
  de Debye-Scherrer, 995 (pregunta 23)
  de dispersión doble, 1009-1010
  de Einstein-Haas, 1086-1087
  de espejo de Lloyd, 953
  de Michelson-Morley, 954-955
  de ranura doble de Young, 944
  de Stern-Gerlach, 1087-1089
Experimentos de decisión retrasada, 1025-1026
Extrañeza, 1181

F

Factor *Q*, 843 (problema 15)
farad (unidad), 680, 775
Faraday, Michael
  concepto de campo eléctrico propuesto por, 595
  concepto de capacitancia propuesto por, 680
  descubrimiento de la ley de inducción por, 775-776
  descubrimiento del diamagnetismo por, 809
  e ideas sobre espectros luminosos en campo magnético, 1091
  investigación de materiales capacitores por, 687
  dieléctricos en
  y experimentación con carga eléctrica, 625
Fase del gigante rojo, en la evolución de las estrellas, 1191-1192
Fechado por radiocarbono, 1141
Fechado radiactivo, 1141
femtómetro (unidad), 1132
Fermat, Pierre, 894
fermi (unidad), 1132
Fermi National Accelerator Laboratory,
  descubrimientos de la física de partículas en, 118
Fermi, Enrico
  y experimento con bombardeo de neutrones, 1154
  y teoría del decaimiento beta, 1138
Fermilab, 1184
Ferromagnetismo, 806, 810-811
Física de partículas, 1173-1186
  clasificación de partículas en la, 1176-1179
  interacciones en, 1173-1176
  leyes de conservación de la, 1179-1181
  modelo de cuarzo de la, 1181-1184
  modelo estándar de, 1184-1185
  terminología usada en la, 1184
Fisión nuclear, 1134. *Véase también* Fusión nuclear
Fisión nuclear, 1134, 1153, 1157-1159.
  barrera de potencial de la, 1156
  Véase también Reactores nucleares
  proceso básico de, 1154-1155
  teoría de la, 1155-1157
Fizeau, Hippolyte Louis, 888
Flujo de calor, corriente eléctrica y, analogía de, 667-668
Flujo, 612
  eléctrico, 613-616
  magnético, 776-777
  regla de la mano derecha del signo de, 869
Flujo eléctrico, 613-616
Fluorescencia, 886
Formación de elementos pesados, en la cosmología del Big Bang, 1191-1192
Formación de imágenes, 193-914
  ecuaciones de espejos en, 918
  por espejo esférico, 917-921
  por espejo plano, 914-917
  por instrumentos ópticos, 928-930
  por lentes, 923-928
  por superficies refractantes esféricas, 921-923
  reales y virtuales, 918-919
  trazado de rayos en la, 919
Formación de la cola de cometa, 873-874
Fosforescencia, 886
Fósforo, 886
Fotón(es), 1016, 1024-1025
  absorción de, 1093
  concepto de, 1018
  desarrollo teórico de, 1016-1019
  designados, 1023
  disparador, 1023
  evidencia experimental en favor de, 1023-1028
  y análisis del efecto Compton, 1021-1023
  y análisis del efecto fotoeléctrico, 1020-1021
  y efecto fotoeléctrico, 1019-1020
Fragmentos de fisión, 1154-1155
Franklin, Benjamin
  experimentos de, con carga eléctrica, 624
  clasificación de la carga eléctrica en positiva/negativa por, 568n
Frecuencia de ciclotrón, 731
Frecuencia de corte, 1020
Frecuencia natural, de circuito *RLC*, 834
Fresnel, Augustin, 963-964
Frisch, Otto, 1154
Fuente puntual, 914 (pie de página)
Fuerza(s)
  cuatro, básicas, 1173-1175
  débil, 1174
  de cargas eléctricas, 569, 574-576
  de intercambio, 1179
  electrodébil, 568, 1175
  electromagnética, 1174
  fuerte, 637-638, 1132, 1174-1175
  gravitacional, 1173-1174
  unificación de, 1175-1176
Fuerza de Lorentz, 730-731
  campos eléctricos inducidos por, 783-786
  ley de Faraday y de Lenz para, 777-779
  unidad del, 776
  y corrientes parásitas, 780-781
Fuerza electromotriz, 703-704
  inducida, 776-777
    aplicaciones prácticas de la, 782-783
    campos eléctricos de, 783-786
    de movimiento, 780-782
    diferencias de potencial y, 784-785
  resistencia interna de, 706-709
  reversibilidad de, 704
Fuerza gravitacional, 1173-1174. *Véase también* Gravedad
Fuerza magnética, sobre partículas cargadas en movimiento, 727-731
Fuerzas de intercambio, 1179
Fuerzas dieléctricas, 671
Fuerzas eléctricas, 569, 574-576
Función de onda, 1044-1045
Función de probabilidad, 1105-1108
  de Fermi-Dirac, 1107-1108
Función de trabajo, 1020, 1109-1111
Fusión Láser, 1166-11657
Fusión nuclear,1134, 1153. *Véase también* Fusión termonuclear
Fusión termonuclear, 1161-1162
  controlada, 1164-1167. *Véase también* Reactor de fusión en estrellas, 1162-1163

G

Gabor, Dennis, 992
Gähler, R., 1038
Galilei, Galileo, y explicación de la velocidad de la luz, 887
Galvanómetro, rudimentos del, 740
Gas de electrones, 668
Gauss, Karl Friedrich, 616n
Geiger, Hans, 1129
Gell-Mann, Murray, 1182
Generador
  elementos básicos del, 782-783
  impedancia del, 854
Generador homopolar, 798 (problema 8)
Gerlach, Walther, 1087
Germer, L. H., 1036
Giaver, Ivar, 1047
Gilbert, William, 811
Glashow, Sheldon, 1175
Gluon(es), 1183-1184
Gráfico de Moseley, 1081-1082
Grandes teorías unificadas, 1175
Gravitación, y electrostática, 579-580
Goudsmit, Samuel, 1070

H

Hahn, Otto, 1154
Hall, Edwin, 734
Heaviside, Oliver, 861
Heisenberg, Werner, 1042
henry (unidad), 775, 823
Henry, Joseph, 775, 823
Hertz, Heinrich, 864, 870
Hidrógeno, atómico
  estado *2p* del, 1069-1070
  estado *2s* del, 1069
  estado base del, 1065-1066
  estados cuánticos del, 1071-1072
  estados excitados del, 1069-1072
  espectro de líneas del, 1063
  densidad de probabilidad radial del, 1066
  modelo de Bohr del, 1063-1065
  niveles de energía del, 1064
Hipermetropía, 937 (ejercicio 40)
Hipótesis de De Broglie, pruebas de la, 1036-1038
  de Haas, W. J., 1086-1087
  experimento de Davisson-Germer en la, 1036-1037
  experimento de difracción en la, 1037
  experimento de Thomson en, 1036
  experimento de Tonomura en, 1037-1038
  interferencia de ranura doble, 1037-1038
Hipótesis del éter, 954-955
Histéresis, 810
  y dominios magnéticos, 810-811
Hoja de carga, campo eléctrico infinito/uniforme de, 594
  ley de Gauss aplicada a, 618
  líneas de campo de, 595, 596f
Hojas de polarización, 1001-1003
Holografía, 992-993
Horno de inducción, 781
Hubble, Edwin, 1186
Hull, G. F., 873
Huygens, Christiaan, 893
  estudios de, sobre refracción doble, 1005

I

Imagen, 913
  real, 913, 918
  virtual, 913
Imágenes de resonancia magnética, 806, 1090
Impedancia
  del circuito *RLC*, 849
  del generador, 854
Incandescencia, 886
Incidencia
  ángulo de, 890
  plano de, 890
Índice (índices) de refracción, 890
  de cristales de refracción doble, 1005
  principal, 1005-1006
Inducción, carga mediante, 572
Inductancia, 823-824
  cálculo de la, 824-826
  en circuitos *LC*, 830-835
  en circuitos *LR*, 826-827
  del solenoide, 824-825
  del toroide, 825
  y almacenamiento de energía en el campo magnético, 827-829
  y densidad de energía en el campo magnético, 829
Inductor(es), 823
  con materiales magnéticos, 825-826
  conexiones de flujo, 824
Instrumento(s) óptico(s), 928
  amplificador simple como, 928-929
  aumento angular de, 928
  microscopio compuesto como, 929
  telescopio de refracción como, 929-930
Intensidad de onda
  en difracción de ranura única, 967-970
  en interferencia de ranura doble, 946-948
Interferencia, 941
  coherente, 944-946
  constructiva, 941-942
  destructiva, 941-942
  de ranura doble, 942-944
    difracción combinada con, 971-975
    intensidad de, 946-948
    máximos de, 943
    mínimos de, 943
  de película delgada, 948-952
    bordes de espesor constante en la, 951
    cambio de fase de reflexión en, 949-950
    diferencia de trayectoria óptica frente a diferencia de trayectoria geométrica, 950
    ecuaciones de la, 950-952
    reversibilidad óptica y cambios de fase en la reflexión, 952-953
  e interferómetro de Michelson, 953-955
  franjas causadas por, 942-943
  frente a difracción, 973
  incoherente, 945-946
  máximos de, 942-943
  mínimos de, 981-984
  proveniente de películas delgadas, 948-952
  rendijas múltiples, 981-984
Interferencia de rendija doble, 942-944
  difracción combinada con, 971-975
  experimento de Young en, 944
  intensidad de la, 946-948
  máximos en la, 943
  mínimos en la, 943
  perturbaciones de onda en, adición de, 947-948
Interferencia de ranura múltiple, 981-984. *Véase también* Rejilla de difracción
Interferómetro, 953-954
  de Michelson, 953-954
    y propagación de la luz, 954-955
International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER), 1165
Inversión de población, 1094
Ion (iones), 662
Ionización, 662
Isótopos, 1131
  radiactivos, 1131, 1141
Ives, H. E. 899-900

J

Josephson, Brian, 1047

K

Kirchhoff, Gustav, 894, 1017
Klistron, 866
Kundig, Water, 901

L

Lamb, W. E. 1020
Lantánidos, 1083
Láser(s), 1092-1096
  de diodo, 1118-1119
Lawrence Livermore National Laboratory, 1166-1167
Lente(s)
  convergentes, 924
  divergentes, 924
  dos lentes, formación de imágenes por, 926-928
  formación de imágenes por, 923-928
    convención de signos usados en, 924-925
    invertidos, 924
    trazados de rayos en, 925
  magnéticos, 1039
  primer punto focal de, 924
  segundo punto focal de, 924-925
  y obtención de fórmulas de lentes delgados, 925-926
Lenz, Heinrich, 777-779
Lenz, ley de, 777-779
  leptón(es), 1176-1177
Ley
  de Ampère, 760-761
  de Biot-Savart, 753
    aplicaciones de la, 753-755
  de Bragg, 990-992
  de Brewster, 1004
  de Coulomb, 573-574
    forma vectorial de la, 574-576
    frente a ley de Gauss, 611-612
    pruebas experimentales de, 624-625
  de Curie, 809
  de desplazamiento de Wien, 1017
  de Faraday, de inducción 776-777
    aplicación de la regla de la mano derecha en, 778-779
    aplicaciones prácticas de, 782-783
    campos eléctricos inducidos y, 783-786
    en marcos inerciales de referencia, 786-788
    y dirección de corriente eléctrica, 778-779
  de Gauss, 616
    aplicación(es) de, 617-621
      a la línea de carga, 617-618
      a hoja de carga, 618
      a cascarón esférico de carga,618-619
    a distribución de carga simétricamente esférica, 619-620
    del magnetismo, 814-815
    frente a ley de Coulomb, 611-612
    pruebas experimentales de, 624-625
    y conductores, 621-624
    y flujo de campo eléctrico a través de superficie cerrada, 613
    y flujo neto por superficie cerrada, 612
    y la ley de Coulomb, 617
    y materiales dieléctricos, 688-690
  de Malus, 1002
  de Ohm, 666-667
    en nivel microscópico, 668-670
  de radiación de Planck, 1017-1019, 1187
  de reflexión, 890
    obtención de la, 893-895
  de refracción, 890
    obtención de la, 895-897
  de Snell, 890
  de Stefan-Boltzmann, 1017-1019
Leyes de conservación, en la física de partículas, 1179-1181
Libby, Willard, 1141
Línea de transmisión, 866
Línea uniforme de carga
  aplicación de la ley de Gauss a la, 617-618
  campo eléctrico de la, 592-593
  fuerza en el punto de carga de la, 577
  potencial eléctrico de, 644-645
Líneas de campo eléctrico, 595-597
  cerca de conductor, 662-663
  de superficies equipotenciales, 648-649
  flujo y, 615-616
  propiedades de, 595
  representación común de, 595-597
Líneas de campo. *Véase* líneas de campo eléctrico
Líneas espectrales, 985-986
Longitud
  contraída, 764
  de onda de Broglie, 1035
  de trayectoria óptica, 896, 925
  focal, 918
  propia, 764
Luminiscencia, 886
  tipos de, 886-887
Luz, 883-884. *Véanse también* Radiación electromagnética; Ondas electromagnéticas
  efecto Doppler de la, 899-902
  en comportamiento de partículas, 1015-1016, 1025
  espectro del blanco, 986
  estudios experimentales de la, 1023-1028
  naturaleza de la experimento de ranura doble y, 1016
  ondulatorio, 1015, 1024-1025
  polarizada, 999-1013. *Véase también* Polarización
  propagación de la, en la materia, 889
  reflexión de la, 890-891. *Véase también* Reflexión
  refracción de la, 890-891. *Véase también* Refracción
  teoría cuántica de la, 1018
  teoría fotónica de la, 886, 1016-1019. *Véase también* Fotón(es)
  teoría ondulatoria de la, 963-965
  uso de, en industrias, 1002-1003
  velocidad de la, 887-890
    en la materia, 889
  visible, 886-887
  y teoría de difracción y de ondas, 963-965. *Véanse también* Difracción Interferencia
Luz láser
  concepto de Einstein sobre, 1093-1094
  producción de, 1094-1096
  propiedades de, 1092-1093

M

Magnetismo
  atómico, 805-806, 1086-1087
  y radiación atómica, 1090-1092
  de planetas, 811-814
  nuclear, 806-807, 1134-1135
  vectores de campo en el, 727
  y partículas cargadas en movimiento, 726-727
Magnetización, 807-808
  valor de saturación de, 809
Magnetón de Bohr, 1086, 1134
Magnetostáticas, 751-752
Magnetrón nuclear, 1134
Magnetrón, 866
Malus, Etienne Louis, 1002
Marco(s) de referencia, electromagnetismo y, 764-765, 786-788
Marsden, Ernest, 1129
Materia oscura, 1194

Materiales
anisotrópicos, desde el punto de vista óptico, 1004
dicroicos, 1005
dieléctricos, 671-672
en capacitores, 687-690
y ley de Gauss, 688-690
ferroeléctricos, 661-662
lineales, 671
magnéticos, 808-811
en inductores, 825-826
óhmicos, 666-668
ópticamente isotrópicos, 1004
Máximos principales, 982-983
Máximos secundarios, 982, 984
Máximos, interferencia de, 942, 943
principales, 982-983
secundarios, 982, 984
Maxwell, James Clerk, 861
y generalización de la ley de Ampère, 862
Mecánica cuántica. *Véase también* Ondas de materia
desarrollo inicial de la, 1018
ondas de materia y, 1035-1036, 1041-1042
aplicaciones de, 1039-1040
de electrones, 1035-1038
de partículas, 1038-1039
ecuación de Schrödinger en, 1045-1046
propiedades de, 1042-1045
relaciones de incertidumbre de Heisenberg en, 1042-1043
y efecto túnel, 1046-1049
y periodicidad de elementos, 1083-1086
y naturaleza ondulatoria de electrones, 1040-1041. *Véase también* Electrón(es)
Mecánica cuántica estadística, 1103, 1104
Megaparsec (unidad), 1186
Meitner, Lise, 1154
Mendeleev, D., 1081
Mesones, 1177-1178
Metaestable, 1093
Metales
bandas de los, 1109-1114
bandas y anchos en los estados de energía de los, 1109-1111
densidad de estados ocupados de los, 1106-1108
electrones de conducción en los, 1104-1105, 1108-1109
estructura de banda de los, 1111
función de trabajo de los, 1109-1111
llenado de estados permitidos de los, 1105-1108
Microondas, 884
Microscopio(s)
compuesto, 929
de efecto túnel, 1047-1048
electrónico (de electrones), 971, 1039-1040
electrónico de barrido, 1039
reducción de difracción en el, 971
Michelson, Albert A., 888, 953
Millikan, Robert A., 598, 1032
Mínimos, interferencia de, 942, 943
Miopía, 937 (ejercicio 40)
Mlynek, J., 1039
Modelo
angular
de electrones en átomos, 1066-1067
del núcleo, 1134-1135
espín, 1070-1071
orbital, 1067
y principio de incertidumbre, 1068-1069
de Bohr
del átomo de hidrógeno, 1063-1065
y frecuencias de rayos X, 1081-1082
de cuarzo, 1181-1184
interacción entre cuarzos en, 1183-1184
de electrones libres, de conducción de electrones en metales, 668
de fisión de la gota de líquido, 1155-1156
de Thomson, 602, 1130
estándar, de partículas elementales, 1184-1185
de tetrapolo eléctrico, 644
dipolar
eléctrico, 591
inducido, 672
dipolar magnético, 755
algunos valores del, 803t
de una espira de corriente, 802
inducido, 804-805
magnético nuclear, 1134
Monopolo(s), 644
magnético, 726, 815
y ecuaciones de Maxwell, 864
Morley, E. W., 954
microfarad (unidad), 680
Moseley, H. G. J., 1081
Motor eléctrico
elementos básicos del, 783
principio del, 738-740

N

National Ignition Facility, 1167
Nebulosas, 1186
Neutrino(s), 1138-1139, 1176-1177
del electrón, 1176-1177
del muón, 1177
Neutrón(es)
difracción del, 1038-1039
en el núcleo, 1131
térmico, 1040, 1154-1155
Nichols, E. F., 873
Nivel de Fermi, 1106
Núcleo, 602
carga eléctrica del, 570, 602-603
decaimiento radiactivo del, 1135-1136
descubrimiento del, 1129-1131
fuerzas dentro del, 1132
masa del, y energías de Enlace, 1133-1134
modelo colectivo del, 1144
modelo de partículas independientes del, 1144-1145
modelos del, 1143-1145
momento angular del, 1134-1135
neutrones en él, 1131
nucleones del, 1131
protones del, 1131
radiación de ionización procedente del, 1139-1140
radio del, 1132-1133
determinación del, 603
reacciones de las partículas en el, 1141-1143
Nucleón(es), 1131
Núcleos de deuterio. *Véase* Deuteron(es)
Nucleosíntesis, 1190-1191
Núclido(s), 1131
diagrama expandido de los, 1142
gráfico de, conocidos, 1131
propiedades de algunos, 1132
Número atómico, 570, 602, 603, 1131. *Véase también* Número(s) cuánticos
origen del concepto de, 1081
y orden de los elementos, 1081-1082
y periodicidad de los elementos, 1083-1086
Número de bariones, conservación del, 1180
Número de neutrón, 1131
Número de onda, 1041
Número de protón, 1131
Número leptónico, conservación del, 1179-1180
Número(s) cuántico(s)
atómico, 1067-1069
y periodicidad de elementos, 1083-1086
espín magnético, 1071
magnético, 1067
momento angular total, 1091
momento angular y, 1067
principal, 1067

O

Objeto aterrizado, 571
Objeto virtual, 919
Obtención de la fórmula de lente delgado, 925-926
Oersted, Hans Christian, 749
Onda(s)
coherentes, 942
de luz (o luminosas), 883-884. *Veánse también* Radiación electromagnética; Luz
de materia, 1035-1036, 1041-1042. *Véase también* Ondas de materia
difracción de, 963-980. *Véase también* Difracción
electromagnéticas, 866-868. *Véanse también* Ondas electromagnéticas; Luz
incoherente, 942
interferencia de. *Véase* Interferencia
polarizada circularmente, 1006
Ondas de materia, 1035-1036, 1041-1042
aplicaciones de las, 1039-1040
ecuación de Schrödinger y, 1045-1046
electrones como, 1035-1038. *Véase también* Electrón(es)
frecuencia de, 1043-1044
función de onda de, 1044-1045
número de onda de, 1042-1043
partícula de, 1038-1039
relaciones del principio de incertidumbre de Heisenberg y, 1042-1043
Ondas de radio, 884
Ondas electromagnéticas
ecuaciones de Maxwell y, 868-870
generación de, 866-868
intensidad de, 871-872
polarización de, 999-1013. *Véase también* Polarización
presión ejercida por, 872-874
reflexión y refracción de, 891-892
transporte de energía por, 870-872
viajeras, 868-870
Ondas incoherentes, 942
Onnes, Kammerlingh, descubrimiento de la superconductividad por, 1120
Óptica
de adaptación, 930
de los rayos, 914
fibra, 897-898
física, 914. *Véase también* Óptica física
geométrica, 914. *Véase también* Formación de imágenes
onda, 914
rayo, 914
Óptica física, 914
difracción en la, 963-980. *Véase también* Difracción
interferencia de ondas, en, 941-961
Óptica ondulatoria, 914, 941. *Véanse también* Difracción: Interferencia
Oscilación de neutrino, 1177
Oscilaciones de cavidad, 865-866
Oscilaciones electromagnéticas,
amortiguadas y forzadas, 833-835
forzadas, y resonancia, 834-835
propiedades cualitativas de, 830-832
propiedades cuantitativas de, 832-833
Oscilador
electromagnético, 830
cavidad electromagnética, 865-866

P

Paquete de ondas, localización en el espacio, 1041-1042
en el tiempo, 1042
Paramagnetismo, 806, 808-809
Parámetro de distorsión, 1156
Parámetro de Hubble, 1186
Pares de Cooper, 1121
Partícula(s). *Véase también* Física de partículas
cargada. *Véase* Partículas cargadas; Carga eléctrica
clasificación de, 1176-1179
de campo, 1178-1179
elementales, 1184-1185. *Véase también* Física de partículas
mecánica cuántica de, 1035-1046. *Véase también* Electrón(es); Ondas de materia

Partículas cargadas
circulantes, 731-734
magnetismo y movimiento, 726-727, 749-752. *Véase también* Campo(s) magnético(s)
en movimiento, fuerza magnética sobre, 727-731. *Véase también* Campo(s) magnético(s)
Partículas de campo, 1178-1179
Patrón de difracción, 963-964. *Véanse también* Rejilla(s) de Difracción; Espectros
Pauli, Wolfgang, 1083, 1087
Penetración de barrera, 899
Penzias, Arno, 1187
Perdigones de alimentación de deuterio-tritio, 1166
Permeabilidad, 807
de sustancias diamagnéticas, 810t
de materiales paramagnéticos, 808-809, 808t
Permisividad
de espacio libre, 573
de materiales, 672
Phillips, William D., 1027
Picofarad (unidad), 680
Piezoelectricidad, 1048
Pion(es), 1177-1178
Placa de ondas de cuarzo, 1006
Planck, Max, descubrimiento de cuantización de la energía por, 1016
Planetas, campo magnético de los, 811-814, 813t
Plano de incidencia, 890
Plasma(s), 733
Plimpton y Lawton, experimentos de, con carga eléctrica, 625
Poisson, Simeon-Denis, 964
Polarización, 670
actividad óptica y, 1008
circulares, 1006-1008
de cargas eléctricas, 571-572
de ondas electromagnéticas, 999-1001
analizadores y polarizadores en, 1001-1003
dirección de, 1000
hojas causantes de, 1001-1003
lineal, 1000
plano de, 1000
por reflexión, 1003-1004
por dispersión, 1008-1010
uso industrial de la, 1002-1003
y refracción doble, 1004-1006
Polarización plana, *1000*
Polarizadores, 1001-1003
Polaroid, 1001
Polos magnéticos, 727
Portadores de mayoría, 1112
Portadores de minoría, 1112
Positrón, carga de, 570
Potencia de resolución, de reticulado, 987-988
Potencial de detención, 1019
Potencial eléctrico, 639-640
cálculo de, a partir del campo eléctrico, 640-641
de conductores cargados, 649-650
campo eléctrico calculado partiendo del, 646-648
Poynting, John Henry, 870
Pozo de potencial, 1055-1056
finitos, 1060-1061
infinitos, 1056-1060
niveles de energía de los, 1056-1057
densidades de probabilidad de los, 1057-1058
Pozo infinito, 1056
Presión de radiación, 872-874
medición de la, 873
y formación de cola de cometa, 873-874
Priestly, Joseph; experimentos de, con carga eléctrica, 625
Primera ley de Kirchhoff, 702-703
Princeton Plasma Physics Laboratory, 1165
Principio
de Babinet, 979 (problema 2)
de combinación de Ritz, 1075 (ejercicio 25)
de correspondencia, 1058, 1064
de energía mínima, 1033
de exclusión de Pauli, 1083
de Fermat
en la obtención de la ley de reflexión, 894-895
en la obtención de la ley de refracción, 896
de Huygens
en la obtención de la ley de reflexión, 893-894
en la obtención de la ley de refracción, 895-896
de incertidumbre de Heisenberg, 1042-1043
de incertidumbre, momento angular y, 1068-1069
del número cuántico, 1083
Proceso r, 1192
Proceso s, 1192
Producción de pares, 1188
Protón(es), 1131
Proyecto de fusión láser NOVA, 685, 1166
Puente de Wheatstone, 723 (problema 12)
Punto cercano, 928
Punto de Poisson, 964
Punto focal
de lente, 924-925
de espejo, 918
Puntos de Laue, 989
Purcell, Edward, 1089

Q

Quark
cima, 1184
encanto, 1184
inferior, 1184
Quimioluminiscencia, 886

R

rad (unidad), 1140
Radiación
atómica, 1090, 1092
cósmica de fondo de microondas, 1186-1187
de cavidad, 1071
de dipolo eléctrico, 867
electromagnético, 886, 867-868
como radiación térmica, 1016-1019
de ionización, 1139-1040
unidades de, 1139-1140
y efecto Compton, 1021-1023
y efecto fotoeléctrico, 1019-1021
térmica, 886, 1017
investigación experimental de la, 1016-1019
propiedades de la, 1017-1019
Radiactividad natural, 1140-1141
Radiancia espectral, 1017
Radio de Bohr, 1062
Radionúclidos, 1131
Radón, 1140
Rapidez de deriva y densidad de corriente, 664-666
Rapidez de Fermi, 1108-1109
Rayo
e, 1005
extraordinario, 1005
incidente, 890
o, 1005
ordinario, 1005
reflejado, 890
refractado, 890
Rayo(s)
gamma, 885-886
ultravioleta, 884-885
infrarrojos, 884
paraxiales, 918, 921
X, 885, 988-989
y numeración de elementos, 1080
Reacción de deuterón-deuterón, 1164
Reacción de deuterón-tritón, 1164
Reacciones nucleares, 1141-1143. *Véase también* Reactores nucleares
difusión elástica en las, 1142
dispersión inelástica en, 1142
endotérmica, 1142
energía umbral de, 1142
exotérmicas, 1142
Reactancia capacitiva, 848
Reactancia inductiva, 847
Reactor de fusión, 1164-1167
componente poloidal de, 1164-1165
reacciones del, 1164
confinamiento inercial del, 1166-1167
confinamiento magnético, 1164-1166
condiciones del, 1164
tokamak, 1164-1166
campo toroidal de, 1164-1166
Reactor de Prueba de Fusión de Tokamak, 1165
Reactores de agua presurizada, 1158
Reactores nucleares
acumulación de desechos radiactivos de los, 1159
agua presurizada de los, 1158
naturales, 1159-1161
operación crítica de los, 1158
parámetro de factores de multiplicación de los, 1157-1158
principios básicos de los, 1157-1159
problema de energía de los neutrones en los, 1157
problema de fuga de neutrones en los, 1157
problemas de la captura de electrones en los, 1157
reacción en cadena de, 1157
tiempo de respuesta y nivel de potencia en los, 1158
varillas de control de los, 1158
Rectificador de diodo, 1116-1117
Reflector de esquina, 892
Reflexión
ángulo de, 890, 894
de la luz, 890-891
de ondas electromagnéticas, 891-892
difusa, 891
interna total, 892, 897-899
frustrada, 898-899
ley de, 890, 893-895
polarización por, 1003-1004
Refracción
ángulo de, 890, 895-896
de la luz, 890-891
de ondas electromagnéticas, 891-892
doble, 1004-1006
índice de, 890-891
ley de, 890, 895-897
proveniente de superficies esféricas, 921-923
Regla de espira, 705
Regla de la mano derecha
aplicada al signo de flujo, 869
aplicada en la ley de inducción de Faraday, 778-779
Regla de unión, 702-703
Reglas de selección, 1085
Reid, A., 1036
Rejilla de reflexión, 985
Rejilla(s) de difracción, 981-982
ancho de máximos que usan, 982-983
de resaltado, 985
dispersión de, 986-987
estructura cristalina como, 988-992. *Véase también* Difracción por rayos X
intensidad de líneas, y difracción de ranura características de, 990
máximos secundarios de la, 984
potencia de resolución de la, 987-988
realización de, 985
Reloj a base de Cesio, tecnología del, 1027
rem (unidad), 1140
Resistencia de Hall, 736
Resistividad, 666
de semiconductores, 1112
variaciones de temperatura de la, 668
Resistores
en paralelo, 710-711
en serie, 711
Resonancia magnética nuclear, 806, 1089-1090
Reversibilidad óptica, y cambios de fase en la reflexión, 952-953
Roemer, Ole, 887, 909 (problema 2)
roentgen (unidad), 1140

Rohrer, Heinrich, 1047, 1048
Rompimiento magnético, 781
  regla de interacción de los, 727
Rowland, Henry, 749
Rubbia, Carlo, 1175
Ruptura, 662, 671
Ruska, Ernst, 1039, 1048
Rutherford, Ernest
  experimentos de dispersión de partículas alfa de, 602-603
  descubrimiento del núcleo atómico por, 1129-1131
  como fundador de la física atómica y nuclear, 603

S

Salam, Abdus, 1175
Scully, M. O., 1020
Schrieffer, J. Robert, 1121
Schrödinger, Erwin, 1044, 1045
Segunda ley de Kirchhoff, 705
Selector de velocidad, 730-731
Semiconductor de óxido metálico, 1120
Semiconductores, 662, 1111
  coeficiente de temperatura de resistividad de los, 1112
  estructura de banda de, 1111
  de tipo *n*, 665, 1112
  de tipo *p*, 1112, 1113
  densidad de portadores de carga en los, 1111-1112
  dispositivos que usan, 1114-1116
  dopados, 1112-1114
  en diodos láseres, 1118-1119
  en optoelectrónica, 1117-1119
  en rectificador de diodo, 1116-1117
  en transistores, 1119-1120
  extrínsecos, 1112
  intrínsecos, 1112
  resistividad de los, 1112
  unión *pn*, 1114-1116
Serie de Balmer, 1063
Shockley, William, 1119
siemens (unidad), 666
sievert (unidad), 1140
Simetría cúbica, 989-990
Sincrotrón, 733
Sistema detector CDF, 1174
Sol, fusión termonuclear en el, 1162-1163
Solenoide, 758
  campo magnético de, 758-760
  inductancia de, 824-825
Sólidos, conductividad eléctrica de, 1103-1104
Stanford Linear Accelerator, 866f
Stefan, Josef, 1017
Stern, Otto, 1087
Stilwell, G. R., 899-900
Strassmann, Fritz, 1154
Subcapa atómica, 1071
Supercapacitores, 683
Superficie gaussiana, 616
  y aplicación de la ley de Gauss, 617
Superficies equipotenciales, 648-649
Superficies esféricas de refracción, 921-923
Superconductores, 662, 1120-1122
Superposición, principio de
  aplicado al campo eléctrico de cargas puntuales, 590
  aplicado a fuerzas eléctricas, 575

T

Tabla periódica, 1083-1086
Telescopio de refracción, 929-930
  aberración cromática del, 930
  aberración esférica del, 930
  campo visual del, 930
  de Hubble, 930
  óptica adaptativa de, 930
  Potencia de incidencia luminosa del, 930
Temperatura crítica, 1120
Temperatura de Curie, 810
Tensión electrostática, 698 (problema 15)
Teoremas de capa electrostática, 579
Teoría
  BCS, 1121
  de Bardeen-Cooper-Schrieffer, 1121
  de todo, 1175
  electromagnética, desarrollo de la, 568, 568f
  especial de relatividad
    en el desarrollo de la teoría electromagnética, 568
    y marcos de referencia en electromagnetismo, 764-765, 786-788
tesla (unidad), 729
Tetrapolo eléctrico, 592, 606 (ejercicio 11), 609 (problema 4)
  potencial debido al, 644
Thomson, George P., 1036
Thomson, J. J., 602
  modelo atómico de, 1130
Tiempo propio, 900
Tierra
  campo magnético de la, 725-727, 811-813
  registro geológico del campo magnético de la, 812-813
  y cinturones de radiación de Van Allen, 733
Tierras raras, 1083
Tokamak, 1164-1166
Tonomura, A., 1037-1038
Toroide, inductancia de, 825
Transformación de Lorentz, e invariancia de las leyes del electromagnetismo, 765, 788
Transformador, 852-854
  de paso, 853
Transistores, 1119-1120
  de efecto de campo, 1119-1120
  unión de, 1119
Transitorios, 846
Trazado de rayos
  en imágenes de espejo esférico, 919-920
  en imágenes de lentes, 925
Tren de ondas finito, 945
Triboluminiscencia, 886-887
Tritio, 580
Tritón, 1164

U

Uhlenbeck, George, 1070
Unidad de masa atómica, equivalente de energía de la, 1133
Universo
  determinación de edad del, 1192-1194
  expansión del, 1186-1187
  teoría de Big Bang de formación del, 1187-1192

V

Valor *Q*, de decaimiento radiactivo, 1136
Van de Graaff, Robert J., 651
Van de Meer Simon, 1175
Vector de Poynting, 870-872
Velocidad de la luz, 887-890
  en la materia, 889, 889t
  medición histórica de la, 887-888, 888t
Voltaje, 639
Voltímetro, principio de analogía del, 740
Von Klitzing, Klaus, 736
Von Laue, Max, 989

W

weber (unidad), 776
Weinberg, Stephen, 1175
Wheeler, John, teoría de fisión nuclear de, 1155-1156
Wien, Wilhelm, 1017
Wiles, Andrew, 894
Wilson, Robert, 1187

Y

Young, Thomas, 944
  estudios de polarización de, 1002

Z

Zeeman, Pieter, 1091
Zeeman, efecto de, 1091-1092
Zeilinger, A., 1038
Zona de agotamiento, 1115
Zweig, George, 1182

UNAM
BIBLIOTECA
REGIONAL
OBERA
412884
S. T.

ALGUNOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$=$	es igual	∞	infinito
$\approx$	es aproximadamente igual	lim	el límite de
$\neq$	no es igual	$\sum$	la suma de
$\equiv$	es idéntico, se define como	$\int$	la integral de
$>$	es mayor que	Δx	el cambio o la diferencia de x
$\gg$	es mucho mayor que	$\lvert x \rvert$	el valor o magnitud absoluta de x
$\geq$	es mayor o igual que	x_{pro}	el valor promedio de x
$<$	es menor que	$x!$	x factorial
$\ll$	es mucho menor que	$\ln x$	logaritmo natural de x
$\leq$	es menor o igual que	$f(x)$	una función de x
$\sim$	es del orden de magnitud de	df/dx	la derivada de f respecto a x
$\propto$	es proporcional a	$\partial f/\partial x$	la derivada parcial de f respecto a x

PREFIJOS SI

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deka	da	10^{-24}	yocto	y

EL ALFABETO GRIEGO

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gama	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Upsilon	Υ	υ
Epsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Phi	Φ	ϕ, φ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

ALGUNAS TABLAS

Tabla	*Capítulo*	*Página*
Unidades básicas del SI	1	2
Prefijos del SI	1	2
Algunas velocidades terminales del aire	4	72
Coeficientes de fricción	5	97
Inercias rotacionales (figura)	9	185
Repaso y comparación de la dinámica traslacional y rotacional	10	221
Comparación de las magnitudes traslaciones y rotaciones relacionadas con la energía	11	244
Variación de g_0 con la altitud	14	304
Algunas velocidades de escape	14	310
Algunas densidades	15	333
Viscosidades de algunos fluidos	16	361
La velocidad del sonido	19	431
Algunas intensidades y niveles del sonido	19	433
Ecuaciones de la transformación de Lorentz	20	459
Transformación de velocidades de Lorentz	20	461
Algunos coeficientes promedio de expansión lineal	21	486
Algunas rapideces moleculares a temperatura ambiente	22	500
Algunas conductividades térmicas y valores *R*	23	518
Capacidades caloríficas de algunas sustancias	23	524
Algunos calores de transformación	23	525
Capacidades de calor molar de los gases	23	532

ALGUNAS UNIDADES Y ABREVIATURAS

ampere	A	kelvin	K
atmósfera	atm	año-luz	ly
unidad térmica inglesa	Btu	litro	L
caloría (física)	cal	metro	m
caloría (nutricional)	Cal	milla	mi
coulomb	C	minuto	min
día	d	mol	mol
grado Celsius	°C	newton	N
grado Fahrenheit	°F	ohm	Ω
electrón-volt	eV	pascal	Pa
farad	F	libra	lb
pie	ft	radián	rad
gauss	G	revolución	rev
gramo	g	segundo	s
henry	H	tesla	T
hertz	Hz	unidad de masa atómica unificada	u
caballo de fuerza	hp	volt	V
hora	h	watt	W
pulgada	in.	weber	Wb
joule	J	año	y

VOLUMEN DOS

FÍSICA

FÍSICA

Ésta es la quinta edición del libro clásico de David Halliday y Robert Resnick. Durante 40 años ha sido un texto indispensable para los cursos introductorios de física basados en el cálculo y ha gozado de gran prestigio por su exposición clara y exhaustiva.

En esta edición se ha procurado mejorar su accesibilidad sin sacrificar el nivel ni el rigor de su contenido. Los autores reescribieron gran parte del texto para darle mayor fluidez y facilitarle así al estudiante la introducción a temas nuevos. Se incluyeron además un mayor número de ejemplos prácticos y problemas para resolver por computadora.

Se realizaron también importantes cambios en el aspecto pedagógico y en el orden de los capítulos. Quienes estén familiarizados con la cuarta edición encontrarán los mismos temas, sólo que en otro orden. Al efectuar estas revisiones se solicitó la opinión de los usuarios de ediciones anteriores, así como los avances en la investigación dedicada a la didáctica de la física.

El texto viene en dos volúmenes. El primer volumen aborda la cinemática, la mecánica y la termodinámica; el volumen 2 incluye el electromagnetismo, la óptica, la física cuántica y sus aplicaciones.

Otras obras de los autores publicadas por CECSA:

- Fundamentos de física, vol. 1
- Fundamentos de física, vol. 2
- Física, vol. 1

GRUPO EDITORIAL PATRIA

www.editorialpatria.com.mx

ISBN 978-970-24-0326-5

978-970-24-03265